

運輸省港湾技術研究所

港湾技術研究所 報告

REPORT OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH
INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT

VOL. 29 NO. 3 SEPT. 1990

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第29巻 第3号 (Vol. 29, No. 3), 1990年9月 (Sept. 1990)

目 次 (CONTENTS)

1. 短フェッチ海域の波浪推算モデル
..... 後藤智明・末次広児・永井紀彦..... 3
(Wave Hindcast Model for Short Fetch Sea
..... Chiaki GOTO, Koji SUETSUGU and Toshihiko NAGAI)
2. ベイズ型モデルを用いた海洋波浪の非線型核関数の数値的推定
..... 橋本典明..... 27
(Estimation of Nonlinear Kernel Function of Weakly Nonlinear,
Quasi-Gaussian Irregular Sea Waves..... Noriaki HASHIMOTO)
3. 海水を練り混ぜ水とした海洋コンクリートの耐久性に関する研究
..... 福手 勤・山本邦夫・濱田秀則..... 57
(Study on the Durability of Concrete Mixed with Sea Water
..... Tsutomu FUKUTE, Kunio YAMAMOTO and Hidenori HAMADA)
4. 港の景観構成に関する研究..... 上島顕司・加藤 寛・斎藤 潮..... 95
(A Study on Composition of Portscape
..... Kenji UESHIMA, Hiroshi KATO and Ushio SAITO)

2. ベイズ型モデルを用いた海洋波浪の 非線型核関数の数値的推定

橋本典明*

要 旨

海面を伝わる不規則な波浪は、第1近似として種々の方向に伝わる様々な周波数の微小振幅波の重ね合わせとして表現される。しかしながら、実際には非線型の性質もあり、特に浅海域においてはこれを無視することはできない。波浪の非線型性に関する研究の歴史は古く、既に多くの理論的、実験的研究が実施されている。しかしながら、従来の研究を振り返って見ると、特に現地観測データを用いた研究においては、もっぱら現地観測データにより既往の非線型理論の妥当性を検証する立場の研究が多く、必ずしも実際の現地波浪の非線型の特性を調査しているとは言い難いものが多い。これは実際の不規則な非線型波浪の特性を明確に記述し、推定し得る統計的解析法が確立していないことに起因しているものと思われる。一方では非線型・非ガウス過程を扱う時系列解析法としてバيسベクトル解析法がある。しかしながら、非線型効果がバيسベクトル上に表現されていることは間違いないが、その非線型性についてははっきりした理論モデルが存在しない場合、バيسベクトルの意味を読み取ることは難しい。したがって、より直接的に線型成分波相互間の干渉の度合い(非線型効果)を示す量が推定されるならば、実際の海洋波浪の非線型性を理解するのに有用であろう。また、このような量を推定することにより初めて現地観測データに基づいた非線型不規則波浪の数値シミュレーションが可能となる。

本報告では線型成分波相互間の2次の非線型干渉の度合いを示す量を特に非線型核関数と称し、観測されたパワースペクトルおよびバيسベクトルから、ベイズ型モデルを用いて非線型核関数を数値的に推定する方法、およびパワースペクトルに含まれる線型成分と2次の非線型成分のパワースペクトルを分離する方法について報告している。

数値シミュレーション結果によれば、ベイズ型モデルを用いた非線型核関数の数値的推定法は、線型成分波のエネルギーの卓越した周波数範囲で極めて妥当な推定値を推定し得る。また、本方法を現地観測データに適用した結果によれば本方法は現地波浪の非線型の特性を把握するのに有用であることが示されている。

キーワード：不規則波、非線型波浪、スペクトル解析

* 海洋水理部 主任研究官(波浪統計解析担当)

2. Estimation of Secondary Nonlinear Kernel Function of Weakly Nonlinear, Quasi-Gaussian Irregular Sea Waves

Noriaki HASHIMOTO*

Synopsis

As the first approximation, irregular sea waves are expressed as the superposition of infinite number of infinitesimal waves having various frequencies and propagation directions. However, nonlinear effect can not be negligible in shallow or intermediate water depth.

The studies on nonlinear effect of sea waves have been made for many years and many of the theoretical, experimental or observational studies have been reported. However, harshly reviewing the past or current experimental or observational studies on irregular waves, the standpoint of the studies was usually toward the verification of the theories by the measurement, and it may lead to the confusion of the order of things because, in a sense, the observational study should be made in an intension that the unknown or unfamiliar phenomena will be clarified. The gap of this intention may be caused by the unestablished situation of the statistical analysis method which can clearly express the nonlinear effect of the measured wave data.

On the other hand, bispectral analysis method was developed to clarify the characteristics of nonlinear and non-gaussian time series data and has been already applied to the analysis of deep or shallow water waves. However, it may be true that we feel difficulty to understand the meaning of bispectrum without the clearly established theory on nonlinear effect of the phenomena.

Therefore, in order to understand the characteristics of various wave phenomena more clearly, it is of great importance to develop a method which can directly express nonlinear effect of the real wave phenomena.

In this report, I call the quantity expressing the second order nonlinear effect "nonlinear kernel function", and propose a new method to estimate it from measured wave data. Though this problem is a kind of an incomplete inverse problem and it is impossible to estimate it in a complete form, reasonable estimates of nonlinear kernel function can be successfully estimated by the proposed method with the help of Bayesian Model and the ABIC (Akaike's Bayesian Information Criterion). Validity of the method is examined for numerical simulation data and field wave data.

Key Words: Irregular Waves, Nonlinear Waves, Spectral Analysis

* Senior Research Engineer, Marine Hydrodynamics Division

目 次

要 旨	27
1. ま え が き	31
2. パワースペクトルとバイスペクトルの定義	31
2.1 パワースペクトルの定義	31
2.2 バイスペクトルの定義	32
3. 非線型核関数とパワースペクトルおよびバイスペクトルとの関係	32
3.1 非線型核関数とパワースペクトルの関係	32
3.2 非線型核関数とバイスペクトルの関係	33
4. Tick により導かれた非線型核関数に関連する諸量の特性	34
5. ベイズ型モデルを用いた非線型核関数の数値的推定法	37
5.1 関数 $K(\omega_1, \omega_2)$ の数値的推定法	37
5.2 逐次近似法によるパワースペクトルの分離と非線型核関数の推定	39
6. 非線型核関数の数値的推定法の数値シミュレーションによる検討	40
6.1 非線型核関数の推定における格子サイズの影響	40
6.2 事前分布の条件の相違による推定値の相違に関する検討	42
7. 非線型核関数の数値的推定法の現地観測データへの適用	46
7.1 パワースペクトルおよびバイスペクトルの推定	46
7.2 海洋波浪の非線型核関数の推定結果の検討	48
8. ベイズ型モデルを用いた非線型核関数の数値的推定法に関する注釈	52
9. あ と が き	55
参 考 文 献	55
主要記号一覧表	56

1. ま え が き

海面を伝わる不規則な波浪は、第1近似として種々の方向に伝わる様々な周波数の微小振幅波の重ね合わせとして表現される。しかしながら、実際には非線型の性質もあり、特に浅海域においてはこれを無視することはできない。規則的な波浪が進行とともに変形し、複数の群波に分裂する現象、不規則な水位波形の頻度分布が正規分布からずれる現象、あるいは周波数スペクトルの高周波数側の副ピークや低周波数側のエネルギーの増大など、波浪の非線型性は多様な現象として現れる。

波浪の非線型性に関する研究の歴史は古く、多くの理論的、実験的研究が実施されている。特に規則波については各種の有限振幅波の理論が導かれ、種々の応用がなされている。また、不規則波の非線型理論についても Tick¹⁾,²⁾ に始まる2次の非線型干渉理論の研究以後、Hasselmann ら³⁾、浜田⁴⁾、増田ほか^{5),6)}、浜中ほか^{7),8)} から多くの研究者により精力的に研究が実施され、不規則波浪の非線型性についてかなり詳細な理解が得られるまでに至っている。また、現地観測により得られたデータをもとに、実際の不規則波浪の非線型性を解明しようとする試みも多く、surf beat や wave setup, wave setdown の現象等、多様な現象の特性が次第に解明されつつある。

しかしながら、従来の研究を振り返って見ると、特に現地観測データを用いた研究においては、もっぱら現地観測データにより波浪の非線型理論の妥当性を検証する立場の研究が多く、必ずしも実際の現地波浪の非線型性を調査しているとは言い難いものが多い。これは実際の不規則な非線型波浪の特性を明確に記述し、推定し得る統計的解析法が確立していないことに起因しているものと思われる。

不規則な非線型波浪の解析法としては、zero-up cross 法あるいは zero-down cross 法により定義される波高、周期を用いた波別解析法や、パワースペクトルあるいはパイスペクトル等を用いるスペクトル解析法がある。このうち、非破壊の波浪データを対象とする場合には、スペクトル解析法の方が、理論的研究との対応の上から、解析結果から現象のメカニズムを逆推定する上で、より直接的であろうと思われる。特にパイスペクトル解析法は非線型・非ガウス過程を扱う時系列解析法として開発されたこともあり、浅海波浪の非線型性の解明に有効であるとして実際に適用されている⁹⁾。しかしながら永田¹⁰⁾ が述べているように、「非線型効果がパイスペクトル上に表現されていることは間違いないが、その非線

型性について非常にはっきりした理論モデルが存在しない場合、「パイスペクトルの意味を読みとることは非常に難しい」等の難点がある。

Tick¹⁾ によって示された2重摂動法の概念に基づいて海洋波浪の非線型性を考えれば、海洋波浪の非線型性は線形成分波相互間の干渉によって説明される。この近似は破碎現象等の極めて非線型性の強い波浪現象を除いて良い近似を与える。したがって、非破碎の不規則波浪を対象とする場合、観測データを解析して線形成分波相互間の干渉の度合いを示す量が推定されるならば、海洋波浪の非線型性を理解する上で有用であろう。本報告では、この様な不規則波浪の非線型性を直接表示し得る解析法を開発する第1段階として、線形成分波相互間の2次の干渉の度合いを示す量を特に非線型核関数と称し、現地観測データから海洋波浪の非線型核関数を推定する方法について報告する。

不規則波の非線型性の解明は海岸・海洋工学の分野に残されている重要な課題の一つである。現地波浪の2次の非線型核関数の特性が明確にされることにより、近年注目を集めている wave group と長周期拘束波、浮遊式海洋構造物の係留における長周期波浪漂流力等の問題解明に何らかの手掛りを与えられるかもしれない。

2. パワースペクトルとパイスペクトルの定義

パワースペクトルとパイスペクトルの定義については日野¹¹⁾ が詳しく解説している。ここでは後の説明の便宜のために、簡単にパワースペクトルとパイスペクトルの定義を紹介することとする。

2.1 パワースペクトルの定義

いま、関数 $\eta(t)$ を時間 t に関して定常な時系列変動量とし、Fourier-Stieltjes 積分によりこれを以下のように表現する。

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dZ(\omega) e^{i\omega t} \quad (1)$$

ここに、 $dZ(\omega)$ は角周波数 ω の複素振幅を表し、角周波数 ω に関しての次の対象性がある。

$$dZ^*(\omega) = dZ(-\omega) \quad (2)$$

このとき、パワースペクトル $S(\omega)$ は、

$$\langle dZ(\omega_1) dZ(\omega_2) \rangle = \begin{cases} S(\omega_1) d\omega_1 & (\omega_1 + \omega_2 = 0) \\ 0 & (\omega_1 + \omega_2 \neq 0) \end{cases} \quad (3)$$

で定義される。ここに、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を意味する。パワースペクトルの対称性として、式(2)より次の関係式が導かれる。

$$S(\omega) = S(-\omega) \quad (4)$$

また、パワースペクトルの角周波数 ω に関する積分値は平均2乗値 $\langle \eta^2 \rangle$ に等しく、

$$\langle \eta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (5)$$

の関係がある。すなわち、パワースペクトルは平均2乗値 $\langle \eta^2 \rangle$ への Fourier-Stieltjes 成分からの寄与を表す。

有限長の離散的な時系列データをもとにパワースペクトルを推定する場合、パワースペクトルの分解能はデータ長に依存し、推定可能な周波数範囲はサンプリング時間間隔に依存して、 $0 \sim \omega_N$ (ナイキスト周波数) の周波数範囲で推定される。

2.2 バイスペクトルの定義

非線型性の強い時系列データは、通常その分布関数がガウス分布からはずれて、歪んだり尖ったりしているため、2次のパワースペクトルのみではその統計的性質を完全に記述することは不可能である。このため、3次あるいは4次などの高次のベクストルも対象にしなければならない。これらの高次のスペクトルのうち3次のスペクトルがバイスペクトルである。

バイスペクトルの定義式は、式(3)と同様に Fourier-Stieltjes 成分 $dZ(\omega)$ を用いて、次のように定義される。

$$\begin{cases} \langle dZ(\omega_1) dZ(\omega_2) dZ(\omega_3) \rangle \\ = B(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 & (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0) \\ = 0 & (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \neq 0) \end{cases} \quad (6)$$

$\eta(t)$ が実数ならば、

$$B(\omega_1, \omega_2) = B(-\omega_1, -\omega_2) \quad (7)$$

の対象性がある。また、 $\eta(t)$ が定常過程ならば次の様な対称性が得られる。

$$\begin{aligned} B(\omega_1, \omega_2) &= B(\omega_2, \omega_1) = B(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) \\ &= B(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1) = B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) \\ &= B(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) \end{aligned} \quad (8)$$

すなわち、バイスペクトルの基本的性質は、式(7)および(8)から分かるように、 $0 \sim \pi/4$ の $1/8$ 平面内にすべての値が現れ、全平面ではその共役な値も含めて12回の繰返しとなっている。これらの対称性の構造を図示したものが図-1である。図中の破線は共役な値を示している。

バイスペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ の角周波数 ω に関する積分値は $\eta(t)$ の平均立方値 $\langle \eta^3 \rangle$ に等しく、

$$\langle \eta^3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (9)$$

の関係がある。すなわち、バイスペクトルは角周波数の和が零である三つの Fourier-Stieltjes 成分が $\langle \eta^3 \rangle$ へ寄

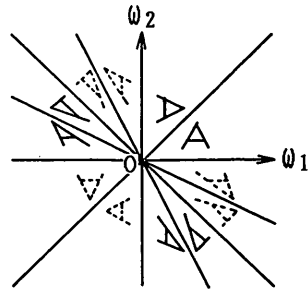


図-1 バイスペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ の対称性

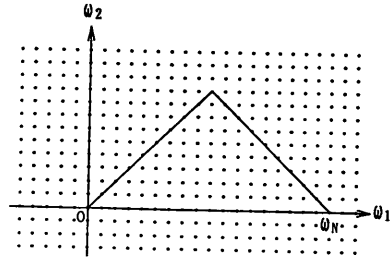


図-2 バイスペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ の定義域

与する割合を表す。

有限長の離散的な時系列データをもとにバイスペクトルを推定する場合、バイスペクトルの分解能はデータ長に依存し、推定可能な周波数範囲はサンプリング時間間隔に依存して、図-2中の三角形の領域内で推定される。

3. 非線型核関数とパワースペクトルおよびバイスペクトルとの関係

非線型核関数とパワースペクトルの基本的関係式は Tick¹⁾により導かれている。また、非線型核関数とバイスペクトルの関係式は Hasselmann^ら³⁾により導かれている。これらの関係式について以下に簡単に紹介する。

3.1 非線型核関数とパワースペクトルの関係

いま、 $\eta(t)$ が弱非線型・疑似ガウス過程に従うならば、微小パラメータ ε に関して $\eta(t)$ は次の様に摂動展開できる。

$$\eta(t) = \eta^{(1)}(t) + \eta^{(2)}(t) + \dots \quad (10)$$

ここに、 $\eta^{(n)}(t)$ は ε の n 乗のオーダーの項 ($\eta^{(n)}(t) = O(\varepsilon^n)$) である。通常、 ε は $\eta^{(n)}(t)$ と分離した形で書かれるが、ここでは後の式の展開を単純にするため $\eta^{(n)}(t)$ に含ませて表す。

ここで、式(10)の右辺の第1項 $\eta^{(1)}(t)$ はガウス過程であるとし、また、高次の項は第1項 $\eta^{(1)}(t)$ を用いて、

$$\eta^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t g^{(n)}(t-t_1, t-t_2, \dots, t-t_n)$$

$$\times \eta^{(1)}(t_1)\eta^{(1)}(t_2)\cdots\eta^{(1)}(t_n)dt_1dt_2\cdots dt_n \quad (11)$$

と表されると仮定する。このとき Fourier-Stieltjes 変換

$$\eta^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dZ^{(n)}(\omega)e^{i\omega t} \quad (12)$$

を用いれば、式(10)と(11)は次式のように変換される。

$$dZ(\omega) = dZ^{(1)}(\omega) + dZ^{(2)}(\omega) + \cdots \quad (13)$$

$$dZ^{(n)}(\omega) = \int \cdots \int G^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \times dZ^{(1)}(\omega_1)dZ^{(1)}(\omega_2)\cdots dZ^{(1)}(\omega_n) \quad (14)$$

$$(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = \omega)$$

ここに、 $G^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ は $g^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ の Fourier 変換であり、次式で表される。

$$G^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \int \cdots \int g^{(n)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \times e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \cdots + \omega_n\tau_n)} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \quad (15)$$

式(14)の積分は $\omega_1 + \cdots + \omega_n = \omega$ の条件を満たす多数の成分波の干渉により、それらの成分波の周波数の和あるいは $\omega_n' = -\omega_n$ と考えればそれらの成分波の周波数の差の成分波が発生することを意味する。

式(13)を式(3)のパワースペクトルの定義式に代入して整理すると、平均値が0のガウス過程の変動量の奇数個の積のアンサンブル平均が0になることを考慮して、

$$S(\omega) \doteq S^{(1)}(\omega) + S^{(2)}(\omega) \quad (16)$$

$$S^{(2)}(\omega) = 2 \int |G(\lambda, \omega - \lambda)|^2 S^{(1)}(\lambda) S^{(1)}(\omega - \lambda) d\lambda \quad (17)$$

(ただし、 $\omega \neq 0$)

が近似的に得られる。ここに $S^{(1)}(\omega)$ は1次のパワースペクトルすなわち自由波のパワースペクトルであり、 $S^{(2)}(\omega)$ は2次のパワースペクトルすなわち拘束波のパワースペクトルである。なお、制約条件 $\omega \neq 0$ は、現地観測データを解析する場合に、 $\eta(t)$ の平均値を $\langle \eta \rangle = 0$ としても、一般に $\langle \eta^{(n)} \rangle = 0$ と置けないことから出てくる制約条件である。

また、式(17)中の $G(\omega_1, \omega_2)$ は2次の非線型核関数であり、式(14)および(15)の形で再記すると、

$$dZ^{(2)}(\omega) = \iint G(\omega_1, \omega_2) dZ^{(1)}(\omega_1) dZ^{(1)}(\omega_2) \quad (18)$$

$$(\omega_1 + \omega_2 = \omega)$$

$$G(\omega_1, \omega_2) = \iint g(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (19)$$

で定義される。式(18)から明らかなように2次の非線型核関数は2つの自由波の単位振幅の入力により生成される拘束波の複素振幅と解釈でき、パワースペクトルに比べて

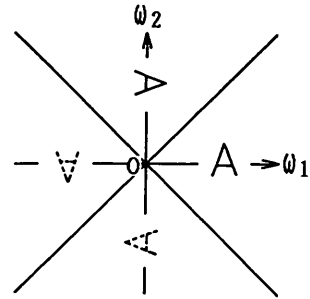


図-3 非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ の対称性

その物理的意味は明確である。以下ではこの2次の非線型核関数を特に非線型核関数と呼称することとする。

なお、 $g(\tau_1, \tau_2)$ は実関数、すなわち、

$$g(\tau_1, \tau_2) = g^*(\tau_1, \tau_2) \quad (20)$$

であり、式(19)より次の対称関係が得られる。

$$G^*(\omega_1, \omega_2) = G(-\omega_1, -\omega_2) \quad (21)$$

また、 $g(\tau_1, \tau_2)$ を τ_1 と τ_2 に関して対称とすると、

$$g(\tau_1, \tau_2) = g(\tau_2, \tau_1) \quad (22)$$

より、式(19)を用いて次の対称関係が得られる。

$$G(\omega_1, \omega_2) = G(\omega_2, \omega_1) \quad (23)$$

式(21)および(23)の対称関係を図示すると図-3のようになる。すなわち、非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ は、 $-\pi/4 \sim \pi/4$ の $1/4$ 平面内にすべての値が現れ、全平面ではその共役な値も含めて4回の繰返しとなっている。なお、図中の破線は共役な値である。

3.2 非線型核関数とパワースペクトルの関係

式(19)を式(6)のパワースペクトルの定義式に代入して整理すると、平均値が0のガウス過程の変動量の奇数個の積のアンサンブル平均が0になることを考慮して、

$$B(\omega_1, \omega_2) \doteq 2 \{ G^*(\omega_1, \omega_2) S^{(1)}(\omega_1) S^{(1)}(\omega_2) + G(\omega_1 + \omega_2, -\omega_1) S^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) S^{(1)}(\omega_1) + G(\omega_1 + \omega_2, -\omega_2) S^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) S^{(1)}(\omega_2) \} \quad (24)$$

(ただし、 $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0, \omega_1 + \omega_2 \neq 0$)

が近似的に得られる。なお、制約条件 $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0$ 、および $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ は、式(17)の制約条件 $\omega \neq 0$ と同じ理由により導かれたものである。式(24)から明らかなように、パワースペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ の1つの値には角周波数が ω_1 と $\omega_2, \omega_1 + \omega_2$ と $-\omega_1$ および $\omega_1 + \omega_2$ と $-\omega_2$ のそれぞれ2組の自由成分波相互間の3つの非線型干渉が含まれていることが分かる。すなわち式(24)の右辺第1項は角周波数が ω_1 と ω_2 の自由成分波の2次の拘束波への寄与を表し、第2項、第3項も同様に解釈できる。

非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ 、すなわちパワースペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ は一般に複素数であり、これらの量の実部は不

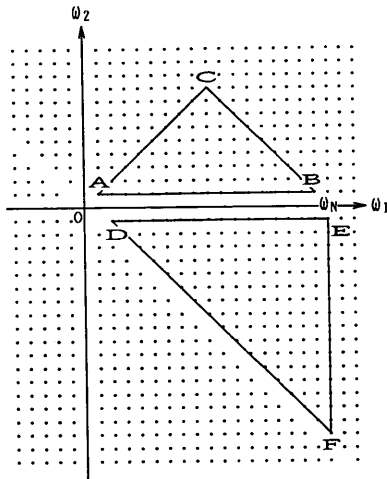


図-4 非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ の定義域

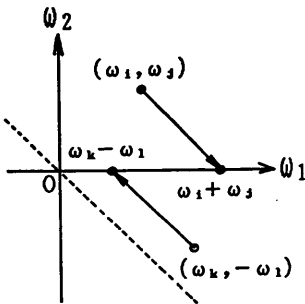


図-5 非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ の概念図

規則変動量 $\eta(t)$ の上下の非対称性に、虚部は前後の非対称性に関係付けられることが知られている⁶⁾。

なお、有限長の離散的な時系列データをもとにバースペクトル解析を実施する場合、バースペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ は図-2 に示す三角形の領域内で推定し得ることを述べたが、この領域に含まれる 2 次の非線型干渉は非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ 上では、式(24)より図-4 に示す第 1 象限および第 4 象限中の 2 つの三角形の領域内で定義される。図-5 は非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ の物理的意味を図示したものである。例えば図-5 の第 1 象限中の (ω_i, ω_j) は角周波数が ω_i と ω_j の自由波が矢線で示されている $\omega_i + \omega_j$ の角周波数の拘束波を生成することを意味しており、 $G(\omega_i, \omega_j)$ が複素数であることおよび式(28)から、 (ω_i, ω_j) 上の $G(\omega_i, \omega_j)$ の値は、角周波数が ω_i と ω_j の自由波の単位振幅の入力に対する角周波数が $\omega_i + \omega_j$ の拘束波の振幅と位相のずれの効果を表すことが分かる。第 4 象限の $(\omega_k, -\omega_i)$ の物理的意味も同様に解釈でき、非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ の第 1 象限は 2 つの自由波の周

波数の和の干渉を、第 4 象限は差の干渉を表すことが分かる。

以上に述べたように、観測して得られたバースペクトル上の 2 次の非線型性を解釈しようとする場合、図-4 に示す範囲の非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ が推定されるならば、その物理的解釈は比較的容易となることが分る。

4. Tick により導かれた非線型核関数に関連する諸量の特性

海洋波浪の非線型核関数に関する研究の歴史は古く、深海の一方方向不規則波浪を対象とした Tick¹⁾ の研究、水深を一定とした場合の浅海の一方方向不規則波浪および多方向不規則波浪を対象とした Tick²⁾ の研究をはじめとして、バースペクトルと非線型核関数の関係を研究した Hasselmann³⁾ ほか多くの研究がある。我が国においても増田⁵⁾ の深海波の 3 次までの非線型核関数の研究や同じく増田⁶⁾ の非線型核関数の虚部の研究、あるいは増田らの研究を浅海波に拡張した浜中^{7), 8)} の研究など多くの理論的研究が既に発表されている。

ここでは、不規則時系列データから非線型核関数を推定する方法について述べる前に、後の説明の便宜のために、Tick²⁾ により導かれた非線型核関数に関連する諸量の特性について概説することとする。既往の理論的研究により得られた知見を理解しておくことは、ここで対象としている非線型関数の逆推定問題のように、これまでに有力な方法が開発されていない問題に対して、より合理的な推定方法を開発するのに有用であろう。

以下では Tick の研究の内、比較的取り扱いが容易な一方方向不規則波浪の非線型核関数を用いて検討することとする。この場合、非線型核関数は実数であり、式(26)で表される。

$$G(\omega_1, \omega_2) = \frac{gk_1k_2}{2\omega_1\omega_2} + \frac{\omega_1\omega_2}{2g} - \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2g} + (\omega_1 + \omega_2)^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{g\omega_2k_1^2 + g\omega_1k_2^2}{\omega_1\omega_2(\omega_1 + \omega_2)} + \frac{gk_1k_2}{\omega_1\omega_2} + \frac{\omega_1\omega_2}{2g} - \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2g} \right\} / g|k_1 + k_2| \tanh|k_1 + k_2|d - (\omega_1 + \omega_2)^2 \quad (25)$$

ここに、 g は重力加速度、 d は水深、 k は波数であり、式(26)で表される分散関係式により角周波数 ω と関係付けられる。

$$\omega^2 = gk \tanh kd \quad (26)$$

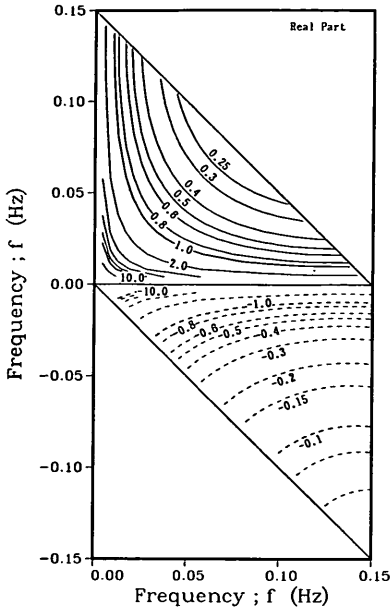


図-6 非線型核関数 $G(f_1, f_2)$ の理論値 (水深20m, 一方向波浪)

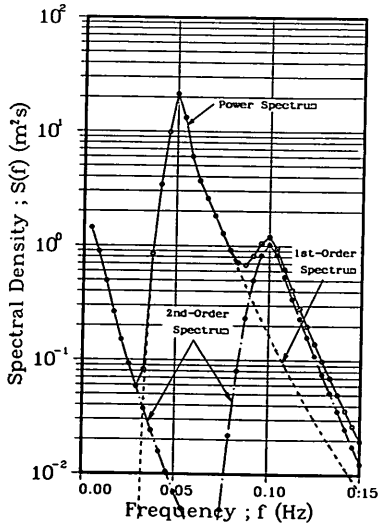


図-7 $S(f)$, $S^{(1)}(f)$, $S^{(2)}(f)$ の理論的關係

式(4)は $d \rightarrow \infty$ として深海波にも適用できるが、深海域においては2次の非線型性は通常無視し得るので、非線型性が比較的顕著となる浅海を対象として以下の検討を行うこととする。

図-6 は水深を $d=20\text{m}$ とした場合の式(4)の非線型核関数を図示したものである。なお、図-6では縦軸と横軸は便宜的に周波数を用いて図示している。図-6に見られるように、浅海波の非線型性は低周波数の波ほど強く、

また周波数の和の干渉と差の干渉では非線型核関数の符号が逆になっている。

次に、2次の非線型性により生成される拘束波のパワースペクトルの特性を検討するため、線型成分波すなわち1次のパワースペクトルを次式のように仮定する。

$$S(f) = \alpha H_s^2 T_s \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-m} \exp \left\{ -\frac{m}{n} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-n} \right\} \times \gamma \exp \left[- (f/f_p - 1)^2 / 2\sigma^2 \right] \quad (7)$$

ここに、 H_s は有義波高、 T_s は有義波周期であり、他の諸量と次のように関係付けられる。

$$\left. \begin{aligned} H_s &= 4.004 \left\{ \int_0^\infty S(f) df \right\}^{1/2} \\ f_p &= \frac{1}{1.05 T_s} \\ \sigma &\begin{cases} = 0.07 & (0.7 f_p \leq f < f_p) \\ = 0.09 & (f_p \leq f < 1.4 f_p) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

図-7に示す破線は長い距離を伝播したうねりの例として式(7)において、

$$\left. \begin{aligned} H_s &= 3.0\text{m}, \quad T_s = 19.0\text{秒} \\ m &= 8.0, \quad n = 4.0 \\ \gamma &= 3.3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

とした場合の線型成分波のパワースペクトルの例を示したものである。また、図-7中の一点鎖線は2次の非線

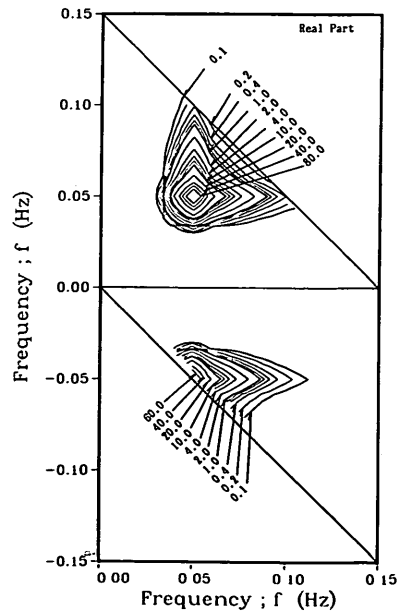


図-8 線型成分波の2次のパワースペクトルへの寄与

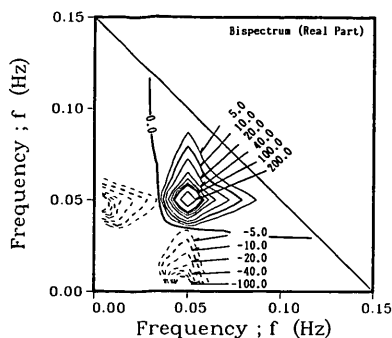


図-9 バイスペクトル $B(f_1, f_2)$ の理論値

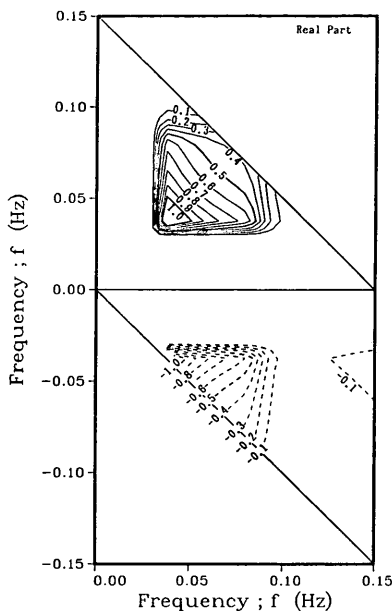


図-11 $K(f_1, f_2)$ の理論値

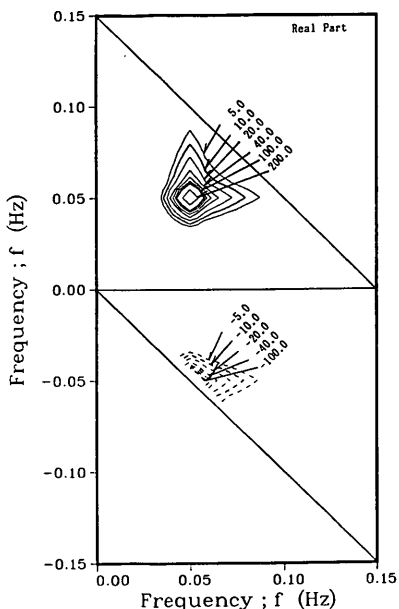


図-10 線型成分波のバイスペクトルへの寄与

型成分波（拘束波）のパワースペクトルであり、同図中の1次のパワースペクトルおよび図-6に示した非線型核関数をもとに、式(17)の数値積分により計算したものである。2次よりも高次のスペクトルが無視できれば、観測されたパワースペクトルは1次と2次のパワースペクトルの和で与えられ、式(16)により与えられる。これを図示したものが図-7の実線である。図-7に見られるように特定の周波数領域、すなわち線型成分波のピーク周波数の2倍の周波数近傍およびピーク周波数よりも低周波側において、2次の非線型性が顕著となることが分かる。

図-8は図-7に示した2次のパワースペクトルへの2つの線型成分波からの寄与を示したものであり、式(17)の積分内の量、すなわち、

$$2|G(\omega_1, \omega_2)|^2 S^{(1)}(\omega_1) S^{(1)}(\omega_2) \quad (30)$$

を図示したものである。図-5に示した関係および図-8より、パワースペクトルのピーク周波数の2倍の周波数近傍のエネルギーは、ピーク周波数近傍の2つの周波数の成分波の和の干渉により、また低周波数側のエネルギーは、ピーク周波数近傍の2つの周波数の成分波の差の干渉により生じたものであることが分かる。

図-6に示した非線型核関数および図-7の1次のパワースペクトルを用いれば、式(24)よりバイスペクトルを算出できる。これを図示したものが図-9である。また、図-8と同様に2つの線型成分波のバイスペクトルへの寄与を式(24)の各項、すなわち、

$$2G(\omega_1, \omega_2) S^{(1)}(\omega_1) S^{(1)}(\omega_2) \quad (31)$$

により示したものが図-10である。バイスペクトル上の各点の値は3つの異なる非線型干渉が含まれているが、これらの干渉を分離した図-10の表現によれば、図-8と同様に2次の非線型干渉を理解するのに有用であろう。

ここで、次章で述べる非線型核関数の数値的推定法の定式化のために、次式で定義される新しい変数を導入する。

$$K(\omega_1, \omega_2) = \frac{2G(\omega_1, \omega_2) S^{(1)}(\omega_1) S^{(1)}(\omega_2)}{S(\omega_1) S(\omega_2)} \quad (32)$$

図-11は図-6および図-7に示した諸量の条件下で式(32)を計算し、これを図示したものである。新しい変数 $K(\omega_1,$

ω_2) の物理的意味は明瞭ではないが、図-11に見られるように $K(\omega_1, \omega_2)$ は有界であり、また、 $|\omega|=0.03(\text{Hz})$ の近傍(図-7のパワースペクトルのピーク周波数よりも低周波数側のエネルギーの急変部)では階段状の形状を示しているものの、それ以外の領域では滑らかな曲面を構成している。なお、次章では式(34)で定義した変数を用いて式の展開を行うが、これを導入する理由については、当面の理解の混乱を避けるために8.で述べることにする。

5. ベイズ型モデルを用いた非線型核関数の数値的推定法

観測して得られたパワースペクトル $S(\omega)$ およびバイスペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ のみが与えられた段階では、式(16)および式(14)の右辺は全て未知量であり、一般的な数学的手法によって、これらの式を用いて非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ を推定することはできない。しかしながら、この問題は式(14)で導入された $K(\omega_1, \omega_2)$ に幾何学的な条件を導入することにより、以下のように便宜的、近似的に解くことができる。

まず、式(14)を式(16)、(17)および式(14)に代入し、若干の修正をして、

$$S(\omega) = S^{(1)}(\omega) + S^{(2)}(\omega) \quad (33)$$

$$S^{(2)}(\omega) = \frac{1}{2} \int |K(\lambda, \omega - \lambda)|^2 \frac{\{S(\lambda)S(\omega - \lambda)\}^2}{S^{(1)}(\lambda)S^{(1)}(\omega - \lambda)} d\lambda \quad (34)$$

$$\frac{B(\omega_1, \omega_2)}{H(\omega_1, \omega_2)} = \frac{1}{H(\omega_1, \omega_2)} \{K^*(\omega_1, \omega_2)S(\omega_1)S(\omega_2) + K(\omega_1 + \omega_2, -\omega_1)S(\omega_1 + \omega_2)S(\omega_1) + K(\omega_1 + \omega_2, -\omega_2)S(\omega_1 + \omega_2)S(\omega_2)\} + \varepsilon(\omega_1, \omega_2) \quad (35)$$

が得られる。ここに、式(35)の右辺の $\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$ は誤差項であり、平均0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。また、 $H(\omega_1, \omega_2)$ は $\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$ が上述の正規分布に従うように導入された便宜的な関数である。 $H(\omega_1, \omega_2)$ は現地観測データをもとに非線型核関数を推定する際に滑らかな推定値を推定するために導入した便宜的な関数であり、どのような値を用いるのかについては7.で述べることにする。

さて、式(35)の右辺には既知の $S(\omega)$ が含まれている。しかしながら、右辺にはまだ2つあるいは3つの未知数 $K(\omega_1, \omega_2)$ が含まれており、いずれの式においてもこれらの量は互いに連立していない。このため式(35)を $K(\omega_1, \omega_2)$ について解くことは不可能である。しかしながら、もし直観的な意味で何らかの合理的な式を式(35)に付け加

え、方程式の数を未知数 $K(\omega_1, \omega_2)$ の数よりも多くすることができるならば、これらの式を用いて $K(\omega_1, \omega_2)$ の近似値を推定することができる。この方法については5.1で述べる。

いったん $K(\omega_1, \omega_2)$ が求められたならば、 $S^{(1)}(\omega), S^{(2)}(\omega)$ および非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ は式(13)および(14)を用いて、適当な $S^{(1)}(\omega)$ の初期値を仮定することにより、逐次近似法によって推定することができる。これについては5.2で述べる。

5.1 関数 $K(\omega_1, \omega_2)$ の数値的推定法

式(35)中の $B(\omega_1, \omega_2)$ および $K(\omega_1, \omega_2)$ は複素数であるが、実部と虚部は互いに独立である。そこで以下では説明の便宜上、式(35)の実部のみを扱うこととする。ここで述べる方法は、式(35)の虚部にもそのまま用いることができる。さらに、以下では式の記述を容易にするために、式(35)を次のように行列表示して扱うこととする。

$$B = AX + E \quad (36)$$

ここに、 B はその要素が $B(\omega_1, \omega_2)/H(\omega_1, \omega_2)$ となる $M \times 1$ 行列、 A はその要素が $S(\cdot)S(\cdot)/H(\omega_1, \omega_2)$ となる $M \times N$ 行列、 X はその要素が $K(\cdot, \cdot)$ となる $N \times 1$ 行列、 E はその要素が $\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$ となる $M \times 1$ 行列であり、 M は図-2の定義域内の $B(\omega_1, \omega_2)$ 推定値の数、 N は図-4の定義域内の $G(\omega_1, \omega_2)$ の推定値の数である。

観測値 $S(\omega)$ および $G(\omega_1, \omega_2)$ が与えられれば、 X および σ^2 に関する尤度は、

$$L(X; \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{M/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|AX - B\|^2\right) \quad (37)$$

で与えられる。ここに、 $\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムである。しかしながら、前述したように式(36)ではそれぞれの式に2つあるいは3つの未知数が含まれており、またどの未知数も連立していない。このため尤度が最大となる X を式(37)のみから特定することは不可能である。

以上の議論では未知数 $K(\omega_i, \omega_j)$ の各値は ω_i および ω_j に関してそれぞれ独立であるとして議論した。しかしながら、図-11に見られるように $K(\omega_i, \omega_j)$ はその定義域内では有界な連続的な曲面を構成する。 $K(\omega_i, \omega_j)$ の一部には階段状の急変部も存在するが、ここではその特性を便宜的に無視することとする。そこで、 $K(\omega_i, \omega_j)$ すなわち X の要素 $x_{i,j}$ が連続的な滑らかな曲面を構成すると仮定する。すなわち、 $K(\omega_i, \omega_j)$ が局所的には ω_i および ω_j の1次式(局所的には平面)で近似し得るものと仮定する。このとき、

$$x_{i,j} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1} \quad (38)$$

は0に近いと想定される¹²⁾。また、図-11中の境界 AB

上および DEF 上では X は滑らかな曲線を構成すると仮定すれば、例えば AB 上では、

$$x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j} \quad (39)$$

は同様に 0 に近いと想定される。すなわち、

$$\sum_j \sum_f (x_{i,j} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1})^2 + \sum_j (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j})^2 + \dots \quad (40)$$

あるいは作用行列 D を導入して、これを行列表示して、

$$\|DX\|^2 \quad (41)$$

を考えると、式(41)が小さい程 X の推定値は滑らかになると考えられる。したがって、 X の推定値としては式(41)をあまり大きくしない範囲で、尤度(式(37))の大きいものが望ましい。これを定式化すると、図-4中の $G(\omega_1, \omega_2)$ が、したがって $K(\omega_1, \omega_2)$ が $\omega_2 = 0$ 上で不連続であることを考慮して、その第1象限および第4象限に適切な異なる2つのパラメータ(超パラメータ) u および v を用い、

$$\ln L(X; \sigma^2) - \frac{u^2}{2\sigma^2} \|D_u X\|^2 - \frac{v^2}{2\sigma^2} \|D_v X\|^2 \quad (42)$$

を最大化する \hat{X} を求めればよい。ここに D_u および D_v はそれぞれ図-4の定義域の第1象限および第4象限における式(40)の作用行列である。

式(42)の最大化は、式(42)を指数とする指数関数を考えるならば、

$$L(X; \sigma^2) \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2} \|D_u X\|^2\right) \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2} \|D_v X\|^2\right) \quad (43)$$

の最大化にはかならない。これはベイズの推論方法において、事前分布 $P(X|u^2, v^2, \sigma^2)$ と事後分布 $p_{\text{post}}(X|u^2, v^2, \sigma^2)$ の関係を表す

$$p_{\text{post}}(X|u^2, v^2, \sigma^2) = L(X; \sigma^2) p(X|u^2, v^2, \sigma^2) \quad (44)$$

において、 X の事前分布として、

$$\begin{aligned} p(X|u^2, v^2, \sigma^2) &= p(X|u^2, \sigma^2) p(X|v^2, \sigma^2) \\ &= \left(\frac{u^2}{2\pi\sigma^2}\right)^{N_1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2} \|D_u X\|^2\right) \\ &\quad \times \left(\frac{v^2}{2\pi\sigma^2}\right)^{N_4/2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2} \|D_v X\|^2\right) \end{aligned} \quad (45)$$

を想定したことにかならない。ここに N_1 および N_4 は、それぞれ図-4中の定義域内の第1象限および第4象限で事前分布(式(38), (39))を与えた格子点の数である。

u および v を与えれば式(43)を最大化する \hat{X} は σ に無関係に求まり、

$$\|AX - B\|^2 + u^2 \|D_u X\|^2 + v^2 \|D_v X\|^2 \quad (46)$$

を最小化することにより得られる。また、 u 、 v の決定と σ の推定は次式で表される ABIC (赤池のベイズ型情報量規準)¹³⁾ の最小化によればよい。

$$\text{ABIC} = -2 \ln \int L(X; \sigma^2) p(X|u^2, v^2, \sigma^2) dX \quad (47)$$

式(47)の積分は以下のようにして実行される。まず、式(37)および(45)より、

$$\begin{aligned} &L(X; \sigma^2) p(X|u^2, v^2, \sigma^2) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{M/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|AX - B\|^2\right) \\ &\quad \times \left(\frac{u^2}{2\pi\sigma^2}\right)^{N_1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2} \|D_u X\|^2\right) \\ &\quad \times \left(\frac{v^2}{2\pi\sigma^2}\right)^{N_4/2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2} \|D_v X\|^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{(M+N_1+N_4)/2} u^{N_1} v^{N_4} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} A \\ uD_u \\ vD_v \end{pmatrix} \hat{X} - \begin{pmatrix} B \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\|^2\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} A \\ uD_u \\ vD_v \end{pmatrix} (X - \hat{X}) \right\|^2\right\} \end{aligned} \quad (48)$$

である。従って、その積分は、

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} L(X; \sigma^2) p(X|u^2, v^2, \sigma^2) dX \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{(M+N_1+N_4)/2} u^{N_1} v^{N_4} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} A \\ uD_u \\ vD_v \end{pmatrix} \hat{X} - \begin{pmatrix} B \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\|^2\right\} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} A \\ uD_u \\ vD_v \end{pmatrix} (X - \hat{X}) \right\|^2\right\} dX \end{aligned} \quad (49)$$

となる。ここで、積分公式

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} A \\ uD_u \\ vD_v \end{pmatrix} (X - \hat{X}) \right\|^2\right\} dX \\ &= (2\pi\sigma^2)^{N/2} \{\det(A^t A + u^2 D_u^t D_u + v^2 D_v^t D_v)\}^{-1/2} \end{aligned} \quad (50)$$

を用いると、式(49)の積分は、

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} L(X; \sigma^2) p(X|u^2, v^2, \sigma^2) dX \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{(M+N_1+N_4-N)/2} u^{N_1} v^{N_4} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\|A\hat{X} - B\|^2 + u^2 \|D_u \hat{X}\|^2 + v^2 \|D_v \hat{X}\|^2)\right\} \end{aligned}$$

$$\times \{\det(A^t A + u^2 D_u^t D_u + v^2 D_v^t D_v)\}^{-1/2} \quad (51)$$

で与えられる。したがって、ABIC は、

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & (M + N_1 + N_4 - N) \ln(2\pi\sigma^2) \\ & - N_1 \ln(u^2) - N_4 \ln(v^2) \\ & + \frac{1}{\sigma^2} (\|A\hat{X} - B\|^2 + u^2 \|D_u \hat{X}\|^2 + v^2 \|D_v \hat{X}\|^2) \\ & + \ln \{\det(A^t A + u^2 D_u^t D_u + v^2 D_v^t D_v)\} \quad (52) \end{aligned}$$

となる。ABIC を最小化する σ^2 の推定値は上式を σ^2 で微分して 0 とおくことにより、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|A\hat{X} - B\|^2 + u^2 \|D_u \hat{X}\|^2 + v^2 \|D_v \hat{X}\|^2}{M + N_1 + N_4 - N}$$

で与えられる。したがって、式(52)の ABIC は最終的に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & (M + N_1 + N_4 - N) \{1 + \ln(2\pi\hat{\sigma}^2)\} \\ & + \ln \{\det(A^t A + u^2 D_u^t D_u + v^2 D_v^t D_v)\} \\ & - N_1 \ln(u^2) - N_4 \ln(v^2) \quad (53) \end{aligned}$$

最後に超パラメータ u および v の決定法について述べる。 u および v の決定は正確には式(53)の ABIC を最小にする非線型最適化によらなければならない。しかしながら、いまの場合これは困難であり、また u 、 v の推定を目的にする限り式(53)を厳密に最小化する必要はない。したがって、ここでは、 u および v の与え方として、格子探索法を用いることとし¹²⁾、

$$u = a \times (0.5)^m$$

$$v = b \times (0.5)^n$$

として a 、 b に適当な値を代入し、 m および n を変えることにより、種々の u 、 v の値を用いて上記の計算を実施し、得られた結果の内、最小の ABIC を与える u 、 v を最適な推定値とした。

以上の数値計算法をまとめると、以下ようになる。

- 1) 適当な u および v を与えて、式(53)の最小化により、与えられた u 、 v に対応する X の推定値 \hat{X} を算定する。
- 2) 1) で得られた結果を用いて、式(54)より、与えられた u 、 v に対応する ABIC を算定する。
- 3) u 、 v の値を種々に変えて 1)、2) の計算を繰り返す。
- 4) 1)~3) の計算結果の内、最小の ABIC を与える u 、 v 、 σ^2 および \hat{X} を最適な推定値とする。

なお、以上の式の展開においては、図-4の定義域内の全ての点で $K(\omega_1, \omega_2)$ の事前分布が与えられているわけではない。例えば、図-4中の ACB 上の各点、DF 上の各点および D 点上では事前分布は与えられていない。この場合、それぞれの点上の値 $x_{i,j}$ は一種の超パラメータと見なされるが、これらの値は式(54)に最小自乗法を適用して X の最適値を推定する際に近似的に推定されてい

る。

また、以上の展開においては、事前分布として連続的な滑らかな曲面を表現するために、最も単純な式(54)および(55)を用いて説明した。しかしながら、事前分布の条件としては他の条件も可能である。例えば、式(54)の代わりに、

$$x_{i+1,j} + x_{i,j+1} - 4x_{i,j} + x_{i,j-1} + x_{i-1,j} \quad (57)$$

を用いることも可能であろう¹⁴⁾。また、 $K(\omega_1, \omega_2)$ が図-4中の AC に関して対称な形状であることを考慮すると、式(56)あるいは式(57)に対してそれぞれ、

$$x_{i+1,j} = x_{i,j+1} \quad ; \text{式(56)に対して} \quad (58)$$

$$x_{i-1,j} = x_{i,j-1}, \quad x_{i+1,j} = x_{i,j+1} \quad ; \text{式(57)に対して} \quad (59)$$

のような条件を付加することも可能であろう。さらに、事前に図-4中の AB 上あるいは DE 上で $K(\omega_1, \omega_2)$ が 0 に近い値であることを知っていたならば、

$$x_{i,j} = 0 \quad (60)$$

のような条件を付加することもできよう。このように事前分布の条件としては種々の条件を導入することが可能であるが、ここで述べた式や計算手順はほとんどそのままの形で適用できる。事前分布の条件の違いによる $K(\omega_1, \omega_2)$ の推定値の相違については 6.2 で検討することとする。

ここで述べた式の展開や数値計算法は著者の以前の研究とほとんど同じである。式の誘導や数値計算法の詳細は文献^{15),16),17),18)}を参照されたい。

5.2 逐次近似法によるパワースペクトルの分離と非線型核関数の推定

5.1 で推定した $K(\omega_1, \omega_2)$ から非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ を推定するためには、式(52)から明らかのように、1 次のパワースペクトル $S^{(1)}(\omega)$ を求める必要がある。観測されたパワースペクトル $S(\omega)$ は 1 次のパワースペクトル $S^{(1)}(\omega)$ と 2 次のパワースペクトル $S^{(2)}(\omega)$ から構成されているので、何らかの方法によってこれらのパワースペクトルを分離する必要がある。非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ が既知の場合には、逐次近似法を用いてこれらのパワースペクトルを分離し得ることが増田ら⁹⁾により報告されている。そこで、ここでは増田らと同様の方法により、以下の方法によって、1 次のパワースペクトル $S^{(1)}(\omega)$ と 2 次のパワースペクトル $S^{(2)}(\omega)$ を分離し、同時に非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ を推定することとした。

問題は、観測して得られたパワースペクトル $S(\omega)$ および前節で得られた $K(\omega_1, \omega_2)$ を用いて、式(52)、(53)および(54)を $S^{(1)}(\omega)$ および $G(\omega_1, \omega_2)$ に関して解くことである。まず、1 次のパワースペクトル $S^{(1)}(\omega)$ の第 1 近似

として、観測されたパワースペクトル $S(\omega)$ を用いる。このとき、 $S^{(2)}(\omega)$ の第1近似値が式(34)から計算される。次に式(33)を用いて $S^{(1)}(\omega)$ の第2近似を計算し、これを次のステップの入力データとして同じ計算を繰り返す。 $S^{(2)}(\omega)$ に関して適当な収束条件を満たすまでこの計算を繰り返し、最終的に得られた収束値を $S^{(1)}(\omega)$ および $S^{(2)}(\omega)$ の最適値とする。このとき非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ は式(32)より計算される。

しかしながら、現地観測データを用いた事前の試算によれば、この繰り返し計算はある条件の下では発散することが明らかとなった。すなわち、繰り返し計算の初期の段階では $S^{(2)}(\omega)$ は急速に収束するものの、いったん $S^{(2)}(\omega)$ が $S(\omega)$ よりも大きく推定されると、繰り返し計算が発散する場合がある。これとは別に6.で述べる数値シミュレーションによっても試算したが、この場合には $S^{(2)}(\omega)$ が $S(\omega)$ よりもやや大きく推定されても $S^{(2)}(\omega)$ は収束することが確認された。したがって、ここで述べた繰り返し計算の発散は観測して得られたパワースペクトル $S(\omega)$ あるいはバイスペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ に誤差が含まれる場合に発生するようである。そこでここでは、この問題を解決するために、次の処理を付加して繰り返し計算を実施することとした。すなわち、上記の繰り返し計算において $S^{(2)}(\omega)$ が $S(\omega)$ よりも大きく推定され、計算が収束しない場合には、観測して得られた $S(\omega)$ で、あらかじめ線型成分のエネルギーの卓越した周波数範囲を想定し、式(34)の積分をこの範囲の積分に置き換えて $S^{(2)}(\omega)$ を計算し、逐次近似法を続行する。この処理を付加することにより、以下に述べる全ての計算ケースでは発散は生じていない。

6. 非線型核関数の数値的推定法の数値シミュレーションによる検討

ベイズ型モデルを用いた海洋波浪の非線型核関数の推定法の推定精度や適用性、有効性などを検討するために数値シミュレーションを実施した。数値シミュレーション法としては、4.で示した Tick²⁾ の非線型核関数を用いて計算したパワースペクトル $S(f)$ (図-7) およびバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ (図-9) をもとに5.で述べた方法により $S^{(1)}(f)$, $S^{(2)}(f)$, $K(f_1, f_2)$, $G(f_1, f_2)$ 等の諸量を推定し、4.に示した理論値と比較することにより、本方法の妥当性を検討することとした。なお、ここで用いたデータ $S(f)$ および $B(f_1, f_2)$ には誤差が含まれていないことから、式(39)中の関数 $H(\omega_1, \omega_2)$ は1として5.の計算を実施した。

6.1 非線型核関数の推定における格子サイズの影響

いま、解析すべきパワースペクトルの周波数の数を N とすると、バイスペクトルにより与えられる式(39)の数 N_b および図-4に示す推定すべき非線型核関数の点の数 N_g はそれぞれ、

$$N_b = \left(\frac{N}{2}\right)^2 \tag{61}$$

$$N_g = N_b + \frac{N(N-1)}{2} \tag{62}$$

で与えられる。このように解析の対象とする周波数の数 N はプログラムのメモリ・サイズ、したがって計算時間に多大の影響を及ぼす。

一方では、5.1で述べたように、 $K(f_1, f_2)$ は局所的には ω_1 と ω_2 の1次式で近似し得ると仮定した。このため、図-1に示す格子サイズが小さければ小さい程、 $K(\omega_1, \omega_2)$ の推定精度は向上するものと期待される。したがって、解析すべき周波数の数 N 、換言すれば、周波数の分割幅 Δf がどのように $K(f_1, f_2)$ に影響を及ぼすか、ひいてはどのように $S^{(1)}(f)$, $S^{(2)}(f)$, $G(f_1, f_2)$ に影響を及ぼすのかを検討しておく必要がある。なお、ここで用いた事前分布の条件は、後で述べる事前分布の条件の内、表-1のCase-1を用いている。

図-12は $\Delta f = 0.00417(\text{Hz})$ 、すなわち解析対象周波数の数を36とした場合の $K(f_1, f_2)$ の推定値を示したものである。また、図-13および図-14はそれぞれ $S^{(1)}(f)$ と

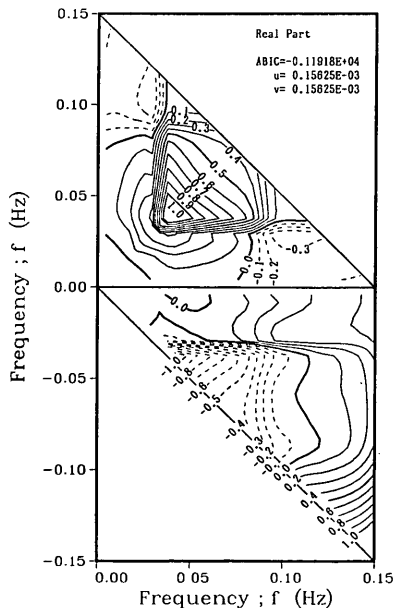


図-12 $K(f_1, f_2)$ の推定値 ($\Delta f = 0.00417(\text{Hz})$)

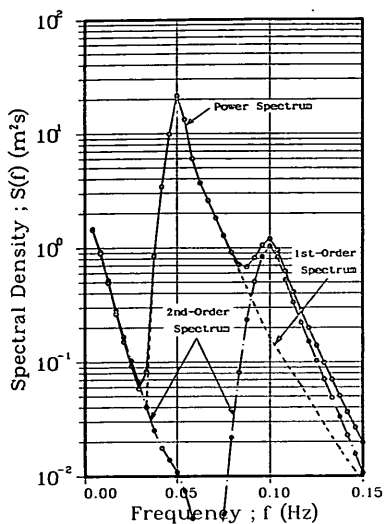


図-13 $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ の分離

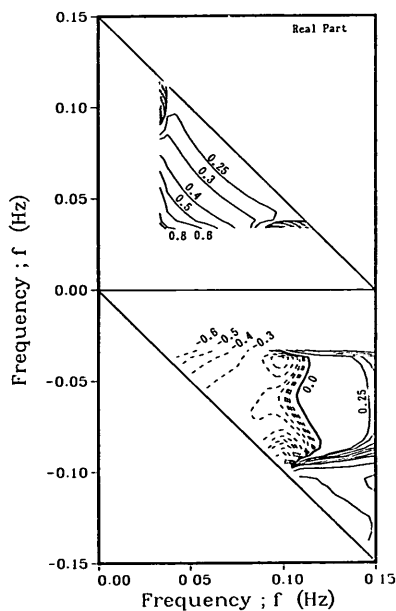


図-14 $G(f_1, f_2)$ の推定値

$S^{(2)}(f)$ を分離した結果、および $G(f_1, f_2)$ の推定値を示したものである。図-12の $K(f_1, f_2)$ の推定値は図-11の真値に比べて、図-7に示した $S(f)$ のエネルギーの卓越した周波数範囲すなわち $0.03 < |f| < 0.09(\text{Hz})$ の範囲ではばり妥当な値を推定している。図-13に示す $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ の推定値も、図-7の真値に極めて近い値を推定している。なお、図-13中の $f < 0.03(\text{Hz})$ の範囲で $S^{(1)}(f)$ を図示していないのは、5.2で述べた緑り

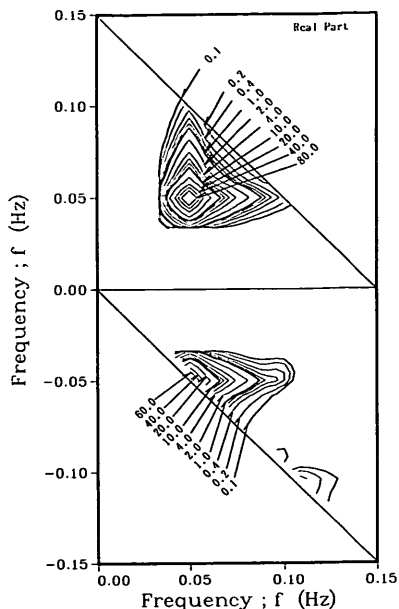


図-15 線型成分波の2次のパワースペクトルへの寄与

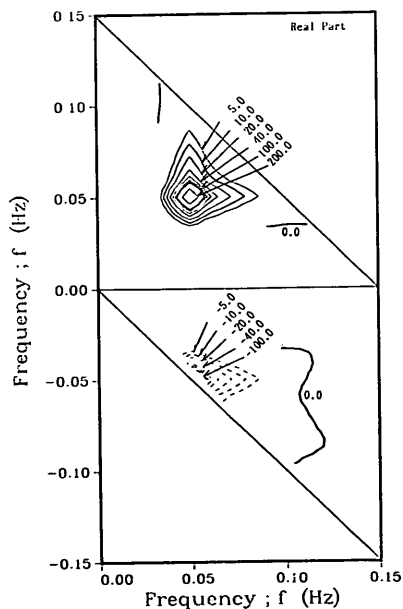


図-16 線型成分波のバイスペクトルへの寄与

返し計算において $f < 0.03(\text{Hz})$ の範囲で $S^{(2)}(f)$ が $S(f)$ よりも大きく推定されたため、この範囲で $S^{(1)}(f) = 0$ としたためである。図-14に示す $G(f_1, f_2)$ の推定値は図-6の真値に比べてかなり異なって見えるが、これも $K(f_1, f_2)$ と同様に、図-7に示した $S(f)$ のエネル

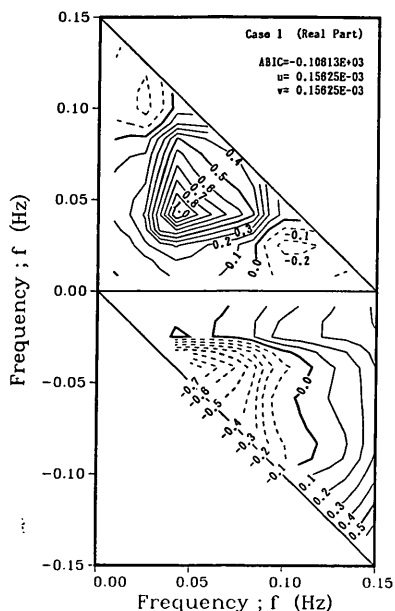


図-17 $K(f_1, f_2)$ の推定値 ($\Delta f=0.00833(\text{Hz})$)

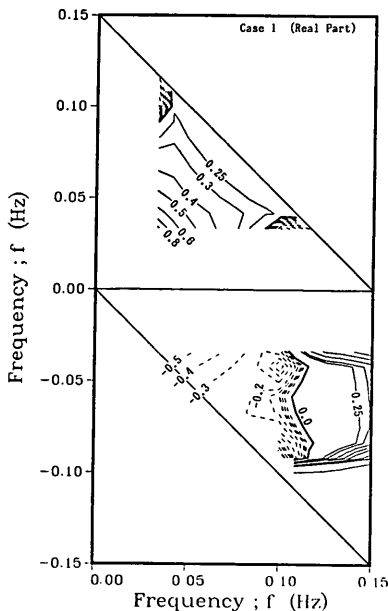


図-19 $G(f_1, f_2)$ の推定値

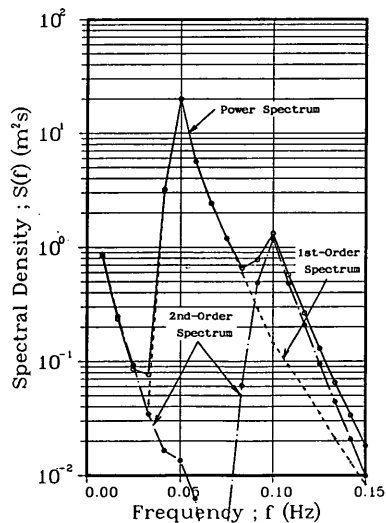


図-18 $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ の分離

ギーの卓越した周波数範囲、すなわち $0.03 < |f| (\text{Hz})$ の範囲ではほぼ妥当な値を推定しているようである。図-15 および図-16 は、図-14 で推定された $G(f_1, f_2)$ を用いて、それぞれ図-8 および図-10 に対応する量を推定したものである。両図とも極めて妥当な値を推定していることから、図-14 の $G(f_1, f_2)$ は $S^{(1)}(f)$ の卓越した周波数範囲で妥当な推定値であったことが分かる。

図-17 は図-12 の2倍の周波数間隔のデータ ($\Delta f=0.00833(\text{Hz})$) を用いて、すなわち周波数の数を18とした場合の $K(f_1, f_2)$ の推定値を示したものである。また、図-18 および図-19 は、それぞれ図-17 の推定結果をもとに図-7 と図-6 に対応する量を示したものである。図-17~図-19 は図-12~図-14 に比べて推定精度は低下しているものの、ほぼ妥当な値を推定しているようである。なお、この場合のコンピュータのメモリー・サイズおよび計算時間は、図-12~図-14 の場合に比べて、はるかに小さい容量および計算時間で終了した。そこで、次節に述べる事前分布の条件の相違による推定値の相違の検討では全て $\Delta f=0.00833(\text{Hz})$ 、すなわち周波数の数を18として計算を実施した。

6.2 事前分布の条件の相違による推定値の相違に関する検討

5.1 で $K(f_1, f_2)$ の事前分布の条件として式(8)および(9)を紹介した。また、5.1 の最後に事前分布の条件として可能な他の条件についても紹介した。本節では、これらの可能な種々の条件を用いて数値シミュレーションを実施し、推定された $K(f_1, f_2)$ の特性について検討した。

表-1 に数値シミュレーションに用いた事前分布の条件を示す。表-1 の内、Case-1 については既に 6.1 に示したので、ここでは Case-2 以下のシミュレーション結果について述べる。

表-1 数値シミュレーションに用いた事前分布の種々の条件

	領域内部	線 AB, ED 上	線 EF 上	線 AC 上	点 A, B, D, E 上	点 F 上
Case-1	式(8)	式(9)	式(9)	なし	なし	なし
Case-2	"	"	"	式(8)	なし	なし
Case-3	"	"	"	"	式(6)	式(6)
Case-4	"	"	"	なし	"	"
Case-5	"	式(6)	"	なし	"	なし
Case-6	"	"	"	式(8)	"	なし
Case-7	式(7)	式(9)	式(9)	なし	なし	なし
Case-8	"	"	"	式(9)	なし	なし
Case-9	"	"	"	"	式(6)	式(6)
Case-10	"	"	"	なし	"	"
Case-11	"	式(6)	"	なし	"	なし
Case-12	"	"	"	式(9)	"	なし

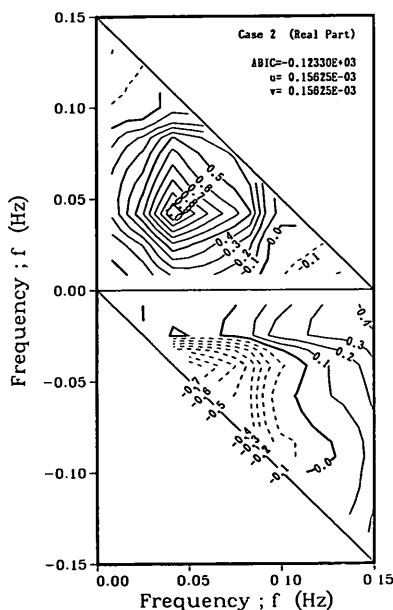


図-20 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-2)

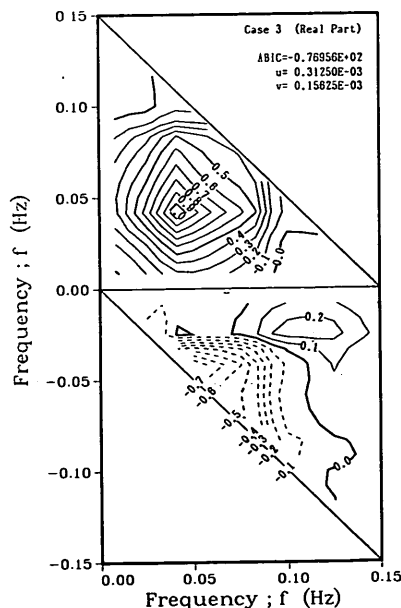


図-21 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-3)

図-20～図-30は、表-1に示す Case-2～Case-12 の条件のもとに、それぞれ $K(f_1, f_2)$ を推定した結果を示したものである。図-17および図-20～図-24は $K(f_1, f_2)$ が連続的な滑らかな曲面であるとして式(8)を条件として用いた場合の $K(f_1, f_2)$ の推定値であり、また図-25～図-30は式(7)を条件として用いた場合の $K(f_1, f_2)$ の推定値である。これらの結果を見る限りでは、式(8)の方が式(7)に比べてより妥当な事前分布であると言えよう。ま

た、図-17と図-20を比べて、あるいは図-25と図-26を比べて、式(8)あるいは(7)で導入した図-4中の AC に対する対称性の条件は用いない方が良さそうである。さらに、図-17と図-23を比べて、あるいは図-25と図-29を比べて、図-4中の AC および DE 上で $K(f_1, f_2)$ が 0 に近いという条件すなわち式(6)は用いない方が無難であろう。

以上から、 $K(f_1, f_2)$ の事前分布として種々の条件を

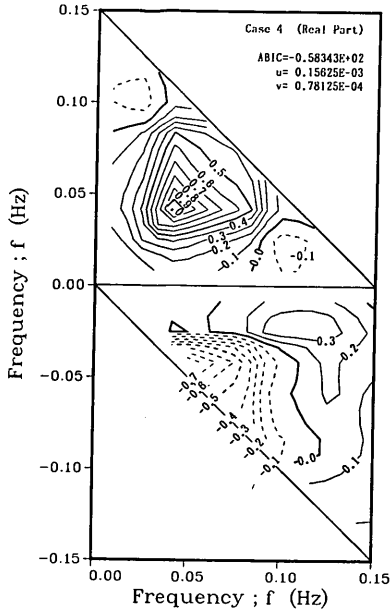


図-22 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-4)

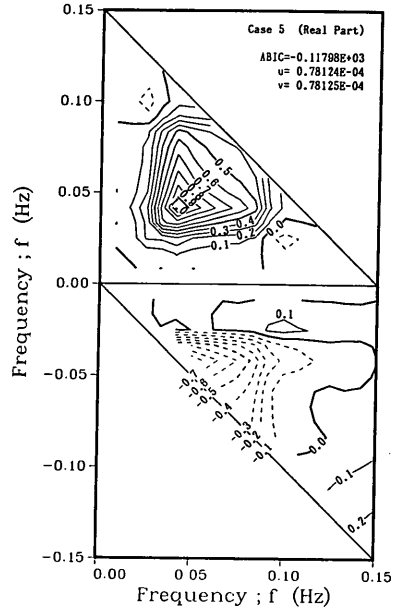


図-23 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-5)

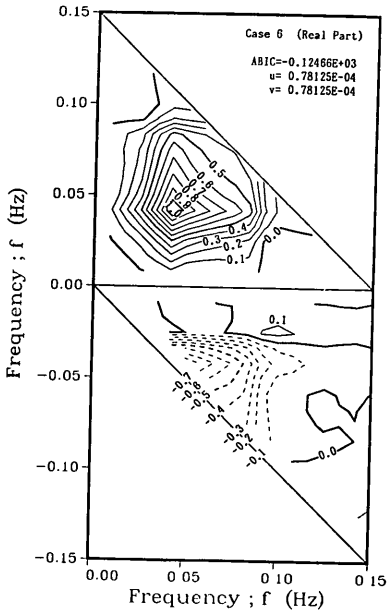


図-24 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-6)

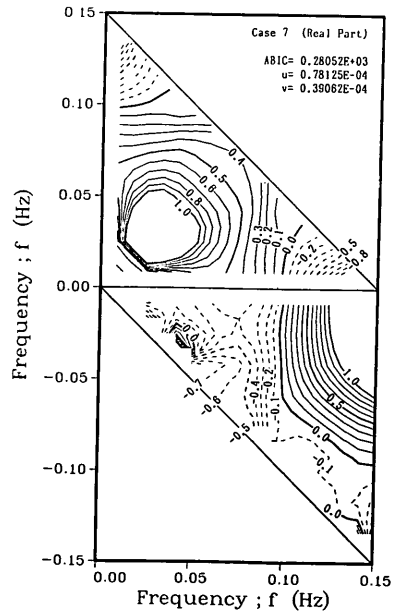


図-25 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-7)

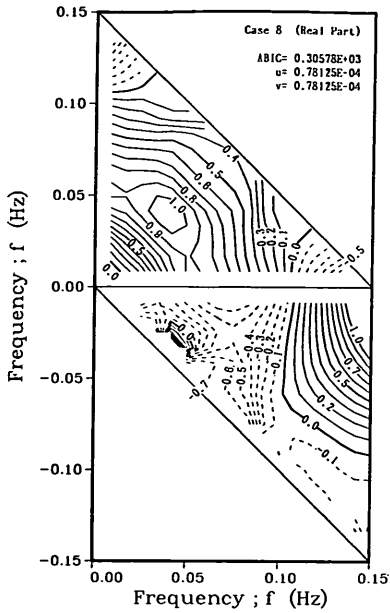


図-26 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-8)

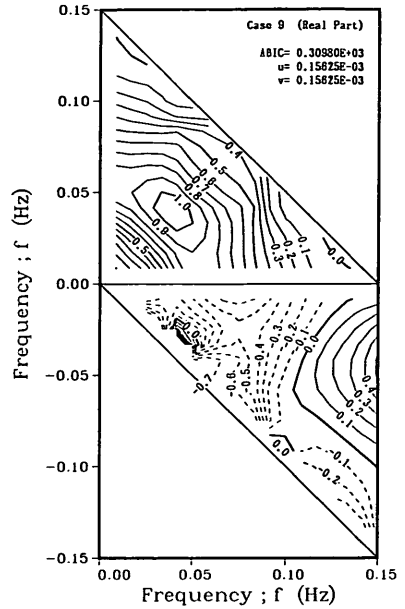


図-27 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-9)

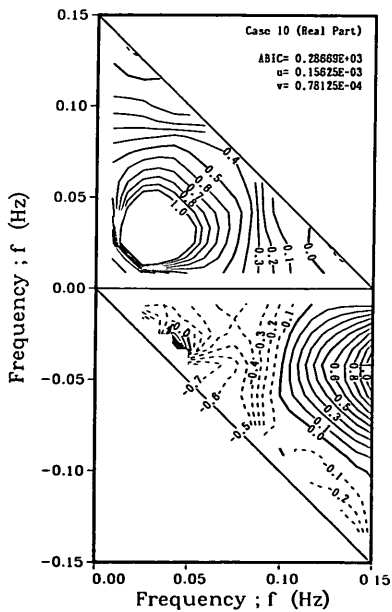


図-28 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-10)

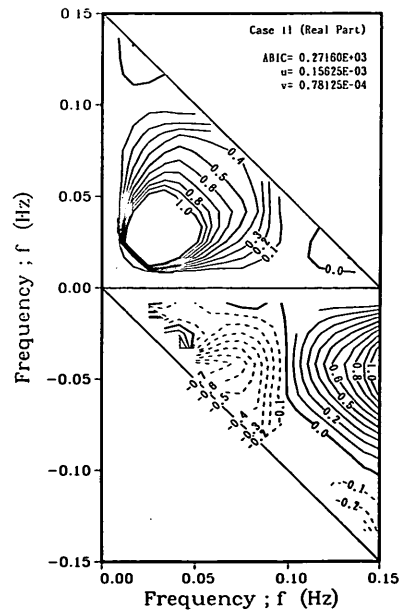


図-29 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-11)

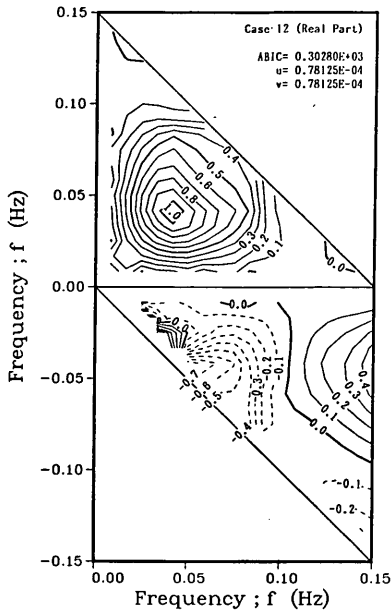


図-30 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (Case-12)

用いることが可能ではあるものの、事前分布はなるべく単純な条件がよく、 unnecessaryな条件は付加しない方がよいと結論付けできそうである。しかしながら、ここで検討した例は4.で示した等水深20mの一方不規則波に対する計算例である。より複雑な多方向不規則波浪あるいは等水深でない波浪を対象とする場合には、 $K(f_1, f_2)$ はかなり複雑な形状になると考えられる。したがって、事前分布として具備すべき妥当な条件については、更に種々の海象条件を用いて詳細に検討する必要がある。

7. 非線型核関数の数値的推定法の現地観測データへの適用

本報告で述べた非線型核関数の推定法の現地観測データへの適用性を検討するために、1981年5月にコスタリカ国カルデラ港の水深17mの地点で観測された顕著なうねりのデータを用いて解析を実施した。本データの特性については合田¹⁰⁾により詳細に報告されているので、それを参照されたい。

7.1 パワースペクトルおよびバイスペクトルの推定

バイスペクトルの推定法として、これまで種々の方法が提案されている。しかしながら、各々の推定法にはそれぞれ若干の相違があり、いまだ標準的な方法は提案されていないように思える。特に周波数ウィンドウ関数に関しては様々な分野の各々の研究者により異なる形状、サイズが用いられており、いったいどのような周波数ウ

ィンドウ関数が最適なのかよく分からない。一方では、バイスペクトル $B(f_1, f_2)$ の自乗平均誤差は、対応するパワースペクトルの積 $S(f_1)S(f_2)S(f_1+f_2)$ に比例し、かなり大きな推定誤差を含むことが報告されており²⁰⁾、バイスペクトルの平滑化は、意味のある情報を引き出す上で必要不可欠である。そこで、ここでは周波数ウィンドウ関数を用いずに、以下の手順によりパワースペクトルおよびバイスペクトルを推定した。

- 1) 超音波式波高計を用いて9時間にわたり連続的に観測された波浪観測データを1秒のサンプリング間隔でデジタル化し、50%づつオーバーラップさせた256個のデジタル値からなる約100個の観測データを作成する。
- 2) 各々の観測データに10%コサイン・ベル型のデータ・ウィンドウをかける。
- 3) 2)の処理で小さくなった各々の観測データの分散を、各観測データに補正係数を掛けることにより元の分散の大きさに戻す。
- 4) 各々の観測データにFFTを適用し、Fourier係数を算出する。
- 5) 各々の観測データのFourier係数を用い、式(3)および(6)の定義にしたがって、生の(アンサンプル平均を取っていない)パワースペクトルおよびバイスペクトルを算出する。
- 6) 5)で得られた全ての生のパワースペクトルおよびバイスペクトルの平均を取ることににより、パワースペクトルおよびバイスペクトルの推定値とする。また、このとき、生のバイスペクトルの平均値回りの誤差の標準偏差を算出する。

なお、上記の2), 3)の処理により、データ・ウィンドウ関数にかかる前と後では元の時系列データの分散は変化しないが、歪度(skewness)はこの前後で変化し、やや小さ目の値となる。これの解消法は不明なので、ここではこれを無視して以下の解析を実施した。また、本解析では、より滑らかな安定したバイスペクトルを推定するために、長時間にわたり観測された時系列データを用いてバイスペクトル解析を実施した。この場合、用いた時系列データの定常性が問題となる。この問題に対しては、ここで用いた観測データについてはほぼ定常性が満たされていることが合田¹⁰⁾により報告されている。図-31は9時間にわたる時系列データを2048秒毎に分割し、FFT法によりスペクトル解析した結果を全て図示したものである。各サンプルにより若干の相違は見られるものの、ほぼ定常であると見なし得るようである。

図-32は約100個のサンプルの平均により得られたパワ

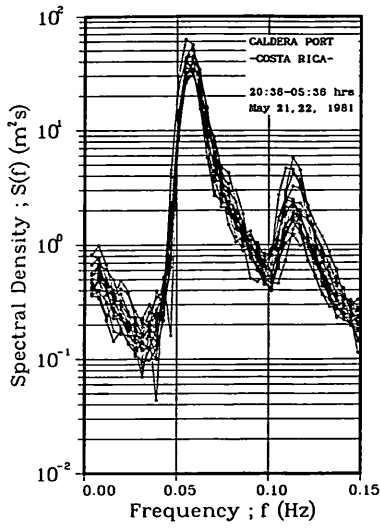


図-31 現地観測データの定常性の検討

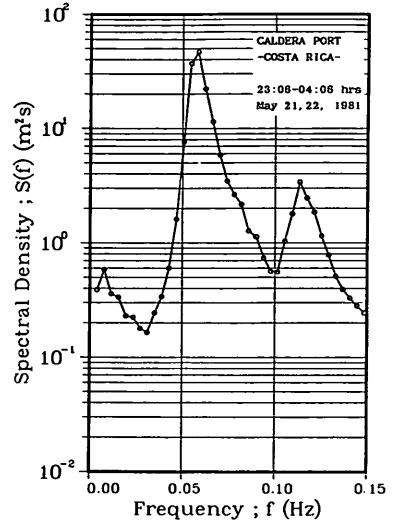


図-32 パワースペクトル $S(f)$ の観測値

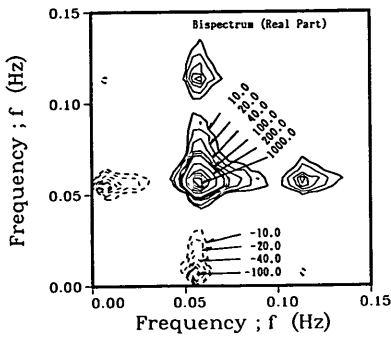


図-33 バイスpekトル $B(f_1, f_2)$ の観測値 (実部)

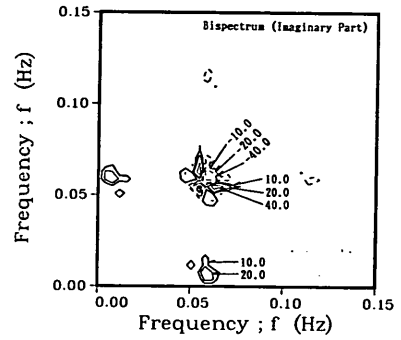


図-34 バイスpekトル $B(f_1, f_2)$ の観測値 (虚部)

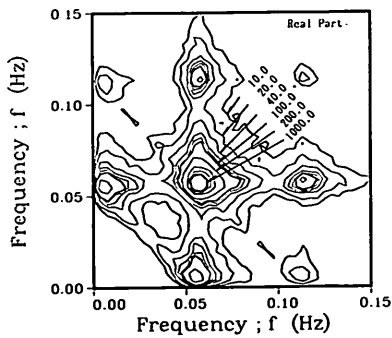


図-35 バイスpekトル $B(f_1, f_2)$ の誤差の標準偏差 (実部)

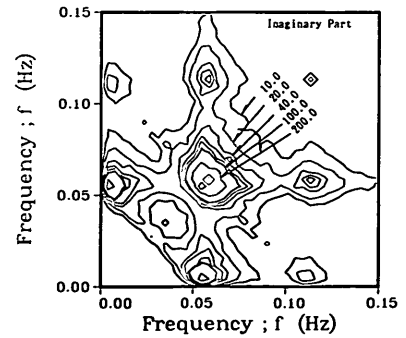


図-36 バイスpekトル $B(f_1, f_2)$ の誤差の標準偏差 (虚部)

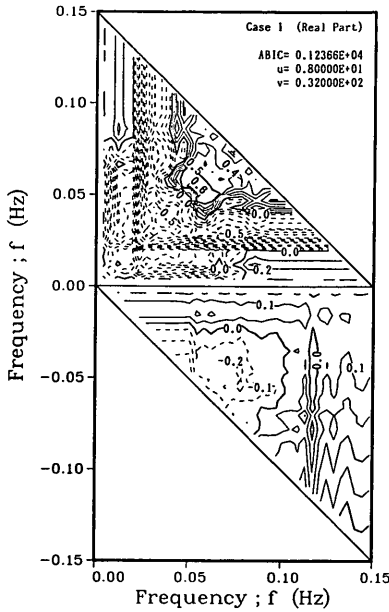


図-37 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (実部)

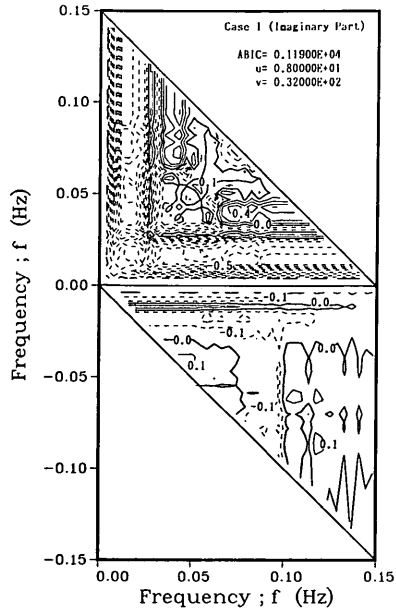


図-38 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (虚部)

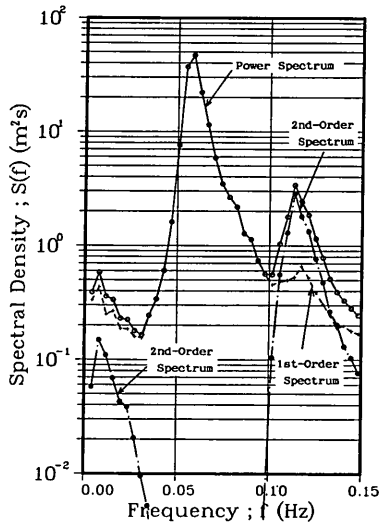


図-39 $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ の分離

ースペクトル $S(f)$ の推定値を図示したものである。4. で示した図-7と同様に $S(f)$ のピーク周波数の倍周波数近傍およびピーク周波数よりも低周波数側に顕著なエネルギーの増大が見られる。

図-33および図-34はそれぞれ、バイスペクトルの推定値の実部および虚部を示したものである。虚部は実部に比べてかなり小さい値を示しており、時系列データの上下の非対称性は認められるものの、前後の非対称性は

無視し得ることを示唆している。また、図-33の点線で示した負値は、図-9の負値に比べて、それぞれの図の正のピーク値との相対的比較において、その絶対値はかなり小さ目である。これは図-33の周波数の差の干渉は、和の干渉に比べてかなり弱いことを示唆しているものと思われる。なお、図-33の $(f_1, f_2) = (0.12, 0.06)$ および $(0.06, 0.12)$ に見られる正のピークは2次よりも高次の非線型干渉によるものであり、後の解析ではこの部分は無視して扱っている。

図-35および図-36はそれぞれ、5)、6)で計算した生のバイスペクトルの平均値回りの誤算の標準偏差の実部および虚部を示したものである。図にみられるように、ここで解析したバイスペクトルの誤差はかなり大きく、特にパワースペクトルのピーク周波数の整数倍の周波数近傍で極端に大きくなっている。海洋波浪を対象としたバイスペクトルの標準的解析法については、今後さらに研究して行く必要がある。

7.2 海洋波浪の非線型核関数の推定結果の検討

7.1 で得られたパワースペクトル $S(f)$ およびバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ を用いて、5. で述べた方法により非線型核関数 $G(f_1, f_2)$ を推定した。ここではまず、観測して得られた $B(f_1, f_2)$ が1つのサンプルとしてではなく、真値であるとして、式(8)中の関数 $H(\omega_1, \omega_2)$ を1とし、周波数間隔 $\Delta f = 0.00390625$ (Hz)、解析対象周波数の数を38として解析を実施した。また、この段階ではど

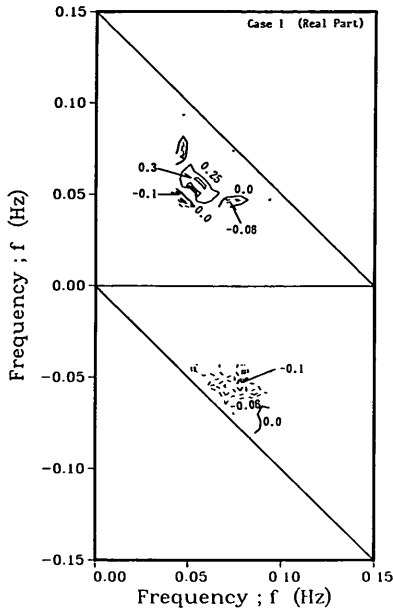


図-40 $G(f_1, f_2)$ の推定値 (実部)

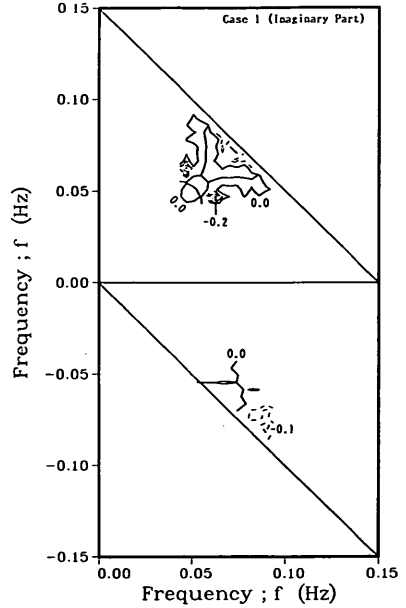


図-41 $G(f_1, f_2)$ の推定値 (虚部)

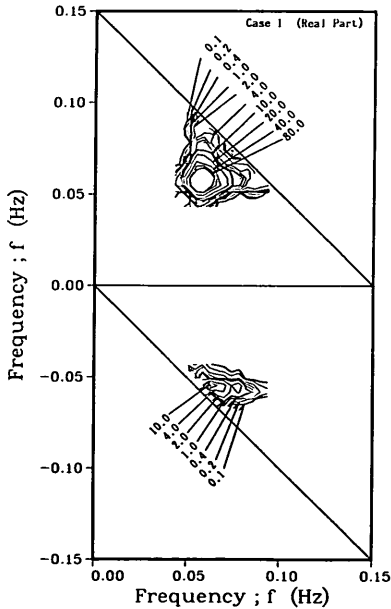


図-42 線型成分波の2次のパワースペクトルへの寄与(実部)

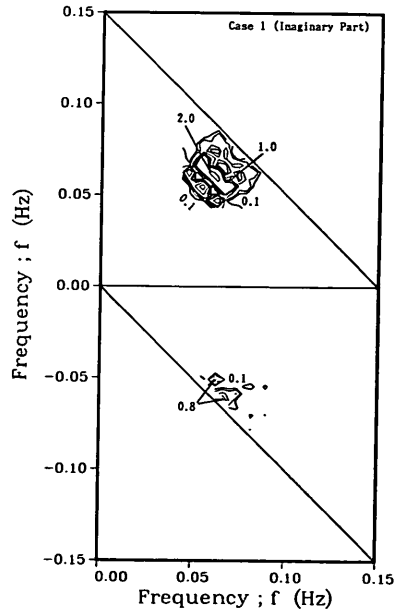


図-43 線型成分波の2次のパワースペクトルへの寄与(虚部)

のような事前分布の条件を採用すれば良いのか不明であったため、表-1のCase-5を用いて解析した。図-37および図-38はそれぞれこのようにして推定された $K(f_1, f_2)$ の実部および虚部である。両図に見られるように $K(f_1, f_2)$ はかなり複雑な形状を示しており、図-11と

異なった形状となっている。この原因についてはよく分からないが、観測値の誤差の影響によるものと推察される。

図-39および図-40と図-41はそれぞれ $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ を分離した結果および $G(f_1, f_2)$ の実部と虚部を示

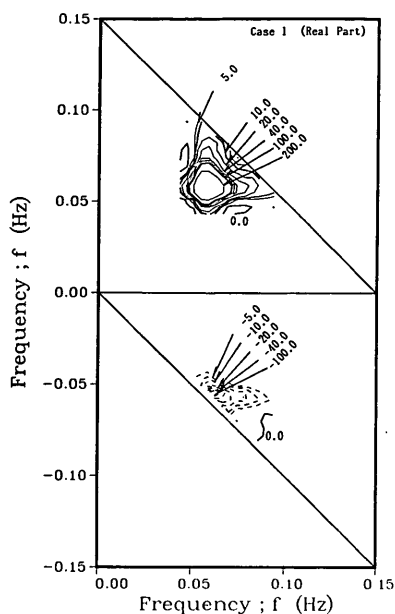


図-44 線型成分波のバイスペクトルへの寄与 (実部)

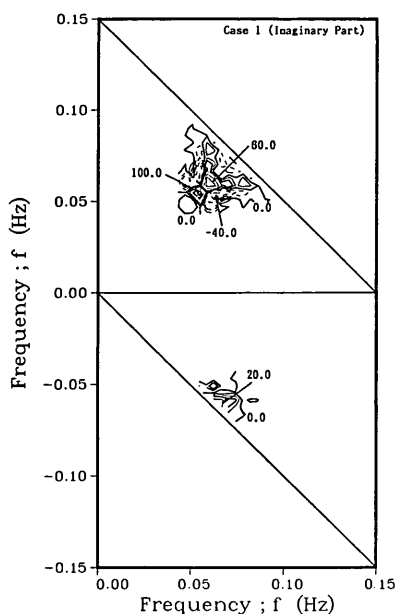


図-45 線型成分波のバイスペクトルへの寄与 (虚部)

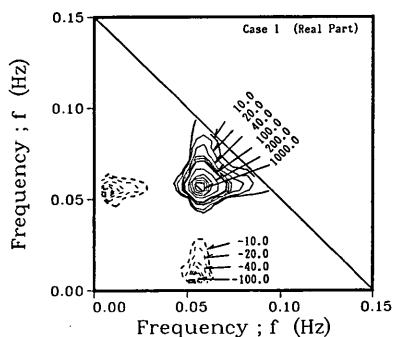


図-46 $G(f_1, f_2)$ の逆推定値 (実部)

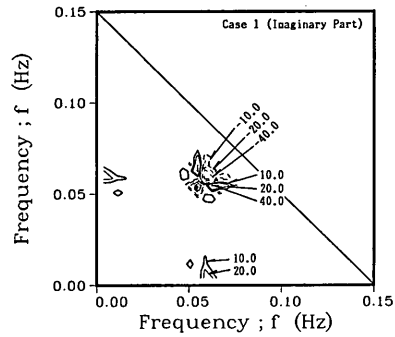


図-47 $G(f_1, f_2)$ の逆推定値 (虚部)

したものである。図-39 の計算に際しては、5.2 で述べた理由により逐次近似法による繰返し計算が発散したため、あらかじめ線型成分波のエネルギーの卓越した周波数範囲を $0.03 \sim 0.10(\text{Hz})$ と想定することにより、式(34)の積分範囲をこの周波数範囲に置き換えて、逐次近似法を実施した。図-39 に見られるようにパワースペクトルのピーク周波数の2次ピークでの $S^{(2)}(f)$ はかなり良い推定値を示しているが、低周波数側の $S^{(2)}(f)$ は図-7と比較して、あるいは合田¹⁹⁾の結果と比較してかなり小さ目である。

また、図-40および図-41に示す $G(f_1, f_2)$ の実部および虚部は、線型成分波のエネルギーの卓越した周波数範

囲を $0.03 \sim 0.10(\text{Hz})$ と想定したことにより $0.03 < |f| < 0.10(\text{Hz})$ の範囲でのみ推定されたため、全体的な傾向が分かりにくい。そこで、4. で示した図-8 および図-10と同じ量を実部と虚部に対して計算し、図示したものが図-42～図-45である。これらの図よりパワースペクトルのピーク周波数の2次ピークはピーク周波数近傍の2つの線型成分波の周波数の和の干渉により、低周波数側のエネルギーはピーク周波数近傍の2つの線型成分波の周波数の差の干渉により生じたものであることが分かる。また、実部と虚部を比べると、 $G(f_1, f_2)$ の虚部からの寄与は実部に比べるとかなり小さいことが分かる。

図-39 に見られる $S^{(2)}(f)$ の低周波数側の過小評価の

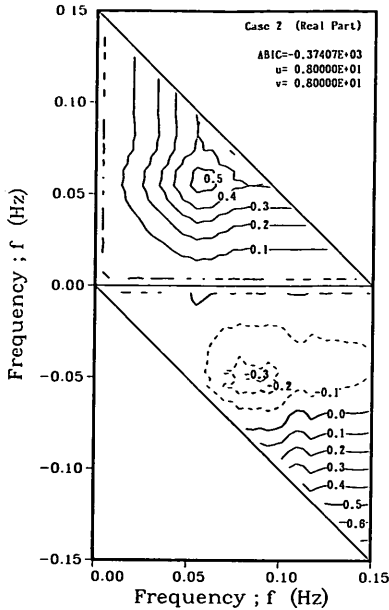


図-48 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (実部)

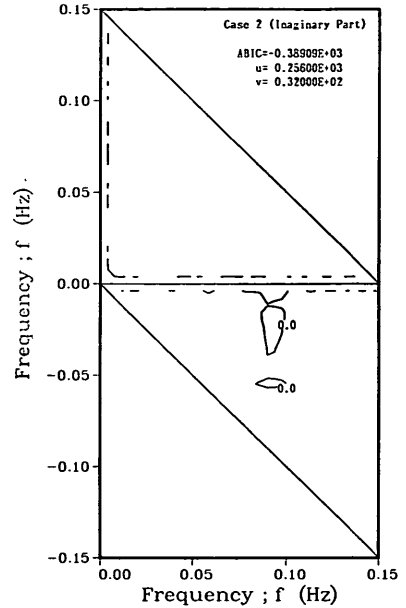


図-49 $K(f_1, f_2)$ の推定値 (虚部)

原因を調べるために、図-39の $S^{(1)}(f)$ および図-40と図-41の $G(f_1, f_2)$ を用いて式(4)によりバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ を逆推定した結果が図-46と図-47である。図-46と図-47の $B(f_1, f_2)$ はほぼ完全に元のバイスペクトル(図-33と図-34)を再現しており、このことから、図-33と図-34のバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ に含まれていた2次の非線型効果は、図-40と図-41の $G(f_1, f_2)$ 中で妥当に評価し得ていたものと推察される。したがって、

図-39に見られる $S^{(2)}(f)$ の低周波数側の過小評価は本方法の不備によるものではなく、観測して得られたバイスペクトルそのものの特性によるものと推察される。

次に、図-33と図-34で与えられた $B(f_1, f_2)$ は、ある確率母集団の1つのサンプルであるという立場で考える。この場合、 $B(f_1, f_2)$ の標準偏差は、7.5の5)で求めた生のバイスペクトルの平均値回りの誤差の標準偏差に比例すると考えられる。そこで、式(4)中の関数 $H(\omega_1, \omega_2)$ として7.1の5)で求めた生のバイスペクトルの誤差の標準偏差(図-35と図-36)を用いて上記と同じ解析を実施した。

図-48および図-49はこのようにして推定された $K(f_1, f_2)$ の実部および虚部の推定値を示したものである。図-37および図-38に比べてかなり滑らかな推定値が得られており、特に虚部はその定義域内ではほとんど0に近い値を示している。

図-50および図-51と図-52はそれぞれ $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ を分離した結果および $G(f_1, f_2)$ の実部と虚部を示したものである。図-50と図-39を比べると、両図に若干の相違は認められるものの、ほぼ同様な推定結果となっている。一方、図-51および図-52と図-40および図-41を比べると、両図とも同じ等高値を設定して等値線を図化したにもかかわらず、図-51と図-52ではかなり単純な形状となっている。特に虚部はその定義域内全体で0に近い値を示している。なお、これらの図においても、

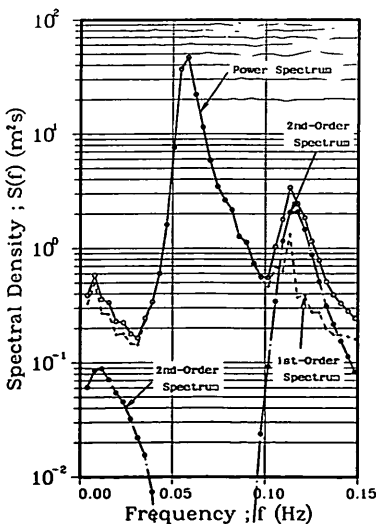


図-50 $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ の分離

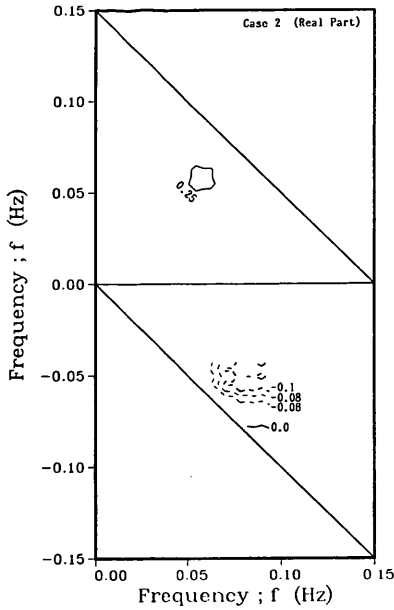


図-51 $G(f_1, f_2)$ の推定値 (実部)

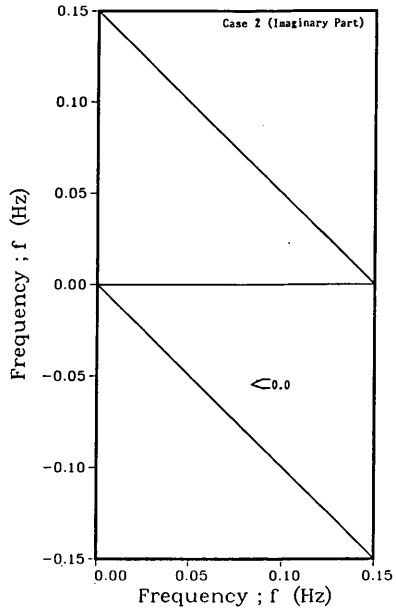


図-52 $G(f_1, f_2)$ の推定値 (虚部)

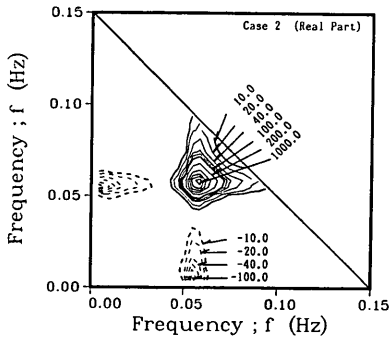


図-53 $G(f_1, f_2)$ の逆推定値 (実部)

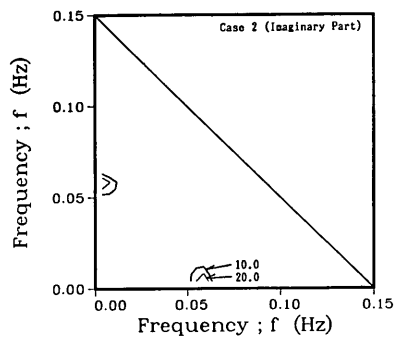


図-54 $G(f_1, f_2)$ の逆推定値 (虚部)

図-40および図41と同様の理由により、 $0.03 < |f| < 0.10$ (Hz) の範囲でのみ $G(f_1, f_2)$ を推定し、図化しているため、全体の傾向は把握できない。

図-53と図-54は、図-49と図-47と同様に、図-50の $S^{(1)}(f)$ および図-51と図-52の $G(f_1, f_2)$ を用いて式(4)によりバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ を逆推定した結果を示したものである。図-53に示すバイスペクトルの実部はほぼ元のバイスペクトル(図-33)を再現しているものの、図-46に比べて若干なまった形の推定値となっている。一方、図-54に示すバイスペクトルの虚部は元のバイスペクトル(図-34)を再現し得ておらず、全領域で0に近い値となっている。これは前記のように与えられた情報に誤差が含まれるものとして関数 $H(\omega_1, \omega_2)$ を便宜

的に導入したためであり、観測されたバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ の虚部は、それに含まれている情報に対して誤差が大きいためと推察される。

このように、関数 $H(\omega_1, \omega_2)$ をどのように選択するかは、与えられたバイスペクトルの情報をどのように解釈して扱うのかに依存する。何れにせよ、より滑らかな非線型核関数 $G(f_1, f_2)$ を推定し、その特性を理解しようとする場合には、ここで用いた $H(\omega_1, \omega_2)$ の選択も1つの方法であろう。

8. ベイズ型モデルを用いた非線型核関数の数値的推定法に関する注釈

5. では式(2)~(3)より非線型核関数を推定する方法につ

いて述べた。しかしながら、これらの式を $G(\omega_1, \omega_2)$ について解くことはもともと不完全な（未知数の数が方程式の数よりも多い）逆問題であり、無数の解が解として存在することから、通常用いられる数学的手法によっては唯一の解を特定できない。この意味では、ここで述べた方法により得られた解が真の解の良い近似であるという保証は何処にもない。

しかしながら、5. で述べた方法では、解を特定するために合理的かつ柔軟な事前分布の条件を付加し、また ABIC 最小化法を用いた。対象としている問題の解が実際に連続的な滑らかな曲面を構成しており、また、5. の定式化で用いた図-4の格子間隔が十分に小さいならば、事前分布として用いた式(9)は真の解の近似を表現し得ると期待できよう。特に図-4の格子間隔が無限に小さいならば、式(9)の条件はいかなる2次元の1価関数をも表現できることから、式(9)を与えられた方程式に付加しても何ら問題はないと思われる。逆に言えば、図-4の格子間隔の大きさは、ここで述べた推定法の近似精度に多大の影響を及ぼすことが示唆される。

一方、ABIC は統計学における Bayes の定理および尤度の概念を用いて開発された規準である。もし与えられたデータが十分に信頼し得るデータであり、また図-4の格子間隔が十分に小さいならば、ここで用いた事前分布と ABIC 最小化法の組み合わせは、解の尤度と解の滑らかさのバランスから、無数に存在する解の内、与えられた方程式を十分に満足し、かつ最も単純な幾何学的構造を持つ解を特定する傾向がある。与えられた方程式を満たす最も単純な構造を持つ解を特定することは、換言すれば、与えられた情報以外の情報が混入することを防ぐことができるということでもあり、この意味では、ここで述べた方法は情報論の意味において妥当な方法であると言えよう。しかしながら、与えられたデータに十分な信頼性がない場合、ここで述べた方法は事前分布のみに強く依存して解を特定する傾向があり、また図-4の格子間隔が解を近似するのに不適切な大きさであれば、事前分布の合理性、柔軟性は失われ、不合理な解が推定される可能性がある。

なお、本論文ではあまり検討しなかったが、図-4の定義域の境界上でどのような事前分布を与えるべきかは、まだあまり明確ではない。この境界上の事前分布の与え方が解の値全体に多大の影響を持つことを付記しておく。

また、5. では式(9)により定義された関数 $K(\omega_1, \omega_2)$ を導入して非線型核関数の推定理論の定式化を行った。しかしながら、ベイズ型モデルを用いた同様の推定理論の定式化は他にも幾つかの方法が可能である。例えば、次

の手順によっても非線型核関数を推定できる。

- 1) 観測して得られた $S(\omega)$ を線型成分波のパワースペクトル $S^{(1)}(\omega)$ の第1近似値であるとして、式(4)に 5.1 で述べたベイズ型モデルを適用し、 $G(\omega_1, \omega_2)$ の第1近似値を推定する。
- 2) 1)で得られた $G(\omega_1, \omega_2)$ の第1近似値を用い、また、 $S(\omega)$ を $S^{(1)}(\omega)$ の初期値として、式(6)および式(7)に 5.2 で述べた逐次近似法を適用して $S^{(1)}(\omega)$ の第2近似値を推定する。
- 3) 2)で得られた $S^{(1)}(\omega)$ の第2近似値を用いて1)と同じ処理を実施し、 $G(\omega_1, \omega_2)$ の第2近似値を推定する。
- 4) 3)で得られた $G(\omega_1, \omega_2)$ の第2近似値を用い、また、2)で得られた $S^{(1)}(\omega)$ の第2近似値を $S^{(1)}(\omega)$ の初期値として、式(6)および(7)に 5.2 で述べた逐次近似法を適用して $S^{(1)}(\omega)$ の第3近似値を推定する。
- 5) 以後、 $G(\omega_1, \omega_2)$ が適当な収束条件を満足するまで同じ手順を繰り返し、最終的に得られた $S^{(1)}(\omega)$ 、 $S^{(2)}(\omega)$ および $G(\omega_1, \omega_2)$ を最適な推定値とする。

本研究の初期の段階においては、上記の推定手法により非線型核関数を推定した。また、数値シミュレーション結果によれば、この方法の方が推定精度が良く、図-13の低周波数側に見られる $S^{(2)}(f)$ の過大評価も、この方法の場合には発生しない。しかしながら、この方法の場合、5.1 で述べた格子探索法を用いるベイズ型モデルの数値計算を繰り返して実施する必要がある、かなりの計算時間を消費する。一方、5. で述べた方法によれば、格子探索法によるベイズ型モデルの数値計算は最初の1回

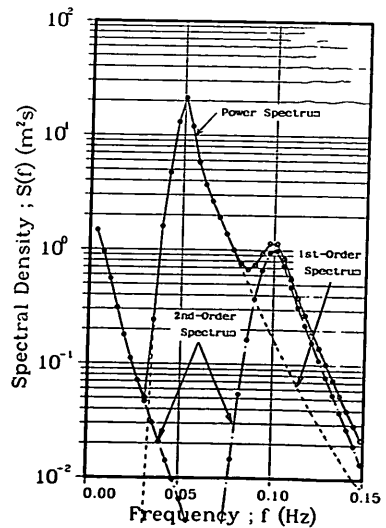


図-55 $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ の分離

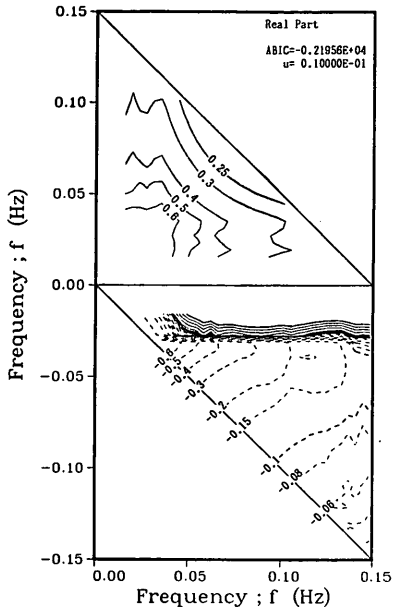


図-56 $G(f_1, f_2)$ の推定値

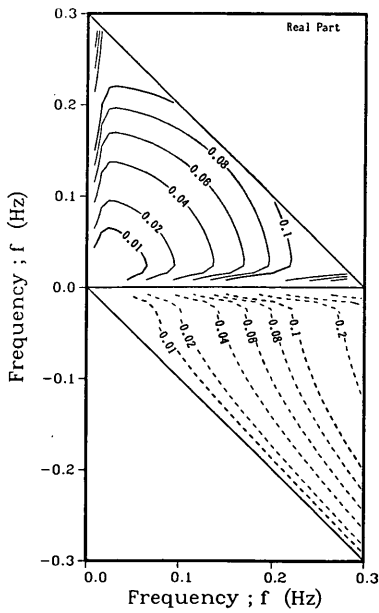


図-57 非線型核関数 $G(f_1, f_2)$ の理論値
(水深1000m, 一方向波浪)

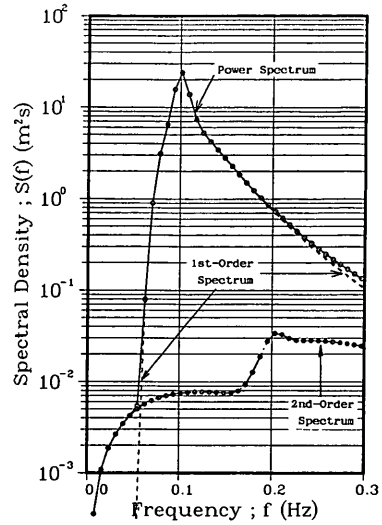


図-58 $S(f), S^{(1)}(f), S^{(2)}(f)$ の理論値

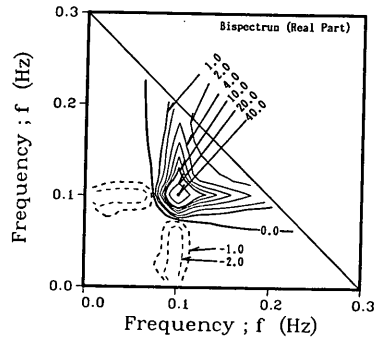


図-59 バイスpekトル $B(f_1, f_2)$ の理論値

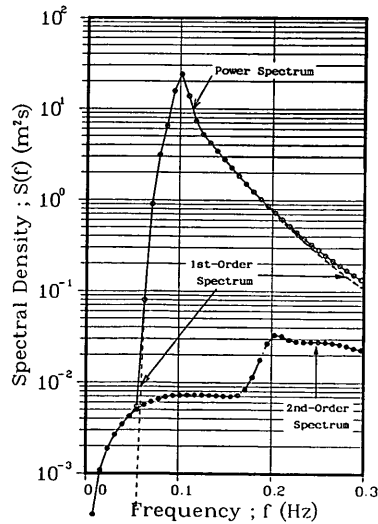


図-60 $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ の分離

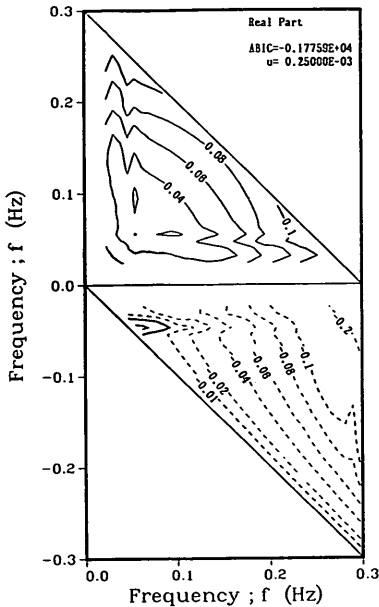


図-61 $G(f_1, f_2)$ の推定値

だけでよい。これが、推定精度は劣るものの、あえて式(27)で関数 $K(\omega_1, \omega_2)$ を定義し、5. に述べた推定理論の定式化を行った理由である。

参考のために、図-55と図-56に本節で述べた別解法により推定した結果を示す。図-55は $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ を分離した結果であり、図-56は $G(f_1, f_2)$ の推定値である。図-13と図-55を比べ、あるいは図-14と図-56を比べてここで述べた方法の方が推定精度が良いことが分かる。

また、図-57～図61は JONSWAP 型のパワースペクトルの深海波を対象として、本節で述べた方法の妥当性を検討したものである。図-57は Tick の理論により計算した非線型核関数の理論値 $G(f_1, f_2)$ を、図-58は $S(f)$ 、 $S^{(1)}(f)$ および $S^{(2)}(f)$ の理論値を、また、図-59は $S^{(1)}(f)$ および $G(f_1, f_2)$ を用いて式(24)より求めたバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ の理論値を示している。図-60および図-61は図-58中の $S(f)$ および図-59の $B(f_1, f_2)$ をもとに、本節で述べた1)～5)の手順により $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ を分離した結果および $G(f_1, f_2)$ の推定値を示したものである。水深20mの浅海波を対象とした図-55～図-56よりもさらに推定精度が高いことが分かる。

9. あとがき

本報告では、式(27)～(29)をもとに海洋波浪の非線型核関

数を数値的に推定する方法について述べた。しかしながら、式(27)～(29)を非線型核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ について解くことはもともと不完全な逆問題であり、数学的に厳密に解くことはできない。この意味ではここで述べた方法により推定された解の妥当性を証明することはできない。しかしながら、ある種の主観的要素を含む統計モデルを媒介として、観測データから対象の構造に関する情報を引き出すことはあらゆる実験科学に共通の要素でもあり、この意味では、ここで述べた方法による非線型核関数の数値的推定法は、現段階においては妥当な方法であろう。

本報告では、非線型核関数の数値的推定法の妥当性を確かめるために、Tick により導かれた等水深の1方向不規則波浪の非線型核関数を用いて検討した。本方法の一般的な適用性を確かめるためには、多方向不規則波浪場あるいはより複雑な波浪場を対象として、理論的に導かれた非線型核関数を用いて数値シミュレーションを実施し、種々検討する必要がある。

スペクトル解析結果を用いた応用技術は、港内静穏度計算や浮体の動揺計算をはじめとして、多くの応用がある。本報告で述べた海洋波浪の非線型核関数の数値的推定法は、自然現象を解明するための1つの便宜的道具として位置付けることができ、従来のスペクトル解析法の拡張と見なすこともできる。この意味では、本方法を用いることにより得られた結果を、従来のスペクトル解析結果を用いた応用技術に適用することにより、より現実に即した形で、多くの応用に活用できる可能性がある。

本報告で述べた研究の一部は、著者が米国工兵隊水路実験場 (WES) の海岸工学研究センター (CERC) に滞在中に実施したものである。この間、CERC の多くのの方々、特に Gary L. Howell 氏、Nicholas C. Kraus 博士、Joon P. Rhee 博士には、多くの御指導、助言を頂いた。言葉の不自由な外国で何の不自由もなく本研究を円滑に実施し得たのも、ひとえに彼らをはじめ CERC の人々の温かい御支援のおかげである。また、本報告で用いた現地観測データは合田良実教授 (横浜国立大学) の提供によるものである。合田良実教授には、教授が渡米の折に、本研究に関して適切な助言も頂いた。これらの方々に対し、ここに記して深甚の謝意を表します。

(1990年6月30日受付)

参考文献

- 1) Tick, L. J.: A non-linear random model of gravity waves I, *J. Math. and Mech.*, Vol. 8, No. 3, 1959, pp. 643-652.
- 2) Tick, L. J.: Nonlinear probability models of

- ocean waves, *Ocean wave spectra*, Prentice Hall, 1963, pp. 163-169.
- 3) Hasselmann, K., W. Munk and G. MacDonald: Bispectra of ocean waves, in *Time Series Analysis* (ed. M. Rosenblatt), John Wiley, 1963, pp. 125-139.
 - 4) Hamada, T.: The secondary interactions of surface waves, *Rept. Port and Harbour Res. Inst.*, No. 10, 1965, 28p.
 - 5) Masuda, A., Yi-Yu Kuo and H. Mitsuyasu: On the dispersion relation of random gravity waves, Part 1. Theoretical framework, *J. Fluid Mech.*, Vol. 92, Part 4, 1979, pp. 717-730.
 - 6) Masuda, A. and Yi-Yu Kuo: A note on the imaginary part of bispectra, *Deep-Sea Res.*, Vol. 28A, No. 3, 1981, pp. 213-222.
 - 7) 浜中健一郎・川崎 清: 浅海不規則波の波動解について, 第27回海岸工学講演会論文集, 1980年, pp. 16-19.
 - 8) 浜中健一郎・佐藤典之: 不規則波の非線型浅水変形について, 第31回海岸工学講演会論文集, 1984年, pp. 138-142.
 - 9) 柿沼忠男・石田 昭・門司剛至: 記録にもとづく海岸波浪の非線型性の解析, 第15回海岸工学講演会論文集, 1968年, pp. 73-79.
 - 10) 永田 豊: スペクトル解析の概念と海洋学における時系列解析, *海洋物理学II* (寺本俊彦監修), 東京大学出版会, 1976年, 251p.
 - 12) 日野幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店, 1977年, 300p.
 - 12) 坂元慶行: カテゴリーカルデータのモデル分析, 共立出版株式会社, 1985年, 221p.
 - 13) Akaike, H.: Likelihood and Bayes procedure, *Bayesian Statistics* (Bernardo, J. M., De Groot, M. H., Lindley, D. U. and Smith A. F. M. eds.), University Press, Valencia, 1980, pp. 143-166.
 - 14) 田辺國士・田中輝雄: ベイズモデルによる曲線・曲面のあてはめ, *月刊地球*, Vol. 5, No. 3, 1983年, pp. 179-186.
 - 15) 橋本典明: ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, *港湾技術研究所報告*, 26巻, 2号, 1987年, pp. 97-125.
 - 16) 橋本典明・小舟浩治: ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 一入・反射波共存場を対象として, *港湾技術研究所報告*, 26巻, 4号, 1987年, pp. 97-125.
 - 17) Hashimoto, N., K. Kobune and Y. Kameyama: Estimation of Directional Spectrum using the Bayesian Approach, and its Application to Field Data Analysis, *Rept. Port and Harbour Res. Inst.*, Vol. 26, No. 5, 1987, pp. 57-100.
 - 18) 橋本典明・小舟浩治・亀山 豊: 現地観測データを用いた方向スペクトル推定法に関する検討, *港湾技術研究所報告*, 27巻, 2号, 1988年, pp. 59-94.
 - 19) Goda, Y.: Analysis of wave grouping and spectra of long-travelled swell, *Rept. Port and Harbour Res. Inst.*, Vol. 22, No. 1, 1983, pp. 3-41.
 - 20) 山川新二: ベイスベクトルによる波形のくせのはあ

く, 日本機械学会論文集(第1部), 第41巻, 第345号, 1975年, pp. 1394-1404.

主要記号一覧表

ABIC	: 赤池のベイズ型情報量規準
A, B	: 既知数から構成される行列
$B(\omega_1, \omega_2)$: バイスベクトル
d	: 水深
$dZ(\omega)$: 角周波数 ω の成分波の複素振幅
$dZ^{(n)}(\omega)$: 角周波数 ω の n 次の非線型成分波の複素振幅
D, D_u, D_o	: 作用行列
E	: 誤差 ε から構成される行列
f	: 周波数
f_p	: ピーク周波数
g	: 重力加速度
$g(\tau_1, \tau_2)$: 非線型核関数の逆 Fourier 変換値
$G(\omega_1, \omega_2)$: 非線型核関数
H_s	: 有義波高
$H(\omega_1, \omega_2)$: 滑らかな非線型核関数を推定するために便宜的に導入した関数
i, j	: 序数
k	: 波数
$K(\omega_1, \omega_2)$: 非線型核関数を推定するために便宜的に導入した関数
$L(\cdot)$: 尤度
$p(\cdot)$: 確率密度関数
$p(\cdot \cdot)$: 条件付確率密度関数
$S(\omega)$: パワースペクトル
$S^{(1)}(\omega)$: 線型成分波のパワースペクトル
$S^{(n)}(\omega)$: n 次の非線型成分波のパワースペクトル
t	: 時間
T_s	: 有義波周期
u, v	: 超パラメータ
X	: 未知数から構成される行列
$x_{i,j}$: X の (i, j) 要素
Δf	: 周波数間隔
ε	: 摂動展開の微小パラメータ
$\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$: 誤差
$\eta(t)$: 水面変動量
$\eta^{(n)}(t)$: n 次オーダーの水面変動量
λ	: 角周波数
σ	: 誤差の標準偏差
τ	: 時間の遅れ (タイム・ラグ)
ω	: 角周波数