

運輸省港湾技術研究所

# 港湾技術研究所 報告

---

---

REPORT OF  
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH  
INSTITUTE  
MINISTRY OF TRANSPORT

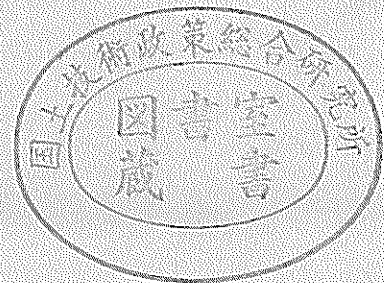
---

VOL. 24

NO. 3

SEPT. 1985

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



# 港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第24巻 第3号 (Vol. 24, No. 3), 1985年9月 (Sept. 1985)

## 目 次 (CONTENTS)

1. Characteristics of Ocean Waves off Cape Nojima in the Northwestern Pacific, Measured with a Discus Buoy  
..... Koji KOBUNE, Hiroshi SASAKI and Noriaki HASHIMOTO ..... 3  
(ディスクス・ブイで観測された野島崎沖海域の波浪特性  
.....小舟浩治・佐々木弘・橋本典明)
2. Decay of Mechanically Generated Waves in an Opposing Wind  
.....Hiroichi TSURUYA, Shin-ichi YANAGISHIMA  
and Yoshikuni MATSUNOBU.....31  
(逆風による波の減衰に関する実験的研究.....鶴谷広一・柳嶋慎一・松延嘉國)
3. Development of PHRI Geotechnical Centrifuge and its Application  
..... Masaaki TERASHI.....73  
(遠心力載荷装置の開発とその適用.....寺師昌明)
4. 最大エントロピー原理 (MEP) を用いた方向スペクトルの推定  
..... 橋本典明・小舟浩治 ..... 123  
(Estimation of Directional Spectra from the Maximum Entropy Principle  
.....Noriaki HASHIMOTO and Koji KOBUNE)
5. 底質 COD の測定における前処理と加熱処理.....堀江 毅・関根好幸..... 147  
(Pre-treatment and Heat Processing on Sediment COD Measurement  
.....Takeshi HORIE and Yoshiyuki SEKINE)
6. コンクリート中の鉄筋の腐食に及ぼす塩素の影響に関する研究  
..... 大即信明..... 183  
(Research on the Influence of Chloride on Corrosion of the Embedded Steel  
Bars in Concrete .....Nobuaki OTSUKI)
7. 土運船運航計画手法の開発 ..... 奥山育英..... 285  
(Barge Traffic Systems Planning in a Large-Scale Reclamation  
..... Yasuhide OKUYAMA)

## 4. 最大エントロピー原理 (MEP) を用いた 方向スペクトルの推定

橋本 典明\*・小舟 浩治\*\*

### 要 旨

海の波の基本的性質を表示するために、波のエネルギーが周波数および方向角に対して分布している状態を表示する方向スペクトルが用いられる。方向スペクトルを推定する方法としては既に種々の方法が提案されているが、方向分解能の良い方向スペクトルを推定するためには、一般に多数の波動量の同時計測記録が必要である。しかしながら、実際の観測では少数の観測記録しか入手できないのが常であり、少ない観測記録から精度の良い方向スペクトルを推定する方法を開発する必要がある。

そこで著者らは簡便かつ実用的な波向観測手法を対象として、3成分観測データ（鉛直成分および水平2成分）から方向スペクトルを推定する方法を検討し、新たに不確定さの尺度であるエントロピーの概念を導入して、最大エントロピー原理から方向スペクトルを推定する方法を開発した。また、本方法を数値シミュレーションおよび現地観測データに適用することにより、その有効性を検討した。

得られたおもな結果は次のとおりである。

- ① 本方法は従来方向スペクトル推定法に比べて、最も高い分解能を有している。
- ② 本方法は一方向波浪のみならず二方向波浪の識別が可能である。
- ③ 本方法は風波、あるいは風波とうねりが重なり合った波浪場での方向スペクトル推定法として適用可能である。

\* 水工部 高潮津波研究室

\*\* 水工部 海象観測研究室長

#### 4. Estimation of Directional Spectra from the Maximum Entropy Principle

Noriaki HASHIMOTO\*

Koji KOBUNE\*\*

##### Synopsis

In recent years, engineers are becoming more and more familiar with the concept of directional spectrum which expresses the energy distribution as a function of wave frequency and wave propagation direction. It is fairly popular now to analyze wave spectra in order to clarify the fundamental properties of sea waves.

So far, several methods for the estimation of directional spectra utilizing various types of ocean wave sensors have been proposed. However, in general, to obtain the accurate estimate of a directional spectrum by using those methods, a set of simultaneous records from a large number of wave sensors are mobilized in the field observation. Therefore, it is of great importance to enable an accurate estimate of a directional spectrum from a small number of wave sensors.

In this report, the methods for estimating directional spectra from simultaneous measurement of three-quantities related to random wave motions are discussed, and a new method with the use of maximum entropy principle is proposed. The proposed method is examined for numerical model and field wave data, and validity of the method is also discussed in this report.

The major conclusions are as follows.

- 1) The proposed method can be applied for the three-element wave records.
- 2) It yields a better estimate than others.
- 3) It can recognize well not only a unimodal angular distribution but also bimodal one.
- 4) It can be applied for various sea conditions of wind waves alone and combinations of wind waves and swell, except the case that the angular spreading is very narrow such as in the case of long-traveled swell.

---

\* Member of Storm Surge and Tsunami Laboratory, Hydraulic Engineering Division.

\*\* Chief of Coastal Observation Laboratory, Hydraulic Engineering Division.

## 目 次

要 旨	123
1. ま え が き	127
2. 方向スペクトルの推定理論	127
2.1 方向スペクトルとクロス・スペクトルの関係	127
2.2 既往の方向スペクトル推定理論	128
2.3 方向スペクトル推定における最大エントロピー原理の導入	130
2.4 最大エントロピー原理を用いた方向スペクトル推定式の数値解法	131
3. 最大エントロピー原理を用いた方向スペクトル推定法の検討	132
3.1 数値シミュレーションによる検討	132
3.2 現地観測データへの適用	137
4. 結 論	142
参 考 文 献	143
主 要 記 号 表	143
付 録	144

## 1. まえがき

海の波は不規則である。このため、その特性を把握するためにスペクトルの概念を用いることが一般的である。周波数スペクトルについては既に多くの調査・研究が行われており、スペクトル構造もかなりのところまで明らかになってきた。十分に発達した風波のスペクトル形、発達過程のスペクトル形など、いくつかの標準形が提案されているほか、スペクトルにおける平衡領域、発達過程における overshoot-undershoot の現象、あるいは非線型相互作用の機構など、かなり微細な領域にまで研究が進んでいる。

一方、波浪の本質的な構造を表す方向スペクトルについてはいまだ十分に調査・研究されているとはいえない。これは方向スペクトルの観測が多大な労力と費用を必要とするためである。波浪の発生・発達・減衰の各段階を支配するメカニズムの解明、あるいは港湾構造物の設計などの実用的な問題に対しても、方向スペクトルに関する知識が不可欠であることが指摘されており、方向スペクトルに関する調査・研究は、今後、精力的に取り組まなければならない重要な課題の一つである。

方向スペクトルを測定する方法はこれまでもいくつか提案されている。波高計群、流速計、波浪観測ブイなどを用いる直接測定法、あるいは写真や電波を利用するリモートセンシング法などがある<sup>1)</sup>。また、これらの測定方法に応じて種々の方向スペクトル推定法が提案されている。例えば直接測定法に適用可能なものとして、直接フーリエ変換法 (Direct Fourier Transform Method または DFT)<sup>2)</sup>、パラメータ法<sup>3)</sup>、分布関数あてはめ法<sup>4)</sup>、最ゆう法 (Maximum Likelihood Method または MLM)<sup>5)</sup>、拡張最ゆう法 (Extended Maximum Likelihood Method または EMLM)<sup>6)</sup> などの方法がある。

これらの方法を用いて方向スペクトルを推定する場合、方向分解能の良い方向スペクトルを求めるためには、一般に多数の波動量の同時観測記録が必用である。しかしながら、実際の海域において長期間定常的に観測を行う場合、観測方法も限られ、少数の観測記録しか入手できないのが常であり、少ない観測記録から精度の良い方向スペクトルを推定する方法を開発する必要がある。

そこで著者らは、簡便かつ実用的な定常的波向観測手法としての波高計と流速計の組み合わせ、あるいはブイに搭載された加速度計と傾斜計の組み合わせなどから得られる 3 成分観測データ (鉛直成分および水平 2 成分の波動量の同時観測記録) から方向スペクトルを推定する

方法を対象として検討を行った。

本報告では、従来の方向スペクトルの推定法を概説するとともに、新たに不確定さの尺度であるエントロピーの概念を用いて、最大エントロピー原理 (Maximum Entropy Principle または MEP)<sup>7),8)</sup> から方向スペクトルを推定する方法について報告する。また、本方法を数値シミュレーションおよび現地観測データに適用することにより、その有効性を検討した結果について報告する。

## 2. 方向スペクトルの推定理論

### 2.1 方向スペクトルとクロス・スペクトルの関係

水面変動を含む任意の波動量、例えば水面勾配、水面曲率、水粒子速度、圧力変動などを含む一般波動量相互間のクロス・スペクトルと方向スペクトルの関係を表す一般式は磯部ら<sup>9)</sup> によって導かれており、次式で表される。

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\sigma) = & \int_k H_m(k, \sigma) H_n^*(k, \sigma) \\ & \times \exp\{-ik(x_n - x_m)\} S(k, \sigma) dk \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $\Phi_{mn}(\sigma)$  は平面座標  $x=x_m$  および  $x_n$  において計測された任意の波動量間のクロス・スペクトル、 $\sigma$  は角周波数、 $k$  は波数ベクトル、 $S(k, \sigma)$  は波数・周波数スペクトル、 $i$  は虚数単位であり、 $*$  は共役複素数を表す。また、 $H(k, \sigma)$  は水面変動から任意の波動量への伝達関数であり、一般に次のように表すことができる。

$$H(k, \sigma) = (\cos \theta)^\alpha (\sin \theta)^\beta h(k, \theta) \quad (2)$$

式(2)中の  $\alpha, \beta, h$  をおもな波動量に対して示したものが表-1 である<sup>9)</sup>。

式(1)は定点計測によって得られた複数の波動量の同時計測記録を用いて方向スペクトルを算定する際の最も基本的な関係式である。すなわち、式(1)を満足し、かつ非負であるような関数  $S(k, \sigma)$  が求められるならば、これが波数・周波数スペクトルである。

方向スペクトル  $S(f, \theta)$  は、分散関係式

$$\sigma^2 = (2\pi f)^2 = gk \tanh kd \quad (3)$$

により、 $\sigma$  から波数の絶対値  $k$  が一義的に決定されることを前提として、波数・周波数スペクトル  $S(k, \sigma)$  を、周波数  $f$  と波向  $\theta$  の関数として表現することによって得られる。

しかしながら、方向スペクトル  $S(f, \theta)$ 、あるいは波数・周波数スペクトル  $S(k, \sigma)$  は、平面上で十分密に

表-1 主な波動量の水面変動に対する伝達関数  
(文献<sup>9)</sup>より抜粋)

項目	記号	$h(k, \sigma)$	$\alpha$	$\beta$
水面変動	$\eta$	1	0	0
水圧変動	$p$	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kd}$	0	0
水面鉛直加速度	$\eta_{uu}$	$-\sigma^2$	0	0
水面勾配(x)	$\eta_x$	$ik$	1	0
” (y)	$\eta_y$	”	0	1
水粒子速度(x)	$u$	$\sigma \frac{\cosh kz}{\sinh kd}$	1	0
” (y)	$v$	”	0	1
” (z)	$w$	$-i\sigma \frac{\sinh kz}{\sinh kd}$	0	0

$k$ : 波数,  $\sigma$ : 角周波数,  $d$ : 水深,  $z$ : 底面からの高さ,  
 $\rho$ : 流体の密度,  $g$ : 重力加速度,

配置された無数の点における波動量の同時計測記録が与えられている場合には一義的に確定するが、限られた少数の波動量の計測記録のみでは、関数を決定する条件が不足しているため無数の関数が解として存在し、方向スペクトルあるいは波数・周波数スペクトルを特定することはできない。

### 2.2 既往の方向スペクトル推定理論

方向スペクトルの推定法として既に提案されているもの、すなわち、DFT法<sup>2)</sup>、パラメータ法<sup>3)</sup>、Longuet-Higginsらの方法<sup>9)</sup>(以下、LHMと呼称する)、分布関数あてはめ法<sup>4)</sup>、MLM<sup>5)</sup>、EMLM<sup>6)</sup>等の推定法はすべて式(1)を基本とし、便宜的に何らかの仮定や近似を用いて、方向スペクトルの推定値を特定している。しかしながら、それぞれの推定法で用いられている仮定や近似の方法の違いにより、得られる推定値もそれぞれ異なり、計算の簡便さ、分解能などの面で、それぞれの特徴を有している。

以下では、特に3成分観測データ(鉛直成分および水平2成分の波動量の同時観測記録)から方向スペクトルを推定可能な方法を対象として、その概要および特徴を述べる。

ブイに搭載された加速度計と傾斜計の組み合わせ、あるいは同一地点に設置された波高計と流速計の組み合わせなどのように  $x_m = x_n$  の場合を対象として、式(2)を式(1)に代入し、さらに変数を  $(k, \sigma)$  から  $(f, \theta)$  へ座標変換すると、式(1)は次式のように表される。

$$\frac{2\phi_{mn}(f)}{h_m(f)h_n^*(f)S(f)} = \int_0^{2\pi} G(\theta|f) (\cos\theta)^{\alpha_m+\alpha_n} (\sin\theta)^{\beta_m+\beta_n} d\theta \quad (4)$$

ここに、 $\phi_{mn}(f)$  は周波数表示のクロス・スペクトル、 $h(f)$  は式(3)の分散関係式を用いて、表-1に示された関数  $h(k, \sigma)$  を  $f$  の関数として書き表したものである。また、 $S(f)$  は周波数スペクトル、 $G(\theta|f)$  は周波数  $f$  における方向分布関数であり、方向スペクトル  $S(f, \theta)$  と次の関係が成立するものとする。

$$S(f, \theta) = S(f)G(\theta|f) \quad (5)$$

例えば、3成分の波動量として、水面変動  $\eta$ 、2成分水面勾配  $\eta_x$  および  $\eta_y$  を用いる場合には、式(4)より次の関係式が求まる。

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f)\alpha_i(\theta)d\theta = \beta_i \quad (6)$$

( $i = 0, 1, \dots, 4$ )

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0(\theta) &= 1 \\ \alpha_1(\theta) &= \cos\theta \\ \alpha_2(\theta) &= \sin\theta \\ \alpha_3(\theta) &= \cos 2\theta \\ \alpha_4(\theta) &= \sin 2\theta \\ \beta_0 &= 1 \\ \beta_1 &= \frac{Q_{12}(f)}{kC_{11}(f)} \\ \beta_2 &= \frac{Q_{13}(f)}{kC_{11}(f)} \\ \beta_3 &= \frac{C_{22}(f) - C_{33}(f)}{k^2 C_{11}(f)} \\ \beta_4 &= \frac{2C_{23}(f)}{k^2 C_{11}(f)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 $C_{ij}(f)$ 、 $Q_{ij}(f)$  はそれぞれ、 $(\eta, \eta_x, \eta_y) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  とした場合のコ・スペクトルおよびクロドラチャ・スペクトルであり、次式により求められる。

$$C_{ij}(f) - iQ_{ij}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ij}(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \quad (8)$$

ここに、 $\phi_{ij}(\tau)$  は共分散関数であり、次式

$$\phi_{ij}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi_i(t)\xi_j(t+\tau) dt \quad (9)$$

で定義される。

3成分の波動量として、他の波動量を用いる場合にも、式(6)と同様な関係式が得られる。

(1) Longuet-Higginsらの方法(LHM)<sup>9)</sup>

方向スペクトル  $S(f, \theta)$  が次のようなフーリエ級数で

表示できるものと仮定する。

$$\hat{S}(f, \theta) = \frac{1}{2} A_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(f) \cos n\theta + B_n(f) \sin n\theta] \quad (10)$$

この式を式(6)に代入して演算すると、フーリエ係数のうち  $n=0, 1, 2$  のものがコ・スペクトルおよびクオドラチャ・スペクトルの関数として、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} A_0(f) &= \frac{2}{\pi} C_{11}(f) \\ A_1(f) &= \frac{2}{\pi k} Q_{12}(f) \\ A_2(f) &= \frac{2}{\pi k^2} [C_{22}(f) - C_{33}(f)] \\ B_1(f) &= \frac{2}{\pi k} Q_{13}(f) \\ B_2(f) &= \frac{4}{\pi k^2} C_{23}(f) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

このように、3成分の波動量のみを用いる場合には、本来、無限級数で表されるものが、 $n=2$  までの項しか決定できず、真の値とは異なる推定値が得られることになる。このため、Longuet-Higgins らは項数打ち切りによる推定誤差を小さくするために、係数  $A_i, B_i$  に重み関数を掛けて次式により方向スペクトルを推定することを提案している。

$$\hat{S}(f, \theta) = \frac{1}{2} A_0 + \frac{2}{3} (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) + \frac{1}{6} (A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta) \quad (12)$$

この方法では、簡単な演算により方向スペクトルが得られるものの、方向スペクトルはかなり平滑化される。特にその傾向は重み関数を用いた場合に著しい<sup>4)</sup>。方向スペクトルを級数表示する方法は、あくまで便宜的なものであって、3成分観測データのように少ないデータから方向スペクトルを推定する方法としては、あまり好ましい方法ではない。なお、数値シミュレーションを用いた検討により、単峰型方向分布関数を推定する場合、そのピーク位置はおおむね正しいけれども、双峰型方向分布関数に対しては単峰型として算出してしまう等の性質を有していることが報告されている<sup>4)</sup>。

## (2) 分布関数あてはめ法

方向分布関数としてあらかじめ特性の明らかな関数を仮定し、その中に含まれるパラメータを算出する方法である。方向分布関数として種々の関数が提案されているが、山口<sup>4)</sup> は方向分布形状が Borgman<sup>10)</sup> により提案された円正規分布

$$\hat{G}(\theta|f) = \frac{\exp[\alpha \cos(\theta - \theta_0)]}{2\pi I_0(\alpha)} \quad (13)$$

に従うものとして、方向スペクトルの推定を行っている。ここに、 $\alpha$  は円正規分布の形状母数、 $\theta_0$  は波の主方向、 $I_0$  は0階の第1種変形 Bessel 関数である。式(13)の中の未知パラメータは Fourier 係数と次式の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{I_n(\alpha)}{\pi I_0(\alpha)} \cos n\theta_0 \\ b_n &= \frac{I_n(\alpha)}{\pi I_0(\alpha)} \sin n\theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、 $a_n$  および  $b_n$  は周波数スペクトルで無次元化した Fourier 係数、 $I_n$  は  $n$  階の第1種変形 Bessel 関数である。3成分観測データを用いて式(13)により方向スペクトルの推定を行う場合、未知数二つに対して、条件式が四つ存在する。このため、山口は式(14)において、 $n=1$  あるいは  $n=2$  として  $\alpha$  および  $\theta_0$  を別個に算出する方法、および次式で表される最小自乗法により  $\alpha$  および  $\theta_0$  を同時に推定する方法の両方を用いて、その適用性を検討している<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \alpha} &= 0 & \frac{\partial E}{\partial \theta_0} &= 0 \\ E &= \sum_{n=1}^2 \left[ \left\{ a_n - \frac{I_n(\alpha)}{\pi I_0(\alpha)} \cos n\theta_0 \right\}^2 + \left\{ b_n - \frac{I_n(\alpha)}{\pi I_0(\alpha)} \sin n\theta_0 \right\}^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

一方、双峰型方向スペクトルをも推定可能な方法として、Hasselmann ら<sup>11)</sup> は光易型方向分布関数<sup>13)</sup> を二つ組み合わせた次式を用いて、方向スペクトルの推定を行っている。

$$\left. \begin{aligned} \hat{G}(\theta|f) &= \lambda M(\theta, s_1, \alpha_1) + (1-\lambda) M(\theta, s_2, \alpha_2) \\ M(\theta, s, \alpha) &= N(s) \cos^2 s \left( \frac{\theta - \alpha}{2} \right) \\ N(s) &= \frac{1}{\pi} 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、 $s$  は波の方向集中度を表すパラメータ、 $\alpha$  は波の主方向、 $\Gamma$  は Gamma 関数である。この方法を用いる場合、未知数五つに対して、それを決めるべき条件式が四つしか存在しない。そこで Hasselmann らは、次の条件を付加して方向スペクトルの推定を行っている。

$$(s_1 - s_2)^2 \rightarrow \min \quad (17)$$



分布関数あてはめ法を用いて方向スペクトルを推定する方法は、従来の研究成果により広く支持された一般的な方向分布関数を用いているため、近似という意味では妥当な方法と言える。しかしながら、仮定された関数形以外の方向分布形状を表現できないため、詳細な波向の分布を知ろうとする場合には不適当である。また、式(16)の第1式に見られるように、独立した二つの方向分布関数を重ね合わせて用いる方法は、波の線性を考えると、物理的には適切な記述法である。しかしながら、未知数の数が条件式の数より多いために導入される付加条件のために、二つの方向分布関数の独立性は失われている。

### (3) 拡張最ゆう法 (EMLM)

EMLM は磯部<sup>9)</sup>により開発された方向スペクトル推定法であり、Capon<sup>5)</sup>により開発された MLM を、水面変動以外に、水粒子速度や水面傾斜などの任意の波動量の組み合わせから成る観測データに適用可能な形に拡張したものである。EMLM による方向スペクトルの推定式は次式で与えられる。

$$\hat{S}(k, \sigma) = \kappa / \left[ \sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1}(\sigma) H_m^*(k, \sigma) H_n(k, \sigma) \times \exp\{ik(x_n - x_m)\} \right] \quad (18)$$

ここに、 $\Phi_{mn}^{-1}(\sigma)$  は  $\Phi_{mn}(\sigma)$  から構成される行列の逆行列の  $mn$  成分である。また、 $\kappa$  は比例定数であり、

$$S_{\eta\eta}(\sigma) = \int_k \hat{S}(k, \sigma) dk \quad (19)$$

なる関係式が成立するように決められる。

EMLM の原理は基本的には MLM と同じであり、最適フィルター理論に基づいて開発された方法である。波高計群を用いた場合の MLM の適用性については山口<sup>10)</sup>、合田<sup>10)</sup>により議論されている。MLM あるいは EMLM は既に提案されている方向スペクトル推定法の中で、最も分解能の良い推定法であると言える。特に EMLM の場合、その汎用性からも、現地波浪データ解析に広く普及して行くものと思われる。しかしながら、3.で議論するように、3成分観測データを対象として種々の条件で EMLM を適用してみると、例えば、方向スペクトルのエネルギーが0の領域にも、いくつかのエネルギーが存在したり、あるいは、エネルギーのピーク付近でやや小さなエネルギーを与える等、精度のみを問題にすると、まだ検討すべき余地があるようである。これは式(18)の誘導過程において用いられている近似操作の影響によるものと思われる。

## 2.3 方向スペクトル推定における最大エントロピー原理の導入

限られた少数の波動量の同時計測記録から方向スペクトルを推定する場合には、多くの不確定な要素が存在する。前節の例に見られるように、従来の推定法では便宜的に何らかの仮定や近似を用いることにより、解を一義的に求めている。しかしながら、その基礎となる仮定や近似に関してはいくらかの問題点が残されたままである。

そこで、本節では上記問題点を解消し、さらに推定精度を高めるために、新たに、不確定さの尺度であるエントロピーの概念を導入して、最大エントロピー原理 (Maximum entropy principle; 以下 MEP と略記する) から方向スペクトルの推定式の定式化を行うこととした。エントロピーの概念を導入することは、解を一義的に求めるために導入される仮定や近似の物理的・理論的な妥当性の検討を必要とせず、与えられた情報に基づいて客観的に一義的な解が特定されるという利点を有している。

方向分布関数  $G(\theta|f)$  は非負、かつ

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta = 1 \quad (20)$$

であるから、 $[0, 2\pi]$  で定義される確率密度関数と考えることができる。したがって、確率密度関数の推定法としての最大エントロピー原理<sup>7), 8)</sup> が適用できることになる。この場合、エントロピーは次式で与えられる (付録)。

$$H = - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \ln G(\theta|f) d\theta \quad (21)$$

3成分観測データを対象とする場合の確率密度関数  $G(\theta|f)$  が具備すべき条件は、式(6)で与えられている。したがって、式(6)を制約条件として、式(21)で与えられるエントロピー  $H$  を最大にする  $G(\theta|f)$  を求めれば、これが最大エントロピー推定値  $\hat{G}(\theta|f)$  となる。これは、式(6)で与えられている情報以外の不確定要素ができるだけ一様となる  $G(\theta|f)$  を決定していることになる<sup>9)</sup>。

そこで、上記の問題をラグランジュの未定乗数法を用いて解く。ラグランジュ関数は

$$L = - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \ln G(\theta|f) d\theta + (\lambda_0 - 1) \left\{ 1 - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta \right\} + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left\{ \beta_i - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) a_i(\theta) d\theta \right\} \quad (22)$$

で与えられる。ここに、 $\lambda_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) はラグランジュの未定乗数である。

$$\frac{\partial L}{\partial G(\theta|f)} = -\{1 + \ln G(\theta|f)\} - (\lambda_0 - 1) - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \alpha_i(\theta) = 0 \quad (23)$$

より、 $G(\theta|f)$  の最大エントロピー推定値  $\hat{G}(\theta|f)$  を求めると、

$$\hat{G}(\theta|f) = \exp\{-\lambda_0 - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \alpha_i(\theta)\} \quad (24)$$

となる。 $\alpha_i(\theta)$  は式(7)で与えられており、exp の指数部が Fourier 級数の形となっているが、3成分観測データを対象とする場合には  $i = 4$  で打ち切られる。

式(24)に含まれるラグランジュの未定乗数  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) は、式(24)を式(6)に代入して得られる次式

$$\int_0^{2\pi} \{\beta_i - \alpha_i(\theta)\} \exp\{-\sum_{j=1}^4 \lambda_j \alpha_j(\theta)\} d\theta = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (25)$$

なる非線型連立方程式を解くことによって決定される。また、 $\lambda_0$  は次式から計算される。

$$\lambda_0 = \ln\left[\int_0^{2\pi} \exp\{-\sum_{j=1}^4 \lambda_j \alpha_j(\theta)\} d\theta\right] \quad (26)$$

以上をまとめると、式(25)の非線型連立方程式を解いて  $\lambda_1 \sim \lambda_4$  を求め、式(26)から  $\lambda_0$  を算出して式(24)に代入すれば、 $G(\theta|f)$  の最大エントロピー推定値  $\hat{G}(\theta|f)$  が決定されることになる。

クローバー型ブイ<sup>13)</sup>によって得られる水面の鉛直加速度  $\eta_u$ 、水面勾配  $\eta_x$ 、 $\eta_y$ 、水面曲率  $\eta_{xx}$ 、 $\eta_{yy}$ 、 $\eta_{xy}$  を用いて方向スペクトルを推定する場合 (6成分観測データ) にも、上記の理論は容易に拡張できる。

なお、式(6)において  $i = 0, 1, 2$  の3式のみを情報として取り入れる場合の最大エントロピー推定値  $\hat{G}(\theta|f)$  は式(7)と式(24)により次のように与えられる。

$$\hat{G}(\theta|f) = \exp\{-\lambda_0 - \lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta\} \quad (27)$$

ここで、 $-\lambda_1 = a \cos\theta_0$ 、 $-\lambda_2 = a \sin\theta_0$  とおき、さらに式(26)から  $\lambda_0$  を求めると、

$$\lambda_0 = \ln\left[\int_0^{2\pi} \exp\{a \cos(\theta - \theta_0)\} d\theta\right] = \ln\{2\pi I_0(a)\} \quad (28)$$

を得る。したがって、この場合の最大エントロピー推定値  $\hat{G}(\theta|f)$  として、Borgman<sup>14)</sup> により提案された円正

規分布

$$\hat{G}(\theta|f) = \frac{\exp\{a \cos(\theta - \theta_0)\}}{2\pi I_0(a)} \quad (29)$$

が理論的に得られることになる (式13に同じ)。

#### 2.4 最大エントロピー原理を用いた方向スペクトル推定式の数値解法

式(25)を  $\lambda_j$  に関して解くために、多変数の Newton・Raphson 法を採用した。すなわち、

$$\sum_{j=1}^4 A_{ij} \varepsilon_j = B_i, \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (30)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \int_0^{2\pi} \{\alpha_i(\theta) - \beta_i\} \alpha_j(\theta) \times \exp\{-\sum_{k=1}^4 \lambda_k \alpha_k(\theta)\} d\theta \\ B_i &= \int_0^{2\pi} \{\alpha_i(\theta) - \beta_i\} \times \exp\{-\sum_{k=1}^4 \lambda_k \alpha_k(\theta)\} d\theta \\ \varepsilon_j &= \lambda_j^{k+1} - \lambda_j^k \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

( $k, k+1$  は計算ステップ数)

なる  $\varepsilon_j$  に関する連立方程式において、初期値  $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0)$  を与え、残差  $\varepsilon_j$  について式(30)を解く計算を  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4)$  が十分小さくなるまで繰り返すことにより、解  $(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$  の近似値を算出した。

なお、上記の計算によって近似解が求まらない場合、すなわち  $\varepsilon_j$  が発散する場合には、式(30)から求められる  $\varepsilon_j$  よりもさらに小さいきざみ幅で再計算を行うアルゴリズムを付加した。しかしながら、本方法では初期値  $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0)$  の値により、解が収束しない場合がある。そこで、繰り返し計算回数がある設定値を越える場合には計算不可能として自動的に計算を打ち切ることとした。

また、本報告で示す計算例は、すべて初期値を  $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0) = (0, \dots, 0)$  とし、 $|\varepsilon_j| \leq 10^{-2}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) で収束したと見なして解を算出している。通常、Newton・Raphson 法を用いる場合、 $|\varepsilon_j| \leq 10^{-6} \sim 10^{-8}$  を収束の基準として選ぶことが多いが、 $|\varepsilon_j| \leq 10^{-2}$  程度で得られた解を用いた場合でも、方向スペクトルの推定精度はかなり良いこと、および計算時間の節約を考慮して上記の基準を採用した。

### 3. 最大エントロピー原理を用いた 方向スペクトル推定法の検討

#### 3.1 数値シミュレーションによる検討

数値シミュレーション手法を利用して MEP を用いた方向スペクトルの推定精度の検討を行った。ここでは、方向スペクトルは周波数スペクトルと方向分布関数の積で表されるものと仮定し(式 5.)、任意の周波数  $f$  に着目したとして、方向角  $\theta$  に関する分布のみについて調べた。

具体的な手順は次のとおりである<sup>9)</sup>。

- 1) 光易型方向関数<sup>13)</sup>を用いて、検討対象とする方向スペクトルを次式のように与える。

$$S_{\theta}(\theta) = \sum_i D_i \cos^{2s_i} \left( \frac{\theta - \theta_i}{2} \right) \quad (32)$$

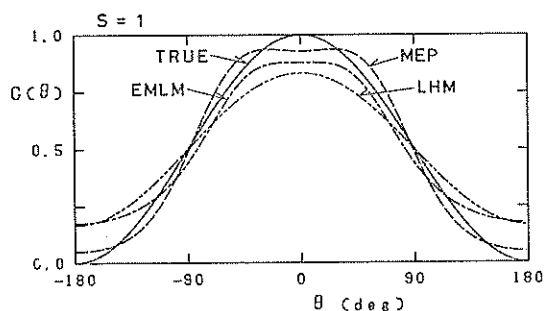
二つの波群から構成されるような双峯型方向スペクトルを対象とする場合には、式(32)の  $D_i$ ,  $s_i$ ,  $\theta_i$  の値を変えた2種の方向スペクトルを重ね合わせて与えることとする。

- 2) 上記で与えた方向スペクトルをもとに、式(4)によりクロス・スペクトルを計算する。ここでは3成分の波動量として、水面変動  $\eta$ , 水面勾配  $\eta_x$  および  $\eta_y$

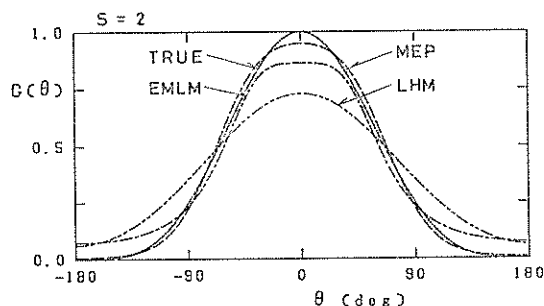
を用いることとした。

- 3) 得られたクロス・スペクトルをもとに、MEP, EMLM, LHM を用いて方向スペクトルの推定を行い、真の方向スペクトル、すなわち式(32)で与えられる方向スペクトルと比較する。

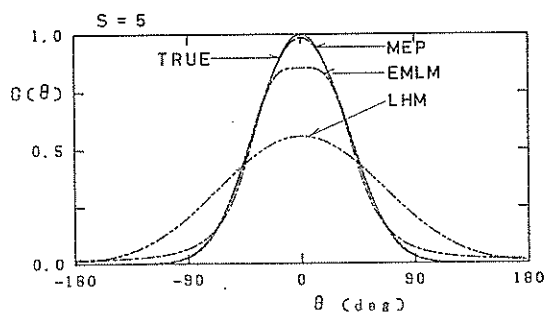
図-1 (a)~(e)は単峯型方向スペクトルの計算例であり、それぞれ  $s = 1, 2, 5, 10, 20$  の場合を示したものである。図中には真の方向スペクトル、MEP, EMLM および LHM による結果を併記した。なお、図の縦軸は真の方向スペクトルの最大値  $\max\{S_{\theta}(\theta)\}$  で無次元化して示している。



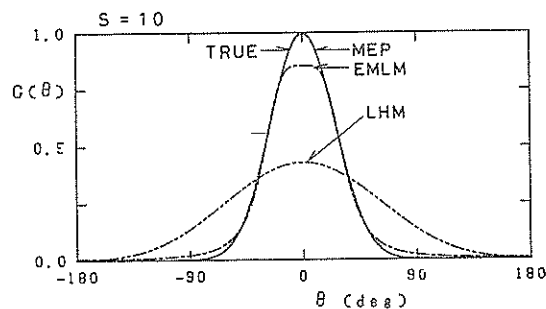
(a)  $s = 1$



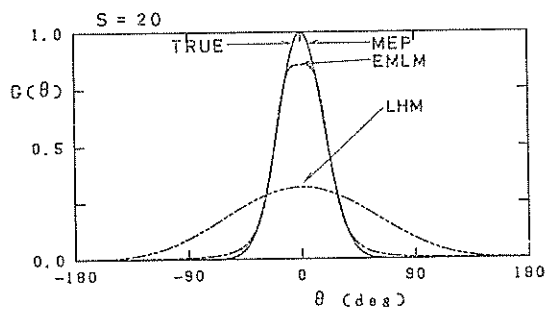
(b)  $s = 2$



(c)  $s = 5$



(d)  $s = 10$



(e)  $s = 20$

図-1 数値シミュレーション例 (単峯型方向スペクトル)

図-1 より, MEP による方向スペクトルの推定精度は  $s=1$  の場合が最も悪く,  $s$  の増加, すなわち, エネルギーの方向集中度の増加とともに推定精度は向上し,  $s \geq 5$  では真の方向スペクトルとほぼ一致する推定結果となっている。  $s=1, 2$  の場合, エネルギーのピーク付近で推定値は真値を下回っているものの, 他の推定法による推定値に比べ, ピーク値に最も近い推定値を与えている。また, エネルギーの低い領域においても, 他の方法に比べて, MEP による推定値が最も推定精度が良い。

LHM はいずれの場合にも推定精度が最も悪く, 方向分布形状は平滑化されている。

EMLM は前述したように, エネルギーのピーク付近およびエネルギーが 0 に近い領域で推定精度が低い。特に, ピーク付近ではエネルギーの分布形状をうまく表現できず, 偏平な分布形状を示している。

2.4 で示した MEP の数値解法の妥当性を検討するために, 種々の  $s$  の値を用いて計算した。その結果,  $s \leq 22$  では式(30)の初期値として  $\lambda_i^0=0$  ( $i=1, \dots, 4$ ) を与えても, 解  $\lambda_i$  は容易に求めることができた。しかしながら,  $s > 22$  では式(30)の  $\varepsilon_j$  は発散し, 解を得ることはできなかった。このため, 妥当と思われる初期値を適宜与えて再計算を実行した。これにより  $s=35 \sim 40$  までは解  $\lambda_i$  を求めることができた。

このように, 方向スペクトルの集中度に関するパラメータ  $s$  の違いにより  $\lambda_i$  の解の収束度合が異なることが判明したので, 解  $\lambda_i$  の性質を調べるために,

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \sqrt{\lambda_0^2} \\ c_1 &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \\ c_2 &= \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

で表されるパラメータ  $c_0, c_1, c_2$  が種々の  $s$  に対してどのように変化するかを調べることにした。図-2 (a) は  $s$  とこれらの三つのパラメータとの関係を図示したものである。それぞれのパラメータは  $s$  の増加に比例して, ほぼ直線的に増大している。すなわち, 方向に関するエネルギーの集中度の増大とともに,  $|\lambda_i|$  の値ははだいに大きくなるため, 初期値として  $\lambda_i^0=0$  ( $i=1, \dots, 4$ ) を用いることが不適当になるものと思われる。しかしながら, 必ずしも  $s$  が増大するものに比例して, 解が求まりにくくなるというわけではなく,  $s=1 \sim 22$  の例では,  $s=11$  の場合が最も多くの繰り返し計算を必要とした。また,  $c_2$  は  $c_1$  に比べてかなり小さな値となっている。これは, 単峯型の光易型方向関数に対しては, 式(24)における  $\cos 2\theta, \sin 2\theta$  の項の寄与は  $\cos \theta, \sin \theta$  の項に比べて小さいことを示している。解  $\lambda_i$  の性質,

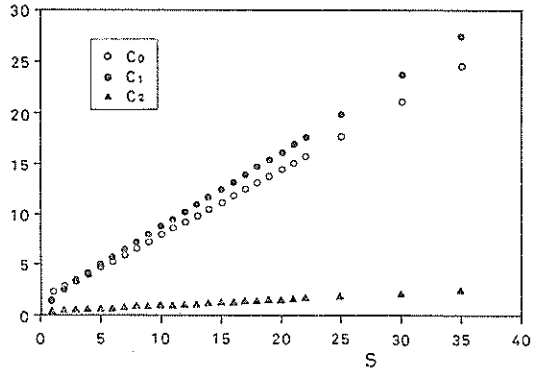


図-2 (a) MEP のパラメータと  $s$  の関係

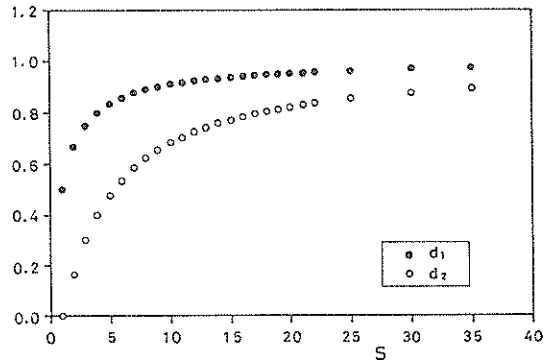


図-2 (b) LHM のパラメータと  $s$  の関係

初期値の与え方などについては, 今後さらに詳細に検討する必要がある。

同様に, LHM の性質を検討するために,

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ d_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

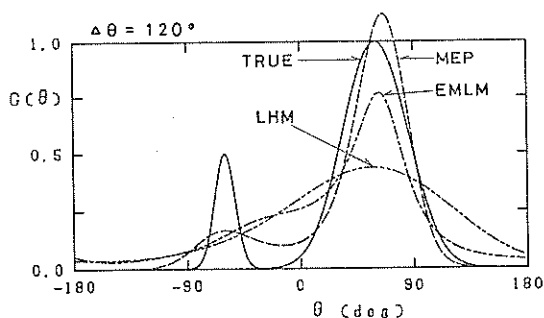
で表されるパラメータと  $s$  の関係を図示したものが図-2 (b)である。ここに, 式(34)の  $a_i, b_i$  は式(11)の  $A_i, B_i$  を周波数スペクトル  $S(f)$  で無次元化したものである。  $s$  の増加とともに, 各パラメータの増加率は小さくなり, 1 に漸近している。こうしたパラメータの特性が, LHM ではエネルギーの方向集中度の大きい方向スペクトル形状を表現できない理由となっている。

図-3 (a)~(e) は双峯型の方角スペクトルの例である。うねりと風波が重なりあった例として、二つの方向スペクトルのピークのエネルギー比  $D_1/D_2=0.5$ 、および  $s_1=100$ 、 $s_2=10$  とし、二つの方向スペクトルの角度差  $\Delta\theta=\theta_1-\theta_2$  を  $60^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $120^\circ$ 、 $150^\circ$ 、 $180^\circ$  とした場合の計算例である。

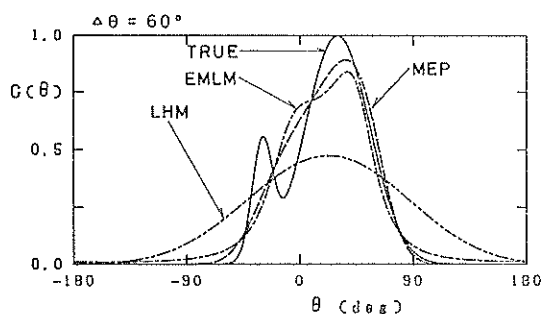
MEP による方向スペクトルの推定精度は、二つの方向スペクトルの角度差  $\Delta\theta$  の増大とともに向上している。しかしながら、 $\Delta\theta=180^\circ$  の例を除けば、エネルギーの大きい第1ピーク的位置は、真の方角スペクトルのピーク位置よりも、ややずれた位置に出現している。また、 $\Delta\theta=60^\circ$  ではエネルギーの第2ピークは識別されていないが、 $\Delta\theta>90^\circ$  では明確に識別されている。二つのピーク値を見ると、エネルギーの大きいピーク値を過大に、エネルギーの小さいピーク値を過小に推定している。エネルギーの大きいピーク値を過大に推定する程度

は、二つの方向スペクトルの角度差  $\Delta\theta$  の増大とともに大きくなっている。また、いずれの場合にも、エネルギーの小さい方向スペクトルは、かなり平滑化されて表現されている。

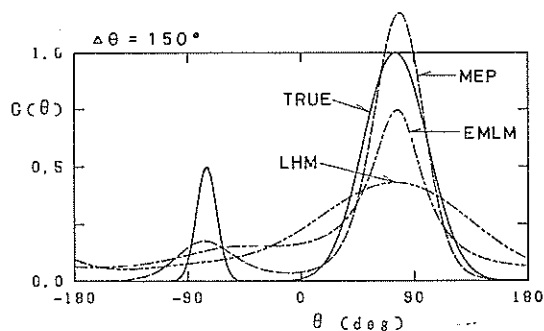
LHM は単峯型の方角スペクトルの例 (図-1) と同様



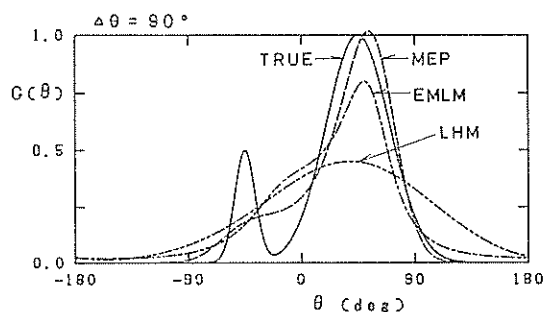
(c)  $\Delta\theta=120^\circ$



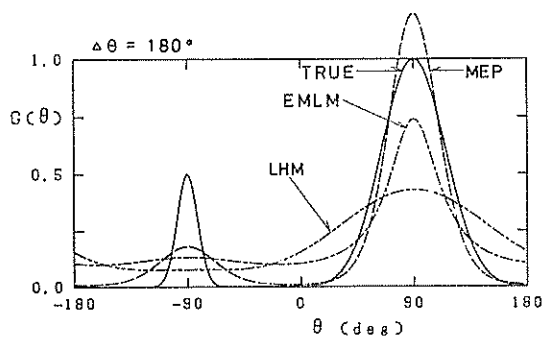
(a)  $\Delta\theta=60^\circ$



(d)  $\Delta\theta=150^\circ$



(b)  $\Delta\theta=90^\circ$



(e)  $\Delta\theta=180^\circ$

図-3 数値シミュレーション例  
(双峯型方向スペクトル,  $D_1/D_2=0.5$ ,  $s_1=100$ ,  $s_2=10$ )

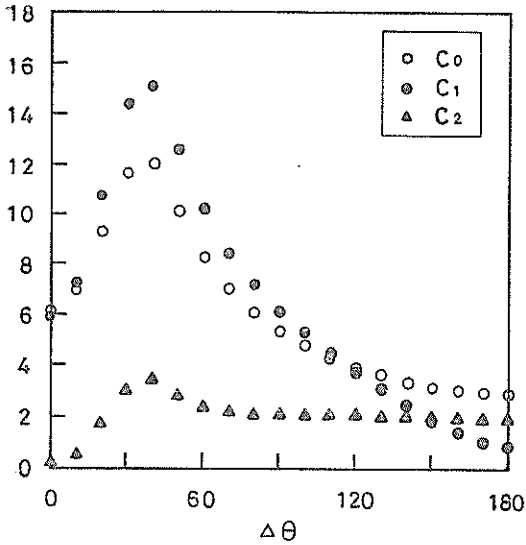


図-4 (a) MEP のパラメータと  $\Delta\theta$  の関係  
( $D_1/D_2=0.5, s_1=100, s_2=10$ )

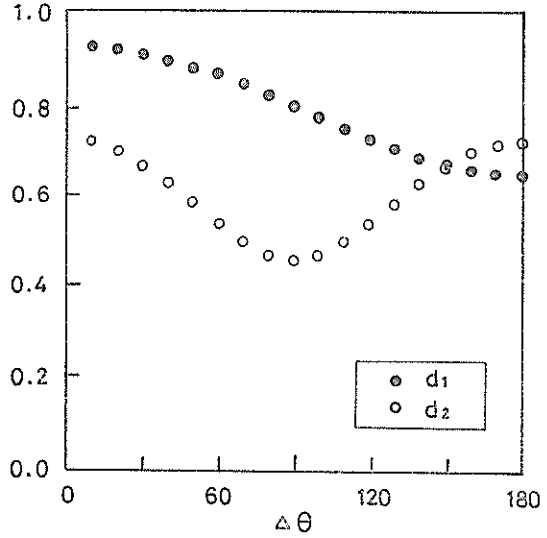


図-4 (b) LHM のパラメータと  $\Delta\theta$  の関係  
( $D_1/D_2=0.5, s_1=100, s_2=10$ )

に、3種の推定法の中で、最も推定精度が劣っている。エネルギーのピーク位置およびスペクトル形状を見る限りでは、エネルギーの小さい方向スペクトルは、ほとんど識別されていないようである。

EMLM は、前例と同様に、真の方向スペクトルに比べて、ピーク付近でかなり低いエネルギー値を与えている。また、第2ピークはほとんど識別されていないが、 $\Delta\theta=60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  の例に見られるように、スペクトルの形状には第2ピークの影響が現れているようである。この影響は、二つの方向スペクトルの角度差  $\Delta\theta$  の増大とともに小さくなっており、MEP とは逆の傾向を示している。

図-4 (a) は、図-2 (a) と同じパラメータを、二つの方向スペクトルの角度差  $\Delta\theta$  に対してプロットしたものである。いずれのパラメータも、 $\Delta\theta$  の増大とともに増加し、その後減少している。しかしながら、 $c_2$  は  $\Delta\theta \geq 80^\circ$  ではほとんど変化していない。また、 $\Delta\theta \geq 150^\circ$  では  $c_2 > c_1$  となっており、式(24)の指数部の第4項および第5項の影響が、第2項、第3項よりも大きくなっている。なお、本計算例では  $\Delta\theta=10^\circ$  を除けば、式(30)の繰り返し計算回数は、概して  $\Delta\theta$  の増大とともに減少

した。

図-4 (b) は式(34)の LHM に関するパラメータと  $\Delta\theta$  の関係を図示したものである。 $d_1$  は  $\Delta\theta$  の増大とともに減少している。 $d_2$  はいったん減少した後、 $\Delta\theta > 90^\circ$  で増大している。特に、 $\Delta\theta > 160^\circ$  では  $d_2 > d_1$  となっており、パラメータの大小関係を見る限り、エネルギーの第2ピークの影響が現れるはずである。しかしながら、図-3 にはその影響はほとんど見られない。これは LHM に用いられている重み関数により、式(12)における  $n=2$  の項の寄与が減じられたためである。

図-5 (a)~(e) は、 $D_1=D_2, s_1=s_2=20$  の同じ形の方向スペクトルを、角度差  $\Delta\theta=60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$  と変えた場合の計算例である。いずれの推定法も、前例に比べて、より明確にピークを識別している。

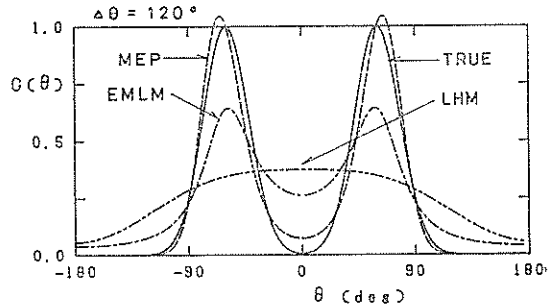
MEP による方向スペクトルの推定精度は、前例と同様に、二つの方向スペクトルの角度差  $\Delta\theta$  の増大とともに向上している。しかしながら、エネルギーのピーク位置を見ると、 $\Delta\theta=180^\circ$  を除くいずれの場合にも、真の方向スペクトルのピーク位置に比べて、(図の) やや外側にピークが出現している。逆に、EMLM ではやや内側にピークが出現している。

図-6 (a) は図-5 の計算結果を用いて、図-4 (a) と同様の形で示したものである。図-6 (a) を見ると図-4 (a) と異なり、各パラメータは  $\Delta\theta$  の増大とともにいったん減少した後、増大し、再び減少している。しかしながら、全体的な傾向は図-4 (a) と類似している。なお、図中に  $\Delta\theta=70^\circ$  の場合のパラメータ値が記載されていないのは、2.4 に示した計算法では解が求められなかったためである。

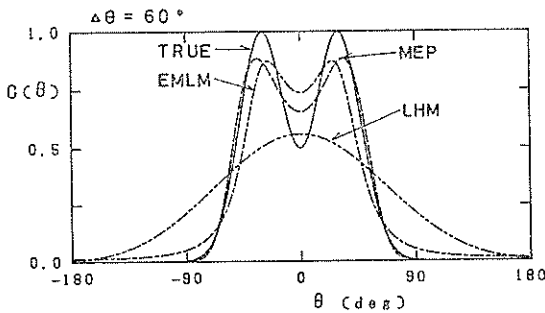
図-6 (b) は同じ計算条件で LHM に関する計算結果を、図-4 (b) と同様の形で示したものである。図-6 (b) を見ると、 $\Delta\theta>130^\circ$  で  $d_2>d_1$  となっており、図-5 でも  $\Delta\theta>150^\circ$  で、LHM は双峯型の方角スペクトル形状を示している。しかしながら、重み関数の影響のため、明確な双峯型とはなっていない。

以上、種々のケースについて、数値シミュレーション手法を用いて MEP の推定精度の検討を行った。いずれの場合にも、MEP の推定精度が最も良く、また、双峯型の方角スペクトルの識別も可能であることが示され

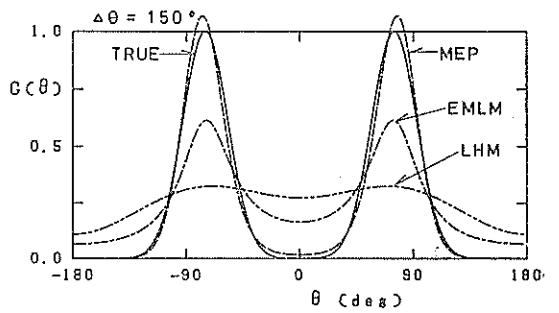
た。一方、式(30)に基づくラグランジュの未定乗数の算出法の欠点も明らかとなった。しかしながら、エネルギーの方向集中度のあまり大きくない、通常の風波、あるいは風波とうねりの重なり合った現地波浪データから方角スペクトルを推定する方法としては、十分に実用に耐えうるものと考えられる。



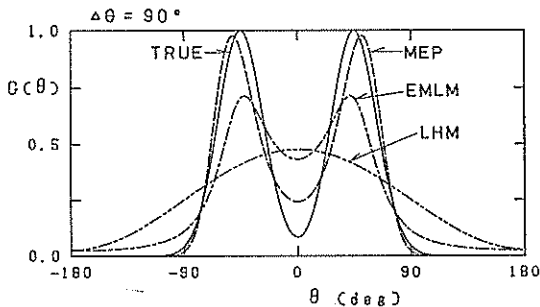
(c)  $\Delta\theta=120^\circ$



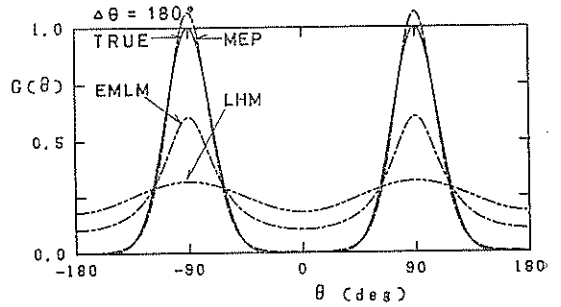
(a)  $\Delta\theta=60^\circ$



(d)  $\Delta\theta=150^\circ$



(b)  $\Delta\theta=90^\circ$



(e)  $\Delta\theta=180^\circ$

図-5 数値シミュレーション例  
(双峯型方角スペクトル,  $D_1=D_2$ ,  $s_1=s_2=20$ )

最大エントロピー原理 (MEP) を用いた方向スペクトルの推定

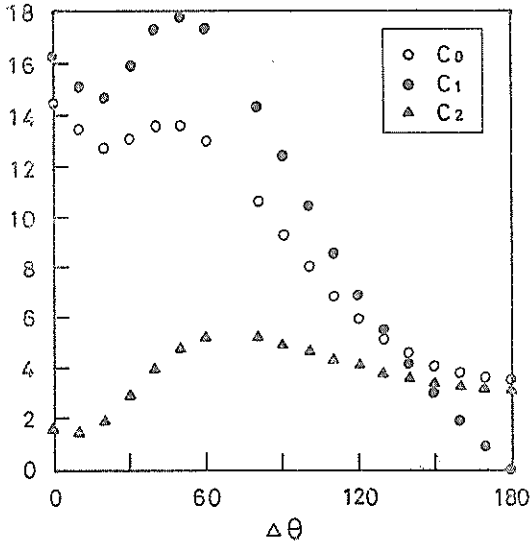


図-6 (a) MEP のパラメータと  $\Delta\theta$  の関係 ( $D_1=D_2$ ,  $s_1=s_2=20$ )

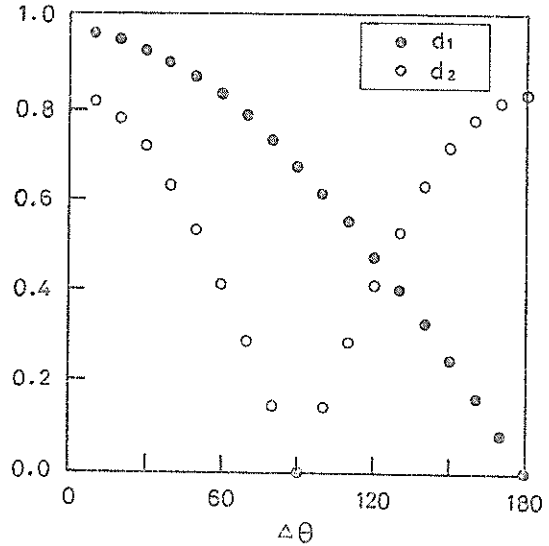


図-6 (b) LHM のパラメータと  $\Delta\theta$  の関係 ( $D_1=D_2$ ,  $s_1=s_2=20$ )

3.2 現地観測データへの適用

MEP を用いた方向スペクトル推定法の現地観測データへの適用性を検討するために、新潟西港の波浪観測データを用いて方向スペクトル解析を行った。新潟西港では図-7 に示す水深 22.7m の地点に、超音波式波高計お

表-2 波浪観測機器の仕様

機 種		超音波式波高計	超音波流速計
測定地点	北 緯	37° 58' 46''	
	東 経	139° 05' 20''	
	水 深	-22.7m	
	離 岸 距 離	3.0km	
	設 置 高	1.0m	1.5m
設 置 方 位		— N0° (真北)	
記録方式	デジタル記録	感 度	0.75cm/dig 0.3 cm/s/dig
		フルスケール	15m ± 3 m/s
		サンプリング周期	0.5 s 0.5 s
アナログ記録	アナログ記録	感 度	(I)(II) 1.5cm/s/mm
		フルスケール	(I)(II) ± 3 m/s
		記録紙送り速度	60mm/min 40mm/min

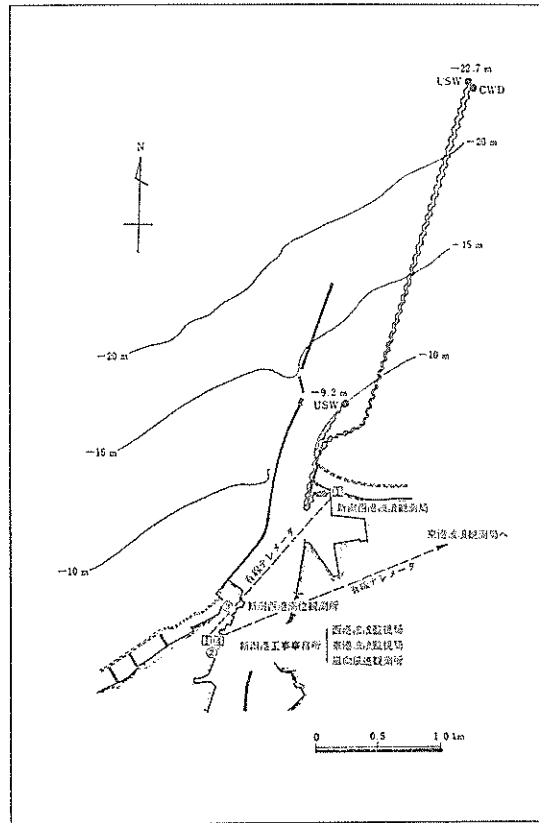


図-7 波浪観測機器設置位置図



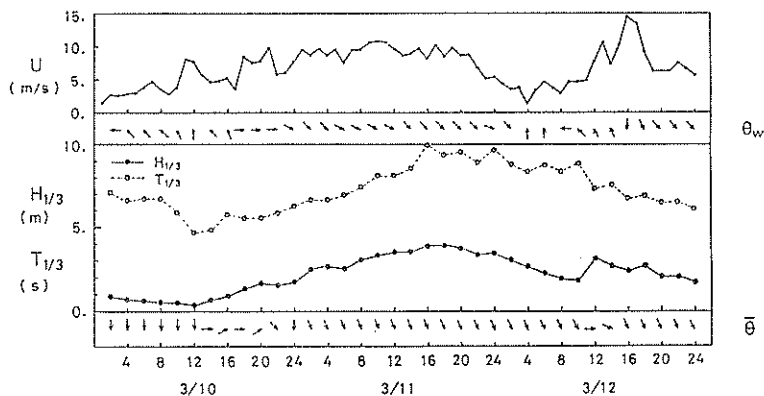


図-8 波浪諸元の経時変化図

よび超音波流速計を設置し、1982年10月より観測を継続して実施している。波浪観測機器の仕様は表-2に示すとおりである。解析対象データは1984年3月10日～12日の3日間の観測データであり、毎偶数正時前後10分間の計20分間の記録を合計36観測分解析した。日本海では、この間に二つの低気圧が通過しており、風向も大きく変動していることから、二方向波浪が出現しやすいと考えたからである。

図-8はこの間の波浪諸元の経時変化図を示したものである。低気圧の通過にともない、3月10日午後より有義波高  $H_{1/3}$  が増大しはじめ、冬型の気圧配置となった11日午後には、4m近い有義波高となっている。その後、波は徐々に減衰していったものの、12日正午には二つめの低気圧の通過にともなって、再び波高が増大している。なお、図中の風速  $U$ 、風向  $\theta_w$  は第一港湾建設局新潟港工事事務所に設置された風向・風速計（地上高15.6m）により得られた記録であり、波浪観測機器設置点でのものではないが、参考のために記載した。また、 $\bar{\theta}$  は共分散値によって定義される平均波向であり、次式で表される。

$$\bar{\theta} = \tan^{-1} \left( \frac{-\overline{\eta v}}{-\overline{\eta u}} \right) \quad (35)$$

ここに、 $\overline{\eta u}$ 、 $\overline{\eta v}$  はそれぞれ水面変動と水粒子速度の  $x$  成分および  $y$  成分の共分散値である。なお、平均波向  $\bar{\theta}$  の変化した3月10日22時、24時、および12日14時、16時には、後で一例を示すように、顕著な二方向波浪が出現していることが確認されている。

2. に示した諸理論の現地観測データへの適用に際しては、磯部ら<sup>6)</sup>の提案を参考にし、表-1に示す伝達関数の代わりに、次式により観測データから算出される伝達

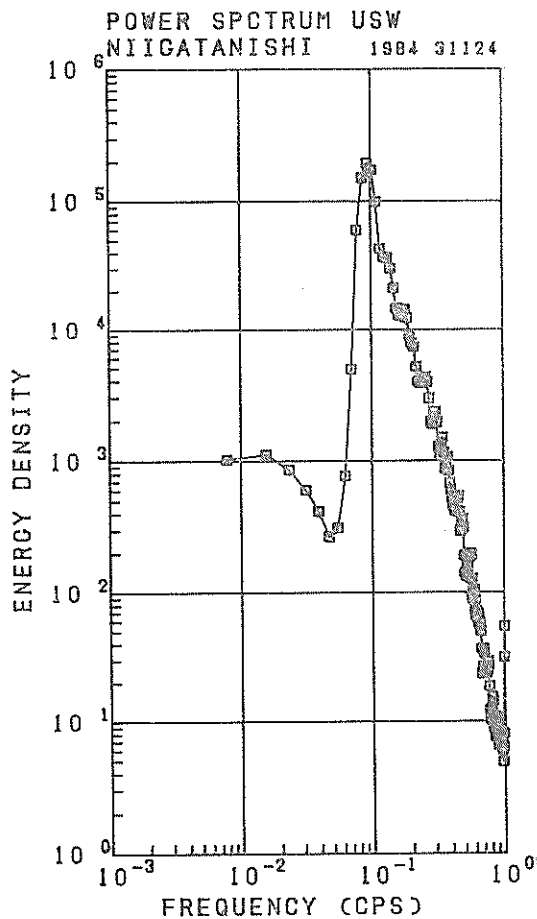


図-9 周波数スペクトル図  
(1984年3月11日24時)

最大エントロピー原理 (MEP) を用いた方向スペクトルの推定

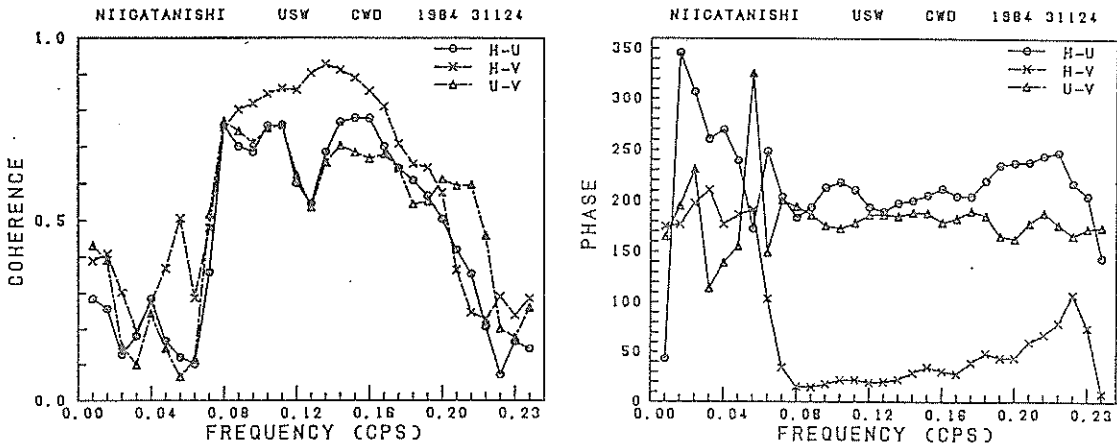


図-10 (a) コヒーレンス (1984年3月11日24時)

(b) 位相差 (1984年3月11日24時)

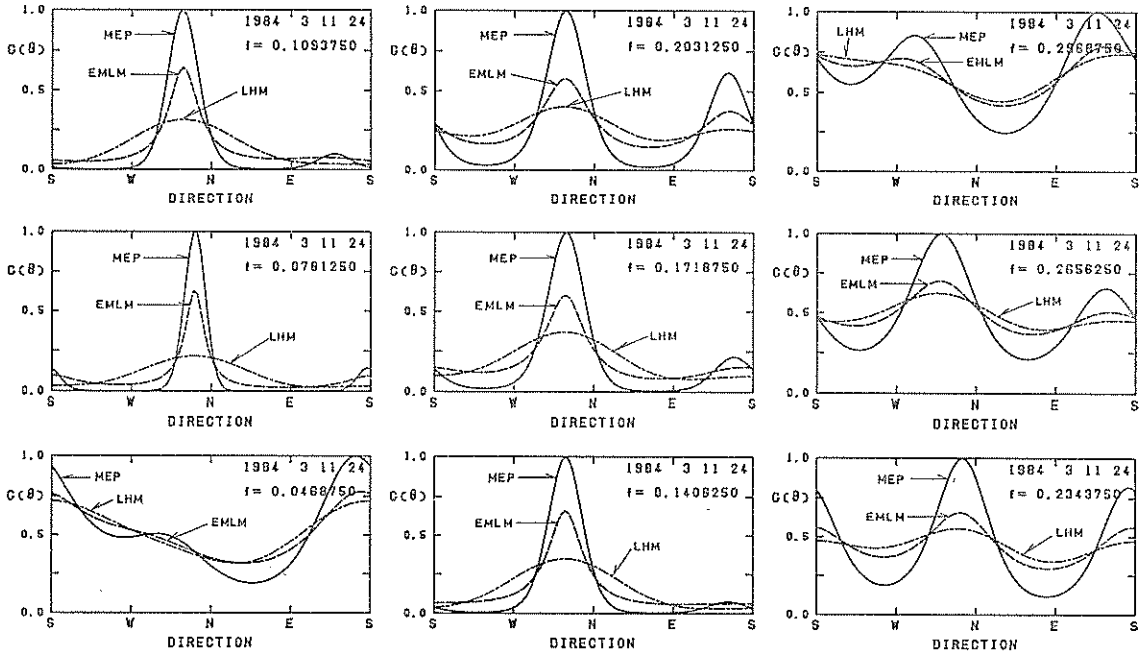


図-11 周波別方向分布関数 (1984年3月11日24時)

関数を用いて解析を行った。

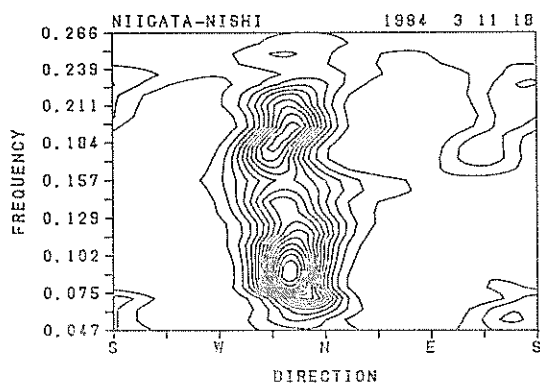
$$h_u(f) = \sqrt{\frac{S_{uu}(f) + S_{vv}(f)}{S_{\eta\eta}(f)}} \quad (36)$$

ここに、 $h_u(f)$  は水面変動から水粒子速度への伝達関数、 $S_{uu}(f)$ 、 $S_{vv}(f)$ 、 $S_{\eta\eta}(f)$  はそれぞれ、水粒子速度  $u$ 、 $v$  および水面変動  $\eta$  の周波数スペクトルである。

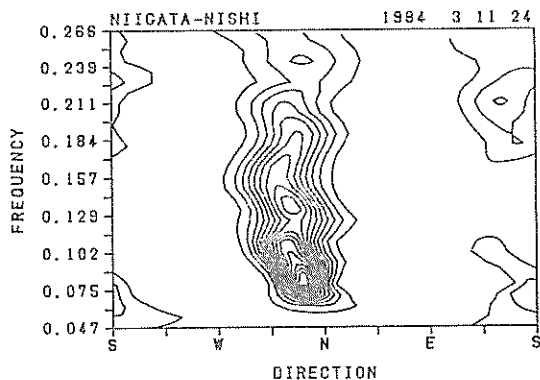
図-9 は水面変動  $\eta$  の周波数スペクトルの計算結果の

一例である (3月11日24時)。また、図-10 (a), (b) は同時刻の水面変動  $\eta$  と水粒子速度  $u$ 、 $v$  のおのこのデータ間のコヒーレンスおよび位相差の一例を示したものである。図-9 および 図-10 より、周波数スペクトルのエネルギーピーク付近、すなわち、周波数  $f = 0.08 \sim 0.2$  (cps) の範囲では、ほぼ線型理論が成立しているようである。

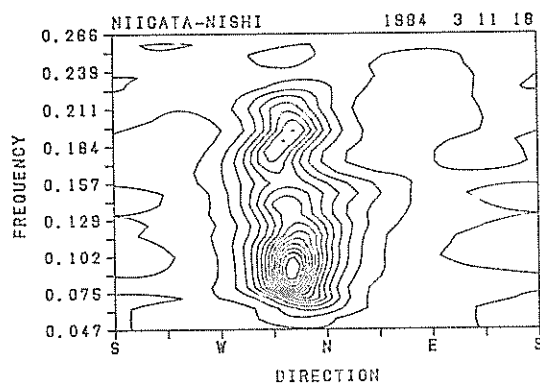
図-11 は 図-10 と同じデータを用いて、周波数別に



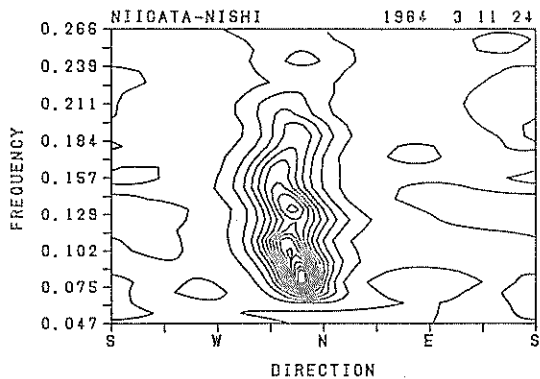
(a) MEP



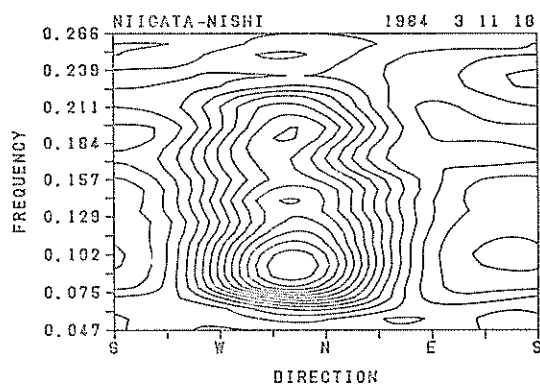
(a) MEP



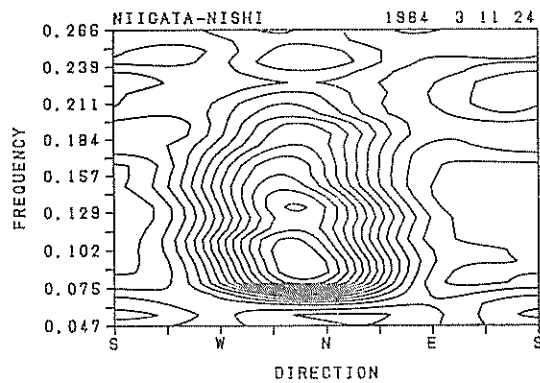
(b) EMLM



(b) EMLM



(c) LHM



(c) LHM

図-12 方向スペクトル等値線図  
(一方向波浪, 1984年3月11日18時)

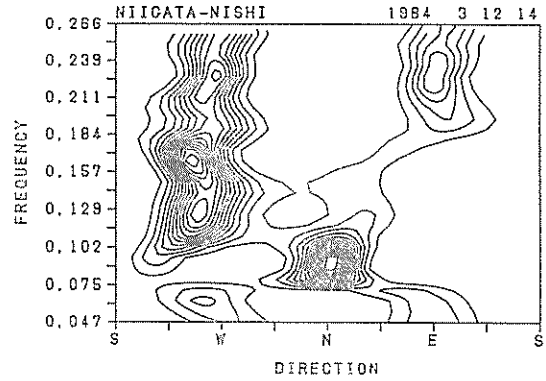
図-13 方向スペクトル等値線図  
(一方向波浪, 1984年3月11日24時)

方向分布関数  $\hat{G}(\theta|f)$  を示したものである。(周波数  $f$  は各図中に記入)。図の縦軸は MEP を用いて推定した方向分布関数の最大値  $\max \{\hat{G}_{MEP}(\theta|f)\}$  で無次元化して示している。いずれの推定法の結果も、周波数スペクトルのエネルギーの卓越した周波数帯で、エネルギーの方向集中度が大きく、それよりも低周波数側および高周波数側で、エネルギーの方向集中度の低い分布形状になっている。なお、エネルギーの卓越した周波数帯の方向分布関数のピーク位置は、図-8 に示す平均波向  $\bar{\theta}$  の方向と一致している。

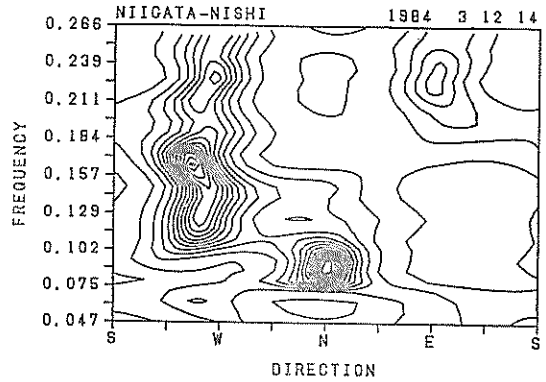
図-11 に見られるように、いずれの周波数の場合にも、MEP を用いた結果が最も明確な方向分布特性を示している。EMLM および LHM を見ると、エネルギーの卓越した周波数帯では、EMLM は LHM に比べて、かなり明確に方向分布特性を示している。しかしながら、コヒーレンスの低下している低周波数側および高周波数側では、EMLM と LHM の差異はほとんどない。この場合でも、MEP は他の方法に比べて、より明確なエネルギーの方向分布特性を示している。これは、雑音に埋もれた信号の抽出という観点では、MEP が EMLM よりも優れていることを示しているものと思われる。

図-12 および図-13 は一方向波浪の方向スペクトルの等値線図を示したものである。エネルギーの詳細な分布を描画するために、対数変換を行い  $\log \hat{S}(f, \theta) = 0 \sim \max \{\log \hat{S}(f, \theta)\}$  を 15 分割して描いている。図-12 は有義波高  $H_{1/3} = 3.87$  m の最盛時 (3月11日18時) のものであり、図-13 は  $H_{1/3} = 3.47$  m の減衰時 (3月11日24時) のものである。減衰時は最盛時に比べて、エネルギーの方向分布幅がやや狭くなっており、また、エネルギーのピーク位置もやや低周波数側へ移行しているようである。MEP と EMLM を比べると、細部についてはいくらかの差異は認められるものの、全体的な傾向は類似している。MEP のほうがやや鋭く方向スペクトルを表現している程度である。LHM は、当然のことながら、他の方法に比べてかなり平滑化された方向スペクトル形状となっている。

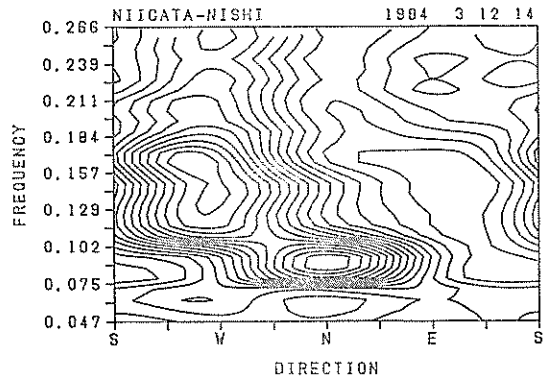
図-14 および図-15 は二方向波浪の方向スペクトルの等値線図を示したものである。前者は3月12日14時、後者は同日16時のものである。MEP および EMLM はどちらも明確に二方向波浪を表現しており、前例と同様に、両者の間には顕著な差異はない。LHM もいくつかのエネルギーピークを検出しているものの、各周波数別に見ると、明確には一つのピークしか表現し得ていない。この性質のために、特に図-15 (c) では、周波数ごとにそれぞれ異なった位置にピークが現れており、



(a) MEP

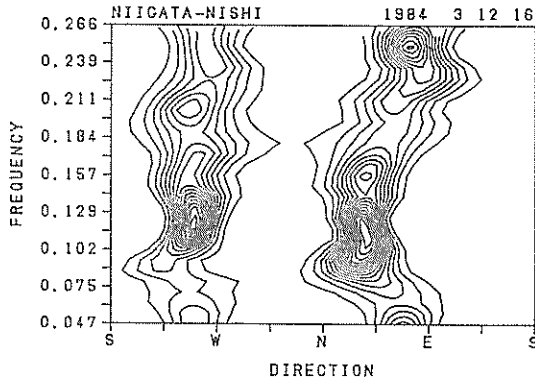


(b) EMLM

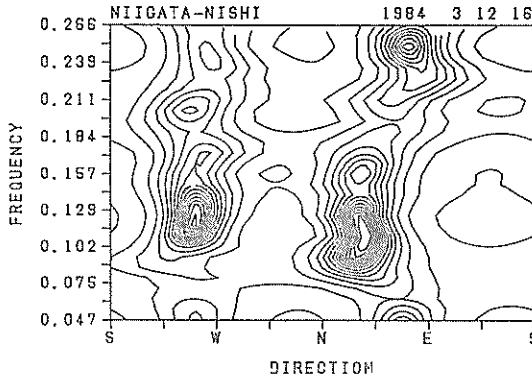


(c) LHM

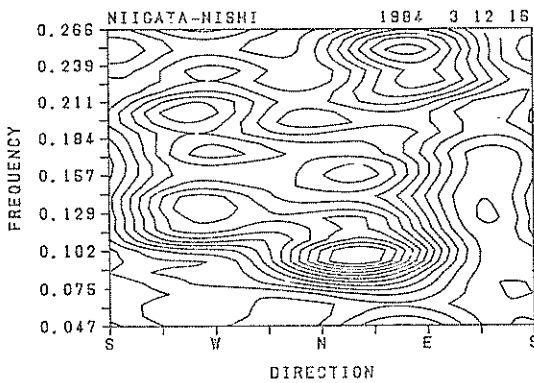
図-14 方向スペクトル等値線図  
(二方向波浪, 1984年3月12日14時)



(a) MEP



(b) EMLM



(c) LHM

図-15 方向スペクトル等値線図  
(二方向波浪, 1984年3月12日16時)

MEP や EMLM の等値線図に見られるような明確な波浪場の方向特性を把握しにくくなっている。

なお、前節の数値シミュレーションを用いた計算例では、式(30)の初期値として  $\lambda_i^0 = 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) とした場合、 $s > 22$  では解  $\lambda_i$  は求まらなかった。しかしながら、現地観測データを用いた本計算例では、初期値を0としたにもかかわらず、すべてのケースについて解を求めることができた。例えば、図-11の周波数  $f = 0.078125$  (cps) の例に見られるように、 $s = 22$  よりもはるかにせん鋭な方向分布形状をも算出したわけである。この理由として、図-11、 $f = 0.078125$  (cps) の例では、エネルギーの大きい第1ピークとほぼ  $180^\circ$  離れた位置に、エネルギーの第2ピークが存在しているためか、あるいは、コヒーレンスの低下をもたらすノイズの存在により、解が求まりやすくなっていることなどが考えられる。いずれにせよ、式(25)からラグランジュの未定乗数  $\lambda_i$  を算出する一般的方法については、今後、より詳細に検討する必要がある。

#### 4. 結論

以上、3成分観測データを対象として、最大エントロピー原理 (MEP) を用いた方向スペクトルの推定法を定式化し、数値シミュレーションおよび現地観測データを対象とした試算により、本方法の適用性、有効性を検討した。

主要な結論として、以下のようにとりまとめられる。

- 1) 本方法は従来の方向スペクトル推定法に比べて、最も高い分解能を有している。
- 2) 本方法は単峯型の方角スペクトルのみならず、双峯型の方角スペクトルの識別が可能である。特に、二つの方向スペクトルの角度差が大きいほど、その推定精度は良い。
- 3) 本方法を用いて二方向波浪を推定する場合、エネルギーの大きい方向スペクトルを過大に、エネルギーの小さい方向スペクトルを過小に推定する傾向がある。
- 4) 式(30)を用いて MEP により方向スペクトルを推定する場合、初期値によっては解が収束しない場合がある。また、一般に、エネルギーの方向集中度の低い方向スペクトルほど、解は求まりやすい傾向が見られる。
- 5) 本方法は風波、あるいは風波とうねりが重なりあった波浪場での方向スペクトル推定法として適用可能である。
- 6) 本方法の適用性の向上のためには、式(25)からラグランジュの未定乗数を算出する、より一般的な方法を

開発することが必要である。(1985年6月29日受付)

謝 辞

本研究の実施にあたっては、港湾技術研究所合田良次次長には、種々適切な助言、御指導を頂いた。ここに記して深甚の謝意を表します。また、本報告で用いた観測データの取得に努力していただいた第一港湾建設局関係各位に謝意を表するとともに、今後さらに御協力を御願います次第です。

参 考 文 献

- 1) たとえば、合田良次：港湾構造物の耐波設計——波浪工学への序説——，鹿島出版会，1977年，p.210. または，Goda, Y: Random Seas and Design of Maritime Structures, University of Tokyo Press, 1985, p. 323.
- 2) Barber, N.F.: The directional resolving power of an array of wave detectors, *Ocean wave Spectra*, Prentice Hall, Inc., 1961, pp. 137~150.
- 3) Panicker, N. N. and Borgman, L. E.: Enhancement of directional wave spectrum estimate, *Proc. 14th Coastal Engg. Conf.*, Copenhagen, 1974, pp. 258~279.
- 4) 山口正隆：方向スペクトル観測装置の分解能について(1)——3成分流速計による方法——，愛媛大学紀要 第三部(工学)，第9巻第3号，1978年，pp. 225~234.
- 5) Capon, J.: High-resolution frequency-wave-number spectrum analysis, *Proc. IEEE*, vol. 57, 1969, pp. 1408~1418.
- 6) 磯部雅彦，近藤浩右，堀川清司：方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張，第31回海岸工学講演会論文集，1984年，pp.173~177.
- 7) 瀧澤英一：情報の理論と演習，廣川書店，1966年，p. 293.
- 8) 寒川典昭，荒木正夫：水文事象の頻度分析へのMEPの導入について，土木学会論文報告集，第335号，1983年，pp. 89~95.
- 9) Longuet-Higgins, M. S., D. E. Cartwright and N.D. Smith: Observation of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, *Ocean Wave Spectra*, Prentice Hall, Inc. New Jersey, 1963, pp. 111~136.
- 10) Borgman, L.E.: Directional spectral model for design use for surface waves, *Hyd. Eng. Lab. Univ. Calif., Berkeley*, HEL 1-12, 1965, p. 56.
- 11) Hasselman, D.E., M. Dunckel and J.A. Ewing: Directional wave Spectra Observed during JONSWAP 1973, *Jour. Physical Oceanography*, vol. 10, 1980, pp. 1264~1280.
- 12) 光易恒ら：海洋波の計測法の開発研究(1)，九州大学応用力学研究所報，第39号，1973年，pp. 105~181.
- 13) 光易恒ら：海洋波の計測法の開発研究(2)，九州大学応用力学研究所報，第40号，1973年，pp. 295~329.

- 14) 山口正隆，土屋義人：発達過程にある風波の方向スペクトルの特性，第27回海岸工学講演会論文集，1980年，pp. 99~103.
- 15) 合田良次：波高計群による方向スペクトルを用いた反射波推定法の検討，港湾技術研究所報告，第19巻，第3号，1980年9月，pp. 37~69.

主要記号表

- $a_n$ : 方向スペクトルのフーリエ級数展開の余弦係数を周波数スペクトルで無次元化したもの
- $b_n$ : 方向スペクトルのフーリエ級数展開の正弦係数を周波数スペクトルで無次元化したもの
- $A_n(f)$ : 方向スペクトルのフーリエ級数展開の余弦係数
- $B_n(f)$ : 方向スペクトルのフーリエ級数展開の正弦係数
- $C_{ij}(f)$ : 波動量  $\xi_i$  と  $\xi_j$  の間のコ・スペクトル
- $d$ : 水深
- $f$ : 周波数
- $g$ : 重力加速度
- $G(\theta|f)$ : 周波数  $f$  における方向分布関数
- $\hat{G}(\theta|f)$ : 方向分布関数の推定値
- $h_m(k, \sigma)$ : 水面変動から波動量  $\xi_m$  への伝達関数
- $h_m(f)$ :  $h_m(k, \sigma)$  を周波数  $f$  の関数として表したもの
- $H_m(k, \sigma)$ : 水面変動から波動量  $\xi_m$  への伝達関数
- $H$ : 情報エントロピー
- $i, j$ : 序数
- $I_n(a)$ :  $n$  階の第1種変形 Bessel 関数
- $k$ : 波数ベクトル
- $k$ : 波数
- $L$ : ラグランジュ関数
- $m, n$ : 序数
- $Q_{ij}(f)$ : 波動量  $\xi_i$  と  $\xi_j$  の間のクオドラチャ・スペクトル
- $s$ : 方向分布関数の集中度パラメータ
- $S(f)$ : 周波数スペクトル
- $S_{uu}(f)$ : 波による水粒子速度の  $x$  方向の成分の周波数スペクトル
- $S_{vv}(f)$ : 波による水粒子速度の  $y$  方向の成分の周波数スペクトル
- $S_{\eta\eta}(f)$ : 水面変動の周波数スペクトル
- $S(f, \theta)$ : 方向スペクトル
- $\hat{S}(f, \theta)$ : 方向スペクトルの推定値
- $S(k, \sigma)$ : 波数・周波数スペクトル
- $\hat{S}(k, \sigma)$ : 波数・周波数スペクトルの推定値
- $t$ : 時間
- $u$ : 波による水粒子速度の  $x$  方向の成分
- $v$ : 波による水粒子速度の  $y$  方向の成分
- $x$ : 水平座標の一つ
- $x_m$ : 波動量  $\xi_m$  を計測している位置ベクトル

- $y$ : 水平座標の一つ  
 $\alpha_i(\theta)$ :  $\cos n\theta, \sin n\theta$  などの三角関数をおきかえたもの(式. 7)  
 $\beta_i$ : コ・スペクトル, クオドラチャ・スペクトルより成る関数(式. 7)  
 $\Gamma(\ )$ : Gamma 関数  
 $\epsilon_j$ : ラグランジュの未定乗数の残差(式. 31)  
 $\eta$ : 水面変動  
 $\eta_i$ : 水面の上下速度  
 $\eta_{ui}$ : 水面の上下加速度  
 $\eta_x$ : 水面の  $x$  方向の傾斜  
 $\eta_y$ : 水面の  $y$  方向の傾斜  
 $\theta$ : 方向角  
 $\theta_0$ : 一方向波浪系としての波群の入射方向  
 $\theta_i$ : 多方向波浪系における各波群の波向  
 $\Delta\theta$ : 二方向波浪系における波向の差  
 $\kappa$ : 比例定数  
 $\lambda_i$ : ラグランジュの未定乗数  
 $\xi_i$ : 第  $i$  番めの波動量  
 $\sigma$ : 角周波数  
 $\Phi_{mn}(f)$ : 波動量  $\xi_m$  と  $\xi_n$  のクロス・スペクトル  
 $\phi_{mn}(\sigma)$ : 波動量  $\xi_m$  と  $\xi_n$  のクロス・スペクトル  
 $\psi_{ij}(\tau)$ : 波動量  $\xi_i$  と  $\xi_j$  の共分散関数

## 付録 最大エントロピー原理

(1) 情報量の定義<sup>1)</sup>

ある特定の事象が起こって、それを教える情報を受け取ったとき、その情報により得られる情報量は

$$\text{情報量} = \log \{\text{起こることが可能な事象の総数}\} \quad (\text{A. 1})$$

あるいは、いっそう正確には、

$$\text{情報量} = -\log \{\text{可能な事象の中で特定の事象が起こる確率}\} \quad (\text{A. 2})$$

と定義される。

この情報量の定義は「独立事象が同時に起こる確率は、個々の事象の起こる確率の積に等しい」という確率論の乗法定理を参照すれば、「複数の独立した情報から成る情報の情報量は個々の情報の情報量の和に等しい」ことを示している。

式(A. 2)で定義した情報量に関しては、次の関係が成立する。

ある事象  $A$  が起こる確率を  $p$  とすれば、 $A$  の実現に関する情報量  $I(A)$  は式(A. 2)により  $I(A) = -\log p$  である。このとき、

- 1)  $I(A) \geq 0$ 、ただし等号は  $p = 1$  の場合にのみ成立する。
- 2)  $I(A)$  は  $p$  の連続関数で、 $1/p$  に関して単調増加関数である。
- 3) 二つの独立事象  $A, B$  の実現する確率をそれぞれ

$p, q$  とすれば、 $A$  と  $B$  が同時に起こる確率は  $p \times q$  であり、

$$I(A \cap B) = I(A) + I(B)$$

である。

式(A. 1)の情報量の数値は、対数の底を決めないと定まらない。対数の底として 10 を採ったとき、情報量の単位をディジットと呼び、2 を底としたときビットと呼ぶ。

(2) エントロピーの定義<sup>1)</sup>

$n$  個の異なった互いに相反する事象  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の中から、一つをでたらめに選択することを繰り返すある偶然事象があり、しかも前の選択の結果は後の選択結果に影響を及ぼさないものとする。また、それぞれの事象  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の起こる確率を  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) とする ( $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ )。

このとき、 $A_i$  の実現に関する情報量は式(A. 2)によって  $-\log p_i$  である。したがって、選択を繰り返した結果、得られる情報量の期待値は、

$$H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (\text{A. 3})$$

となる。

式(A. 3)は統計力学でいうエントロピーと同じ形をしている。情報理論においても式(A. 3)で定義される  $H$  を情報エントロピー、略してエントロピーと呼ぶ。

分布が連続的な確率密度関数  $p_X(x)$  を持つ確率変数  $X$  のエントロピー  $H(X)$  は式(A. 3)を拡張して

$$H(X) = -\int p_X(x) \log p_X(x) dx \quad (\text{A. 4})$$

として定義する。

エントロピー  $H$  は、情報源の中から特定の通報を選ぶときの自由度、あるいはそれを推定するときの不確かさを表す。エントロピー  $H$  は情報理論では重要な役割を果たす量である。

(3) 最大エントロピー原理を用いた確率密度関数の決定<sup>2)</sup>

エントロピーの概念を用いると、母集団の分布形をあらかじめ仮定せず、あるいは経験によって決定することなく、任意関数の期待値によって与えられる制約条件と確率の規格化条件のもとで、式(A. 4)で与えられるエントロピーを最大にすることにより確率密度関数を決定することが可能である。

確率密度関数  $p(x)$  が具備すべき条件と、任意関数  $f_i(x)$  の期待値は、以下のように表現される。

$$\int p(x) dx = 1 \quad (\text{A. 5})$$

$$\int f_i(x) p(x) dx = E[f_i(x)] \quad (\text{A.6})$$

( $i = 1, \dots, m$ )

式(A.5), 式(A.6)を制約条件として, 式(A.4)を最大にする  $p(x)$  を求めることは, 確率の規格化条件と  $f_i(x)$  の期待値によって与えられる情報以外はできるだけ一様となる  $p(x)$  を決定していることになる。換言すれば, このことは, われわれが知り得る情報は積極的に取り入れ, それ以外は  $x$  ができるだけランダムに発生するような  $p(x)$  を評価していることになる。

上記の問題はラグランジュの未定乗数法を用いて解くことができる。ラグランジュ関数は,

$$L = H + (\lambda_0 - 1) \left\{ 1 - \int p(x) dx \right\} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[ E[f_i(x)] - \int f_i(x) p(x) dx \right] \quad (\text{A.7})$$

で与えられる。ここに  $\lambda_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) はラグランジュの未定乗数である。  $\partial L / \partial p(x) = 0$  より  $p(x)$  の最大エントロピー推定値  $\hat{p}(x)$  を求めると

$$\hat{p}(x) = \exp \left\{ -\lambda_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \right\} \quad (\text{A.8})$$

となる。

例えば, 平均値  $\mu$  および分散  $\sigma^2$  が与えられているとする。このとき, 式(A.6)の任意関数  $f_i(x)$  として,  $f_1(x) = (x - \mu)^2$  を選べば, 求めるべき確率密度関数の制約条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \sigma^2 \quad (\text{A.10})$$

で与えられる。また最大エントロピー推定値  $\hat{p}(x)$  は式(A.8)より

$$\hat{p}(x) = \exp \{ -\lambda_0 - \lambda_1 (x - \mu)^2 \} \quad (\text{A.11})$$

となる。

式(A.11)を制約条件式(A.9)および式(A.10)に代入して, 未知数  $\lambda_0, \lambda_1$  を求めると,

$$\lambda_0 = \ln(\sqrt{2\pi} \sigma)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2}$$

が得られる。したがって, 式(A.11)は平均値  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の正規分布

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

となる。このときの最大エントロピー  $H_{\max}$  は

$$H_{\max} = \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma^2)$$

で与えられる。

この他,  $x$  のとり得る範囲が  $-a \leq x \leq a$  と規定されているとき, 最大エントロピー推定値は一様分布

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{2a}, \quad H_{\max} = \ln 2a$$

となる。また,  $x$  の範囲が  $x \geq 0$  に規定され, 平均値  $\mu$  が与えられているときは, 指数分布

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{\mu} \exp \left( -\frac{x}{\mu} \right),$$

$$H_{\max} = \ln(\mu e)$$

が得られる。この他, グラソベル分布やコーシー分布等も同様にして導くことができる。

このように, 一般に統計学においてよく知られている確率密度関数のいくつかは, 適切な  $f_i(x)$  を与えることによって式(A.8)で与えられる。

#### 参 考 文 献

- 1) 瀧澤英一: 情報の理論と演習, 廣川書店, 1966年, p. 293.
- 2) 寒川典昭, 荒木正夫: 水文事象の頻度分析へのMEPの導入について, 土木学会論文報告集, 第335号, 1983年, pp. 89~95.