

運輸省港湾技術研究所

港湾技術研究所 報告

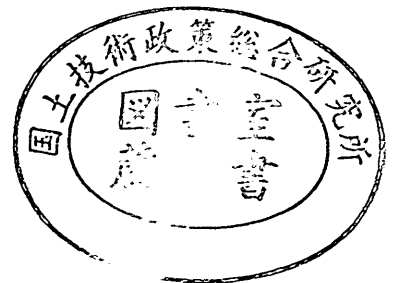
REPORT OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH
INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT

VOL. 21

NO. 1

MAR. 1982

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第21巻 第1号 (Vol. 21, No. 1), 1982年3月 (Mar. 1982)

目 次 (CONTENTS)

1. 超音波式波高計の改良とその効果について……………高橋智晴・佐々木 弘………… 3
(Improvement of the Ultrasonic-Wave Wavemeter for the Coastal Wave Observation
and its Effect ……………Tomoharu TAKAHASHI and Hiroshi SASAKI)
2. 下層2層流についての実験的研究
……………加藤 始・中野 晋・池田高則………… 31
(Experimental Study of Lower Two-Layer Stratified Flow
……………Hajime KATO, Susumu NAKANO and Takanori IKEDA)
3. 非線形一次元圧密沈下の解析法とその適用……………小林正樹………… 57
(Numerical Analysis of One-Dimensional Consolidation Problems
……………Masaki KOBAYASHI)
4. 係船岸におけるたわみ性控え工の設計に関する研究 (第2報)
——実験的考察——……………松並仁茂・吉田行秀………… 81
(Studies on the Design Method of Flexible Anchorage of the Quaywall (2nd Report)
—Experimental Studies— ………Hitoshige MATSUNAMI and Yoshihide YOSHIDA)

3. 非線形一次元圧密沈下の解析法とその適用

小林 正 樹*

要 旨

埋立地造成の際に生じるような、一次元圧密沈下解析を行う場合には、Terzaghiの一次元圧密理論を用いるのが一般的である。しかし、この理論は、数多くの単純化された仮定から構成されているものであり、実際の工事の条件と一致しない点が多く、結果に大きな誤差が生じる可能性がある。

本報告では、実際の工事における複雑な条件を正確に再現して一次元圧密解析を行うために、有限要素法を用いた数値解法を開発した。この方法においては、地盤の不均一性、土の応力-ひずみ関係の非線形性および時間依存性、段階载荷、浮力による荷重減少の影響などを考慮することができる。

この方法によって Terzaghi 理論の仮定条件を検討した結果によると、成層地盤の場合には、従来の方法では沈下速度の推定に大きな誤差が生じることが明らかにされた。

最後に、広島空港の埋立工事で得られた実測値を解析し、圧密沈下予測法の精度を検討した。その結果によると、今回開発した数値解法を用いることにより、従来得られなかったような高精度の沈下予測が可能となることが認められた。また、数値解法の結果から計算された含水比の変化は実測値とほぼ一致したが、一軸圧縮強度の増加に関しては、計算値が実測値に比較して過大となる傾向となった。

* 土質部 土性研究室長

3. Numerical Analysis of One-Dimensional Consolidation Problems

Masaki KOBAYASHI*

Synopsis

It is essential to accurately predict settlements in big land reclamation projects. In practice settlement analyses are almost performed using Terzaghi's classical theory of consolidation. Although settlement analysis of reclaimed lands can be assumed to be one-dimensional, a number of simplified assumptions in Terzaghi's theory deteriorate the accuracy of the prediction.

In this report a numerical analysis of one-dimensional consolidation is developed by using the finite element method to take into account time-dependent loading, large strains, self-weight of soil, nonlinear time-dependent stress strain relationships, settlement dependent submergence, layered soil deposits and other such phenomena.

The effects of simplified assumptions of Terzaghi's theory are examined by comparing classical analyses with numerical ones. It is shown that the effect of layered soil strata is significant in predicting the rate of consolidation.

Finally, classical and numerical analyses were compared for a field problem. Although the classical analysis significantly underestimated the rate of settlements, results of the numerical method agreed favourably with the measured settlements. The changes of water contents and undrained shear strength due to consolidation were predicted by the numerical method. It is shown that predicted decrease of water contents agreed favourably with the observed one, whereas numerical results overestimated the increase of shear strength.

* Chief of Soil Mechanics Laboratory, Soils Division

目 次

要 旨	57
1. ま え が き	61
2. 慣用沈下計算法の問題点	61
2.1 自重の影響	61
2.2 不均一地盤の処理	62
2.3 浮力による荷重減少	63
2.4 段階荷重の処理	63
2.5 二次圧密の影響	63
3. 有限要素法による圧密沈下解析	63
3.1 有限要素法による一次元圧密解析の定式化	63
3.2 土の応力-ひずみ関係	65
3.3 透水係数	66
3.4 数値解の精度の検討	67
4. 広島空港における圧密沈下現象の解析	68
4.1 工事の概要	68
4.2 土質条件の設定	69
4.3 沈下解析	72
4.4 含水比および強度の変化	74
5. ま と め	77
参 考 文 献	77
主 要 記 号 表	78
付 録	78

1. まえがき

国土の狭いわが国においては、埋立によって用地を造成することが古くから行われてきている。埋立工事を行うような地点では、軟弱な粘性土地盤が厚く堆積している場合が多く、埋立土砂の重量によって圧密沈下が生じる。このような圧密沈下は長期間にわたって継続するために、埋立工事終了後も沈下が発生する。したがって、埋立工事に際しては、圧密沈下量を精度良く推定して、将来の沈下を十分に考慮した計画を作成することが重要な条件となってくる。

実際、埋立工事が大規模になると、発生する圧密沈下量も非常に大きくなるので、圧密沈下量の推定が埋立工事の可能性を決定する重要な要因となってくる。たとえば、関西国際空港を埋立法で海上に建設する計画を立案する際には、空港完成後の圧密沈下量の推定が埋立法の大きな問題点の一つとなっていた。

また、埋立工事に必要な土砂の量を事前に把握するためにも、圧密沈下量の推定は重要な条件となってくる。近年、用地造成とあわせて、土砂処分のために埋立を行う場合も増加してきている。このような場合には、土砂分量の推定のために精度の高い圧密沈下解析が要求される。

埋立工事は幅広い範囲に載荷するので、埋立地の護岸付近を除くと、沈下はほぼ一次的に生じると考えられる。したがって、一次元という観点から考えると、一般に用いられている Terzaghi の圧密理論がそのまま適用可能というわけになる。しかし、実際に埋立工事が行われるような地盤は複雑なものも多く、Terzaghi の圧密理論が対象とするような均一なものはほとんどみられない。しかも、実際の埋立工事においては、施工段階も単純ではなく、Terzaghi の理論の条件に反することが多い。

このように、Terzaghi の一次元圧密理論が実際の埋立工事の沈下解析にそのまま適用できるものではない、という点が認識されているにもかかわらず、実際の沈下解析ではこの理論を用いることが圧倒的に多い。この原因としては、いくつかの点が考えられるが、Terzaghi の理論以外には、実用上用いられるような圧密理論が存在しないということが最も大きなものである。また、沈下解析を行っている人々の多くが、複雑な圧密沈下解析を行っても精度は必ずしも向上しない、と考えている点にも

問題があると考えられる。しかし、現在では、粘性土の圧密現象の研究も進歩し、実際の地盤にも適用可能な圧密理論も提案されてきている。これらの理論は、Terzaghi の理論のような簡便な図表としては使用不可能であり、何らかの数値計算を必要とするものが多い。この点が、実際に沈下解析を行う人々の間で、新しい理論が普及しない大きな原因である。しかし、Terzaghi の圧密理論が実際の埋立工事の条件に当てはまらないとすると、この理論を用いて、沈下解析の精度を議論することは無意味となる。真に沈下解析の精度を高めるためには、現時点で考えられる最良の方法で実際に観測された沈下量の解析を行い、その結果を検討することが必要となってくる。本報告では、このような観点から、埋立地造成の際に生じるような、一次元圧密沈下解析の検討を行っている。そのために、まず最初に、最も一般的に用いられている Terzaghi の圧密理論を用いた慣用法の問題点を抽出した。次に、これまでの圧密に関する研究成果を活用して、数値解法を用いて圧密解析を行う方法を開発した。最後に、この数値解法を実際に得られた埋立地の沈下に適用して、Terzaghi 理論を用いた慣用法との比較を行いながら、沈下解析の精度を検討した。この際の実測沈下としては、埋立地の中央付近での観測値が長期間得られていること、地盤条件と載荷状態が明確なことなどが要求される。今回は、日本各地での埋立工事の中から、この条件に適合するものとして、広島空港の拡張工事を選んでいる。

2. 慣用沈下計算法の問題点

2.1 自重の影響

圧密沈下解析を行う場合には、Terzaghi の一次元圧密理論を用いるのが一般的である。この理論はいくつかの仮定を設けて導き出されたものであり、その条件が当てはまらなければ、結果には十分な精度が保証されないのは当然である。

Terzaghi の圧密理論の仮定の一つの条件として、粘土層が一様であることがあげられている。この条件が意味することは、粘土層の性質が深さ方向に変化しないことである。しかし、ここで注意しなければならないのは、実際の地盤においては、自重の影響のために、たとえ全く同一の物理性質を有する粘土から構成される地盤でも、一様な地盤とは見せせないことである。一般に、地盤の圧密降伏応力は深さともに変化するので、地盤の圧

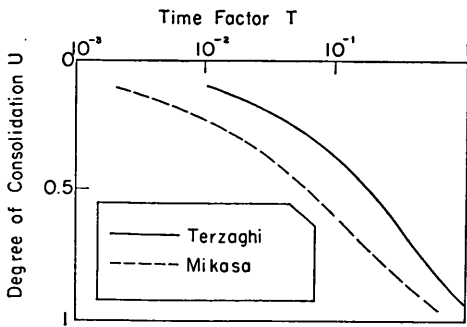


図-2.1 自重の影響による圧密速度の相違

縮性も深さ方向に変化することになる。このように深さ方向に圧縮性が変化すると、もはや Terzaghi の一次元圧密理論の仮定が満足されなくなる。

このような自重の影響による圧縮性の深さ方向の変化が、圧密沈下の速さをどの程度変えるかを調べた例を図-2.1 に示す。ここで対象とした地盤は厚さ 14.4 m の正規圧密状態のもので、排水条件は片面排水である。粘土の水中単位体積重量 γ' を 0.5 tf/m^3 とし、表面に 2 tf/m^2 の載荷重が加わり、この状態での自重および載荷重による圧密が終了している状態を初期条件とする。

図-2.1 は、このような地盤に対して 3 tf/m^2 の載荷を行った場合の沈下に関する圧密度 U と時間係数 T との関係をプロットしたものである。この図には、Terzaghi 理論による曲線と、自重の影響を考慮した理論によるものを比較している。図-2.1 よりわかるように、自重の影響を考慮しない Terzaghi 理論は、圧密速度を過小評価する傾向がある。この原因としては、今回比較を行ったような正規圧密地盤では、表面に近い部分が圧縮性が大きく、しかも、排水面に近いために、通常の方法で推定されるよりも速く圧密が進行することがあげられる。実際に圧密沈下解析を行う必要が生じるのは、軟弱な正規圧密地盤が多いことを考えると、このような自重の影響を充分に考慮する必要が認識される。

2.2 不均一地盤の処理

実際の地盤においては、深さ方向に土性が大きく変化する場合が多い。地盤が堆積作用によって形成されるためには、地質学的に見ても非常に長期間要するわけであり、深さが異なれば堆積した時代が異なることになり、深さ方向に土性が変化するのは当然である。

Terzaghi の圧密理論においては、このような不均一地盤は計算が不可能であるので、何らかの仮定を設けて均質な地盤として取り扱わなければならない。このよう

場合には、単純に平均的な定数を用いたり、あるいは換算層厚法²⁾と呼ばれる方法を用いたりすることが多い。

この換算層厚法は、地盤が成層状態の場合に有効な方法であり、地盤が n 個の層から構成される場合に単一の層に置き換えて圧密解析を行うためのものである。この方法では、基準の層を一つ決定して、ほかの層の層厚を圧密係数の比の平方根に反比例させることにより、基準層の圧密係数を持つ単一な土層と仮定して計算を行う。つまり、 n 層の第 1 層を基準層とし、第 1 層の圧密係数を c_{v1} とすると、各層の換算層厚 H_n' は、それぞれの層の層厚 H_n と圧密係数 c_{vn} を用いて、 $H' = H_n \sqrt{c_{v1}/c_{vn}}$ によって求められる。

この方法は、成層地盤で、しかも各層の圧密係数が大きく異なる場合に便利な方法として用いられている。実際の地盤では、このような状態のものが多く、単純な平均値的な値を求めにくいので、換算層厚法がよく用いられる。

換算層厚法は、圧密係数の値によって層厚を変化させているので、一見すると合理的なように思える。しかし、この方法は、成層状態を全く考慮していないという欠点がある。たとえば、図-2.2 に示されるような 2 つの 2 層地盤について比較してみる。図-2.2 で (A) と (B) はいずれも同じ条件の 2 層地盤から構成されている。ここでは、単純化のために単位は規定せずに任意の適合するような単位系をとるものとする。図-2.2 の A と B の唯一の相違は層序が異なる点だけである。ここで

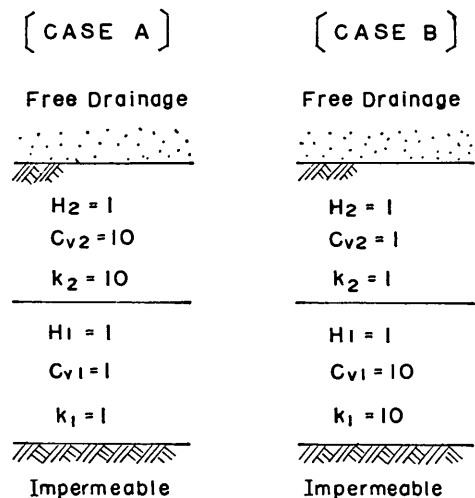


図-2.2 二層地盤の圧密解の比較条件

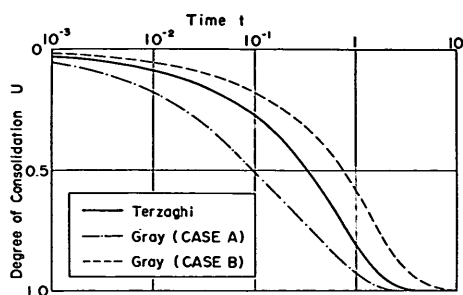


図-2.3 二層地盤の圧密速度の比較

は、上面からのみ排水するとしているので、図-2.2 で A は圧密係数の大きい層が排水面に近いのに対して、B では、圧密係数の小さい層が排水面に近い位置を占めている。

換算層厚法を用いる限りは、図-2.2 の A と B は圧密度と時間の関係に相違が生じないことになる。しかし、実際には、層序と排水面の関係によって圧密の進行は影響を受けることが予想される。

図-2.3 はこの影響を調べた結果を示したものである。図-2.3 には、図-2.2 の条件に対して換算層厚法を用いて、Terzaghi 理論から計算した圧密度と時間の関係を実線で示している。また、図-2.3 には、このような 2 層地盤を厳密に解いた結果³⁾ を比較のためにプロットしてある。2 層地盤の圧密解析を厳密に行うと、図-2.2 の A と B の条件で結果が異なるので、図-2.3 には A の場合を一点鎖線で、B の場合を破線で示している。図-2.3 より明らかなように、各層の条件は同一でも、層序によって圧密速度は大きく変化する。換算層厚法は、成層条件を全く考慮していないので、圧密速度の推定に大きな誤差を生じる可能性のあることが明白となった。

2.3 浮力による荷重減少

埋立工事の場合には、載荷高さが水面以上になると、沈下に伴って浮力による荷重の変化が生じることになる。たとえば、盛土の有効単位体積重量を水面下で 1 tf/m^3 、水面上で 2 tf/m^3 とすると、沈下量 1 m 当り 1 tf/m^2 の荷重減少が生じることになる。沈下量が大きくなると、この浮力による荷重減少は無視できないものとなる。

このような浮力による荷重変化は粘土層の圧密に複雑な影響を与える。つまり、粘土層の深度に応じて、荷重減少の影響が異なることになる。排水面に近い粘土層では、圧密が急速に進行するので、浮力による荷重減少の影響を直接受けて、荷重減少に伴う膨張が生じることに

なる。一方、排水面から離れた粘土層においては、圧密はゆっくり進行することになる。したがって、このような粘土層では、荷重が減少しても、その時点では、それだけの大きさの荷重に対して圧密が終了していないので、膨張は生じず、むしろ圧密が継続することになる。このように、浮力の影響は粘性土層の深さに応じて複雑であるので、通常の圧密解析では、これを考慮することは非常に困難である。

2.4 段階載荷の処理

実際の埋立工事では、載荷が一度に行われることはなく、一般には段階的に行われる。このような場合に通常の Terzaghi による圧密沈下計算法を適用しようとするとき、困難な問題にぶつかる。

荷重が数段階に分割されるような場合には、各段階ごとに別個に圧密沈下計算を行い、それらを重ね合わせるという方法が一般的である。しかし、この方法を用いる際の最も大きな問題として、各時点での粘土層の層厚や圧密定数をどのように求めるかが明確でない点があげられる。もしも、各荷重段階でほぼ 100% 近い圧密度が達成される場合には、前の荷重段階による圧密終了時点新たな初期値として計算が行える。しかし、実際には圧密度が小さい段階で次の載荷が行われることも多く、そのような場合にどのような考え方を用いれば良いのかは明らかでない。したがって、実際に埋立地の圧密沈下解析を慣用の方法で行うためには、段階載荷をどのように扱うかの大きな問題が生じてくる。

2.5 二次圧密の影響

Terzaghi の圧密理論では、圧密が十分に進行して過剰間隙水圧が零になると沈下が終了することになる。しかし、実際の粘土では、間隙水圧が零となっても沈下が継続する二次圧密現象が生じる。

このような二次圧密は、長期的沈下や残留沈下等を問題とする場合に重要となってくる。さらに、二次圧密現象は粘土の応力-ひずみ関係の時間依存性と深く関連しているものと思われ、長期的沈下のみならず、いわゆる一次圧密中にもこの影響が生じることが考えられる。このような観点からすると、圧密沈下解析を行うためには、二次圧密現象をも考慮すべきと思われるが、現行の慣用法では、二次圧密を取り入れることは困難である。

3. 有限要素法による圧密沈下解析

3.1 有限要素法による一次元圧密解析の定式化

前章で述べたような慣用沈下計算法の問題点を解決す

るためには、解析的方法は不可能であり、個々の問題に対して数値解法を用いる必要がある。一次元圧密解析のための数値解法としては、差分法と有限要素法があげられる。差分法は古くから用いられてきたもので、定式化も容易であり、計算も比較的簡単に行えるという長所を有する。しかし、実際の地盤に対して圧密沈下解析を行う場合には、不均一な地盤や複雑な境界条件を取り扱わなければならないことが多い。有限要素法は、このような複雑な条件の処理に適している。さらに、圧密沈下解析に際しては、土の応力-ひずみ関係の非線形性を考慮しなければならないことも多い。有限要素法を用いて非線形解析を行う手法は、近年の進歩が著しく、その点でも、有限要素法が最適な数値解法と考えられる。したがって、今回は、数値解法として有限要素法を用いることとした。

有限要素法によって圧密解析を行う場合には、基本方程式として、Terzaghi のものを用いるか、Biot⁴⁾ のものを用いるかという問題点が生じる。Terzaghi の圧密方程式においては、未知数が間隙水圧のみである。Biot の圧密方程式においては、未知数が間隙水圧と鉛直方向の変位で表現されている。土を線形弾性体と仮定すると、両者の圧密方程式は、一次元の場合には一致することになる。しかし、非線形な応力-ひずみ関係を用いる場合には、Biot の方程式のように、間隙水圧と変位を別個に未知数として選択する方が、どのような非線形の関係も取り扱うことができる長所を有する。したがって、ここでは、Biot の圧密方程式を基本式として、有限要素法によって定式化することとする。

一次元圧密条件における Biot の圧密方程式は、次のように表わされる。

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho z = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial u}{\partial z} + \rho_f z \right) \quad (3.2)$$

ここに、 z は鉛直座標、 t は時間、 σ_z は鉛直方向の有効応力、 u は間隙水圧、 k_z は鉛直方向の透水係数、 ρ は土の湿潤密度、 ρ_f は間隙水の密度、 ζ は間隙水の体積ひずみである。

式 (3.1) は、つり合い方程式と呼ばれるものであり、式 (3.2) は連続方程式と呼ばれ、それぞれ、力のつり合い、間隙水の連続性を表わしている。

有限要素法を用いて、式 (3.1) と式 (3.2) を解くためには、地盤を鉛直方向に有限要素に分割し、各要素の

節点において、未知数として、鉛直変位 δ と間隙水圧 u を用いる。このように有限要素を用いて、式 (3.1) と式 (3.2) を定式化すると、次のようになる。

$$K\delta + Cu = F \quad (3.3)$$

$$C^T \frac{d}{dt} \delta - E \frac{d}{dt} u - Hu + Q = 0 \quad (3.4)$$

ここに、 δ, u は各節点における鉛直変位と間隙水圧をベクトル表示したもの、 F は各節点に作用する外力ベクトル、 Q は各節点に外から作用する流量ベクトル、 K, C, F, H はそれぞれ剛性マトリックスに対応するものであり、その詳細は文献⁵⁾を参照されたい。

式 (3.4) は t 時間に関する微分を含んでいるので、時間方向に関して離散化を行う必要がある。このような時間に関して一階の偏微分方程式を離散化すると、次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} C^T \delta_{n+1} - E u_{n+1} - \theta \Delta t H u_{n+1} \\ - C^T \delta_n + E u_n - (1-\theta) \Delta t H u_n \\ + \theta \Delta t Q_{n+1} + (1-\theta) \Delta t Q_n = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここに、添字 n は時刻 $t=t_0$ における値を表わし、添字 $n+1$ は $t=t_0+\Delta t$ における値を表わす。また θ は離散化の状態を示すパラメータであり、 $0 \leq \theta \leq 1$ である。特に、 $\theta=0$ は前進型差分、 $\theta=1/2$ は中心型差分、 $\theta=1$ は後退型差分と呼ばれるものである。これらの 3 種類の θ の値が一般に用いられている。今回の計算においては、最も安定性が良いという理由で、 $\theta=1$ の後退型の式を用いた⁶⁾。

式 (3.3) と式 (3.5) を合わせると、次式のように表わされる。

$$K_m a = r \quad (3.6)$$

ここに、 K_m は全体の剛性マトリックスに対応するもの、 a は未知変位ベクトル、 r は外力ベクトルであり、それぞれ次の式から求められる。

$$\left. \begin{aligned} K_m &= \left[\begin{array}{c|c} K & C \\ \hline C^T & -E - \theta \Delta t H \end{array} \right] \\ a &= \left\{ \begin{array}{c} \delta_{n+1} \\ u_{n+1} \end{array} \right\} \\ r &= \left\{ \begin{array}{c} F_{n+1} \\ C^T \delta_n - E u_n + (1-\theta) \Delta t H u_n - \theta \Delta t Q_{n+1} - (1-\theta) \Delta t Q_n \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

つまり、式 (3.7) のように各節点における未知数である変位と間隙水圧をまとめて表わすと、圧密解析の場合でも、通常の応力解析における式 (3.6) と同じ型の式が得られることになる。したがって、剛性マトリックスと外力項を式 (3.7) によって適切に求めれば、一般の応力

解析と同一の手続で有限要素解析が可能となる。

今回の圧密解析は一次元状態に対するものである。したがって、未知変位は各節点に鉛直方向の1個を考えれば良く、あえて、マトリックス表示を用いる必要もない。しかし、プログラム作成上は、一次元のものも二次元のものも要する作業は大差ない。したがって、二次元条件をも取り扱える方がより実用性が高いと考えて、今回は、二次元状態として有限要素の定式化を行っている。

3.2 土の応力-ひずみ関係

一次元圧密の場合の応力-ひずみ関係は、標準圧密試験から求めることができる。標準圧密試験結果を整理して、間隙比 e と圧密圧力の対数 $\log p$ の関係をプロットすると、図-3.1 のようなものが得られる。すなわち、圧密降伏応力 p_0 を境にして、正規圧密状態と過圧密状態で、沈下の状況が大きく変化することになる。

このような応力-ひずみ関係を表わすために、図-3.2 に示されるような力学的モデルを用いることとする。圧

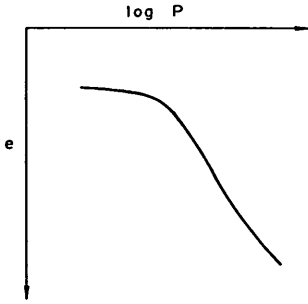


図-3.1 間隙比-圧密圧力(対数)関係

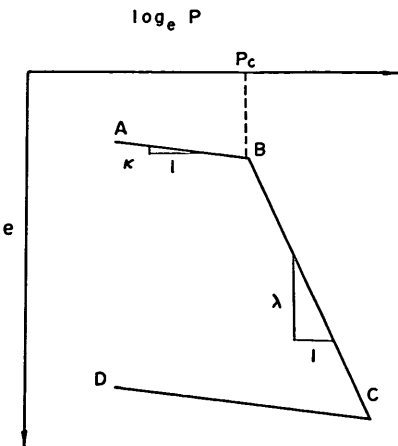


図-3.2 弾塑性論による間隙比-圧密圧力(自然対数)関係

密降伏応力 p_0 より小さい範囲では、沈下は小さく、しかも、弾性的に生じるとする。つまり、圧密圧力が増減しても、間隙比は 図-3.2 の AB 直線上をたどることになる。一方、圧密圧力 p_0 がを超えると、塑性的な沈下が生じ、たとえ、圧密圧力が減少しても、もとの間隙比にはもどらない。図-3.2 で、C 点まで圧密されたものは、荷重減少に伴い、CB 線上ではなく、CD 線上を動く。

図-3.2 は、圧密圧力に関して、常用対数でなく、自然対数 ($\ln p$) でプロットしている。この図で示される弾塑性モデルにおいては、間隙比 e と圧密圧力の自然対数 $\ln p$ の関係が、圧密降伏応力 p_0 を境にして、勾配が κ と λ の折線で表わされるとしている。したがって、正規圧密状態での $e-\log p$ 曲線の勾配を表わす圧縮指数 C_c との関係は、 $\lambda=0.434C_c$ で与えられる。

このような弾塑性モデルを用いると、土の応力-ひずみの非線形性を比較的良く表わすことができる。このモデルにおいては、土が応力に対して瞬間的に反応して、一定のひずみが生じるとしている。しかし、粘性土においては、一定の応力下でもひずみが時間とともに進行するクリープ現象が生じる。

この現象を表わすモデルとしては、古くから粘弾性理論を用いたものが数多く提案されてきている⁷⁾。しかし、これらのモデルは、複雑な土の挙動を表わすためには不十分な点も多い。この点を改良するために提案されたものが、弾・粘塑性論に基づくモデルである⁸⁾。

このモデルにおいては、ひずみ ϵ を弾性ひずみ ϵ_e と粘塑性ひずみ ϵ_{vp} に分けている。弾性ひずみ ϵ_e は、応力の変化に応じて瞬間的に生じるもので、圧密圧力を初期の状態 p_0 から p_1 に変化させた場合には次式で与えられる。

$$\epsilon_e = \frac{\kappa}{1+e_0} \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \quad (3.8)$$

ここに、 e_0 は初期間隙比、 κ は 図-3.2 で表わされる過圧密領域での $e-\ln p$ 曲線の勾配である。

したがって、弾性ひずみに関しては、弾塑性論によるものと同一となる。一方、粘塑性ひずみ ϵ_{vp} は時間とともに生じるものなので、ひずみの絶対値ではなく、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{vp}$ として次式のように表わされる。

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{d\epsilon_{vp}}{dt} = \dot{v}_0 \exp \left\{ \frac{\lambda - \kappa}{1+e_0} \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) - \epsilon_{vp} \right\} \quad (3.9)$$

ここに、 e_0 、 λ 、 κ 、 p_0 、 p_1 は弾塑性論で用いたものと同一であり、 \dot{v}_0 と α は二次圧密を表わす定数である。

式 (3.9) では、二次圧密を表わすために、 \dot{v}_0 と α という 2 個の定数が入っている。このうち、 \dot{v}_0 は圧密圧力を増加させる直前、すなわち載荷直前の粘塑性ひずみ速度である。また、 α の意味を調べるためには、式 (3.9) を積分するとわかりやすい。

圧密圧力を時間 $t=0$ で p_0 から p_1 に変化させて、その後の圧密圧力を一定に保つ場合の粘塑性ひずみは、式 (3.9) を積分することにより、次式で与えられる。

$$\epsilon_{vp} = \alpha \ln \left[1 + \frac{\dot{v}_0 t}{\alpha} \exp \left\{ \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \right\} \right] \quad (3.10)$$

ただし、積分の際には、 $t=0$ で $\epsilon_{vp}=0$ としている。式 (3.10) を見ると、時間 t が大きくなるにつれて、大かつこの中の第 2 項が 1 に比較して大きくなるために、1 が無視できることが分かる。圧密圧力が一定ならば、 \exp の中は一定となるので、時間 t が十分に大きければ、粘塑性ひずみは $\ln t$ に比例することになる。このことは、圧密試験の際に二次圧密が $\log t$ に比例して生じる現象を再現している。したがって、 α の値は、このような二次圧密と時間の自然対数 $\ln t$ 関係の勾配を表わすものである。

もう一つの定数である \dot{v}_0 に関しては、圧密沈下量の時間効果の影響と対応している。時間効果を考慮して、自然地盤の間隙比と圧密圧力の関係を調べると、図-3.3 のようになるとされている⁹⁾。図-3.3 には、堆積の年

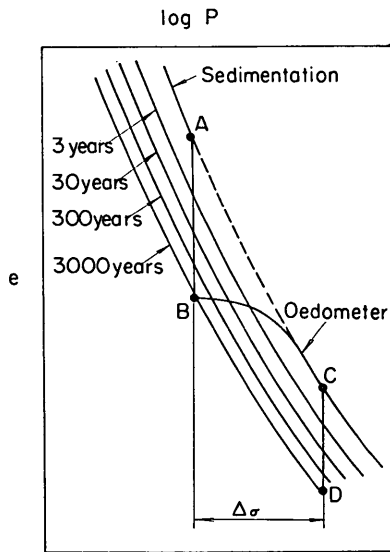


図-3.3 間隙比 - 圧密圧力におよぼす時間の影響

代に応じた間隙比と圧密圧力の関係が示されている。堆積直後の値が 図-3.3 の A 点で表わされる粘土を考えると、二次圧密によって、同一圧密圧力でも沈下が進行し、AB 線上をたどることになる。したがって、それぞれの圧密圧力に対して、堆積年代を変化させると、図-3.3 のような複数の間隙比圧密圧力曲線が得られる。

このような粘土層に対して圧密試験を行うと、図-3.3 の BCD 曲線のような結果が得られる。つまり、B 点から圧密圧力を $\Delta\sigma$ だけ増加させると、短期間には BC 曲線で表わされるような沈下が生じ、その後は時間とともに CD 直線をたどる。このような圧密試験によって得られる沈下の傾向は、図-3.3 の B 点での堆積年代によって大きく影響される。この堆積年代の相違は、粘塑性ひずみ速度の大小と関係している。つまり、堆積年代の長い粘土は、粘塑性ひずみ速度が小さくなっていると考えられる。この傾向を表わす定数が式 (3.9) の \dot{v}_0 である。この定数を用いることにより、図-3.3 のような時間効果がうまく表現できることになる。

今回の数値計算においては、これまでに述べてきたような弾塑性モデルと弾・粘塑性モデルを用いている。いずれの場合にも、応力 - ひずみの関係が非線形となるので、線形解析と比較すると複雑な手法が必要となる。弾塑性モデルの場合の計算法は付録 A を、弾・塑性モデルの場合は付録 B を参照されたい。

3.3 透水係数

圧密解析を行うためには、土の応力ひずみ関係のほか、土の透水係数を求める必要がある。

粘性土の透水係数は一定の値ではなく、間隙比の値によって大きく変化する。したがって、今回の解析では、透水係数 k を間隙比 e の関数として次式のように表した。

$$k = k_0 \exp \{ \beta(e - e_0) \} \quad (3.11)$$

ここに、 e_0 は初期間隙比、 k_0 は初期間隙比における透水係数、 β は実験定数である。

式 (3.11) は透水係数の値を求めるものであるが、通常の圧密解析においては、圧密係数 c_v を用いる。したがって、式 (3.11) からは、どのような圧密係数が得られるかを調べたのが次式である。

$$c_v = \frac{m_v}{\gamma_w k} = \frac{m_v}{\gamma_w k_0 \exp \{ \beta(e - e_0) \}} \quad (3.12)$$

ここに、 m_v は体積圧縮係数、 γ_w は水の単位体積重量である。

土の応力ひずみ関係として、図-3.2 に示されるような

弾塑性モデルを用いると、正規圧密状態での m_v は次式で与えられる。

$$m_v = \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{1}{1+e_0} \frac{\lambda}{p} = \frac{\lambda}{1+e_0} \quad (3.13)$$

式 (3.13) を式 (3.12) に代入すると次式が得られる。

$$c_v = \frac{1}{\gamma_w k_0 \exp\{\beta(e-e_0)\}} \cdot \frac{1}{1+e_0} \cdot \frac{\lambda}{p} \quad (3.14)$$

正規圧密の粘土では、間隙比の変化が次で与えられる。

$$e - e_0 = \lambda \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) \quad (3.15)$$

式 (3.15) を式 (3.14) に代入すると次式が得られる。

$$c_v = \frac{1}{\gamma_w k_0 \exp\{\beta\lambda \ln(p_0/p)\}} \cdot \frac{1}{1+e_0} \cdot \frac{\lambda}{p} \quad (3.16)$$

式 (3.16) で $\beta = 1/\lambda$ とすると、 c_v の値は一定となって次式が得られる。

$$c_v = \frac{1}{\gamma_w k_0 p_0} \cdot \frac{\lambda}{1+e_0} \quad (3.17)$$

一般の粘性土においては、正規圧密状態になると、圧密係数がほぼ一定になるものが多い。したがって今回の計算においては、このような正規圧密状態での圧密係数から、式 (3.17) を用いて初期透水係数 k_0 の値を求めた。

実際の圧密沈下解析を行う際に問題となる大きな問題の一つとして、層厚の変化があげられる。これは、粘性土の圧縮性が大きい場合には、沈下速度に大きな影響を与える。

今回の解析において層厚の影響を考慮するためには、透水係数と体積圧縮係数の考え方を若干変更する必要がある。透水係数を考える際には、層厚の変化による動水勾配の変化の影響を調べる必要がある。座標系として変形前のものを用いると、変形後の座標に対する動水勾配 i' と変形前の動水勾配 i との間には、次式の関係がある。

$$i' = i/(1-\varepsilon) \quad (3.18)$$

ここに、 ε は圧縮方向を正とした場合のひずみであり、 $(1-\varepsilon)$ は層厚の減少比に対応する。式 (3.18) は、沈下が生じて層厚が減じると、変形を考慮した動水勾配は、変形前の座標を基準にした値よりも大きくなることを表わしている。したがって、透水係数 k の値に関しても、変形を考慮すると、 $1/(1-\varepsilon)$ の値を当初の透水係数にかける必要が生じる。

一方、体積圧縮係数 m_v に関しても、変形を考慮すると、式 (3.13) において、ひずみとして自然ひずみをと

る必要が生じる。 m_v に関しても、変形を考慮する場合としない場合のものをそれぞれ、 m_v' 、 m_v とすると、両者の関係は次式で与えられる。

$$m_v' = m_v/(1-\varepsilon) \quad (3.19)$$

通常のように、圧密定数として圧密係数を用いるとすると、透水係数 k は m_v に比例する。したがって、変形を考慮すると、透水係数にまた $1/(1-\varepsilon)$ の値をかける必要が生じる。

このように、層厚の変化を考慮して通常の圧密係数の定義式によって、沈下解析を行うためには、透水係数 k の値を次式によって修正し、 k' としなければならない。

$$k' = k/(1-\varepsilon)^2 \quad (3.20)$$

式 (3.20) は、一般の圧密解析において、沈下の速さが層厚の自乗に批判する点と対応している。今回の有限要素法による一次元圧密解析において層厚の変化を考慮する場合には、式 (3.20) を用いて透水係数の値を修正した。

3.4 数値解の精度の検討

これまでに述べてきたような手法で、圧密解析を有限要素法を用いて行う場合、まず最初に、数値解の精度を調べる必要がある。

今回行っている圧密解析は非線形のものであるので、解析解が得られている例は少ない。その中で、土の応力-ひずみ関係として、間隙比 e と圧密圧力の対数 $\log p$ が直線関係にあるとした場合の一次元圧密解析が行われている¹⁰⁾。そこで得られている解析解と今回の有限要素法による結果とを比較して、数値解の精度を調べてみることにする。

計算条件としては、片面排水条件とし、土層を5個の二次アイソパラメトリック有限要素に分割する。この計算は、土の応力-ひずみ関係として非線形のものを用いているので荷重増分比 p_1/p_0 によって結果が変化する。ここでは、 $p_1/p_0=2$ としている。また、圧密係数は一定としている。

図-3.4 は、計算の結果得られた値を解析解と比較したものである。図-3.4 には沈下に関する圧密度と非排水面における間隙水圧に関する圧密度の両方を時間係数 T に対してプロットしている。この図よりわかるように、有限要素法の結果は解析解と良く一致しており、数値解法の精度の高いことが示された。

次に、ひずみに関する圧密方程式を用いる三笠の圧密理論¹⁾による解析結果と比較を行うことにする。この理論では、土の応力-ひずみ関係として非線形のものがか

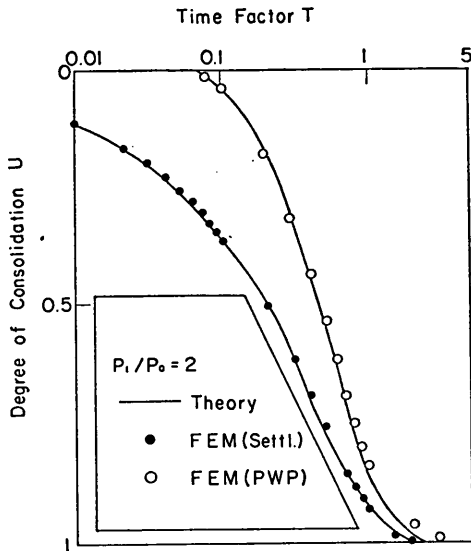


図-3.4 非線形一次元圧密理論における圧密度と時間係数の関係

慮できる。しかも、圧密に伴って生じる粘土層厚の変化や段階的荷重も計算に取り入れることが可能である。三笠の圧密理論を用いた場合には、解析解は得られず、差分法を用いた数値解析を行う必要がある。しかし、この理論においては、今回の有限要素解析と異なり、未知数として、ひずみだけを考えればよく、数値解法としては解きやすい型となっている。したがって、有限要素解析のように、未知数として、変位と間隙水圧を連立させた複雑な非線形方程式を解く場合の精度の検討に用いることができると考えられる。

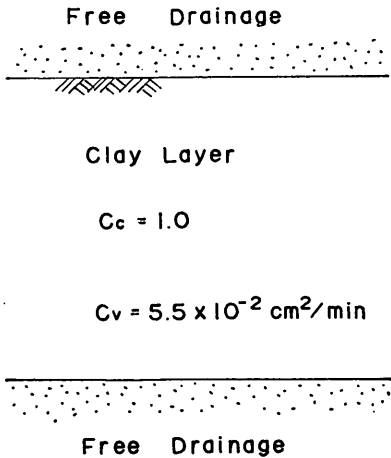


図-3.5 自重を考慮した圧密解析の計算条件

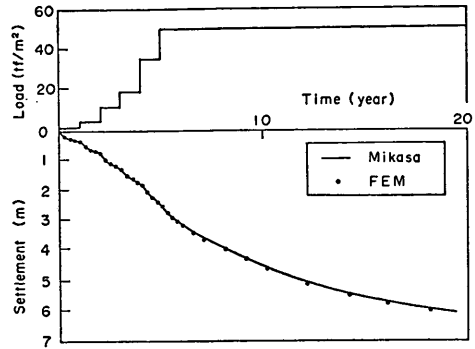


図-3.6 自重を考慮した場合の沈下-時間関係の比較

このような観点から、三笠の理論を用いた場合の差分法による結果と有限要素解析の結果を同一の条件下で比較した。今回は 図-3.5 に示されるように、計算条件としては、圧縮指数 $C_c=1.0$ である一様な粘土層を考え、両面排水条件としている。荷重は段階的に行った。圧密係数は一定とし、層厚の変化を考慮している。有限要素は二次のアイソパラメトリック要素を用い、地層を 10 個の要素で分割した。

図-3.6 は計算の結果得られた沈下と時間の関係と比較したものであり、荷重の状況も示したものである。この図より分るように、有限要素解析の結果は、三笠の理論に基づく結果¹⁾と非常によく一致している。

したがって、図-3.4 と 図-3.6 に示されるように、今回用いた有限要素法の精度は十分に高いことが明らかとなった。

4. 広島空港における圧密沈下現象の解析

4.1 工事の概要

この工事は広島空港の機能を拡大するために、既設空港の南側海面に埋立によって用地を造成し、滑走路を延長しようとしたものである。埋立の規模は 図-4.1 に示されるように、幅 250 m、長さ 520 m であり、工事は昭和 42 年から開始された。

この地点での海底面は、やや沖側に向って傾斜していて、水深が 3 m から 7 m 程度に変化している。土質条件としては、海底面から軟弱な粘性土層が約 20 m 堆積しているという軟弱地盤であるために、サンドドレーン工法による地盤改良が計画された。その際に、経済的な観点から、重要な部分にのみサンドドレーンを施工することが決定され、図-4.2 の平面図と 図-4.3 の断面図に

非線形一次元圧密沈下の解析法とその適用

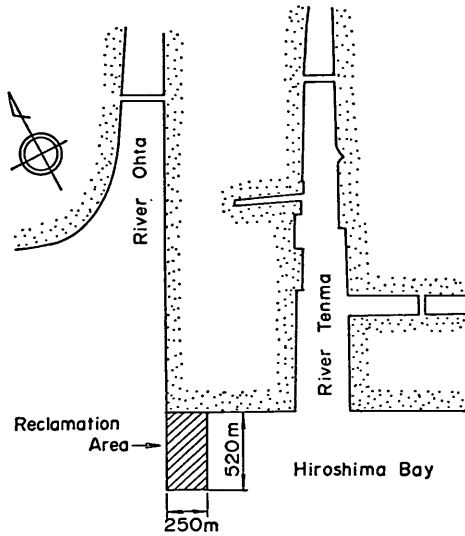


図-4.1 広島空港位置図

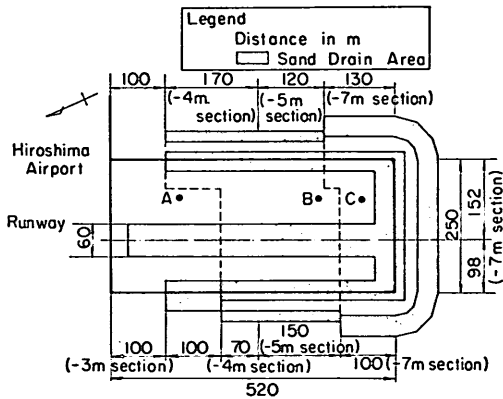


図-4.2 広島空港埋立工事の平面図

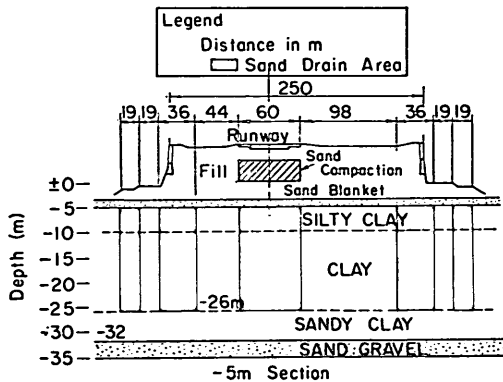


図-4.3 広島空港埋立工事の断面図

示されるように、滑走路直下と護岸部分が選ばれた。この場合、滑走路直下のサンドドレーンは開港後の残留沈下防止のためであり、護岸部分のものは地盤の破壊防止のためである。サンドパイルは、直径が 50 cm であり、2.5 m の三角形配置で施工された。

埋立工事に当っては、最初に全域にわたって敷砂を施工し、その後にサンドドレーン区域に対してサンドパイルを打設した。サンドパイル打設法は通常のいわゆる「おしのけ型」である。埋立土砂は、まさ土が用いられ、滑走路直下は、図-4.3 に示されるように、サンドコンパクション工法を採用して締固めを行った。

埋立工事は 3 年間にわたって行われたが、その際に施工管理のために数多くの点で沈下観測が行われた。沈下量は敷砂上に設置された沈下板によって測定されている。ただし、埋立工事が終了した後は、水準測量によって沈下量の測定を行っている。

今回の圧密解析は自然地盤の一次元圧密条件を対象としている。広島空港の埋立工事において最もこの条件に近いのは、図-4.2 の平面図で示されるサンドドレーン区域にかこまれた部分の中心である。一次元条件を満足するためには、できるだけ護岸から離れている方が良い。したがって、今回の解析では、図-4.2 で A, B, C とした地点での沈下量を取り上げることとする。この 3 地点では、水深がそれぞれ、3 m, 5 m, 7 m となっている。これらの 3 地点の沈下実測値を解析することにより、一般に行われている沈下計算法および今回開発した有限要素法による計算法の精度が比較できるものと思われる。

4.2 土質条件の設定

図-4.4 は、図-4.2 の平面図で A 点に対応する、-3 m 地点で採取した乱さない試料に対する土質試験結果を示したものである。図-4.4 には、粒度組成、コンシステンシー、真比重 G_s 、単位体積重量 γ_t 、一軸圧縮強度 q_u の値を深度に対してプロットしている。この図の粒度組成とコンシステンシーの結果を見ると、この地点での粘性土層は深度方向にかなり変化していることがわかる。海底面から、-10 m 付近まではシルト分の多いシルト質粘土であり、-10 m から -25 m 程度までは、粘土分が多くなっていく。-25 m 以深は、砂分が多くなってきて、砂質粘土となる。また、-25 m 以深は、 N 値 50 以上の砂礫層となっている。

図-4.5 は、標準圧密試験結果より得られた圧密降伏応力 p_c の値をプロットしたものである。この図には、

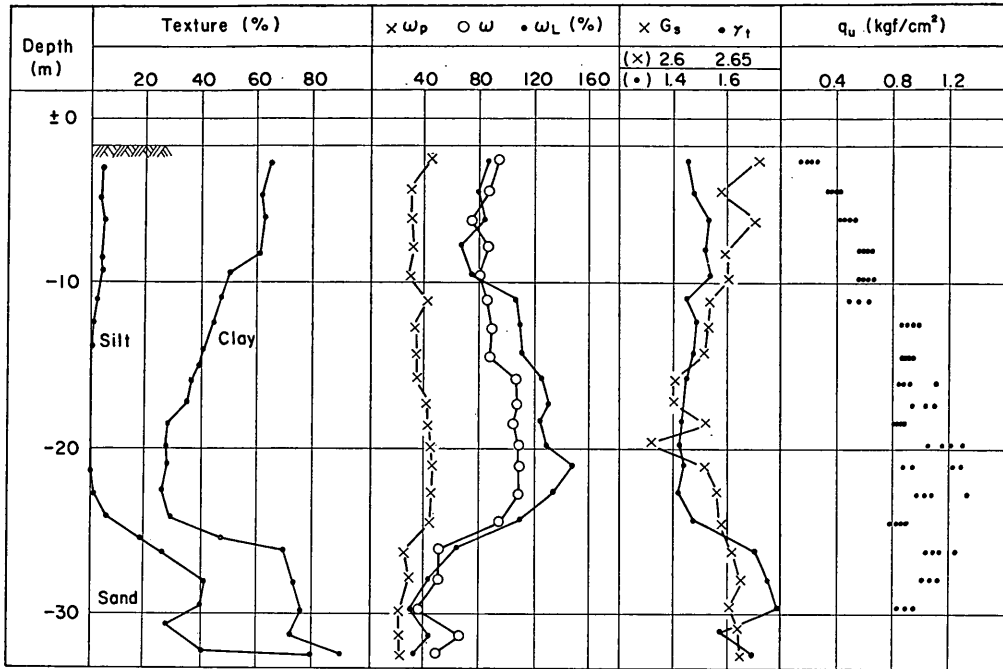


図-4.4 水深 3 m 区間における土質試験結果の一例

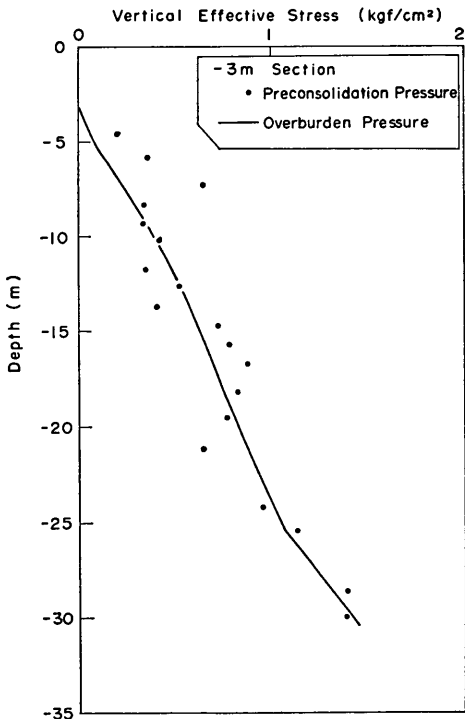


図-4.5 水深 3 m 区間における土被り圧力と圧密降伏応力の比較

土被り圧力の値を実線で示して、圧密降伏応力と比較している。図-4.5 をみると、海底面付近には、やや過圧密の傾向があるが、全体的に考えると、この地盤はほぼ正規圧密状態としてもよいと思われる。

圧密試験結果から得られた、圧密係数 c_v と平均圧密

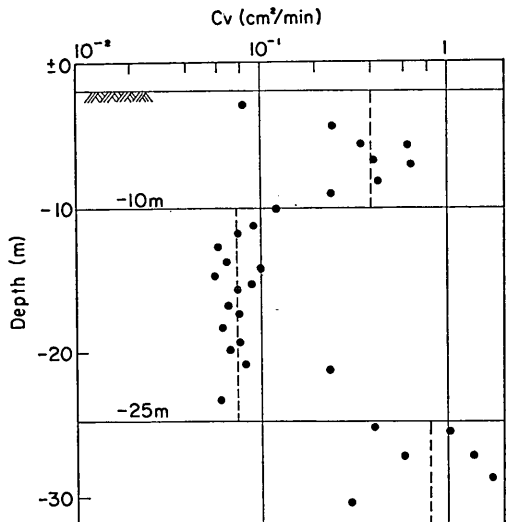


図-4.6 水深 3 m 区間における圧密係数（正規圧密領域）の深度分布

圧力の関係を調べると、この地点での粘性土では、正規圧密状態に入ると、ほぼ一定の c_0 の値が得られている。図-4.6 は、このような正規圧密状態での c_0 と深さの関係をプロットしたものである。図-4.6 からわかるように、 c_0 の値は深さとともに大きく変化しているが、この傾向は 図-4.4 の程度組成およびコンシステンシーの傾向と対応している。

数値解法を用いる場合には、細かく土層区分を行えば、どのように複雑な圧密定数の変化をも考慮することができる。しかし、実際の試験結果の誤差やバラツキを考えると、深度に対して、あまり複雑な定数の変化を採用することは意味がない。したがって、今回の解析においては、図-4.6 に示されるように、粘性土層を 3 層に分けて、それぞれの層に対する c_0 の値を图中的破線のように決定した。

圧密沈下解析においては、圧密係数の値が精度に大きな影響を与える。したがって、図-4.6 で求めた圧密係数の値をもう一度検討してみる必要がある。特に、今回の地盤は、両面排水条件であり、しかも、排水面に近い位置に圧密係数の大きい土層が存在する。圧密係数が大きい土の場合には、標準圧密試験による結果には問題がある点が指摘されている¹²⁾。さらに、2.2 で明らかにしたように、このような排水面付近の透水性の良い地盤は圧密速度を速くする傾向があり、正確な圧密定数の把握が必要となる。

このような観点から、粘性土の圧密特性を詳細に検討するために、圧密中に間隙水圧測定をする圧密試験を行った。この場合、供試体寸法は標準圧密試験に用いるものと同じ寸法であるが、排水は上面からのみとし、底部を非排水条件とし、底部での間隙水圧測定を行っている。なお、圧密試験中には、飽和度を増加させ、精度の高い間隙水圧測定を行うために、 2 kgf/cm^2 のバックプレッシャーを加えている。

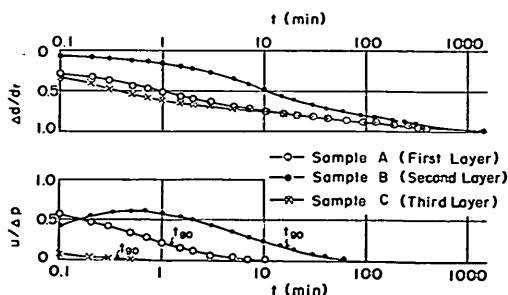


図-4.7 間隙水圧測定した圧密試験結果の一例

図-4.7 は、この試験結果より得られた、沈下量と間隙水圧と時間の対数の関係の一例を示したものである。ただし、この図では、沈下としては、24 時間後の値である最終沈下量 d_f に対する比をプロットしてあり、間隙水圧に関しても、増加応力 Δp に対する比を示している。

図-4.7 には、今回の 3 種類に分けられた粘性土層の代表的な試料に対する試験結果をプロットしているが、それぞれの試料に対して、間隙水圧の挙動が異なっていることが明らかである。すなわち、最も圧密係数の大きい第 3 粘性土層の試料 C の試験においては、間隙水圧が非常に小さくなっている。この試験では、荷重載荷後 6 秒後に最初の測定を行っている。しかし、試料 C に関しては圧密係数が非常に大きいために、6 秒後には間隙水圧がほとんど消散しているために 図-4.7 のような結果が得られたものと思われる。試料 A は第 1 粘性土層に対するものであるが、圧密係数が試料 C よりも小さいために、間隙水圧の消散が遅れてくるのが明らかである。また、最も圧密係数の小さい第 2 粘性土層の試料 B においては、初期の部分で間隙水圧が時間とともに増加する傾向がある。このような傾向は通常の圧密理論からは導き出せない現象であり、間隙水圧測定上のタイムラグに関連しているものと思われる。今回の実験では、非排水条件での間隙水圧測定が不可能であったので、この点の定量的判断は今後の問題として残されている。しかし、試料 B に対しては、間隙水圧消散が非常に遅れているのは明らかであり、圧密係数が小さいことを明示している。

このように、間隙水圧測定を行うと、圧密現象の明確な把握ができる。しかし、一般に行われる標準圧密試験では、間隙水圧測定は行わずに、沈下量のみから圧密係数を求めている。図-4.7 に示された結果に対しても、沈下量のみから圧密係数を求めることができる。図-4.7 には、沈下量から \sqrt{t} 法によって求めた圧密度 90% に対応する t_{90} の値を示してある。この結果と間隙水圧の値を比較すると、少なくとも、試料 C に関しては、 \sqrt{t} 法により求めた t_{90} の値は過大である。したがって、圧密係数を過小評価している可能性がある。

図-4.7 の試験は、標準圧密試験と同一の寸法の供試体を用いて、片面排水条件で試験を行っている。したがって、標準圧密試験の際の半分の排水長さとなり、圧密速度は $1/4$ となる。このような試験においても、圧密係数を過小評価する可能性が 図-4.7 より明らかなので、標準圧密試験においては、そのような傾向はさらに大き

いと考えられる。このような観点から、間隙水圧測定を伴う圧密試験を多数実施し、その結果から次のような結論を得た¹²⁾。

- 1) 第2粘性土層では、標準圧密試験の結果に問題がなく、図-4.6の c_v の結果がそのまま用いられる。
- 2) 第1粘性土層では、標準圧密試験の c_v は小さすぎて、実際には、 $c_v=1.0\text{ cm}^2/\text{min}$ であった。
- 3) 第3粘性土層では、実際の c_v は標準圧密試験結果に比較して非常に大きい。正確な c_v の値を求めるのは困難であるが、 $c_v>10\text{ cm}^2/\text{min}$ であろう。

このようにして、圧密係数の検討が加えられたので、沈下解析における圧密係数としては、第1粘性土層は $1.0\text{ cm}^2/\text{min}$ 、第3粘性土層は $10\text{ cm}^2/\text{min}$ の値を用いた。第2粘性土層は、図-4.6の結果をそのまま採用した。第3粘性土層の値は明確でない点もあるが、圧密係数の値がこのように大きいと、それ以上に増加させても、あまり結果に影響を及ぼさないと思われる。したがって、ここでは、下限としての $c_v=10\text{ cm}^2/\text{min}$ を用いた。

今回開発した有限要素解析においては、地盤の定数として必要なものは、次の8個である。

- p_0 : 土被り圧力
- e_0 : 初期間隙比
- p_{c0} : 圧密降伏応力
- λ : 自然対数に関する圧縮指数
- κ : 自然対数に関する膨張指数
- α : 自然対数に関する二次圧縮指数
- \dot{v}_0 : 載荷直前の粘塑性ひずみ速度
- k : 透水係数

ここで、 p_0 は土質試験結果より求められる。 e_0 は圧密試験結果の $e-\log p$ 関係から p_0 に対応する e を求めて e_0 とした。正規圧密状態なので、 $p_{c0}=p_0$ となる。 λ は圧縮指数 C_c から、 $\lambda=0.434C_c$ として求められる。 κ は求めるのが困難であるとされているが、今回の計算では、膨張段階にしか影響を与えないので、平均的な値として、 $\kappa=\lambda/5$ を用いた。 α は実際に求めるのは困難なので、これまでに提案されている、 α と自然含水比 w の関係¹³⁾を用い、 $\alpha=0.00434w$ (w : %)とした。 \dot{v}_0 の値は解析に際して変化させて、その影響を調べた。また、透水係数に関しては、検討を加えて修正した圧密係数の値から、式(3.17)を用いて求めた。また、層厚の変化を考慮するために、式(3.20)を用いて透水係数の値を補

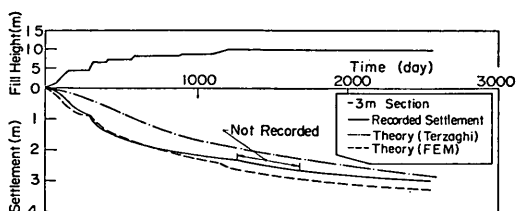


図-4.8 水深3m区間における実測沈下と計算沈下の比較

正した。

4.3 沈下解析

今回の埋立工事では、埋立による圧密沈下が長期間観測されている。図-4.8は、図-4.2の平面図に示したA点での沈下-時間関係を示したものである。図-4.8では、時間に対して、上段に埋立土砂の載荷厚さを、下段には沈下量をプロットしている。この地点での水深は3mであり、埋立工事はほぼ1000日近くにおよんでいる。この場合の載荷厚さは、現地における施工管理記録から求めたものである。ここでの載荷厚さは、この地点に投入した埋立土砂の厚さを表わしていると考えられる。

下の沈下量のプロットにおいては、実測された値を実線で示しているが、沈下量は埋立開始後約2500日後の時点で、ほぼ3mに達している。ただし、今回の沈下実測においては、埋立開始から約1300日頃までは沈下板による測定を行い、埋立開始後から約1700日以後は水準測量によって測定している。1300日から1700日までの間は連続的な沈下実測値は得られていない。図-4.5では、この間の沈下量を1300日と1700日時点に行われた水準測量の結果から推定した値をプロットしている。ただし、この間に行われた水準測量においては、位置が若干異なっていて、1300日と1700日の間に生じた沈下量の精度に関してはやや疑問がある。

この地点における圧密沈下量をTerzaghiの圧密理論を用いて計算した。この際、最終沈下量を4.2で求めた定数である C_c 、 e_0 、 p_0 を用いて計算した。圧密試験は、ここで得られた全部の乱さない試料に対して行っている。試料採取の深さ方向の間隔は1.0~1.5mであるので、この地点に対応する圧密試験の個数は21個であった。したがって、今回の最終沈下量の計算においては、土層を21個に分割し、それぞれの層に対する定数としては、個々の試験結果をそのまま用いた。また、載荷条件としては、500日まで直線的に増加する漸増荷重を仮定した。埋立土砂の有効単位体積重量は、実測値を基に

して、水面下で 1.0 tf/m^3 、水面上で 1.9 tf/m^3 とした。圧密速度は、4.2 で検討した結果により修正された圧密係数を用いて、換算層厚法によって計算した。

このようにして計算した値を、図-4.8 に一点鎖線で示した。この図よりわかるように、計算沈下は実測沈下に比べて小さく、Terzaghi の理論による圧密沈下解析の精度に問題があることがわかる。

同じ条件に対して、弾塑性モデルを用いた有限要素解析を行ったものが図-4.8 の破線で示されている。この計算においては、4.2 で述べた方法で必要な定数を決定している。土層の有限要素分割は、Terzaghi の理論を用いた場合と同様にして、21 個の二次のアイソパラメトリック要素⁹⁾を用いている。この計算においては、浮力の影響、層厚の減少の影響が考慮されている。また、埋立前の敷砂の影響も考えている。図-4.8 から明らかのように、有限要素法を用いた場合の圧密沈下解析は、Terzaghi 理論による結果と比較すると格段に精度が向上している。

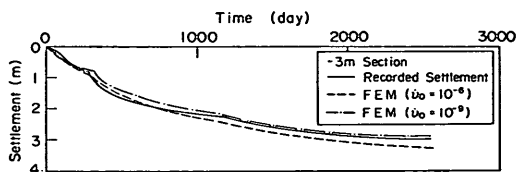


図-4.9 水深 3 m 区間における実測沈下と計算沈下の比較 (弾・粘塑性)

図-4.9 は同一の条件で、弾・粘塑性モデルを用いた有限要素解析を行った結果を実測値と比較したものである。弾・粘塑性理論を用いる場合には、土の定数が 2 個増加し、 α と \dot{v}_0 の値を決定してやらなければならない。 α の値は、4.2 で述べたように、含水比から求めることができる。しかし、 \dot{v}_0 の値を決めるためには、地盤の堆積年代を考慮する必要がある。今回のモデルにおいては、堆積年代を t とすると、 $\dot{v}_0 = \alpha t$ となる。沖積地盤の堆積年代は 1 万年以下とされている。 α として、今回の地盤に対する平均的な値 0.004 をとり、 $t = 1$ 万年とすると、 $\dot{v}_0 \approx 10^{-9}/\text{d}$ となる。この値が \dot{v}_0 の下限値と考えられる。一方、 $\dot{v}_0 = 10^{-6} \sim 10^{-7}/\text{d}$ 程度の値が妥当という意見もある¹⁴⁾。現時点では、正確な \dot{v}_0 の値を決定するのが困難なので、今回の計算では、 \dot{v}_0 として、 10^{-9} と $10^{-6}/\text{d}$ の 2 つの値を用いた。

図-4.9 はこの結果得られた計算値を実測値と比較したものである。図-4.8 と図-4.9 を比較すると、弾・粘

塑性モデルを用いて、 $\dot{v}_0 = 10^{-6}/\text{d}$ とした結果は弾塑性モデルとほとんど同じような計算結果となった。一方、 $\dot{v}_0 = 10^{-9}/\text{d}$ とした結果は、沈下量が小さくなってきている。今回の結果だけでは、弾塑性モデルと弾・粘塑性モデルの優劣の判定は困難である。二次圧密領域に入ったような場合の長期沈下を問題にするような場合には、弾・粘塑性モデルを用いなければならないであろう。ただし、この場合には、 \dot{v}_0 、 α などの定数決定法の確立が望まれる。

図-4.8 と図-4.9 を比較してみると、今回の有限要素解析においては、いずれのモデルを用いた場合でも、1700 日以降の値はほぼ実測値に平行であることがわかる。一方、Terzaghi 理論による結果はやや沈下の勾配が実測値と異なっている。この点は、今回開発した有限要素解析法が、実測値を基にした将来沈下量の予測にも適用可能である点を示唆しているように思われる。

図-4.10 は、水深 5 m の B 点における沈下の実測値と計算値の比較を行ったものである。ただし、ここでは、弾塑性モデルを用いた有限要素解析のみを行っている。図-4.10 と図-4.8 を比較すると、B 点における計算値は、A 点におけるものよりも実測値との差が大きい。しかし、B 点においても A 点と同様に、途中で沈下実測の

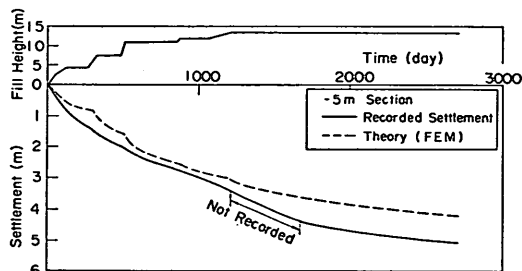


図-4.10 水深 5 m 区間における実測沈下と計算沈下の比較

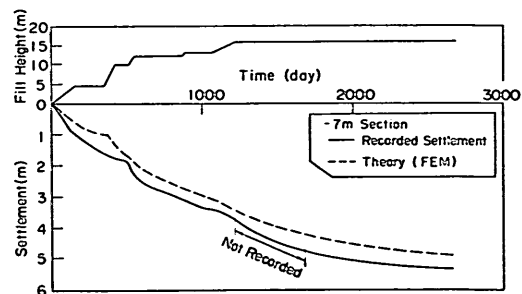


図-4.11 水深 7 m 区間における実測沈下と計算沈下の比較

中断が生じている。計算沈下と実測沈下は、この中断時期に大きな差が生じている。このような実測値の不確定要素を考えると、図-4.10 のような程度の沈下推定結果は充分な精度があると考えても良いと思われる。この点は、水準測量を開始した以降に関しては、実測値と計算値がほぼ平行であることから妥当と考えられる。

図-4.11 は、水深 7 m の C 点における実測値と計算値を比較したものである。計算の方法などは 5 m 水深の B 点における場合と同じである。この C 点は、サンドプレーン区域にやや近接しすぎているきらいがあるが、計算値の相違の傾向は 5 m 水深の B 点とほとんど同じである。

4.4 含水比および強度の変化

広島空港での埋立工事に際しては、沈下の実測のほか、数多くのチェックボーリングが行われている。圧密に伴って変化するものとしては、含水比とせん断強度が最も測定しやすいと思われる。実際、今回の工事においても、数多くの含水比と強度の変化のデータが得られている。また、4.3 で行った有限要素解析では、圧密沈下だ

けでなく、各層のひずみと有効応力が求められる。ひずみは含水比の変化と直接結び付くものであり、強度増加も有効応力の増加によって生じる。したがって、含水比と強度変化の検討を行うことは圧密解析法の精度の検証にもなる。ここでは、このような観点から、沈下解析を行ったと同じ地点で、含水比と強度の変化を調べてみることにする。

図-4.12 は、図-4.2 の平面図の A 点に対応する地点での載荷前と埋立開始後 3300 日の含水比の比較を行ったものである。ここで、黒丸は載荷前の値を示し、白丸は 3300 日後の値を示したものである。図-4.12 によりわかるように、含水比は減少しているがこの減少の程度は、海底面付近で著しく、この層の圧密が十分に進行していることをうかがわせる。図-4.12 を見る場合に注意しなければいけないのは、大きな沈下が生じているために、初期状態と 3300 日後で対応する深さが変化している点である。このことは、計算によって含水比変化を求める場合にも、考慮が必要である。今回行った有限要素解析では、各層での沈下量が求められるので、含水比の変化

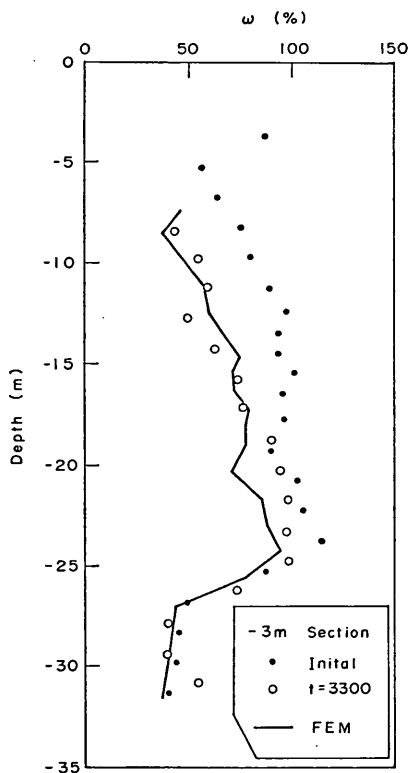


図-4.12 水深 3 m 区間における含水比の変化

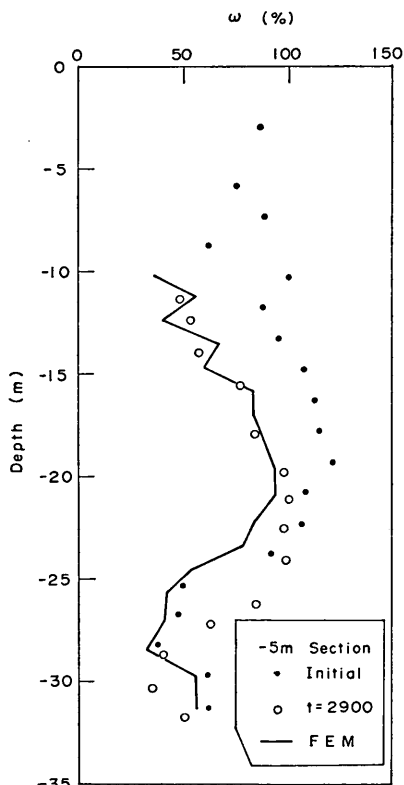


図-4.13 水深 5 m 区間における含水比の変化

を比較することも容易である。図-4.12 には、今回の有限要素解析結果から計算した 3300 日後の含水比を実線で示した。計算に際しては、図-4.12 に示した初期の含水比を基にして有限要素解析から得られたひずみ分布を用いている。図-4.12 よりわかるように、深度 -20 m 付近でやや差がみられるが、計算値と実測値の一致は良い。有限要素解析においては、4.3 で述べたように何種類かの条件で計算を行っているが、含水比の変化に関しては、いずれの結果にもあまり差が見られなかった。

図-4.13 は同様の比較を、図-4.2 の水深 5 m の B 点で行ったものである。ただし、この地点におけるチェックボーリングは A 点と時期がずれていて、埋立開始後 2900 日のものである。

図-4.12 と 図-4.13 を比較すると、B 点における結果の方が含水比変化の推定の精度が低いといえる。特に、図-4.13 では、-20 m 以深の部分の差が大きい。このようなプロットを行って結果を比較する場合には、先に述べたような沈下の影響を考えなければならない。つまり、図-4.13 では深い地層の含水比に関して、実測値と

計算値の差が大きい。これは、含水比変化の予測に大きな誤差が生じた場合にも現れるが、沈下の予測の精度が低くても生じるものである。図-4.13 で深い部分での沈下が実はもっと大きいとすると、図中の実線は下降することになり、実測値と一致する傾向になる。したがって、ここで得られたような含水比の実測値と計算値の相違に関しては、沈下予測の精度とあわせて判断する必要がある。この問題を解決するためには、層別沈下計による各層ごとの沈下実測が必要である。

図-4.14 は水深 7 m の C 点における含水比変化を比較したものであり、図-4.13 で示した B 点と同様の傾向が得られている。

次に同様の比較を強度に関して行ったのが 図-4.14 である。この図は、水深 3 m の A 点における一軸圧縮強度 q_u の値に関して、載荷前と埋立後 3300 日のものを比較した結果を深度に対してプロットしたものである。一軸圧縮強度の増加は、図-4.12 に示した同じ地点での含水比の減少と対応している。図-4.15 よりわかるように、一軸圧縮強度の値はバラツキが大きいので、有限要

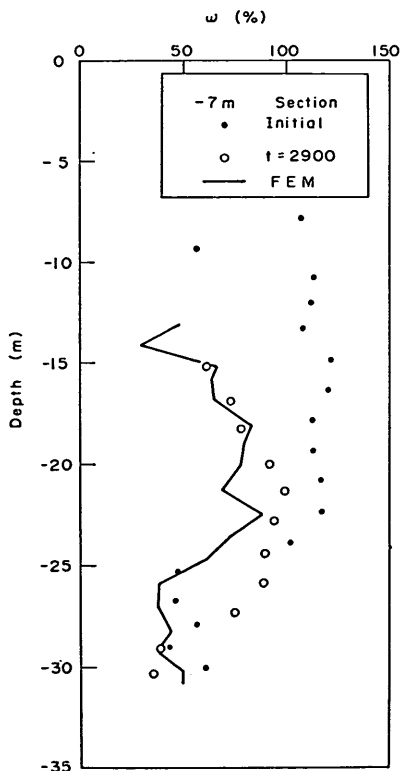


図-4.14 水深 7 m 区間における含水比の変化

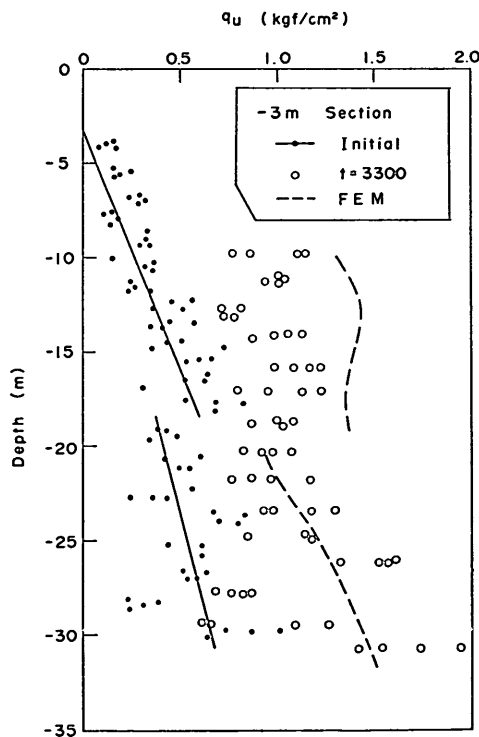


図-4.15 水深 3 m 区間における一軸圧縮強度の変化

素解析による結果から強度増加を計算して、実測値と比較するのが困難である。さらに、有限要素法の結果からは有効応力の増加が計算されるだけなので、圧密圧力の増加に対する強度増加の割合 (c_u/p) の値を推定しておかないと、強度増加量を求められない。 (c_u/p) の値は土性によっても大きく変化するので、今回の解析を行ったような深さ方向の土性の变化の大きい地盤に対して、この値を求めることは困難である。全体の一軸圧縮強度のパラッキを考えると、あまり複雑な計算を行っても意味がないと思われるので、今回の解析では、次のようにして圧密に伴う強度変化を推定した。

まず、初期の一軸圧縮強度の深度分布を表わすように、海底面を通る直線を定める。ただし、一本の直線で全体の一軸強度の深度分布がうまく表現できないような場合には、土層を深度方向に分けて別々に計算する。このようにして直線を求めると、その勾配と水中単位体積重量から (c_u/p) の値を求めることができる。ただし、ここでは地盤を正規圧密状態と仮定している。図-4.15 においては、一軸圧縮強度の分布から、地盤を二層に分け

て、それぞれ別個の直線を定めた。この結果から、図-4.15 のA点の場合は、深度 3 m から 19 m までの (c_u/p) は 0.40、深度 9 m から 32 m までの (c_u/p) は 0.25 となる。次に有限要素解析の結果から各深度に対する有効鉛直応力 p が求められているので、 $q_u = 2(c_u/p) \times p$ として、一軸圧縮強度が求められる。

図-4.15 には、このようにして求めた 3300 日後の一軸圧縮強度の推定値を破線で示している。この図よりわかるように、以上のようにして求めた一軸圧縮強度は実測値に比較すると過大である。

図-4.16 は同様の比較を水深 5 m の B 点で、図-4.17 は水深 7 m の C 点で行ったものである。この 2 つの図を見ても、有限要素解析結果から求めた一軸圧縮強度は過大な値となっている。

このような一軸圧縮強度における理論値と実測値の相違の大きな原因としては、 (c_u/p) の値の決定法における問題点があげられる。今回は、地盤を正規圧密状態と仮定して (c_u/p) の値を求めた。しかし、海底面付近では若干過圧密の傾向がみられる。したがって、海底面付

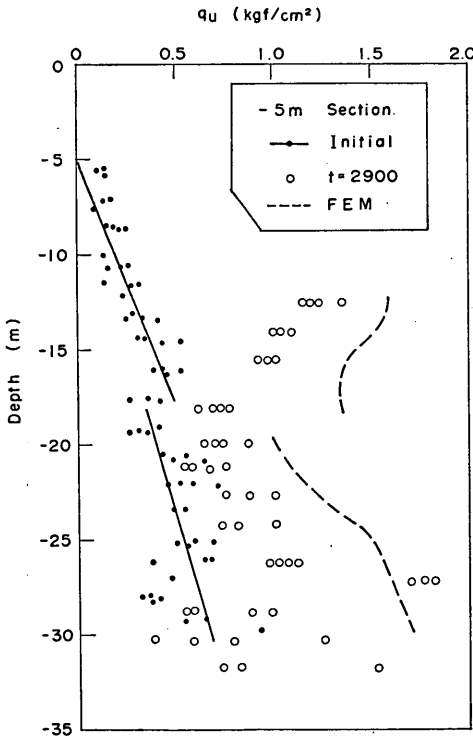


図-4.16 水深 5 m 区間における一軸圧縮強度の変化

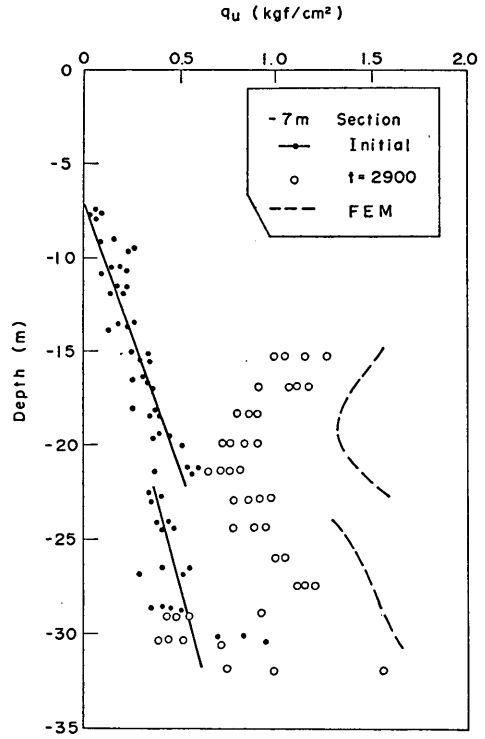


図-4.17 水深 7 m 区間における一軸圧縮強度の変化

近では強度を過大評価することになる。しかし、今回の結果から判断すると、深度が深い部分でも計算値の方が実測値より強度が大きい。

このように全体的に計算値による強度が実測値より大きい原因としては、 (cu/p) の値におよぼす圧密時間の影響があげられる。同一の圧密荷重に対しても、圧密時間が長ければ、二次圧密現象等によって強度が増加することが認められている¹⁵⁾。今回の解析例においては、載荷前の状態の地盤は、土被り圧力のもとで長期間圧密を受けていたと考えられる。これに対して、埋立荷重による圧密期間は、せいぜい 3000 日程度であり、自然堆積状態での圧密期間に比較すると短い。したがって、今回用いたような (cu/p) の値に到達するためには、圧密時間が不十分であったことも考えられる。しかし、この点に関しては、現段階では定量的な推定を行うことが困難であり、今後の研究事項として解決が望まれるところである。

5. ま と め

本報告では、一次元圧密沈下を精度良く推定する方法を検討した。そのために、まず、一般に用いられている沈下計算法の問題点を検討した。次に、数値解法として、有限要素法を用いた解析法を開発し、広島空港埋立工事における実測値を解析検討することによって圧密沈下解析法の精度を調べた。検討の結果得られた成果は次のようにまとめられる。

- 1) Terzaghi の圧密理論を用いて行われる一般の慣用法によると、正規圧密地盤のように自重の影響の大きい場合には、圧密速度を過小評価する。
- 2) 成層地盤に対して用いられている換算層厚法は層序を考慮していないので、大きな誤差を与える可能性が大きい。
- 3) Biot の圧密方程式を基本として、土の力学モデルに弾塑性理論と弾・粘塑性理論を取り入れた有限要素解析を用いると、Terzaghi 理論では対象外である不均一地盤、荷重減少、二次圧密の現象なども計算可能となる。
- 4) 実際の地盤で圧密沈下解析を行う際には、圧密係数の深度分布に十分注意を払い、排水面付近に圧密係数の大きい土層が存在する場合には、その圧密係数が過小評価されていないかについて検討する必要がある。
- 5) Terzaghi 理論を用いた慣用法と、有限要素解析

を用いて広島空港の埋立工事の際に得られた実測沈下量を比較した結果によると、有限要素解析の結果は、Terzaghi 理論によるものに比べて高精度であった。

- 6) 広島空港埋立工事のチェックボーリングから得られた含水比の変化と有限要素解析による推定値は比較的良く一致した。
- 7) 広島空港において有限要素解析から計算した一軸圧縮強度はチェックボーリングの値に比較して過大であった。この原因としては、圧密による強度増加の割合 (cu/p) の値の推定法の精度があげられる。

以上のように、今回開発された数値解法による一次元圧密解析法は、一般に用いられている Terzaghi の圧密理論に比較して高精度なものであることが確認された。今回の現地観測は広島空港のものだけであったが、これは、一次元条件であり、土質条件と荷重条件が明確なものという点で、この例しか観測結果が入手できなかったためである。しかし、今後行われるであろう埋立工事においては、実測値が得られる例も多いと考えられる。これらの結果に対して、今回行ったような解析を蓄積し、解析方法を改善することによって、圧密沈下解析の精度がさらに向上することが望まれる。

なお、広島空港の埋立工事における実測値は、第三港湾建設局から提供をうけたものである。長期間の観測に携わった関係各位に深甚なる謝意を表する。

(1981年11月30日受付)

参 考 文 献

- 1) 三笠正人：軟弱粘土の圧密、鹿島出版会、1963年。
- 2) Palmer, L. A. and Brown, P. P.: Settlement analysis for areas of continuing subsidence, Proc. 4th ICSMFE, Vol. 1, 1957.
- 3) Gray, H.: Simultaneous consolidation of contiguous layers unlike compressible soils, Trans. ASCE, 110, 1905.
- 4) Biot, M. A.: General theory of three-dimensional consolidation, Jour. Appl. Phys., 12, 1941, pp. 155-164.
- 5) 小林正樹：有限要素法による圧密問題の解析、港湾技研資料, No. 247, 1976年。
- 6) Zienkiewicz, O. C.: The finite element method, McGraw-Hill, 1977.
- 7) 網干寿夫：圧密、土質力学第4章、技報堂、1969年, pp. 331-471.
- 8) Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, Specialty Session 9, 9th ICSMFE, 1977, pp. 229-238,

- 9) Bjerum, L.: Engineering geology of Norwegian normally-consolidated marine clays as related to settlements of buildings, *Geotechnique*, 1967, pp. 17-83.
- 10) Davis, E. H. and Raymond, G. P.: A non-linear theory of consolidation, *Geotechnique*, Vol. 15, 1965.
- 11) 三笠正人: 未発表資料.
- 12) 小林正樹, 松本一明, 奥村樹郎: 広島空港における圧密沈下現象の解析, 第19回土質工学シンポジウム論文集, 1974年, pp. 61-70.
- 13) Mesri, G.: Coefficient of secondary compression, *Proc. ASCE*, Vol. 99, No. SM1, 1973, pp. 123-137.
- 14) 関口秀雄: 未発表資料.
- 15) Bjerum, L. and Lo, K. Y.: Effect of aging on the shear-strength properties of a normally consolidated clay, *Geotechnique*, Vol. 13, No. 1, 1963, pp. 147-157.

主要記号表

- \mathbf{a} : 変位ベクトル
 c_u : 粘着力
 (c_u/p) : 圧密による強度増加割合
 c_v : 圧密係数
 \mathbf{C} : 変位と間隙水圧を関係づける剛性マトリックス
 C_α : 圧縮指数
 d_f : 圧密試験における各荷重段階の最終沈下量
 \mathbf{D} : 応力マトリックス
 \mathbf{D}_e : 弾性応力マトリックス
 $\bar{\mathbf{D}}$: 弾・粘塑性応力マトリックス
 e : 間隙比
 e_0 : 初期間隙比
 \mathbf{E} : 水の圧縮性を表わす剛性マトリックス
 \mathbf{F} : 外力ベクトル
 G_s : 土粒子比重
 H : 層厚
 \mathbf{H} : 透水性を表わす剛性マトリックス
 i : 動水勾配
 i' : 層厚の変化を考慮した場合の動水勾配
 k, k_z : 透水係数
 k' : 層厚の変化を考慮した場合の透水係数
 \mathbf{K} : 剛性マトリックス
 \mathbf{K}_m : 圧密解析の際の剛性マトリックス
 m_v : 体積圧縮係数
 m_v' : 層厚の変化を考慮した場合の体積圧縮係数

- p : 圧密圧力
 p_c : 圧密降伏応力
 p_0 : 初期圧密圧力
 p_1 : 載荷後の圧密圧力
 Δp : 圧密圧力の増分
 \mathbf{P} : 粘塑性ひずみ速度の粘塑性ひずみに関する偏微分
 q_u : 一軸圧縮強度
 \mathbf{Q} : 流量ベクトル
 \mathbf{r} : 外力ベクトル
 \mathbf{S} : 粘塑性ひずみ速度の応力に関する偏微分
 t : 時刻
 t_0 : 初期時刻
 Δt : 時間増分
 T : 時間係数
 u : 間隙圧
 \mathbf{u} : 間隙圧ベクトル
 U : 圧密度
 \dot{v}_0 : 載荷直前の粘塑性ひずみ速度
 w : 含水比
 z : 鉛直座標
 α : 二次圧縮指数 (自然対数)
 β : 透水係数の変化を表わす定数
 $\beta, \beta(\sigma, e_{vp})$: 粘塑性ひずみ速度
 γ_t : 土の湿潤単位体積重量
 γ_w : 水の単位体積重量
 γ' : 土の有効単位体積重量
 δ : 変位ベクトル
 e : 全ひずみ
 e_s : 弾性ひずみ
 e_{vp} : 粘塑性ひずみ
 \dot{e}_{vp} : 粘塑性ひずみ速度
 ζ : 間隙流体の体積ひずみ
 θ : 時間積分に関するパラメーター
 κ : 膨張指数 (自然対数)
 λ : 圧縮指数 (自然対数)
 ρ : 土の密度
 ρ_f : 間隙流体の密度
 σ, σ_z : 応力

付録 A. 弾塑性モデルの場合の計算法

弾塑性モデルを用いた場合の応力マトリックスの求め方に関しては、降伏関数、塑性ポテンシャル、硬化関数

から一般の多次元状態に対するものが提案されている。今回のような一次元圧密条件では、応力とひずみが成分のみとなるので、応力マトリックスは体積圧縮係数の逆数となる。したがって、応力マトリックス（一次元）を D とすると、式 (3.13) から推定されるように、 D は次式で与えられる。

$$D = \frac{1}{1 + e_0} \frac{d}{p} \quad (\text{A.1})$$

ここに、 e_0 は初期間隙比、 p は圧密圧力、 d は正規圧密の場合に λ をとり、過圧密状態の場合に κ をとる。

今回の有限要素解析においては、式 (A.1) を用いて各反復計算の際に剛性マトリックスを変化させる Newton-Raphson 法を用いた。ただし、式 (A.1) を用いてひずみから応力を求めると、若干の誤差が生じて、間隙比 e と圧密圧力の対数 $\log p$ の関係が、想定しているものとならなくなる。したがって、今回の計算では、強制的に応力を修正して所定の $e - \log p$ 関係が得られるまで、くり返し計算を行った。収束の判定は、各節点における外力項の不均衡力の内積が、加えた荷重項の内積の 0.1% 以下になる時点としている。

付録 B. 弾・粘塑性モデルの場合の計算法

今回用いた弾・粘塑性モデルにおいては、粘塑性ひずみ速度 \dot{e}_{vp} が応力 σ と粘塑性ひずみ e_{vp} の関数として、式 (3.9) にあげたような型で与えられる。式 (3.9) を次式のようにして表現し直す。

$$\dot{e}_{vp} = \frac{de_{vp}}{dt} = \beta(\sigma, e_{vp}) \quad (\text{B.1})$$

ここに、 β の実際の値は式 (3.9) で与えられる。

弾・粘塑性理論においては、ひずみ e は弾性ひずみ e_e と粘塑性ひずみ e_{vp} によって次式のように表わされる。

$$e = e_e + e_{vp} \quad (\text{B.2})$$

弾性ひずみは、弾性応力マトリックス D_e から次式で与えられる。

$$e_e = D_e^{-1} \sigma \quad (\text{B.3})$$

弾・粘塑性モデルを用いる際には、ある時刻 $t = t_m$ における既知の値を基にして、次の時刻 $t = t_{m+1} = t_m + \Delta t$ における値を求めるという作業をくり返すことになる。応力とひずみに、それぞれ添字 m および $m+1$ をつけることによって、その時刻を表わすと、応力 σ の時間間隔 Δt における増分は次式で与えられる。

$$\Delta \sigma = \sigma_{m+1} - \sigma_m = D_e(e_{m+1} - e_m) - D_e(e_{vp, m+1} - e_{vp, m}) \quad (\text{B.4})$$

粘塑性ひずみの増分は近似的に次式で与えられる。

$$\Delta e_{vp} = e_{vp, m+1} - e_{vp, m} = \Delta t \beta_{m+\theta} \quad (\text{B.5})$$

ここに、

$$\beta_{m+\theta} = \beta(\sigma_{m+\theta}, e_{vp, m+\theta})$$

であり、

$$\begin{aligned} \sigma_{m+\theta} &= (1-\theta)\sigma_m + \theta\sigma_{m+1} \\ e_{vp, m+\theta} &= (1-\theta)e_{vp, m} + \theta e_{vp, m+1} \quad (0 \leq \theta \leq 1) \end{aligned}$$

である。 θ はどの時点での粘塑性ひずみ速度を用いるかを表わす定数である。

$\beta(\sigma_{m+\theta}, e_{vp, m+\theta})$ は σ と e_{vp} の関数なので、次式で近似される。

$$\beta(\sigma_{m+\theta}, e_{vp, m+\theta}) = \beta(\sigma_m, e_{vp, m}) + S \Delta \sigma + P \Delta e_{vp} \quad (\text{B.6})$$

ここに、

$$S = (\partial \beta / \partial \sigma)_m, \quad P = (\partial \beta / \partial e_{vp})_m$$

であり、また、B.6 の最後の項に現われる Δe_{vp} は

$$\Delta e_{vp} = \Delta e - \Delta e_e = \Delta e - D_e^{-1} \Delta \sigma$$

となる。

式 (B.4), (B.5), (B.6) を用いると、応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\Delta \sigma = \bar{D}(\Delta e - \Delta t \beta_m - \theta \Delta t P \Delta e) \quad (\text{B.7})$$

ここに、

$$\bar{D} = [D_e^{-1} - \theta \Delta t S - \theta \Delta t P D_e^{-1}]^{-1} \quad (\text{B.8})$$

である。式 (B.8) は応力マトリックスであり、式 (B.7) はひずみ増分と時間間隔から増力増分を求めるものである。このように、応力-ひずみ関係が決定されると、後は通常の有限要素解析の手法が用いられる。

ただし、ここで式 (B.7) および (B.8) に表われる θ の意味を調べてみる必要がある。 $\theta=0$ は、いわゆる前進型の積分公式に対応し、粘塑性ひずみを求めるのに必要な値はすべて既知となる。実際に、 $\theta=0$ を式 (B.7) と (B.8) に代入すると次式が得られる。

$$\Delta \sigma = \bar{D}(\Delta e - \Delta t \beta_m) \quad (\text{B.9})$$

$$\bar{D} = D_e \quad (\text{B.10})$$

これらの式は、(B.7) および (B.8) と比較すると非常に単純化されている。しかし、 $\theta=0$ の値を用いる場合には、時間間隔 Δt の値に制限が生じ、その値が過大になると、発散する傾向が生じる。今回は、このような発散現象を避けるために、 $\theta=1$ として計算を行った。ただし、 $\theta \neq 0$ の際には、応力マトリックスが非対称となることに注意する必要がある。