

港湾技研資料

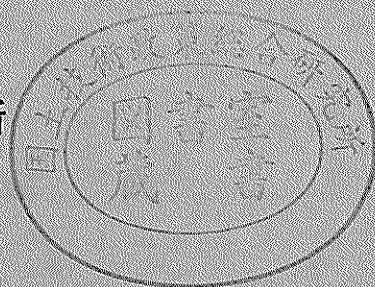
TECHNICAL NOTE OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 707 June 1991

薄層要素法による二相系飽和地盤の
動的応答に関する研究

風 間 基 樹
野 上 仁 昭

運輸省港湾技術研究所



目 次

要 旨	3
1. 研究の背景と目的	3
2. 二相系の運動方程式の誘導	4
2. 1 土の密度の構成	4
2. 2 間隙流体の土粒子に対する平均相対変位の定義	4
2. 3 全応力と有効応力	5
2. 4 土粒子に対する運動方程式	5
2. 5 間隙流体に対する運動方程式	7
2. 6 土（混合体）に対する運動方程式	7
2. 7 応力-ひずみ-変位関係	7
2. 8 間隙流体の収支のバランス	8
2. 9 解析に用いる方程式 (u-w form)	8
2. 10 解析に用いる方程式 (u- π form)	9
2. 11 非排水条件の方程式 (Undrain form)	9
3. 薄層要素法の二相系の運動方程式への適用	10
3. 1 変数分離	10
3. 2 Galerkin 法による離散化した変位の決定	12
3. 3 薄層要素地盤の剛性マトリックス	12
4. 解析結果	13
4. 1 解析条件	13
4. 2 波動伝播特性	15
4. 3 動的地盤剛性	29
4. 4 変位分布および応力分布	32
5. 結論	36
6. 今後の課題	37
参考文献	38
付録 1. 固有方程式の誘導とその解法	39
1. 1 直交座標系の場合	39
1. 2 円筒座標系の場合	42
付録 2. 薄層要素地盤の剛性マトリックスの誘導	45
付録 3. 杭の動的剛性マトリックス	49
記号一覧表	50

Dynamic Response of the Saturated Two-Phase Layered Media

Motoki KAZAMA*

Toyooki NOGAMI**

Synopsis

Offshore, nearshore and waterfront structures, including port and harbour structures, are located in submerged soil deposits. Thus, geotechnical engineering problems with those structures are often related to the behavior of the porewater. Typical examples of those problems include consolidation of soft clay and liquefaction of loose sand. The interaction between the porewater and the solid skeleton is a critical factor to control the behavior. In case of studying wave propagation characteristics and dynamic ground stiffness, we have to take not only solid motion but also fluid motion into account.

The thin layered element method is used to formulate the Biot's equations describing the dynamic behavior of a fluid saturated porous medium. Using the developed formulation, steady state harmonic displacement responses are computed at the ground surface. Then, the wave propagation characteristics and the dynamic ground stiffnesses influenced by the drainage condition and the water depth are studied comparing with those for dry soil.

The results obtained by this studies are as follows :

(1) We developed the thin layered element for the saturated two-phase ground. (2) By using the developed method, we studied wave propagation characteristics and dynamic ground stiffness. We obtained the following results.

① When the undrained condition is imposed, the dynamic ground stiffness is always larger than the one for the dry soil since the rigidity of the fluid is much larger than the stiffness of the soil skeleton. This results in increasing the resonant frequency associated with the P-wave but affecting the resonant frequency associated with the S-wave. The undrainage assumption is equivalent to making the poisson's ratio approaching to the value of 0.5.

② When the drainage is permitted, the porewater diffuses more easily for slower loading rates (lower frequencies). There is no difference in between the dry and drained soil responses at the static condition (frequency = 0).

③ However, the diffusion becomes more difficult as the frequency increases. Therefore, the behavior approaches to the one for the undrained condition as the frequency increases.

④ The wave propagation characteristics and the dynamic ground stiffnesses are influenced by the water depth.

Key Words : Numerical Study, Permeability, Dynamic, Wave Propagation, Saturation, Stiffness

* Senior Research Engineer, Structural Engineering Division

** Univ. of Calif., San Diego, Scripps Inst. of Oceanography.

薄層要素法による二相系飽和地盤の動的応答に関する研究

風 間 基 樹 *

野 上 仁 昭 **

要 旨

海洋構造物の基礎地盤が、陸上構造物のそれと最も異なる点は、囲りに海水が存在する点にある。海底に堆積した土は水で完全に飽和している。水で飽和した地盤は、土粒子間隙中の水によってしばしば、特有の現象を生じる。例えば、粘土地盤の圧密現象や砂地盤の液状化現象がその代表的な例である。これらの現象は、土粒子骨格自身の特性のみでは決まらず、水との相互作用が大きく関係する。飽和地盤中を伝播する弾性波の特性や動的剛性を検討する場合も例外ではなく、土粒子と水の両者の動きを考慮する必要がある。

本研究では、まず、Biotの式に基づく二相系の波動方程式に薄層要素法を適用し、間隙流体の排水を考慮できる飽和地盤の薄層要素を開発した。定式化は、定常状態を考え、直交座標系および円筒座標系で行った。次に、この要素を用いて、地盤の排水条件や水深が波動伝播特性や地盤の動的剛性に与える効果を検討した。

本研究の結論を要約すると、以下のとおりである。

- (1) 間隙流体の排水を考慮できる二相系飽和地盤の薄層要素を開発した。
- (2) 開発した飽和地盤の薄層要素を用いて、飽和地盤の波動伝播特性および動的剛性を検討し、以下の結論を得た。
 - ①飽和地盤を非排水状態と考えたとき、動的剛性は、間隙流体の体積剛性があるため、乾燥地盤のそれよりも大きい。非排水条件を仮定することは、乾燥地盤のポアソン比を見かけ上大きくすることと等価である。
 - ②飽和地盤に排水を許す場合、荷重の載荷速度が地盤の透水係数よりも十分小さいならば、波動伝播特性や地盤の動的剛性は、乾燥地盤のそれに近くなる。極端な場合、荷重が静的に載荷されるならば、乾燥地盤と飽和地盤の差はない。
 - ③逆に、荷重の載荷速度が地盤の透水係数に比較して大きくなるほど、その挙動は非排水条件に近づく。
 - ④波動伝播特性や地盤の動的剛性は水深の影響を受ける。

キーワード：数値解析，透水性，動的，波動，飽和，剛性

1. 研究の背景と目的

近年、沿岸域の有効利用のため、港湾構造物を含む海洋構造物が大水深化すると共に、これまで以上に、地盤条件の悪い地域に構造物を建設する機会が増している。

海洋構造物をとりまく環境の中で、陸上構造物のそれと最も大きく異なる点は、海洋中に存在する点にある。海水面下の地盤あるいは海底地盤は、水で飽和している

ため土の性質は土粒子骨格自身のみの性質では決まらず、水との相互作用が大きく関係する。飽和地盤中を伝播する弾性波の特性や動的剛性を検討する場合も例外ではなく、土粒子と水の両者の動きを考慮する必要がある。

水で飽和した地盤を工学的に取り扱うとき、しばしば排水条件を仮定する。例えば、粘土地盤に盛土を行うとき、荷重をかけた直後は、土粒子間中の間隙水圧は荷重

* 構造部主任研究官

** カリフォルニア大学サンディエゴ校スクリプス海洋研究所

に応じて上昇したままで、すぐには逸散しない。すなわち、粘土地盤に荷重をかけた直後は非排水状態と考えてよい。しかし、長い期間を考えると、土粒子中に生じた間隙水圧は、徐々に逸散し、間隙水が抜けることにより地盤は圧縮する。すなわち、長期間の圧密を考慮する場合には、当然排水を考えなければならない。

また、飽和地盤の地震応答解析をする場合には、地震時に土粒子間中の間隙水が移動しないものとして、非排水条件を考える場合が多い。しかし、液状化解析のように、地盤中に発生する過剰間隙水圧の経時変化を取り扱う場合には、排水の効果を考える必要がある。さらに、グラベルドレーンなどの液状化対策工法を念頭におくと、土材料の排水性（透水係数）の違いが現象にどう関係してくるかは興味深いところである。

以上のように、排水条件を考慮するか否かは、荷重の載荷速度と、土粒子間中を間隙水の動く速度（透水係数）の相対的な関係によって決まると言ってもよいと思われる。しかし、対象とする現象を非排水条件とするか排水条件とするかは、現在のところ明確な指標はない。

次に、海洋構造物は、低いところでは水深数 m 、また、深いところでは石油掘削プラットフォームのように $200 m$ 以上の海底地盤上に建設される。同じ様な土質材料から構成されている海底地盤でも、水深が変わると海底地盤中の波動伝播の様子は異なると考えられる。なぜなら、海水は、海底地盤上の質量として、地盤の振動特性に影響を与えると考えられるからである。

本研究は、水で飽和した地盤の波動伝播特性および動的地盤剛性が乾燥地盤のそれとどの様に異なるかを検討したものである。本研究では、間隙水の動きや水深を考慮するため、海底地盤を海水で飽和した、土粒子と水から成る二相系地盤として取り扱った。まず、Biot の考え方をを用いて、二相系の運動方程式を誘導した。次に、求められた運動方程式に薄層要素法を適用し、飽和地盤に定常的な載荷を与えた場合の定常応答解析を定式化した。定式化は、直交座標系および円筒座標系について実施した。最後に、開発したプログラムを用いて排水条件や水深の変化が地盤の動的剛性や波動伝播特性に及ぼす効果を検討した。

2. 二相系の運動方程式の誘導

Solid (固相) と Fluid (液相) の二相から成る材料の波動理論の基礎は、Biot^{1),2)} によって作られたものである。この理論は、対象とする現象によって計算の簡便化のため種々の仮定が導入され、諸現象の解析に使用されている。例えば、圧密現象では疑似静的な取扱がなされ、慣性

項が無視されるし、比較的透水性の低い地盤に急速に動的荷重が加わる場合などは非排水として取り扱われる。

Zienkiewicz, Simon らは、Biot の式を非線形の場合に拡張するとともに、種々の仮定の妥当性について検討している³⁾⁻⁶⁾。現在では、Biot の式をもとにした、地盤の有効応力解析（液状化解析）のコードが開発され、研究が行われている最中である^{7),8)}。

本章では、まず Biot の考え方をを用いて二相系の省略のない運動方程式を導く (u-w form)。次に、間隙流体の慣性項を無視した式 (u- π form) と非排水条件における基礎方程式 (Undrain form) を導く。なお、本文では、二相系地盤の基本的な特性を明らかにすることを目的としたため、定式化は非線形への適用を念願においたものではない。

2. 1 土の密度の構成

土を土粒子骨格 (Solid) と間隙流体 (Fluid) から成る二相系の媒体と見なし、土の密度の構成を考えると次のようになる。なお、間隙はすべて水で満たされているものとする。また、以下の文章中で“土”と言う用語は、土粒子と間隙流体の混合体を意味するものとして使用した。

今、土粒子の密度 ρ_s 、土粒子の体積 V_s 、間隙流体の密度 ρ_f 、間隙流体の体積 V_f 、土の密度 ρ 、土の体積 V とすると、間隙率は、

$$n = V_f / V \quad (1)$$

である。また、土の間隙は水で飽和されており土粒子の体積と水の体積を加えたものが混合体の体積であるから、

$$V = V_s + V_f \quad (2)$$

となる。(1)、(2)式より、

$$V_s = (1 - n) V \quad (3)$$

を得る。したがって、 $(1 - n)$ は混合体の単位体積に占める土粒子の割合を示し、また n は同じく水の割合を示すので、混合体の密度 ρ は(4)式のように表される。

$$\rho = (1 - n) \rho_s + n \rho_f \quad (4)$$

2. 2 間隙流体の土粒子に対する平均相対変位の定義

間隙流体の絶対変位を $|U|$ 、土粒子の絶対変位を $|u|$ とおくと、間隙流体の土粒子に対する相対変位は、 $|U| - |u|$ である。これに、間隙流体の土体積に占める割

合 n を乗じたものを、平均相対変位 $|w|$ と定義する。

$$|w| = n(|U| - |u|) \quad (5)$$

平均相対変位 $|w|$ は、間隙流体が見掛け上土と等しい体積を持っていると考えたときの土粒子に対する平均的な相対変位を表す。

2.3 全応力と有効応力

土の間隙中に水圧が存在するとき、土に作用する全応力 $|\sigma|$ は、土粒子の骨格に作用する応力 $|\sigma'|$ (有効応力) と間隙水圧 π に分けて考えることが出来る。

$$|\sigma| = |\sigma'| + |m|\pi = |\sigma'| - |m|\rho \quad (6)$$

ここで全応力は、直交座標系のとき

$$|\sigma|^T = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) \quad (7)$$

円筒座標系のとき、

$$|\sigma|^T = (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}) \quad (8)$$

とし、またベクトル $|m|$ は、

$$|m|^T = (1, 1, 1, 0, 0, 0) \quad (9)$$

である。ここで、 ρ および π はともに間隙水圧である。ただし、 ρ は圧縮が正で π は引張が正とした。したがって、

$$\rho = -\pi \quad (10)$$

となる。(6)式の表現による間隙水圧は、考えている土体積に対して平均的に作用している間隙水圧を表しており、実質の間隙流体に作用している間隙圧力ではない。また、同様に(7)式で定義される有効応力は全応力から平均的に作用している間隙水圧を引いたものと解釈できる。

実質の土粒子に作用している応力は、土と同じ体積を土粒子が有していると考えたとき土粒子に作用している応力を $|\sigma_s|$ とすれば、 $(1-n)|\sigma_s|$ と表される。同様に、実質の間隙流体に作用している間隙水圧は、 $n\pi|m|$ と書ける。したがって、全応力は実質の土粒子および実質の間隙流体に作用している応力および間隙水圧を用いて、次のように書ける。

$$|\sigma| = (1-n)|\sigma_s| + n\pi|m| \quad (11)$$

(7)式と対応させると、

$$|\sigma'| = (1-n) \cdot (|\sigma_s| - |m|\pi) \quad (12)$$

を得る。すなわち、考えている土体積に平均的に作用している有効応力 $|\sigma'|$ は、土粒子実質に作用している応力から間隙水圧を引いたもの $|\sigma_s| - |m|\pi$ に土粒子の単位体積中に占める割合 $(1-n)$ を乗じたものに等しい。以上の関係を図示したのが、図-1である。また、土粒子、間隙流体、およびその混合体について作用する力などを整理したのが表-1である。なお、表中の記号は、本文中で用いられているものと同じである。

表-1 土粒子、間隙流体および混合体の諸元

	土粒子	間隙流体	混合体
土の単位体積中に占める割合	$(1-n)$	n	1
密度	ρ_s	ρ_f	$(1-n)\rho_s + n\rho_f$
作用している応力	$(1-n)\sigma_s$	$n\pi$	$\sigma = \sigma' + m\pi$ $= (1-n)\sigma_s + n\pi m$
作用している慣性力	$(1-n)\rho_s \ddot{u}$	$n\rho_f \ddot{u}$	$\rho_s \ddot{u} + \rho_f \ddot{w}$
間隙水の流れによる力	$k^{-1}n\dot{w}$	$k^{-1}n\dot{w}$	0

2.4 土粒子に対する運動方程式

単位体積中に占める土粒子に作用する力の釣合ひ式は、間隙流体との相互作用力を含めて、次のように表される。

$$(1-n)L^*|\sigma_s| + (1-n)\rho_s|b| + k^{-1}n|w| = (1-n)\rho_s|\ddot{u}| \quad (13)$$

$(1-n)[L^*|\sigma_s|]$: 土粒子に作用する応力による項

$(1-n)\rho_s|b|$: 物体力、地球上では、 $|b|^T = (0, 0, g)$
 g : 重力加速度

$k^{-1}n|w|$: 間隙流体の土粒子に対する流れによる粘性抵抗力の反作用力

$(1-n)\rho_s|\ddot{u}|$: 土粒子に作用する慣性力

ここで、直交座標系のとき、

$$[L]^*=[L]^T=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (14)$$

また、円筒座標系のと看

$$[L]^* =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[L]^T =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (16)$$

である。また、第3項 $k_0 \nabla i$ は、次のように誘導される。ダルシーの法則から間隙流体の土粒子に対する相対速度が動水勾配に比例すると考えると、

$$|w| = k_0 \nabla i \quad (17)$$

である。ここで、 k_0 は透水係数、 i は圧力水頭、 ∇ はハミルトンの演算子で、直交座標系のと看、

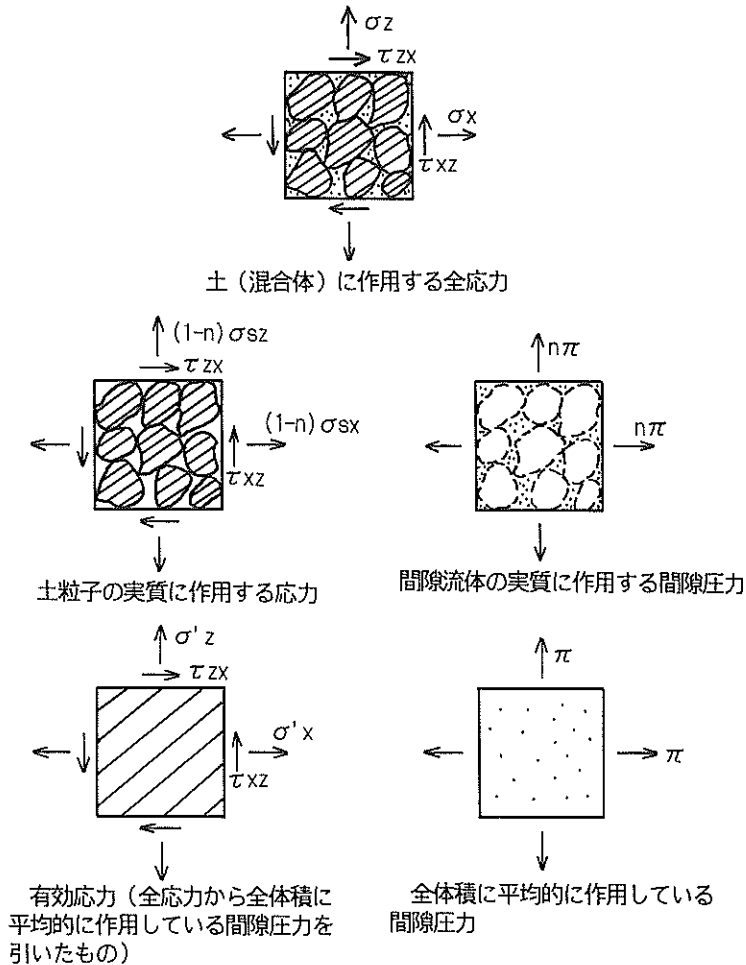


図-1 飽和地盤に作用する応力と間隙圧力

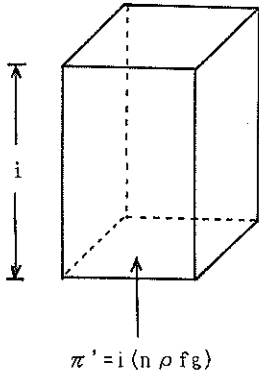


図-2 単位面積に作用する水頭差による圧力

$$\nabla^r = \nabla^* = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (18)$$

円筒座標系のとき、

$$\nabla^* = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (19)$$

$$\nabla^r = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (20)$$

である。なお、一般に透水性には方向性があり、ベクトル量として表される。また、図-2のように、単位面積に作用する流れによる圧力 π' と圧力水頭の関係は、

$$i = \pi' / (n \rho g) \quad (21)$$

と表される。(21)式を(17)式に代入し、流れによる各方向の圧力変化 $\nabla \pi'$ について解くと、

$$\nabla \pi' = n \rho g \{w\} / k_n = k^{-1} n \{w\} \quad (22)$$

となる。ここで、

$$k^{-1} = \rho g / k \quad (23)$$

であり、 k は透水係数を間隙流体の単位体積重量で割ったものである。なお、(22)式は(5)式を用いて、

$$\nabla \pi' = k^{-1} n^2 (\{U\} - \{u\}) \quad (24)$$

とも書ける。

2.5 間隙流体に対する運動方程式

単位体積中に占める間隙流体に作用する力の釣合式は、

$$n(\nabla \pi - \nabla \pi') + n \rho_f \{b\} = n \rho_f \{\ddot{U}\} \quad (25)$$

である。ここで、

$n(\nabla \pi - \nabla \pi')$: 圧力勾配から粘性抵抗による圧力勾配の損失を引いたもの

$n \rho_f \{b\}$: 物体力

$n \rho_f \{\ddot{U}\}$: 流体に作用する慣性力

である。(25)式に(22)式と(5)式を代入すると、間隙流体に対する運動方程式は次式となる。

$$n \nabla \pi - k^{-1} n \{w\} + n \rho_f \{b\} = \rho_f \{\ddot{w}\} + n \rho_f \{\ddot{u}\} \quad (26)$$

2.6 土(混合体)に対する運動方程式

土(混合体)に対する運動方程式は、土粒子に対する運動方程式に間隙流体に対する運動方程式を加えることにより得られる。(13)式+(26)式を作り、 $\nabla = [L]^* \{m\}$ の関係を用いると、

$$[L]^* \{ (1-n) \{ \sigma \} + n \pi \{ m \} \} + (1-n) \rho_s + n \rho_f \{ b \} - (1-n) \rho_s + n \rho_f \{ \ddot{u} \} - \rho_f \{ \ddot{w} \} = 0 \quad (27)$$

を得る。また、(4)、(11)式の関係を用いると、土に対する運動方程式は次式となる。

$$[L]^* \{ \sigma \} + \rho \{ b \} - \rho \{ \ddot{u} \} - \rho_f \{ \ddot{w} \} = 0 \quad (28)$$

2.7 応力-ひずみ-変位関係

まず、土粒子のひずみを有効ひずみ成分と水圧による平均ひずみ成分に分けると、

$$\{ \epsilon \} = \{ \epsilon' \} + \{ \bar{\epsilon} \} \quad (29)$$

$\{ \epsilon \}$: 骨格の全ひずみ

$\{ \epsilon \}^T = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ (直交座標系)

$= (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ (円筒座標系)

$\{ \epsilon' \}$: 有効ひずみ (水圧以外の応力により生じたひずみ)

$\{ \bar{\epsilon} \}$: 水圧による平均ひずみ

$$\{ \bar{\epsilon} \} = \{ m \} \pi / 3K \quad (30)$$

K_r : 土粒子の体積弾性係数
次に、有効応力と有効ひずみの関係

$$\{\sigma'\} = [D] \{\varepsilon'\} \quad (31)$$

を用いて、全応力を表現すると、

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} + \alpha \{m\} \pi \quad (32)$$

ここで、

$$[D] =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (33)$$

λ , G は、ラメの定数。また、(32) に式に前から $\{m\}^T$ を乗じて整理すると、

$$\alpha = 1 - (3\lambda + 2G) / 3K_r = 1 - K_0 / K_r \quad (34)$$

$$K_0 = (3\lambda + 2G) / 3 \quad (35)$$

となる。また、ひずみ-変位関係

$$\{\varepsilon\} = [L] \{u\} \quad (36)$$

$$\{u\}^T = (u_x, u_y, u_z) \text{ (直交座標系)} \\ (u_r, u_\theta, u_z) \text{ (円筒座標系)}$$

を(32)式に代入し、応力-変位関係を表すと次式となる。

$$\{\sigma\} = [D][L] \{u\} + \alpha \{m\} \pi \quad (37)$$

2. 8 間隙流体の収支のバランス

単位体積中の水の収支のバランスを考えると、間隙流体の発散は、間隙の減少速度と流体の伸び速度に等しいので、

$$\nabla^* \{w\} = -\{m\}^T \dot{\varepsilon} - (1-n) \dot{p} / K_r \\ + \{m\}^T \dot{\sigma}' / 3K_r - \dot{p} / K_r \quad (38)$$

と書ける⁹⁾。ここで K_r は間隙流体の体積弾性係数である。(38) 式を時間について 1 回積分し、初期条件 $F(t=0)$ を入れると、

$$\nabla^* \{w\} + \{m\}^T \varepsilon + (1-n) p / K_r - \{m\}^T \sigma' \\ / 3K_r + \dot{p} / K_r = F(t=0) \quad (39)$$

と書ける。また、(7)、(32) 式より、

$$\{\sigma'\} = [D] \{\varepsilon\} + (\alpha - 1) \{m\} \pi \quad (40)$$

であるから(38) 式の右辺は、

$$(38) \text{ 式の右辺} = -\alpha \{m\}^T \dot{\varepsilon} - Q \dot{p} \quad (41)$$

と表される。ここで、 Q は

$$1/Q = 1/K_r + (\alpha - n) / K_s \quad (42)$$

を満たす。したがって、(38) 式は書き直されて、

$$\nabla^* \{w\} = -\alpha \{m\}^T \dot{\varepsilon} - Q \dot{p} \quad (43)$$

となる。また、(39)式において、 $F(t=0) = 0$ と考えると、

$$\nabla^* \{w\} + \alpha \{m\}^T \varepsilon + Q^{-1} p = 0 \quad (44)$$

と書ける。なお、外部からの流入量は(45)式で表される。

$$q = -\nabla^* \{w\} = \alpha \{m\}^T \dot{\varepsilon} + Q \dot{p} \quad (45)$$

2. 9 解析に用いる方程式 (u-w form)

2. 8 節までの基礎方程式を整理し、変数 $\{u\}$, $\{w\}$ だけを残すと(36)、(44) 式から、

$$-p = \pi = \alpha Q \{m\}^T [L] \{u\} + Q \nabla^* \{w\} \quad (46)$$

となる。また、(46) 式を(37) 式に代入し整理すると、

$$\{\sigma\} = ([D] + \alpha^2 Q \{m\} \{m\}^T) [L] \{u\} \\ + \alpha Q \{m\} \nabla^* \{w\} \quad (47)$$

となる。(46)、(47) 式を土に対する運動方程式(28) 式と間隙流体に対する運動方程式(20) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
& [L]^*([D] + \alpha^2 Q |m| |m|^T) [L] \{u\} \\
& + \alpha Q [L]^* |m| |\nabla| w | - \rho | \dot{u} | - \rho_s | \dot{w} | \\
& + \rho | b | = 0 \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha Q \nabla |m|^T [L] \{u\} + Q \nabla \nabla^* |w| - k^{-1} | \dot{w} | \\
& - \rho_s | \dot{u} | - (\rho_s / n) | \dot{w} | + \rho_s | b | = 0 \quad (49)
\end{aligned}$$

を得る。さらに、 $|m|^T [L] = \nabla^*$ 、 $[L]^* |m| = \nabla$ の関係をを用い、(48)、(49)式をマトリックス表示すると(50)式となる。

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cc} [L]^*([D] + \alpha^2 Q |m| |m|^T) [L] & \alpha Q \nabla \nabla^* \\ \alpha Q \nabla \nabla^* & Q \nabla \nabla^* \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \\
& - \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} \rho & \rho_s \\ \rho_s & \rho_s / n \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} = 0 \quad (50)
\end{aligned}$$

(50)式は、単位の土要素および間隙流体に作用している動的な力の釣合式である。なお、上式では静的な釣合が動的な釣合に影響を与えないと考え、物体力は省略した。また応力は、(46)、(47)式をまとめて次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \pi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D] + \alpha^2 Q |m| |m|^T [L] & \alpha Q m \nabla^* \\ \alpha Q \nabla^* & Q \nabla^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (51)$$

2. 10 解析に用いる方程式 (u-π form)

間隙流体の土粒子に対する相対加速度 $| \dot{w} |$ が土粒子の加速度に対して十分小さく無視できる場合、Biot の式の自由度を以下のように減らすことができる。

$| \dot{w} | / | \dot{u} | \rightarrow 0$ と見なし、 $| \dot{w} |$ の項を除き、さらに先の理由で物体力を除くと(26)、(28)式は、

$$\nabla \pi - k^{-1} | \dot{w} | = \rho_s | \dot{u} | \quad (52)$$

$$[L]^* \{ \sigma \} - \rho | \dot{u} | = 0 \quad (53)$$

と書ける。(52)式に前から $k \nabla^*$ を乗じ、(43)式を用いて $| \dot{w} |$ を消去すると、

$$\begin{aligned}
& k \nabla^* \nabla \pi + \{ \sigma \} |m|^T \{ \epsilon \} - Q^{-1} \pi - k \rho_s \nabla^* | \dot{u} | \\
& = 0 \quad (54)
\end{aligned}$$

となる。さらに、(53)式に(37)式を、また(54)式に(36)式を代入すると、

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cc} [L]^* [D] [L] & \alpha \nabla \\ 0 & k \nabla^* \nabla \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u \\ \pi \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \alpha \nabla^* & -Q^{-1} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\pi} \end{Bmatrix} \\
& + \left[\begin{array}{cc} -\rho & 0 \\ -k \rho_s \nabla^* & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\pi} \end{Bmatrix} = 0 \quad (55)
\end{aligned}$$

となる。なお、応力は(37)式にて評価する。(55)式は u-π form の基礎方程式である。

2. 11 非排水条件の方程式 (Undrain form)

非排水状態では、透水係数が0あるいは間隙流体の土粒子に対する相対変位量が0と考えればよいので、運動方程式は、(50)式において w に関する項を無視し、

$$\begin{aligned}
& [L]^*([D] + \alpha^2 Q |m| |m|^T) [L] \{u\} - \rho | \dot{u} | \\
& = 0 \quad (56)
\end{aligned}$$

となる。また応力は、(47)式より

$$\{ \sigma \} = ([D] + \alpha^2 Q |m| |m|^T) [L] \{u\} \quad (57)$$

また、間隙圧力は、(46)式より

$$\pi = \alpha Q \nabla^* |u| \quad (58)$$

となる。したがって、全応力解析との違いは通常の応力-ひずみマトリックス $[D]$ を $([D] + \alpha^2 Q |m| |m|^T)$ におきかえ、さらに間隙水圧を評価できる所にある。

ここで、非排水条件のマトリックス $([D] + \alpha^2 Q |m| |m|^T)$ の意味を考えてみよう。 $([D] + \alpha^2 Q |m| |m|^T)$ を作ると、

$$\begin{aligned}
& [D] + \alpha^2 Q |m| |m|^T = \\
& \left[\begin{array}{cccccc} \lambda + 2G + \alpha^2 Q & \lambda + \alpha^2 Q & \lambda + \alpha^2 Q & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha^2 Q & \lambda + 2G + \alpha^2 Q & \lambda + \alpha^2 Q & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha^2 Q & \lambda + \alpha^2 Q & \lambda + 2G + \alpha^2 Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{array} \right] \quad (59)
\end{aligned}$$

ここで、非排水条件のラメの定数 $\lambda_u = \lambda + \alpha^2 Q$ を導入すれば、非排水条件では $[D]$ マトリックス中の λ を λ_u に置き換えればよいことに気づく。また λ は、ポアソン比 ν と G を用いて、

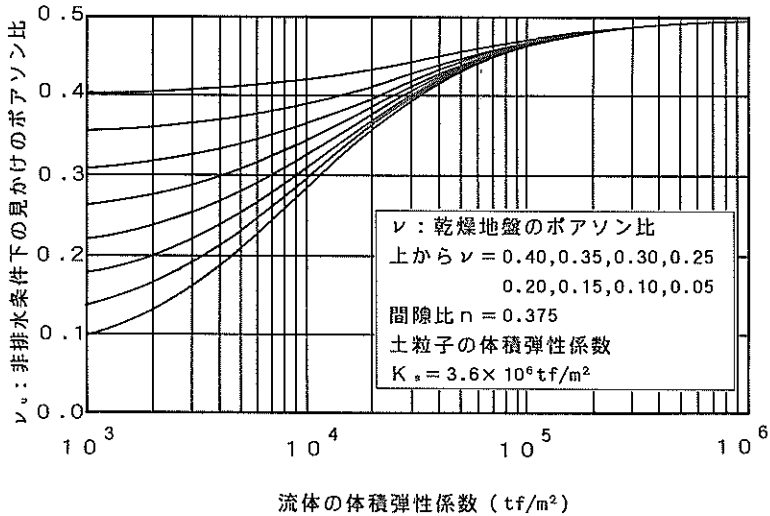


図-3 非排水飽和地盤の見かけのポアソン比と流体の体積弾性係数

$$\lambda = G \cdot 2\nu / (1-2\nu) \quad (60)$$

と書けるので、改めて非排水条件の下のポアソン比 ν_u を用いて λ_u を表すと、

$$\lambda_u = \lambda + \alpha^2 Q = G \cdot 2\nu_u / (1-2\nu_u) \quad (61)$$

と書ける。したがって非排水条件下では、見かけ上ポアソン比を大きくすることと等価であることがわかる。

ちなみに、水の体積弾性係数 $2.08 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ 、土粒子の体積弾性係数 $3.7 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ ¹⁰⁾、土中を伝わるせん断波の速度 200 m/s 、土の単位体積重量 2.0 tf/m^3 、間隙比 0.375 とし、乾燥している場合のポアソン比を 0.25 とすれば、飽和地盤の見かけのポアソン比 λ_u は、約 0.48 となる。図-3に、流体の体積弾性係数と見かけのポアソン比の関係を示す。なお、飽和地盤のポアソン比については、同様なことが、すでに示されている¹¹⁾。

3. 薄層要素法の二相系の運動方程式への適用

水平成層構造を持つ多層地盤中を伝播する弾性波を検討対象とする場合には、基礎方程式を解析的に解くことが困難なため、何らかの数値解析的取扱をすることが多い。Lysmer は水平の多層地盤を伝播する Rayleigh Wave を集中質量法を用いて解析した¹²⁾。地盤を有限要素法的に離散化する方法によると、地盤中を伝わる波の固有モードや波数は単純な固有値問題に帰着することが示されている。この様な数値解析的取扱いはさらに、

田治見¹³⁾、Waas¹⁴⁾、Kausel¹⁵⁾、Tossoulas¹⁶⁾らによって発展した。(これらの研究では、整合質量マトリックスが使われている。)地盤は水平成層構造を持つとし、それぞれの層はさらに薄い層に分割されるため、一般に薄層要素法と呼ばれる。この方法では、離散化は深さ方向のみ行われ、水平方向には解析解を残すため、水平方向に半無限の領域を取扱うことができる点が特徴となる。これらの研究は、水の存在を考慮していない研究である。

一方、地盤を水と土から成る二相系地盤として取り扱った弾性波動の研究も成されている^{17)~19)}。これらの研究では、地盤は二相系の一樣弾性体として、解析的な取り扱いを行っている。

本章では、水平成層構造を持つ多層地盤を対象として、先に求めた二相系の基礎方程式 ($u-w$ form) に、薄層要素法を適用し、定常加振を受ける二相系地盤の定常応答を定式化する。

3.1 変数分離

半無限弾性体の表面下向きに Z 軸をとり、表面を $Z = 0$ 面とする。また、波動の表面に沿っての進行方向を x 軸 (r 軸) にとる (図-4 参照)。

以下では、時間について定常な状態を考え、 xz 平面二次元の場合、および $rz \theta$ 円筒座標三次元の場合について定式を進めていく。まず、 x 方向 (r 方向) に伝播する形の解を次の様に表す。

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \exp(i \omega t) [H] \begin{Bmatrix} u(z) \\ w(z) \end{Bmatrix} \quad (62)$$

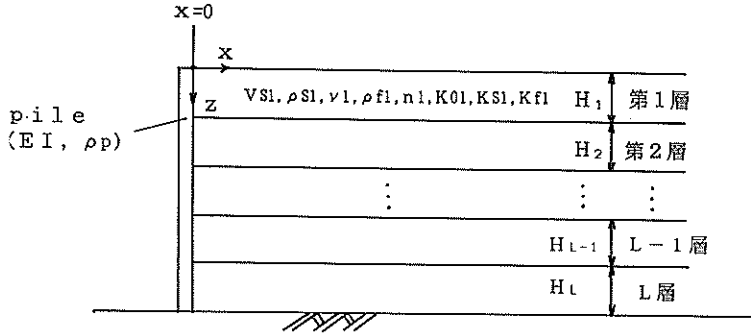


図-4(a) 直交座標系平面二次元の場合

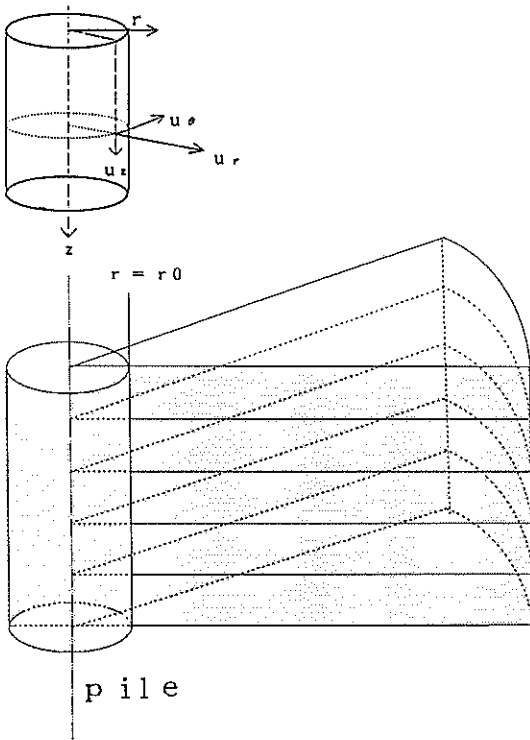


図-4(b) 円筒座標系三次元の場合

ここで、直交座標系のとき、 $\{u\}^T = (u_r, u_\theta)$ 、 $\{w\}^T = (w_r, w_\theta)$ であり、 $[H]$ は h を波数とすれば、

$$[H] = \exp(-ihx) [I] \quad (63)$$

である。ここで、 $[I]$ は単位行列である。また、円筒座標系のとき $\{u\}^T = (u_r, u_\theta, u_z)$ 、 $\{w\}^T = (w_r, w_\theta, w_z)$ であり、 $[H]$ は m 次の第2種ハンケル関数 $H_m^{(2)}$ を用いて、次のように書ける²⁰⁾。

$$[H] = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(im\theta) \begin{bmatrix} [H_s] & 0 \\ 0 & [H_s] \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$[H_s] = \begin{bmatrix} H_m^{(2)*}(hr) & 0 & \frac{m}{r} H_m^{(2)}(hr) \\ 0 & h H_m^{(2)}(hr) & 0 \\ i \frac{m}{r} H_m^{(2)}(hr) & 0 & i H_m^{(2)*}(hr) \end{bmatrix} \quad (65)$$

次に、 $u(z)$ 、 $w(z)$ を有限個の自由度で表現する。まず、地盤を深さ方向に l 層の薄層要素に分割し、各層上面における土粒子の変位と間隙流体の土粒子に対する相対変位を考える。各層中の変位の変化は、上端と下端の変位を線形補間するものとすれば、第一層の変位は第 j 層上面の変位 u_j 、 w_j と第 $(j+1)$ 層上面の変位 u_{j+1} 、 w_{j+1} を用いて次のように表される。

$$u(z)_j = [N_j] \{u\}_{j+1} \quad (66)$$

$$\{u\}_{j+1} = (u_j, w_j, u_{j+1}, w_{j+1})$$

ここで、 H_j を第 j 層の層厚、 z_j を第 j 層上面を原点とする下向き部分座標とすれば、

$$[N_j] = [N_{u_j}(I), N_{w_j}(I)] \quad (67)$$

$$N_{u_j} = 1 - z_j/H_j \quad (68)$$

$$N_{w_j} = z_j/H_j \quad (69)$$

である。したがって、第 j 層の変位は、(70)式のように書ける。

$$\{u(x,z)\}_j = \exp(i\omega t)[H][N_j]\{u\}_{j+1} \quad (70)$$

3. 2 Galerkin 法による離散化した変位の決定

対象とする地盤の土全体と間隙流体は、(50)式の力の釣合式を満たす。また、深さ方向に薄層に分割した各地盤要素は、境界面 s 上に作用する応力および間隙水圧と釣り合う。したがって、Galerkin 法により、釣合式の前から離散化に用いた形状関数 $[HN]$ の共役転置行列 $[HN]^*$ を乗じ、領域内で積分し、それを 0 とおくと、各層の変位ベクトルは次式を満たす。

$$\int_{V_j} \{ [N_j]^T [H]^* \tau [K] - i\omega [C] + \omega^2 [M] \} [H][N_j] \{u\}_{j+1} dV - \int_{s_j} [N_j]^T [H]^* \tau \sigma_s ds = 0 \quad (71)$$

ここで、 $*$ T は共役転置行列を表し、

$$[K] = \begin{bmatrix} [L]^*(D + a^2 Q |m| |m|^T) [L] & a Q \nabla \nabla^* \\ a Q \nabla \nabla^* & Q \nabla \nabla^* \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \rho & \rho_i \\ \rho_i & \rho_i/n \end{bmatrix} \quad (74)$$

であり、また、境界 s 上に作用する応力は、分割された境界面上に作用する応力と間隙水圧を考えればよいから、直交座標系するとき、

$$\{\sigma_s\}^T = (\tau_{xz}, \sigma_z, 0, \pi) \quad (75)$$

円筒座標系するとき、

$$\{\sigma_s\}^T = (\tau_{rz}, \sigma_z, \tau_{\theta z}, 0, \pi, 0) \quad (76)$$

である。(71)式は z 方向の固有方程式に帰着し、各層の上面の変位は、固有方程式を解いて得られる固有値と固有ベクトルを用いて次のように書ける。

直交座標系の場合、

$$\{u\} = [\phi] \{a \exp(-ihx)\} \quad (77)$$

円筒座標系の場合、

$$\{u\} = [H\phi] \{a\} \quad (78)$$

となる。ここで、

$[\phi]$: 固有ベクトルから成るマトリックス

$[H\phi]$: 固有ベクトルとハンケル関数から成るマトリックス

$\{a\}$: 重み係数ベクトル

$$\{a \exp(-ihx)\}^T = \{a_1 \exp(-ihx), \dots, a_n \exp(-ihx)\}$$

である。なお、(71)式から固有方程式の誘導および固有方程式の解法は、付録 1 に詳述した。

3. 3 薄層要素地盤の剛性マトリックス

$x = 0$ 面 (円筒座標系の場合には、 $r = r_0$ 面) における応力と節点力の釣合を考え、 $x = 0$ ($r = r_0$) 面における薄層要素地盤の節点力-節点変位関係を求める。ここでは、 $x = 0$ ($r = r_0$) 面における応力を考える。

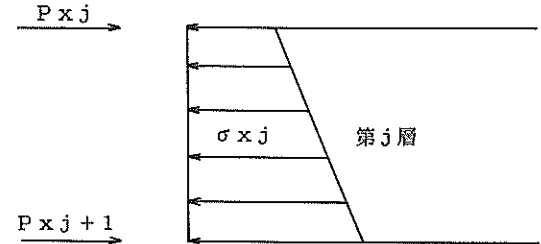


図-5 第 j の節点力 (P_x) と応力 (σ_x) の関係

直交座標系するとき、第 j 層第 s 次のモードによる応力と節点力は、

$$\{P\} = -a_s \int [N]^T \sigma_{r=0} |_{z=0} dz \quad (79)$$

$$\{P\}^T = (P_r, P_\theta, P_z)$$

$$\{\sigma_{r=0}\}^T = (\sigma_r, \sigma_\theta, \pi)$$

円筒座標系するとき、単位ラジアン当たり、

$$\{P\} = -a_m \int [N]^T \sigma_{r=0} |_{z=0} dz \quad (80)$$

$$\{P\}^T = (P_r, P_\theta, P_\phi, P_z)$$

$$\{\sigma_{r=0}\}^T = (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\phi, \pi)$$

と表される (図-5 参照)。第 j 層の第 s 次のモードによる応力と節点力の関係を第 1 層から第 L 層まで、また第 1 次からすべてのモードまでを重ね合わせると、地盤全体の節点力と節点変位の関係

$$\{P\} = [R] \{u_{x=0}\} \quad (81)$$

が求められる。ここで、直交座標系のとき

$$\begin{aligned} \{P\}^T &= (P_{x1} \cdots P_{xL}, P_{z1} \cdots P_{zL}, P_{\theta 1} \cdots P_{\theta L}) \\ \{u\}^T &= (u_{x1} \cdots u_{xL}, u_{z1} \cdots u_{zL}, w_{\theta 1} \cdots w_{\theta L}) \\ [R] &= (i[A][\phi][h^2] + [F][\phi]) [\phi_m]^{-1} \quad (82) \end{aligned}$$

であり、 $[A]$ は層厚と地盤定数から成るマトリックス、 $[h]$ は波数から成る対角マトリックスである。なお、(82) 式中のマトリックスは、付録 1 に示すとおりである。また、円筒座標系のとき、

$$\begin{aligned} \{P\}^T &= (P_{r1} \cdots P_{rL}, P_{\theta 1} \cdots P_{\theta L}, P_{z1} \cdots P_{zL}, P_{\tau 1} \cdots P_{\tau L}) \\ \{u\}^T &= (u_{r1} \cdots u_{rL}, u_{\theta 1} \cdots u_{\theta L}, u_{z1} \cdots u_{zL}, w_{\tau 1} \cdots w_{\tau L}) \\ [R] &= r([A][V_0][h^2] + [G][\psi_0][h] + [P][V_0] \\ &\quad + [F_r][\psi_0][h] + [Q][V_0])[H\phi_m]^{-1} \quad (83) \end{aligned}$$

であり、マトリックス $[A]$ 、 $[V_0]$ 、 $[h^2]$ 、 $[G]$ 、 $[\psi_0]$ 、 $[h]$ 、 $[P]$ 、 $[F_r]$ 、 $[Q]$ は、付録 1 に示すとおりである。なお、この剛性マトリックスの誘導は、付録 2 に示した。

4. 解析結果

前章までの定式化においては、直交座標系および円筒座標系について実施したが、本章では直交座標系 2 次元平面ひずみの場合についてのみ計算を実施し、地盤の透水性や水深が飽和地盤の波動伝播特性や動的地盤剛性に及ぼす影響を検討することとした。

4.1 解析条件

(1) 杭の動的剛性マトリックスとの重ね合わせ

ここでは簡単のため $x=0$ 面に矢板 (杭) を挿入し、その頂部を定常加振することを考える。以下、矢板という言葉の代わりに杭という言葉を使用する。この杭頭加振力は、 $x=0$ 面における鉛直水平全応力に対応する荷重である。また、このとき地盤に発生する間隙水圧は未知である。したがって、問題を解くためには間隙流体の土粒子に対する相対水平変位 w_x を境界条件として規定する必要がある。ここでは、 $x=0$ 面においては杭によって水平方向に止水されていると考え、 $w_x=0$ なる境界

条件を使用する。

$x=0$ 面における半無限飽和地盤の荷重-変位関係は、

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{xz} \\ P_x \end{Bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \\ w_x \end{Bmatrix}_{x=0} \quad (81)$$

と表される。ここで、 $w_x|_{x=0}=0$ であるから (81) 式は、

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{xz} \end{Bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix}_{x=0} \quad (84)$$

$$\{P_x\}_{x=0} = [R_{31}] \{u_x\} + [R_{32}] \{u_z\} \quad (85)$$

と書ける。次に水平杭頭加振によって地盤の z 方向に荷重が伝わらないものとするれば、

$$\{P_{xz}\} = [R_{21}] \{u_x\} + [R_{22}] \{u_z\} = 0 \quad (86)$$

となる。上式を $\{u_x\}$ について解くと、

$$\{u_x\} = -[R_{22}]^{-1}[R_{21}] \{u_z\} \quad (87)$$

を得る。(87) 式を (84) 式第一列に代入すると、

$$\{P_{xx}\} = [R_x] \{u_z\} \quad (88)$$

$$[R_x] = [R_{11}] - [R_{12}][R_{22}]^{-1}[R_{21}] \quad (89)$$

を得る。したがって、杭自身の水平節点力 P_x とモーメント M_p 、節点水平変位 u_x 、回転角 θ_p の関係を、

$$\begin{Bmatrix} P_p \\ M_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p11} & R_{p12} \\ R_{p21} & R_{p22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ \theta_p \end{Bmatrix} \quad (90)$$

と書けば、杭-薄層飽和地盤系の節点力-節点変位関係は、

$$\begin{Bmatrix} P_p + P_{xx} \\ M_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p11} + R_x & R_{p12} \\ R_{p21} & R_{p22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ \theta_p \end{Bmatrix} \quad (91)$$

と書ける。(91) 式より、 $x=0$ における杭の変形は、

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ \theta_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p11} + R_x & R_{p12} \\ R_{p21} & R_{p22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P_x \\ M_p \end{Bmatrix} \quad (92)$$

より求められる。地盤の水平変位 u_x が求められると、(87)式より u_z が求められる。 u_x , u_z が求められると(85)式より P_x が、また、次式より重み係数ベクトル $|a|$ が求められる。

$$|a| = [\phi_n]^{-1} |u| \Big|_{z=0} \quad (93)$$

また、重み係数が決まると、(77)式より、任意の層の上面の $x=x$ における変位を求めることができる。なお、4.2 波動伝播特性の項では、杭を無視して計算することとし、4.3 動的地盤剛性の項では、杭を考慮することとした。なお、計算に使用した杭の曲げ剛性 EI は $2.0 \times 10^4 \text{tfm}^2$ 、質量密度 ρ_p は $2.0 \text{tf/m}^3 / 9.8 \text{m/s}^2$ とした。杭の動的剛性マトリックスは、付録3に示したとおりである。

表-2 二相系地盤の分類

分類	各層の自由度
①乾燥地盤 (Solidのみ)	2
②水 (Fluidのみ)	2
③飽和地盤 (Mixture)非排水条件	2
④飽和地盤 (Mixture)排水条件	4

(2)地盤条件

地盤は、定式の過程からわかるように、大別して表-2の四つに分類できる。

このうち、①乾燥地盤および②水の場合には、各層で水平上下の2自由度を持つ。また、③飽和地盤非排水条件では、間隙流体の土粒子に対する相対変位が無いので、同じく各層の自由度は2である。非排水条件は、④飽和地盤排水条件において、透水係数を0に漸近させることと等価となるはずである。したがって、地盤の透水性の効果を検討する場合には、非排水条件を極限条件と考え、④の条件で透水係数を $10^{-5} \text{m/s} \sim 10^{-1} \text{m/s}$ に変化させることとした。なお、地盤の透水係数は、種々の地盤で表-3のように変化する。

表-3 種々の地盤の透水係数

10^0	10^{-2}	10^{-5}	10^{-9}	10^{-11} (m/s)
きれいなレキ	きれいな砂	微細砂, シルト, 砂 シルト・粘土の混合土		粘土

次に、水深の影響を考慮する場合には、排水条件の層厚10mの飽和地盤上に水があることを想定する。この条件で、水深を0~20mに変化させることとした。

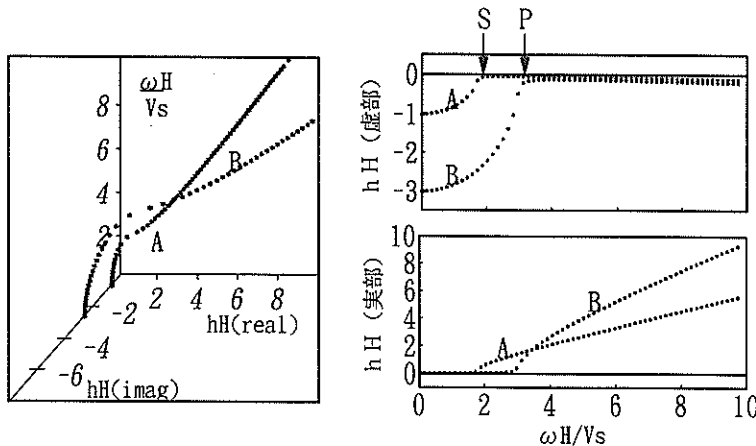


図-6 無次元波数と無次元振動数の関係 (乾燥地盤: $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

4. 2 波動伝播特性

固有方程式は、無次元振動数 $\omega H/V_s$ を決めると解くことができ、固有値から無次元波数 hH を求めることができる。ここで、 H は地盤の層厚、 V_s は地盤のせん断波速度、 ω は角振動数である。求められた各固有モードは、 x 方向に $\exp(-ihx)$ なる関数で変化する。したがって、関数の性質から次のようなことがわかる。

- ① hH の虚数部の符号が負になる場合に $x \rightarrow \infty$ で変位 $\rightarrow 0$ という条件を満たす。
- ② hH が純虚数のとき変位は x 方向に波動的性質を示さず、単調に減衰するだけとなる。
- ③ 虚数部の絶対値が大きいほど x 方向に減衰が早くなる。
- ④ 波長は、 $2\pi/h$ であるから、波数が大きいほど波長の短い波となる。
- ⑤ hH が 0 となるとき、変位は x 方向に変化せず z 方向のみの関数となる。この時の振動数は、鉛直方向に伝わる P 波および S 波の固有振動数を示している。

図-6 は、剛基盤上に一様な乾燥地盤がある場合の $hH \sim \omega H/V_s$ 関係を示したものである。0 Hz から P 波および S 波の固有振動数までは、 hH は純虚数となり、地盤変位は x 方向に波動的性質を示さない。

(1) 非排水条件下の性状

非排水状態と乾燥状態の差は、応力-歪マトリックスが異なるのみで、見かけ上ポアソン比を変化させることと等価であることは、2. 11 で既に示した。図-7、8

は、図-6 と同じ条件で、ポアソン比を 0.4, 0.48 にした場合の $hH \sim \omega H/V_s$ 関係を示したものである。流体の体積弾性係数に換算すると、図-2 からそれぞれ、 2.5×10^4 , $2.0 \times 10^5 \text{tf/m}^2$ に対応する。

まず、 $(hH) = 0$ となる振動数、すなわち P 波および S 波の固有振動数を比較すると、S 波の固有振動数は、ポアソン比によらず一定で、ポアソン比の影響を受けない。これは、水の存在によって、せん断剛性が変化しないからである。一方、P 波の固有振動数は、ポアソン比が大きくなるにつれて大きくなる。これは、水の体積剛性によって地盤全体の体積剛性が増加するためである。

図-9、10 は、地表面の x 方向の変位の変化の様子を示したものである。図の無次元振動数は、 $\omega H/V_s = 2$ である。ポアソン比が 0.25 (乾燥地盤) の場合には、水平方向と上下方向のモードは連成しないため、それぞれの方向で単一のモードの波が伝播する。 z 方向変位においては、 x 方向に波動的性質を示さず単調にしかもすぐ減衰するだけとなる。ポアソン比が 0.48 (非排水条件、流体は水) となると、水平方向と上下方向のモードは連成し、それぞれの方向の変位は 2 つのモードを重ね合わせたものとなる。また、P 波の固有振動数が高くなったため、一方のモードはポアソン比 0.25 の場合よりも、 x 方向の減衰の仕方が大きい。このように、非排水状態になると遠方に伝わり易いモードとすぐ減衰してしまうモードの差がはっきりと現れてくる。

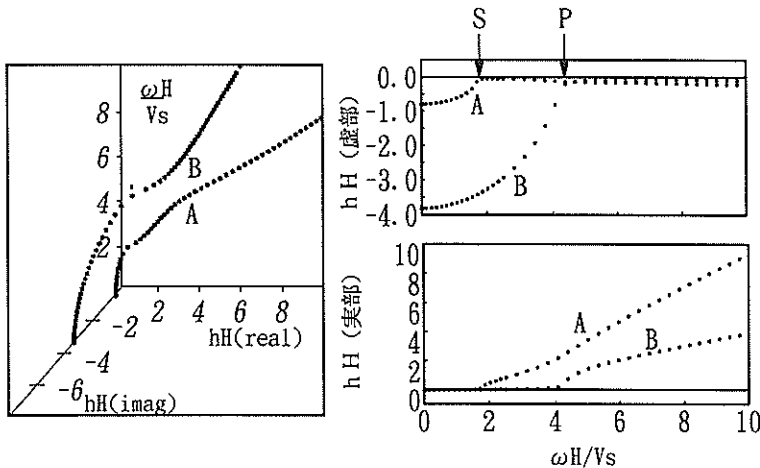


図-7 無次元波数と無次元振動数の関係

(乾燥地盤: $\nu = 0.40$, 減衰定数 = 0.02, 非排水条件 $k_r = 2.5 \times 10^4 \text{tf/m}^2$ と等価)

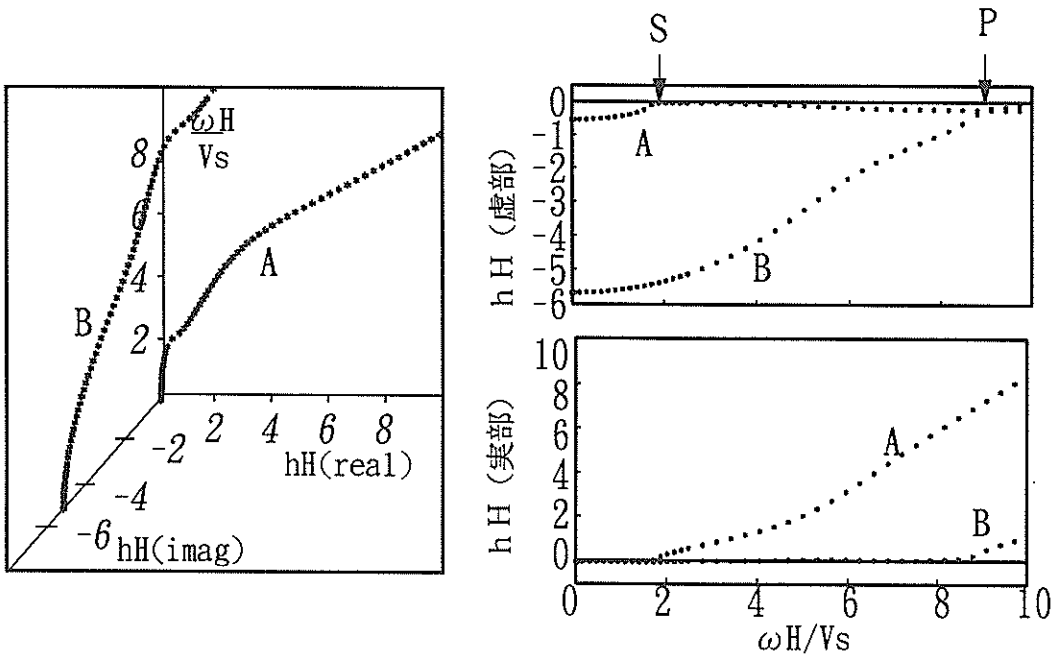


図-8 無次元波数と無次元振動数の関係

(乾燥地盤: $\nu = 0.48$, 減衰定数 = 0.02, 非排水条件: $k_t = 2.0 \times 10^6 \text{tf/m}^2$ と等価)

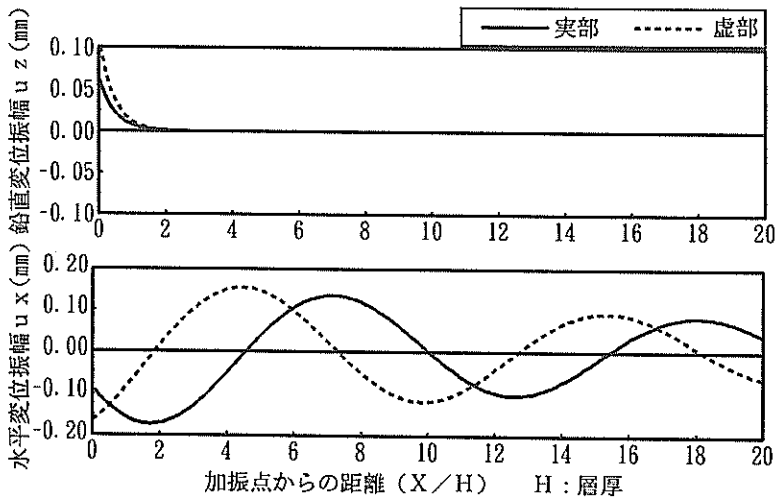


図-9 地表面の変位振幅の変化 (乾燥地盤: $\nu = 0.25$, 減衰定数 = 0.02, $\omega H/V_s = 2$)

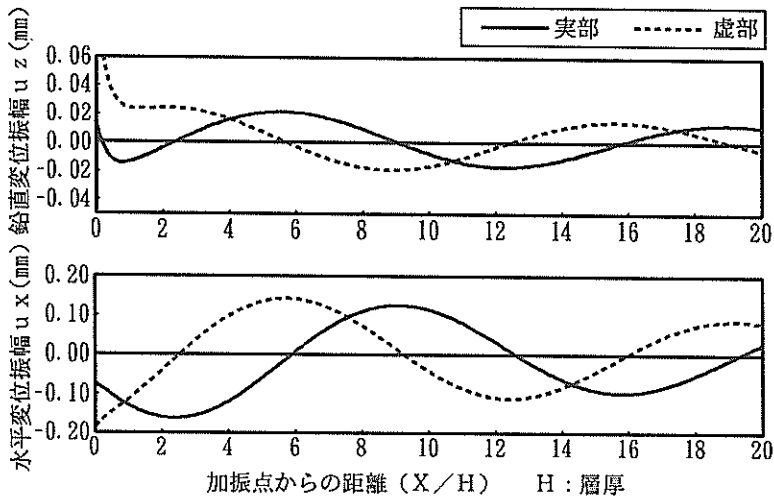


図-10 地表面の変位振幅の変化

(乾燥地盤： $\nu=0.48$ ，減衰定数 $=0.02$ ，非排水条件 $k_1=2.0 \times 10^{-4} \text{t/m}^2$ と等価， $\omega H/V_s=2$)

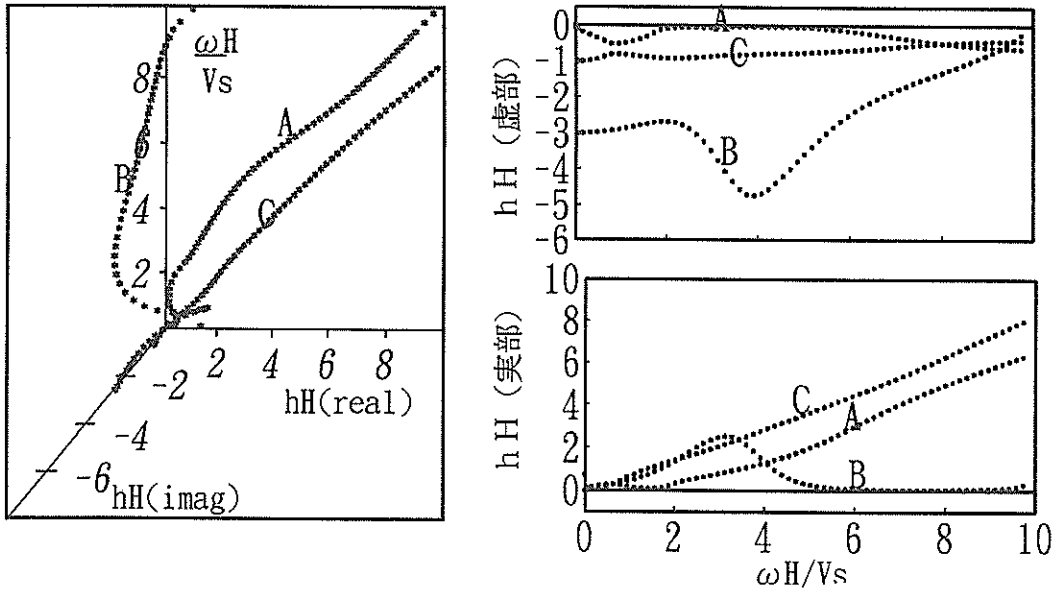


図-11 無次元波数と無次元振動数の関係 (排水条件： $k_0=10^{-1} \text{m/s}$ ， $\nu=0.25$ ，減衰定数 $=0.02$)

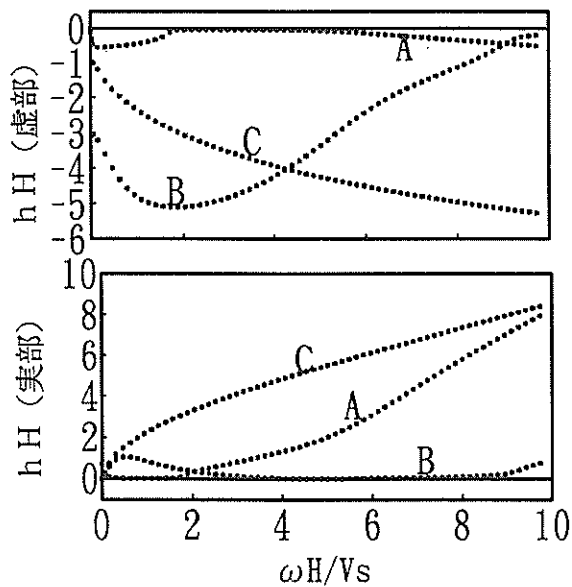
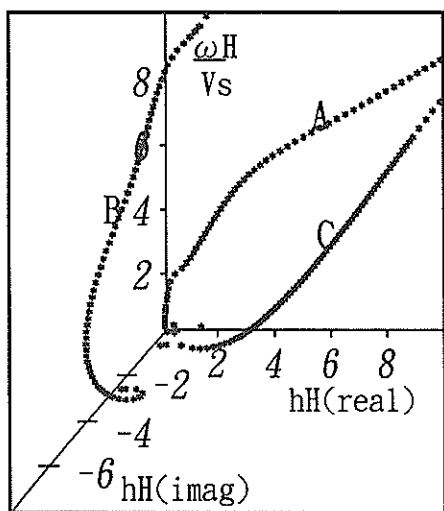


図-12 無次元波数と無次元振動数の関係 (排水条件: $k_0=10^{-2}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

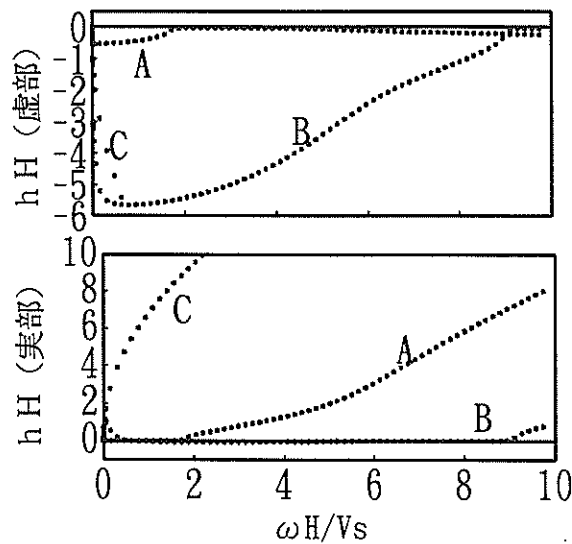
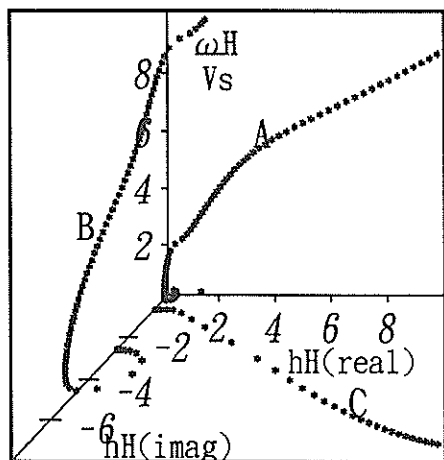


図-13 無次元波数と無次元振動数の関係 (排水条件: $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

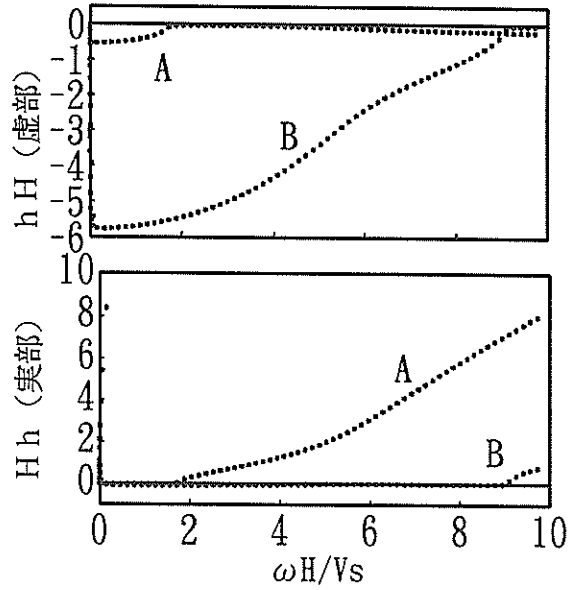
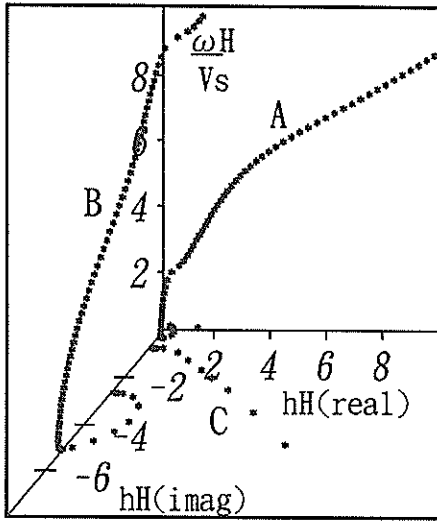


図-14 無次元波数と無次元振動数の関係 (排水条件: $k_0=10^{-4}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

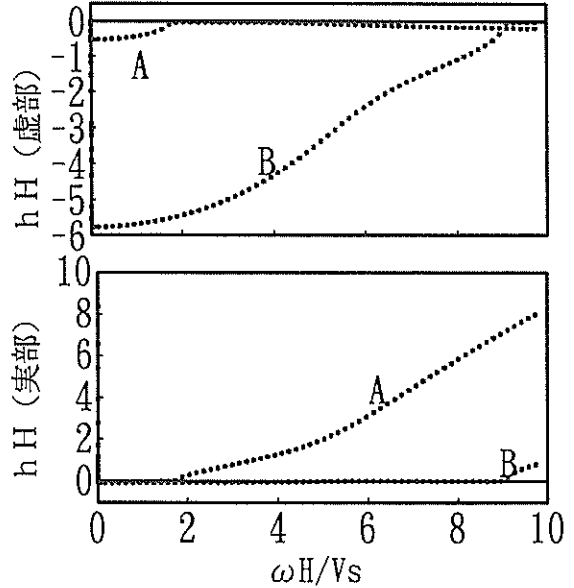
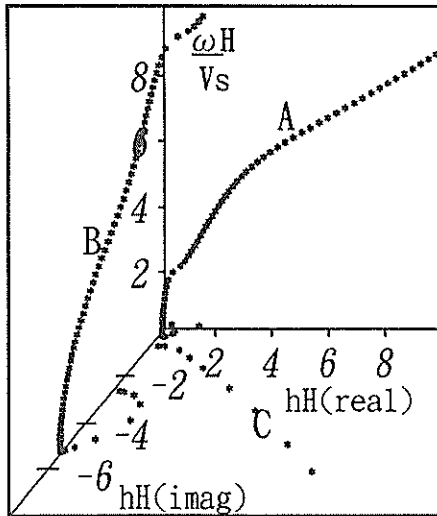


図-15 無次元波数と無次元振動数の関係 (排水条件: $k_0=10^{-5}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

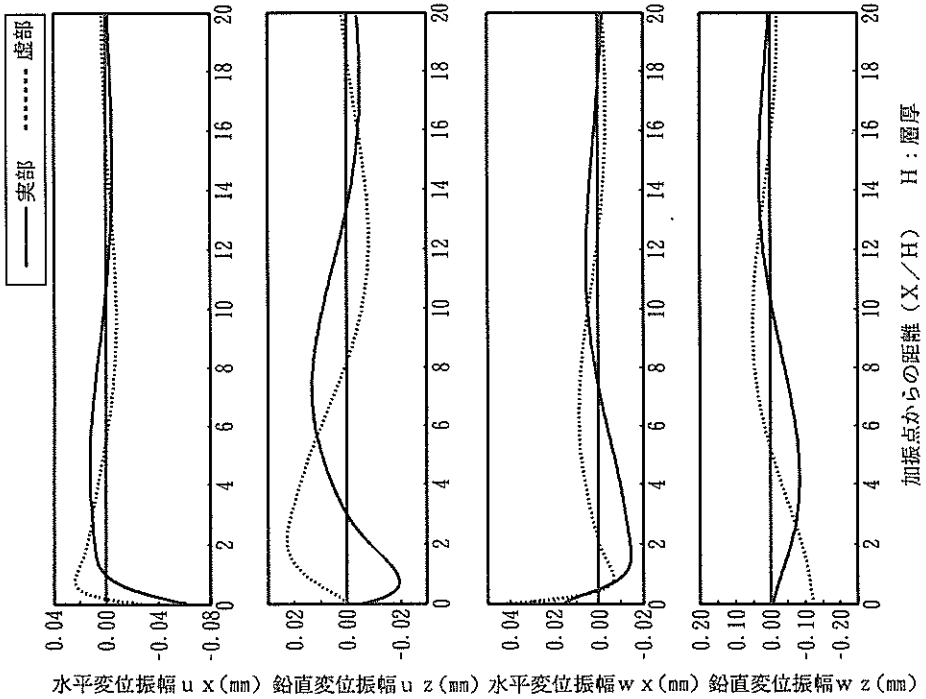


図-16 地表面の変位振幅の変化

(排水条件 : $k_0 = 10^{-1} \text{m/s}$, $\nu = 0.25$, 減衰定数 = 0.02, $\omega H / V_s = 2$)

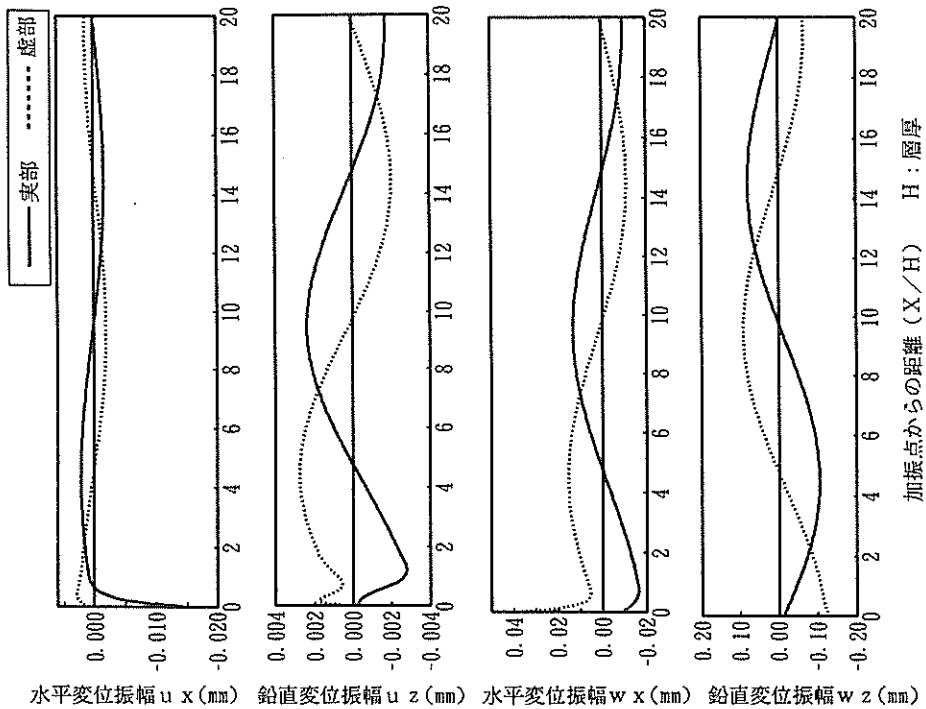
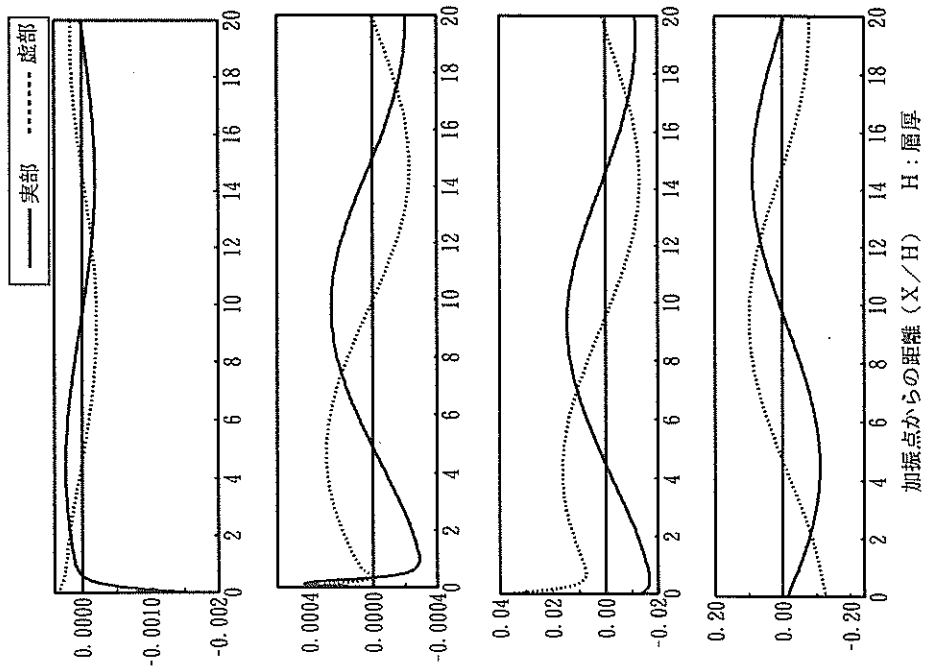


図-17 地表面の変位振幅の変化

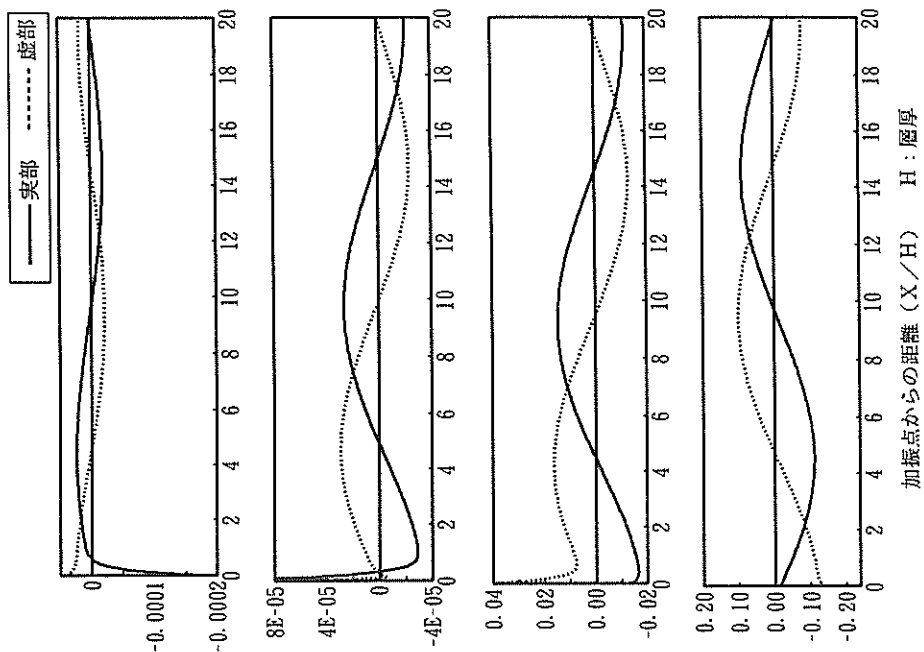
(排水条件 : $k_0 = 10^{-2} \text{m/s}$, $\nu = 0.25$, 減衰定数 = 0.02, $\omega H / V_s = 2$)



水平変位振幅 u_x (mm) 鉛直変位振幅 u_z (mm) 水平変位振幅 w_x (mm) 鉛直変位振幅 w_z (mm)

図-18 地表面の変位振幅の変化

(排水条件: $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02, $\omega H/V_s=2$)



水平変位振幅 u_x (mm) 鉛直変位振幅 u_z (mm) 水平変位振幅 w_x (mm) 鉛直変位振幅 w_z (mm)

図-19 地表面の変位振幅の変化

(排水条件: $k_0=10^{-1}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02, $\omega H/V_s=2$)

(2)地盤の透水性の影響

排水状態と非排水状態との差は、間隙流体の土粒子に対する相対変位を許さないか許すかにある。また、排水状態では、間隙流体の土粒子に対する相対変位を許すことによって、土粒子と間隙流体の間に相互作用力が現れる。この力は流体が土粒子の骨格中を流れるとき生じる粘性抵抗力である。土粒子を主体に考えると、間隙流体に作用する粘性抵抗力の反作用力が作用することになる。この力は透水係数に反比例する力として表されている。すなわち、排水状態で透水係数を限りなく小さくすると、非排水状態に収束していくと考えられる。

まず、ここでも簡単のため剛基盤上に一様な排水条件の一層系地盤がある場合を考える。この場合、固有方程式は、固有値に関する7次式に帰着し、解は $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, $\pm\lambda_3$ および0の合計7個となる。したがって、現象に有効な波数は3つとなる。(±λの対の解のうち $x \rightarrow \infty$ で変位 $\rightarrow 0$ となるような解を選択する。)

図-11~15は、透水係数を 10^{-1} m/s から、 10^{-5} m/s に変化させたときの、 $hH \sim \omega H/V_s$ 関係を示したものである。計算では、間隙流体の体積弾性係数として水の 2.08×10^5 tf/m²を使用した。これらの図と非排水状態の図-8を比較すると、透水係数が小さいほど非排水状態に近

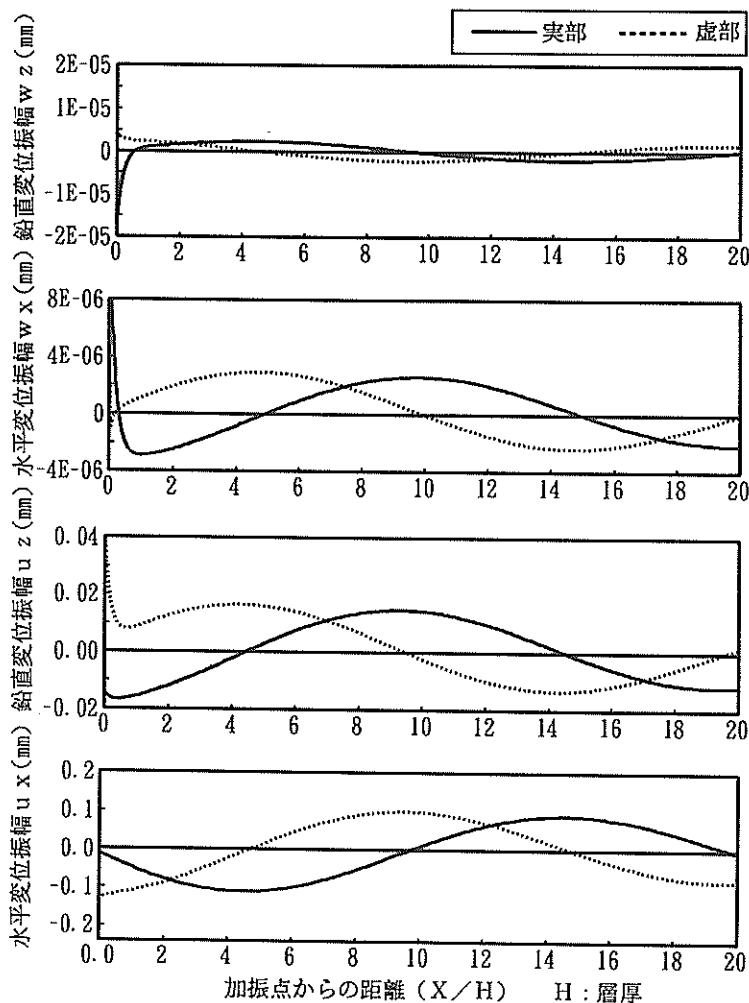


図-20 地表面の変位振幅の変化

(排水条件： $k_0=10^{-5}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02, $\omega H/V_s=2$)

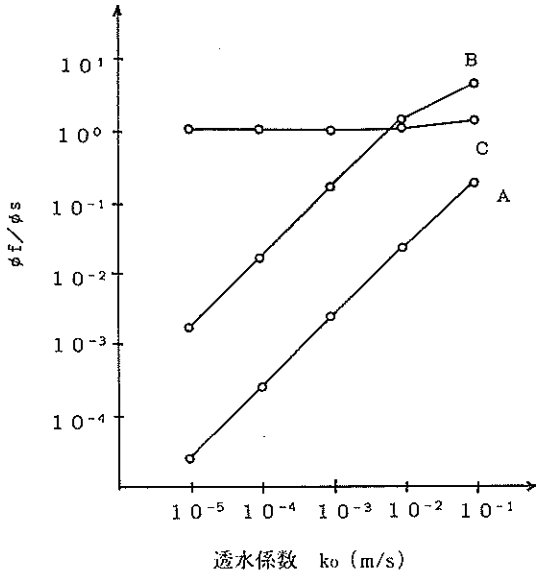


図-21 Solidの固有ベクトルと
Fluidの固有ベクトルの比と k_0 の関係
(排水条件： $\nu = 0.25$, 減衰定数=0.02, $\omega H/V_s = 2$)

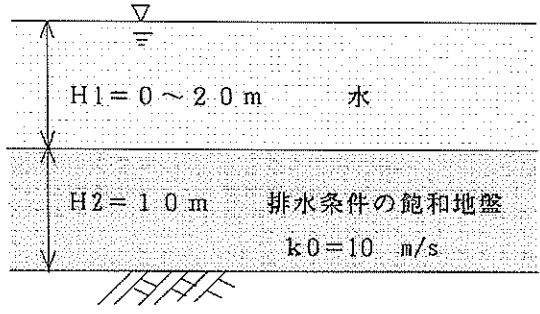


図-22 モデル地盤

づいて行くことがわかる。特に 10^{-3} m/sよりも透水係数が小さい場合には、振動数の非常に低い所を除いて求められた3つの波数のうち2つ(A, B)は非排水状態の波数とほとんど一致している。残りの一つの波数は、振動数が大きくなると、虚数部がすぐに大きくなる性状(すなわち距離減衰の大きくなる)を示す。しかも、その虚数部の大きくなるなりかたは、透水係数の小さいものほど、低振動数領域から顕著となる。以上のような性状は、図-16~20に示す地表面上の変位の変化の様子にもよく現れている。透水係数が 10^{-4} m/sから順々に小さくなって行くと、間隙流体の応答の絶対値が小さくなって行くと同時に、土粒子の応答は非排水状態の応答(図-10)に近づいていく。

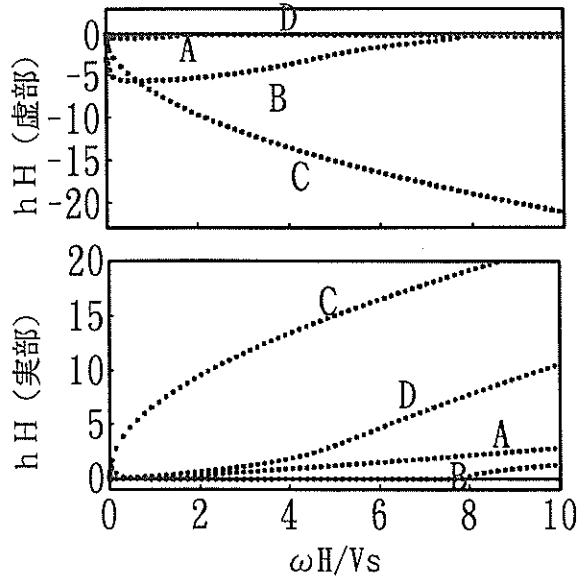
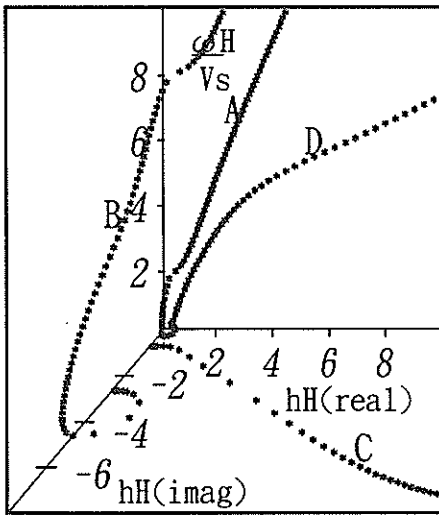


図-23 無次元波数と無次元振動数の関係(排水条件：水深2m, $k_0 = 10^{-3}$ m/s, $\nu = 0.25$, 減衰定数=0.02)

図-21は、一層の地盤の排水条件で得られる3つのモードのそれぞれについて、土粒子の固有ベクトル要素 ϕ_0 と間隙流体の固有ベクトル要素 ϕ_i の比を透水係数ごとに示したものである。3つのモードのうち2つ(図-11~15中のAとBのモードに対応する)は、透水係数

が小さくなるにつれて、 ϕ_i/ϕ_0 も小さくなる。また、もう一つのモードは、透水係数によらず ϕ_i/ϕ_0 はほぼ一定である。このモードは、図-11~15における無次元振動数と対応づけるとCのモードである。

以上をまとめると次のようになる。

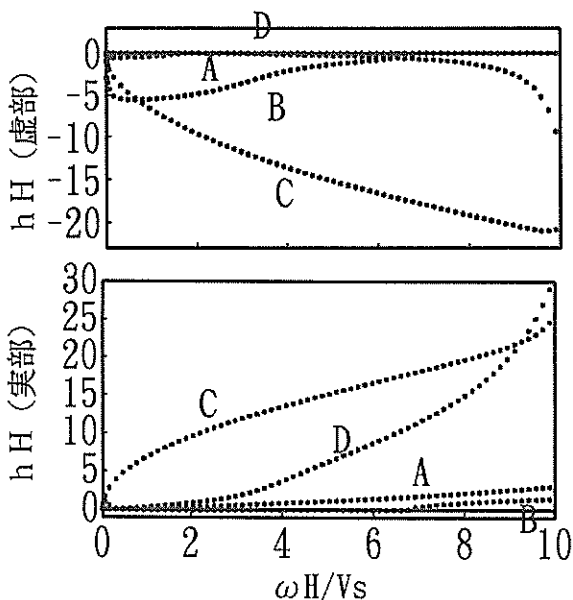
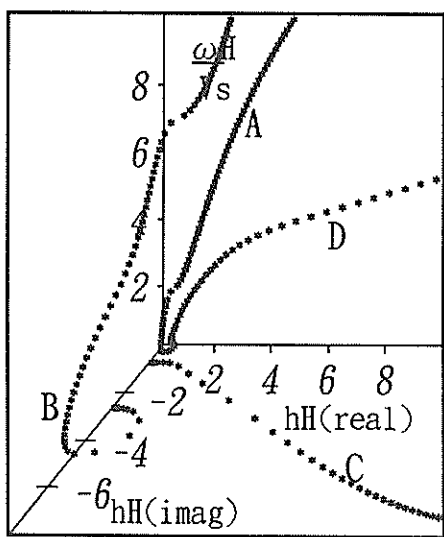


図-24 無次元波数と無次元振動数の関係 (排水条件: 水深5 m, $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

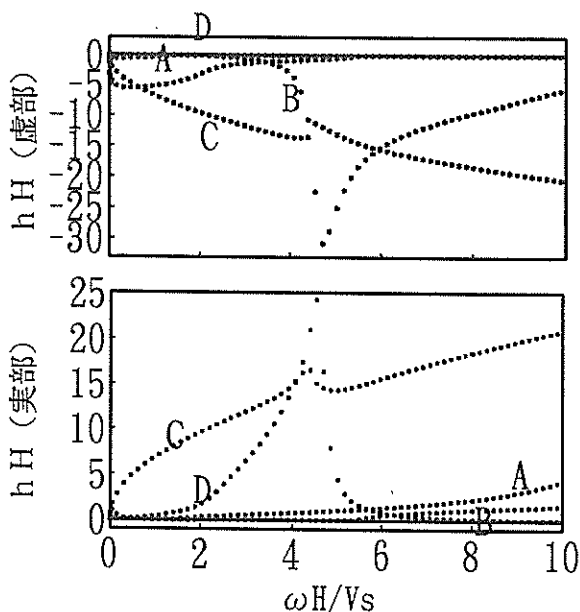
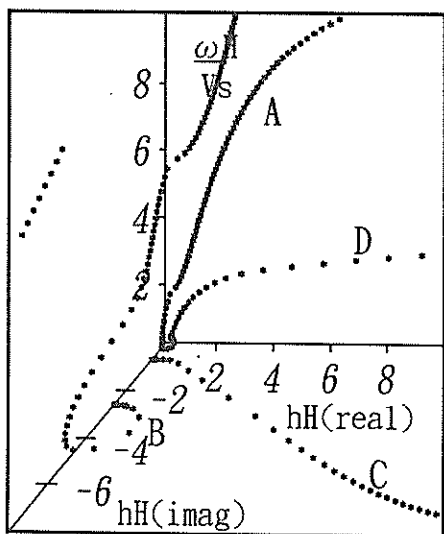


図-25 無次元波数と無次元振動数の関係 (排水条件: 水深10 m, $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

A と B のモードの波数の振動数に対する変化の様子は、透水係数が変化しても大きく変化しない。しかし、 ϕ_1/ϕ_s は、透水係数が小さくなるにつれて小さくなる。したがって、透水係数が小さくなると、間隙流体の土粒子に対する相対変位は小さくなる傾向があり、結果とし

て非排水条件に近くなる。一方、C のモードの ϕ_1/ϕ_s は、透水係数が小さくても変化しない。しかし、C のモードの波数の振動数に対する変化の様子は、透水係数が小さくなると、より低い振動数から、虚数部の絶対値が大きくなる。波数の虚数部の大きさは、距離減衰の

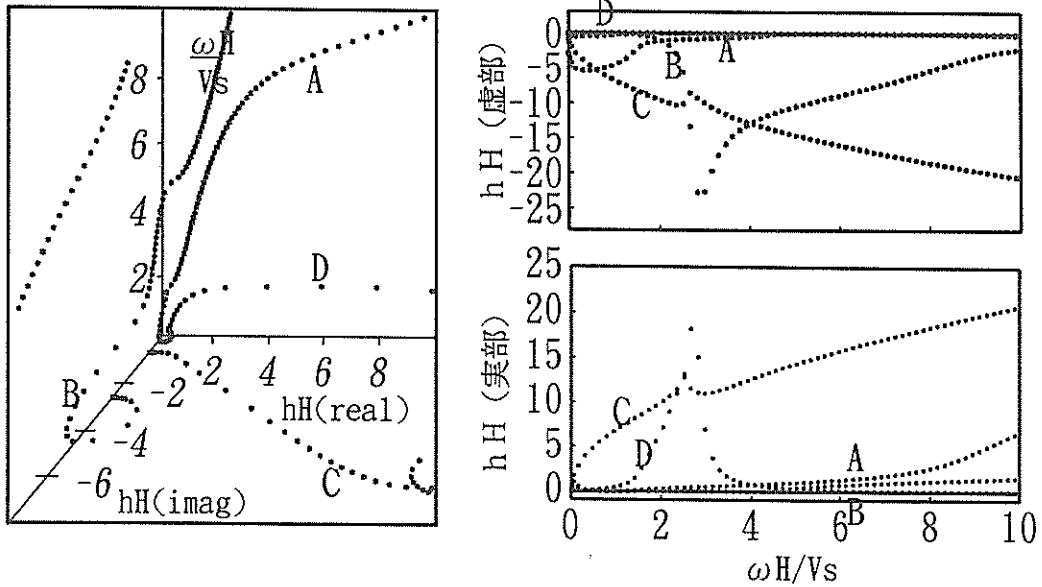


図-26 無次元波数と無次元振動数の関係（排水条件：水深15m, $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02）

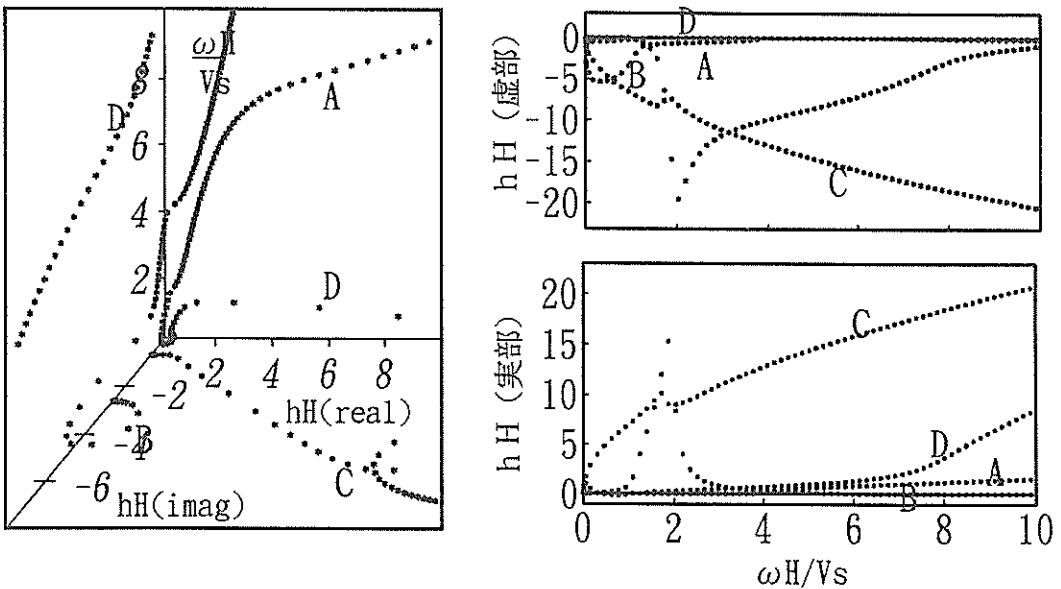
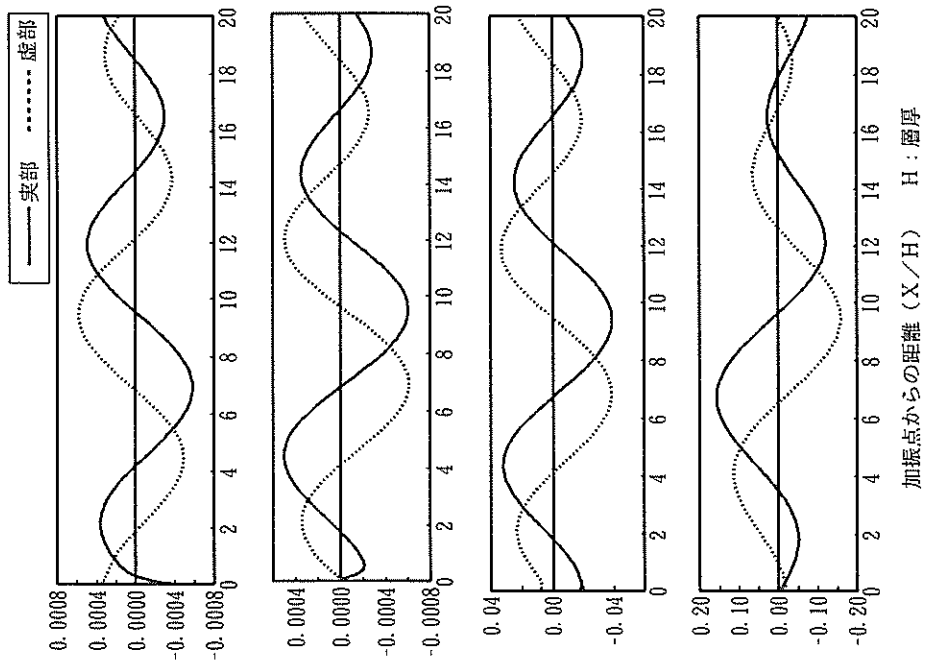


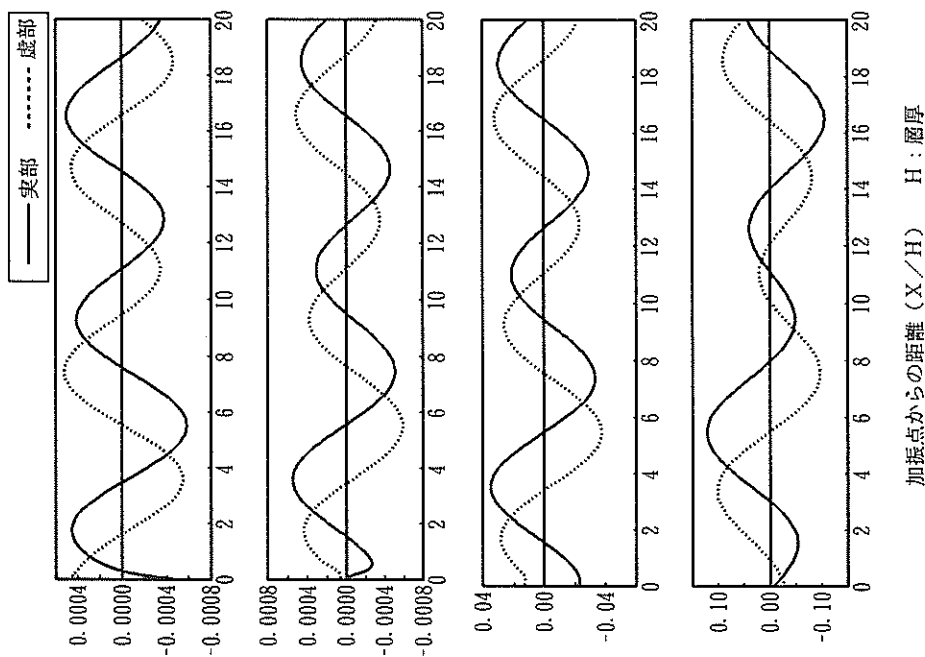
図-27 無次元波数と無次元振動数の関係（排水条件：水深20m, $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02）



水平変位振幅 u_x (mm) 鉛直変位振幅 u_z (mm) 水平変位振幅 w_x (mm) 鉛直変位振幅 w_z (mm)

図一28 海底面の変位振幅の変化

(排水条件：水深 2 m, $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)



水平変位振幅 u_x (mm) 鉛直変位振幅 u_z (mm) 水平変位振幅 w_x (mm) 鉛直変位振幅 w_z (mm)

図一29 海底面の変位振幅の変化

(排水条件：水深 5 m, $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

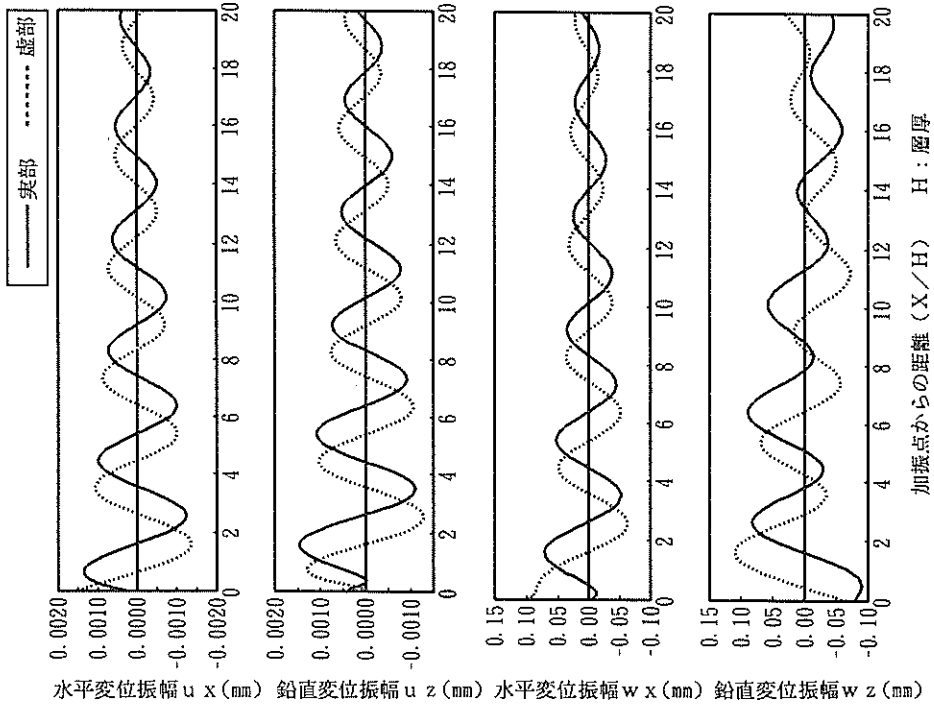


図-30 海底面の変位振幅の変化

(排水条件：水深10m, $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

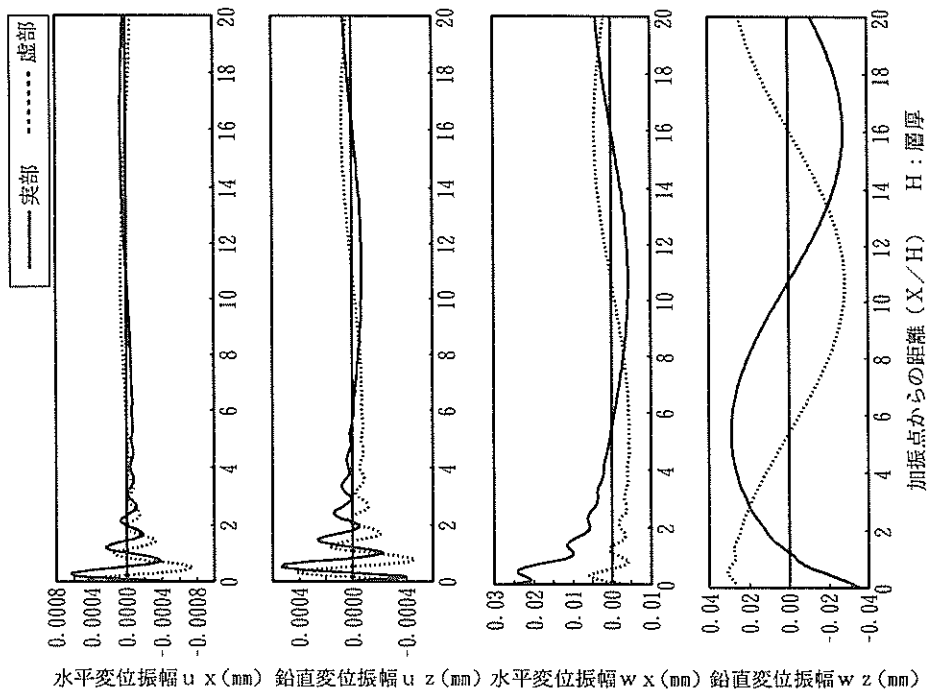


図-31 海底面の変位振幅の変化

(排水条件：水深15m, $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)

大きさを表すから透水係数の小さいものほど距離減衰しやすいといえる。したがって、透水係数が小さくなると、間隙流体の土粒子に対する相対変位はすぐ減衰する傾向があり、結果として非排水条件に近くなる。以上から、すべてのモードで、透水係数が小さくなると、間隙流体の土粒子に対する相対変位が小さくなると言える。

次に、静的状態 ($\omega = 0$) について見てみる。図-11~15に示すように、三つの波数は透水係数に無関係に一定で、 $0, -i, -3i$ となる。後者の2つは乾燥状態での静的な波数に一致する。すなわち、排水条件での静的載荷では水に生じる圧力はなく、乾燥状態と一致する。

(3)水深の影響

ここでは、海底を伝わる波を想定し、図-22のように

剛基盤上に存在する一様な排水条件の地盤の上に水の存在する場合を考え、水深の影響を検討する。

自由度は第一層が水のみ、第二層が水と土のそれぞれ水平、上下の計6自由度である。また、波数の数は計4つである。

図-23~27は、第二層の排水条件の地盤の層厚を一定(10m)にして、第一層の水の部分の厚さを2~20mに変化させたときの波数と無次元振動数の関係を示したものである。なお無次元振動数は $\omega H_2/V_s$ とし第二層の厚さで無次元化した。

まず、上層に水のない状態の結果図-13と水深2mの結果図-23を比較するとB、Cのモードはほぼ同じであるが、Aのモードが二つに分かれていることがわかる。

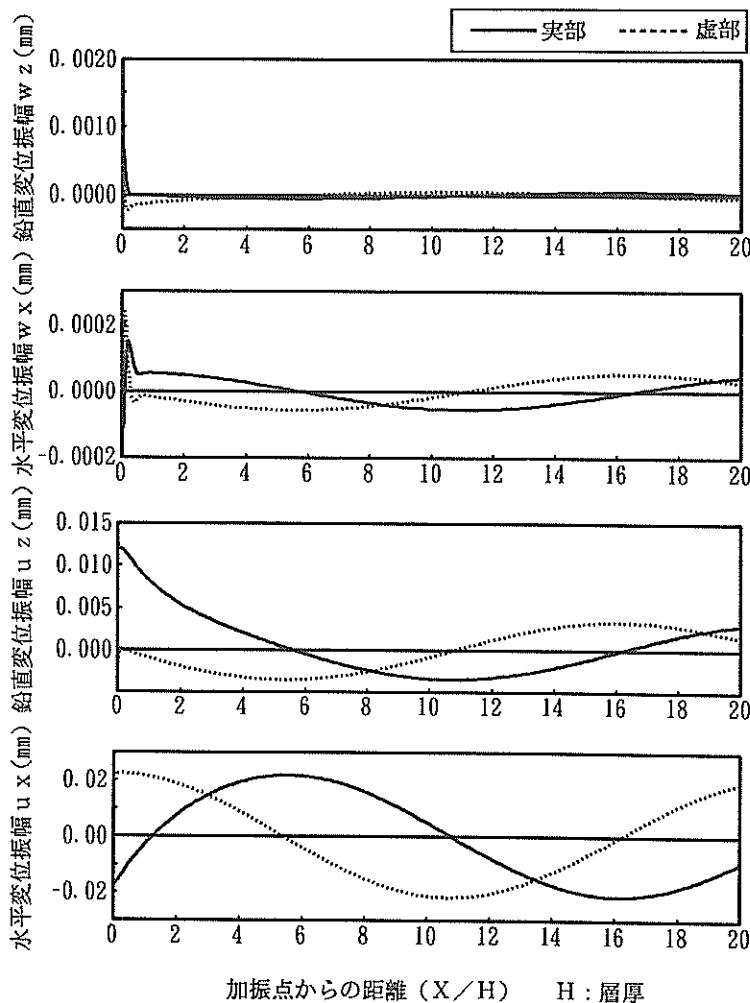
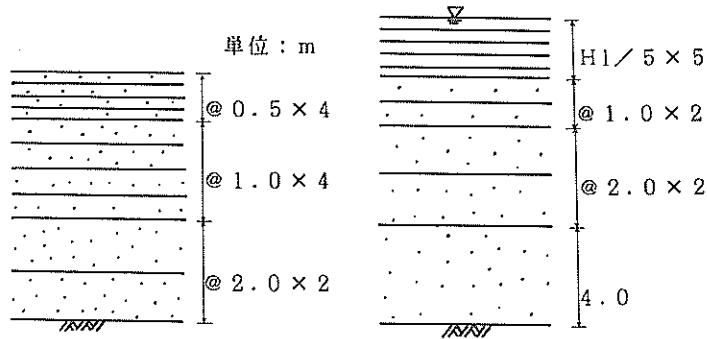


図-32 海底面の変位振幅の変化

(排水条件：水深20m, $k_0=10^{-3}$ m/s, $\nu=0.25$, 減衰定数=0.02)



飽和地盤上に水のある場合

図-33 モデル地盤の層分割

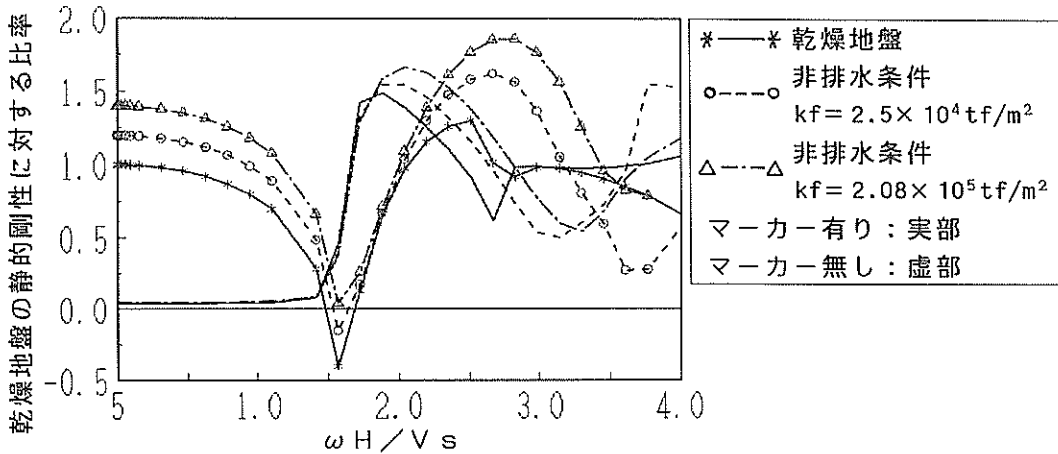


図-34 乾燥地盤と非排水飽和地盤の動的地盤剛性の比較

水のある場合の A、D のモードの波数の虚数部は低い振動数領域で B、C のモードの波数の虚数部より小さな値である。このことは、この振動数領域では A と D のモードの方が距離減衰しにくいことを示す。また、A、D のモードの波数の実数部は、D のモードの方が A のモードより、振動数が高くなるに連れて大きくなる。このことは、A のモードより D のモードの方が波長の短いモードであることを示す。

次に、水深 5 m の場合を見ると、(図-24)、B のモードの波数の虚数部は、低振動数領域で一度大きくなり、振動数が大きくなると、再び小さくなる。一方、D のモードの波数の虚数部は B のモードの波数の虚数部が再び小さくなる付近の振動数から大きくなる。したがって、この付近の振動数領域では、D のモードは B のモードより距離減衰が小さい。この様な傾向は、水深が増すに連れて、低い振動数から始まることがわかる。

図-28~32は、 $\omega H_2/V_s = 2$ の振動数で、第二層上面(海底面)の x 軸に沿った波動の伝播の様子を示したものである。なお、加振点は第二層上面である。水深を徐々に深くしていくと、 H_1/H_2 が 1 付近までは、D のモードが卓越するため、徐々に波長の短い波が現れてくる。しかし、 H_1/H_2 が 1.5 を越すと D のモードの波はすぐ減衰し、換って A、B のモードが現れてくる。

4.3 動的地盤剛性

本項では、半無限地盤の端部に位置する杭の杭頭を単位水平加振し、 $(x, z) = (0, 0)$ の点における土粒子骨格の水平応答を用いて動的地盤剛性を評価する。すなわち、ここでの動的剛性とは、 $1/u_{x1}|_{z=0}$ とした。また、水深の影響を考慮する場合には、海底面で加振し、剛性も海底面で評価した。なお、地盤の層分割は、図-33に示すとおりである。

(1)非排水状態の性状

図-34は、地盤の頂部 ($x=0, z=0$) で加振したときの水平方向の剛性を示したものである。なお、剛性は、乾燥状態における静的な剛性の実部の絶対値で正規化した。図から、間隙流体の体積弾性係数が増加すると剛性も増加することがわかる。これは、間隙流体の体積弾性係数が増加すると（非排水の場合、土粒子骨格変位=間隙流体の絶対変位であるから）、土粒子骨格変位によって間隙流体も体積変化を生じ、結果として全体の剛性が増すからである。

また、剛性の実部が小さくなる谷の振動数に着目すると、第1次の谷の出現する振動数は、ほとんど変化しないが第2次の谷の出現する振動数は、間隙流体の体積弾性係数が増すにつれて高くなる。第1次の谷は、主に地盤のせん断剛性に関するもので、せん断波の共振振動数を意味する。一方、第2の谷は主に体積剛性に関係するもので、P波の共振振動数に対応する。土粒子骨格自身のポアソン比0.25においても、体積剛性のある流体が土粒子の間隙中に飽和している場合には、水平方向と上下方向は連成するため、P波とかS波とか完全に分けるこ

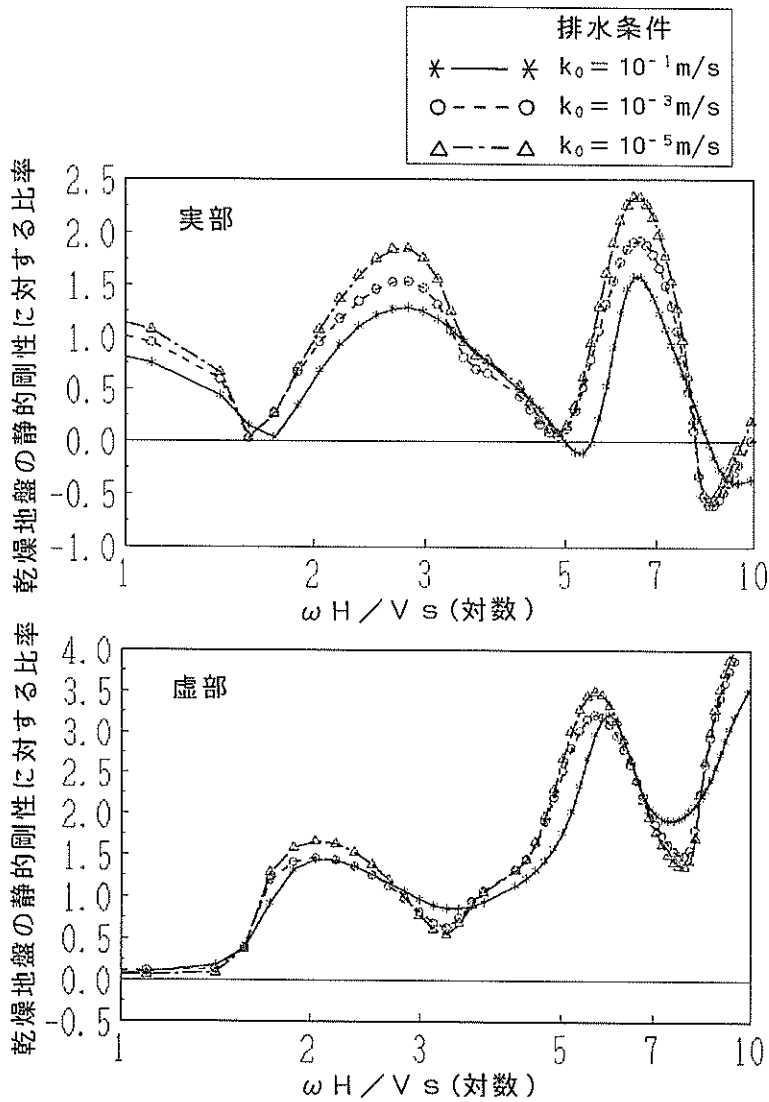


図-35 飽和地盤の透水性が動的な地盤剛性に及ぼす影響

とはできない。しかし、第2の谷の出現振動数が高い方へ移動するのは、主に間隙流体の体積剛性の増加によるためと言える。

(2)透水性の影響

図-35は、透水係数の変化(10^{-1} m/s ~ 10^{-5} m/s)によって、地盤の剛性がどのように変化するかを示したものであ

る。また、図-36は同様な検討を振動数の非常に低い所に対して行ったものである。同図も乾燥状態における静的剛性の実部の絶対値にて正規化してあり、横軸は対数で示した。

まず、図-36から、振動数を限りなく0に(すなわち静的載荷に)近づけて行くと、乾燥状態における剛性に

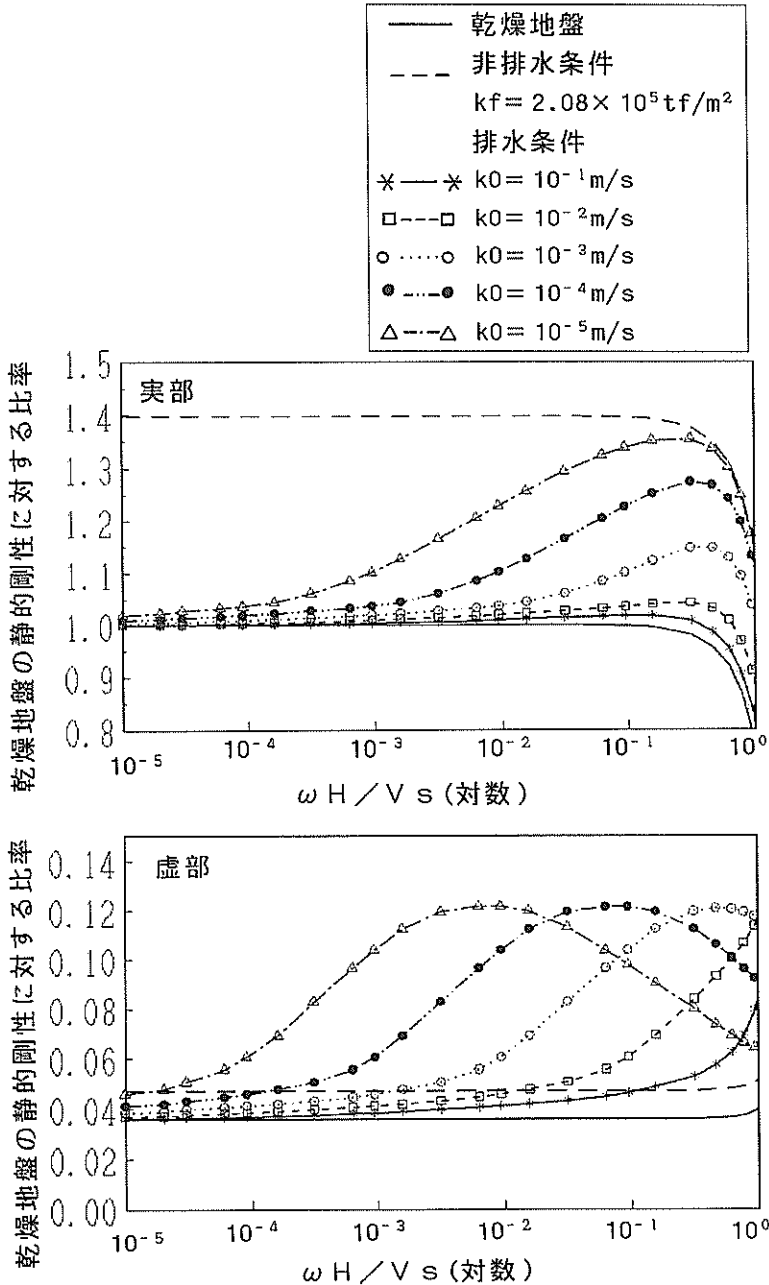


図-36 飽和地盤の透水性が動的地盤剛性に及ぼす影響 (低振動数領域)

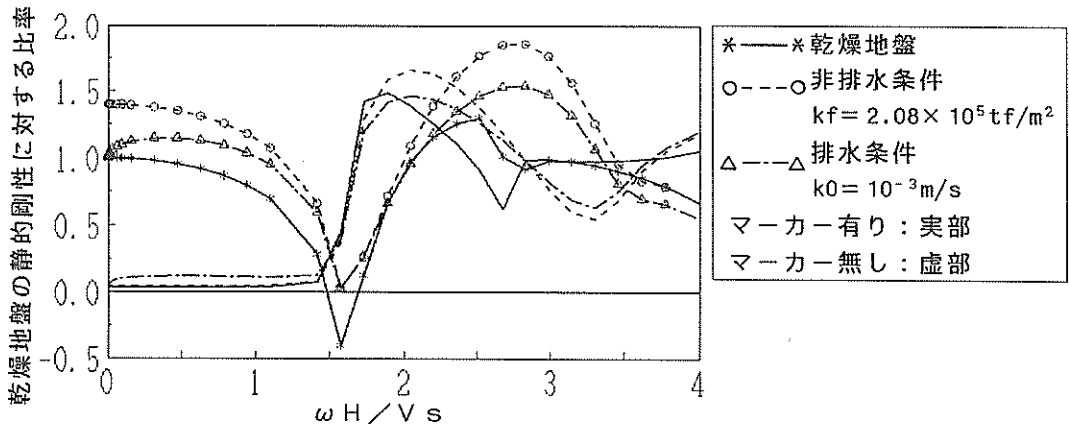


図-37 飽和地盤の排水条件が動的地盤剛性に及ぼす影響

収束して行くことがわかる。また、透水係数が大きいほど低振動数領域の剛性は、より高い振動数まで乾燥地盤の剛性に近くなる。荷重の載荷速度が十分遅い場合には、荷重の載荷速度より間隙水圧の逸散速度の方が速いため、間隙流体の剛性は全体剛性に影響しないと言える。したがって、非排水条件の仮定の是非は、載荷速度と透水係数の相対的關係によって決まると言える。また、剛性の虚部において、排水条件を仮定した方が最大で乾燥状態の約3倍の大きな値を示すことも特徴である。すなわち、間隙流体が土粒子骨格中を動くことによって、付加的な減衰効果をもたらすと言える。

次に、無次元振動数が1~10の図-35を見ると、動的地盤剛性の変化の様子は大きく変化しない。しかし、変化の度合は、透水係数の小さいものほど大きいことがわかる。

実際の地盤の透水係数は、表-3からきれいな砂でも 10^{-3} m/s程度と考えてよい。例えば、 $H=10$ m、 $V_s=200$ m/sとすると、おおむね周期0.3秒以下($\omega H/V_s \geq 1$)の波については、非排水状態を仮定しても大きな誤りはないと考えられる。しかし、地盤の層厚が厚くせん断波速度の小さい場合には、この限りではない。また、透水係数 10^{-4} m/s以下の地盤については、地震による弾性的変形を解析する場合、非排水状態を仮定し、飽和地盤を二相系として取り扱う必要は必ずしもない。一方、透水係数が 10^{-1} m/s程度に大きくなると、間隙流体の土粒子に対する相対変位量が非常に大きくなる。透水係数 10^{-1} m/sの地盤は碎石の様な極端なポーラスな地盤に相当する。このような状況下では、飽和地盤を二相系として取り扱うか、または見かけのポアソン比を解析する振動数に応じて適切に与える必要がある。

図-37は、排水条件の違いによって、動的地盤剛性がどのように変化するかを、総括的に示したものである。排水条件下の動的地盤剛性の実部は、載荷振動数と透水係数の関係によって、非排水条件と乾燥地盤の中間的特性を示す。一方、排水条件下の動的地盤剛性の虚部は、乾燥地盤や非排水条件の地盤のそれより、地盤の一次固有振動数までの振動数で大きな値となる。

(3) 水深の影響

次に、同一の透水係数 $k_0=10^{-3}$ m/sで、層厚10mの地盤上の水深を変化させた場合を検討する。図-38は、それぞれ水深を2m~20mに変化させたときの剛性の変化を示したものである。なお、横軸の振動数の無次元化に用いる層厚は第二層目の地盤の層厚とした。図を見ると、振動数の変化に対する剛性の変化の様子は、ほぼ傾向的に似ている。しかし、第一次の固有振動数は、水深が大きくなるにつれて、低振動数側に移動して行くことがわかる。これは、水深によって、水中を伝わるP波の固有振動数が変化し、それによって動特性が異なるからである。したがって、地盤の上にある水は、間隙流体の運動に影響し、間隙流体の運動は地盤との相互作用力を通じて土粒子骨格の応答に影響することになる。

4.4 変位分布および応力分布

図-39は、 $x=0$ 面における変位振幅の深さ方向分布を示したものである。まず、図-39で乾燥状態と非排水状態を比較すると、非排水状態の変位振幅の方が乾燥状態のそれより小さい。これは、先に考察したように間隙流体の体積弾性係数に起因するものである。しかしながら、変位振幅の深さ方向の分布形には大きな差はない。

次に、透水係数の変化によって変位振幅分布がどのように変化するかを見たのが図-40である。間隙流体の z 方

向の変位は、透水係数が大きいほど大きくなる。これは、透水係数が大きいほど間隙流体の土粒子に対する相対変位量が大きくなるから、妥当な結果である。また、透水係数が $10^{-3}m/s$ 程度に小さくなると、ほぼ非排水状態の変位分布と一致すると言って良い。また、土粒子の変位分布を見ると透水係数が大きいほど応答が大きくなる。これは、同じ載荷重でも透水係数が大きいほど間隙水に蓄積される圧力が逃げやすいため、間隙流体の体積弾性が100%きかないためと云える。

図-41, 42は、 $x = 0$ 面における応力振幅の深さ方向の分布を示したものである。応力は、定常状態において荷重の周期と同じ周期で調和振動する。通常の一次元の純粋せん断のみを考慮した液状化解析とは異なり、全応力の時間的変化が生じている。したがって、液状の判定指標として、有効上載圧と過剰間隙水圧の比は不適當と考えられる。また、本研究の加振条件で生じる間隙水圧は、加振力や地盤の剛性、あるいは加振振動数などによ

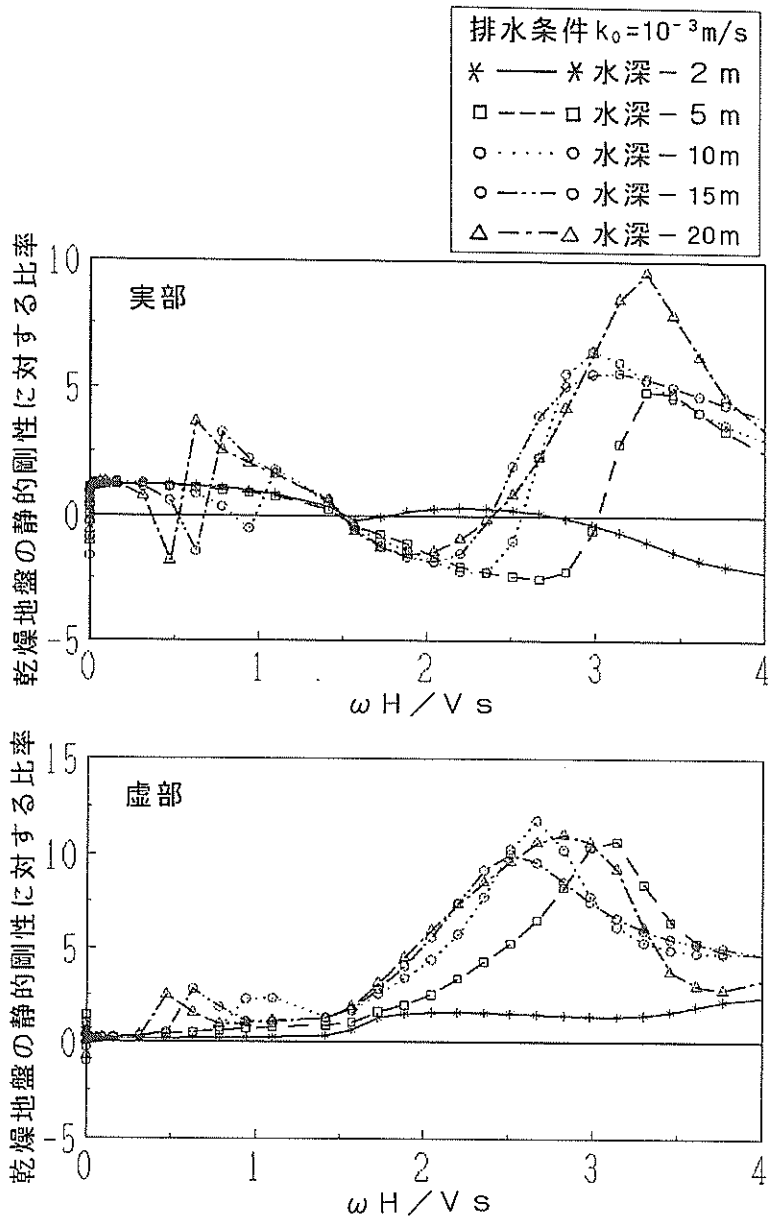


図-38 水深の違いが海底地盤の変位応答に及ぼす影響

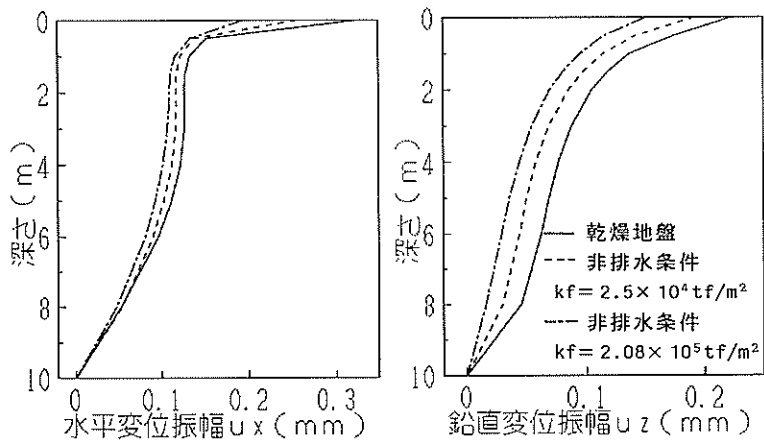


図-39 乾燥地盤と非排水飽和地盤の変位振幅の深さ方向分布 ($\omega H/V_s = 2$)

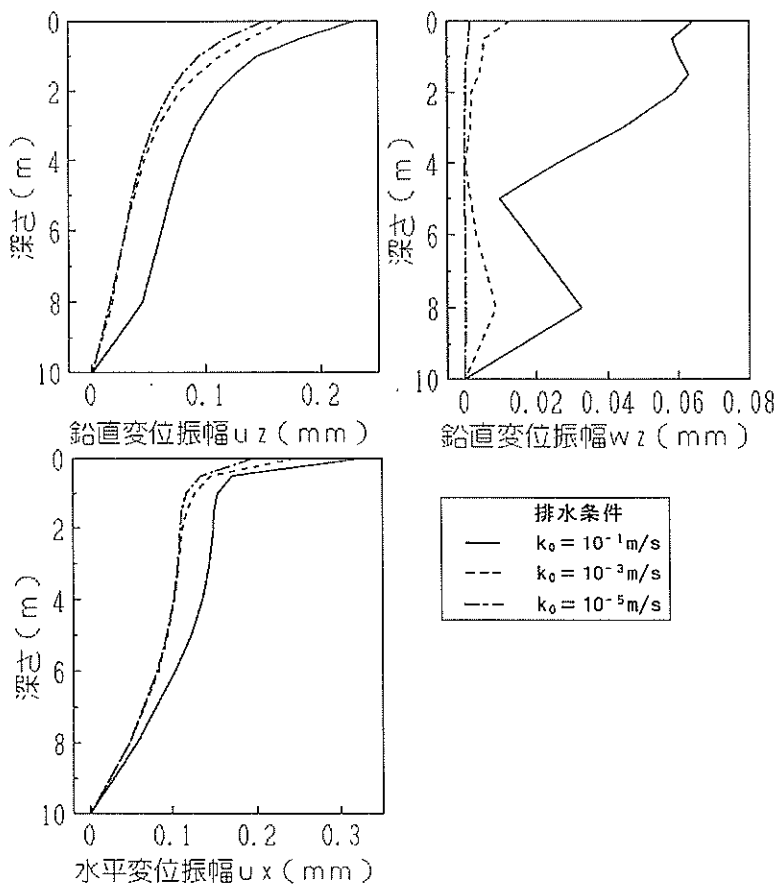


図-40 飽和地盤の透水性と変位振幅の深さ方向分布 ($\omega H/V_s = 2$)

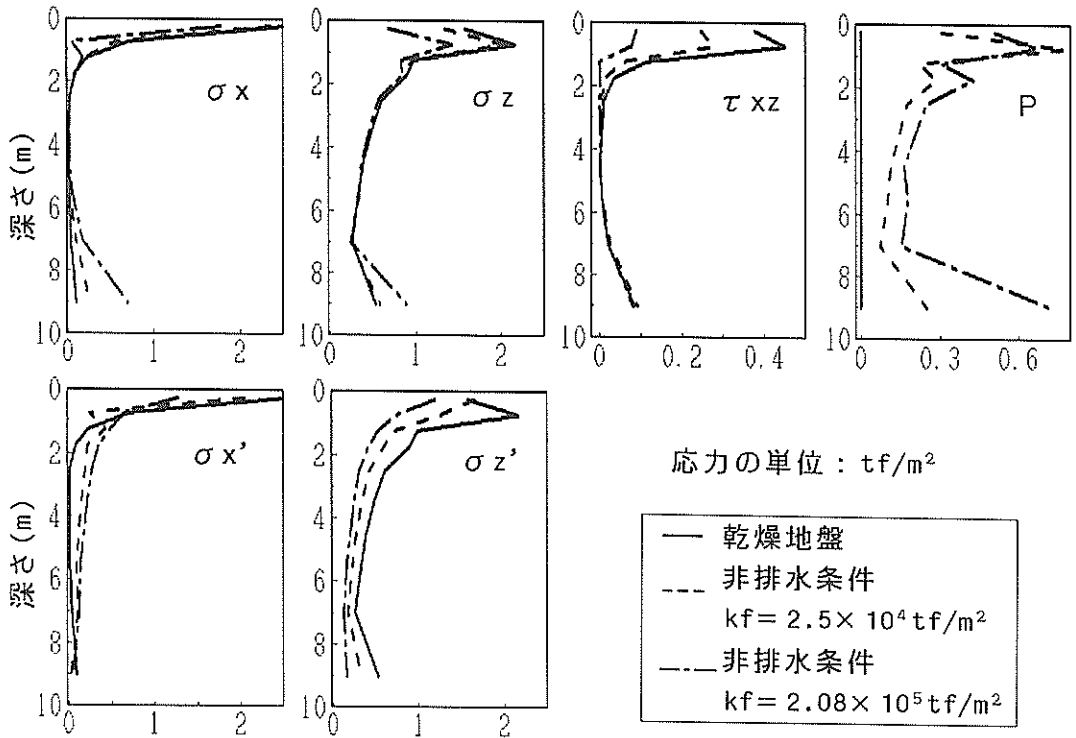


図-41 応力の深さ方向分布 (乾燥地盤と非排水飽和地盤の比較, $\omega H/V_s = 2$)

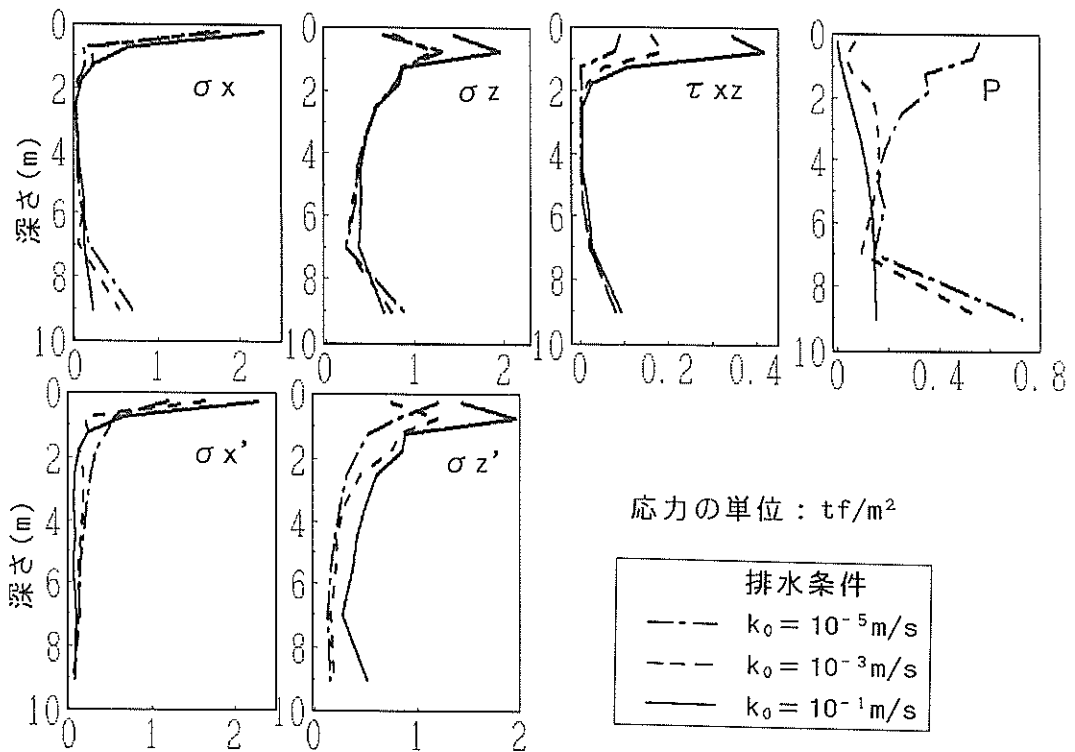


図-42 応力の深さ方向分布 ($k_0 = 10^{-3} \sim 10^{-5} \text{m}/\text{s}$, $\omega H/V_s = 2$)

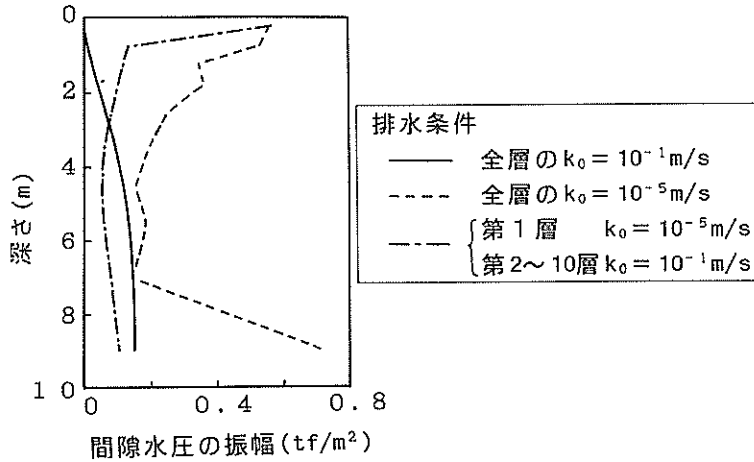


図-43 間隙水圧の深さ方向分布 ($\omega H/V_s = 2$)

て異なると考えられる。そこで、ここでは抗頭加振によって液状化するかしないかは検討しないこととした。なお、各層の応力は、各層の中間点で評価したものである。また、乾燥状態においては、当然のことながら間隙水圧はなく、 $\sigma'_x = \sigma_x$ 、 $\sigma'_z = \sigma_z$ となっている。

図-41は乾燥状態と Uudrain 状態を比較したものである。まず、全応力の分布は、間隙流体の体積弾性係数が大きいほど上層で小さく、下層で大きな値となる。また、せん断応力も、間隙流体の体積弾性係数が大きいほど上層で小さな値となる。地盤に与える載荷重は、間隙流体があっても無くとも同じであるから、全応力で見ればほとんど同じと予想したが、このように変化するのは興味深い。これは間隙流体の存在によって中間主応力と偏差応力の割合が異なったためと考えられる。一方、間隙水圧について見ると、間隙流体の体積弾性係数が大きいほど、大きな値となる。非排水状態では、土粒子の骨格変位と間隙流体の変位は同じであるから、間隙流体の体積弾性が大きいと、間隙流体の受け持つ応力が大きくなり、結果として間隙水圧が大きくなると考えられるので、この結果は妥当な結果と考えられる。また、有効応力を見ると、 σ'_z は間隙流体の体積弾性係数の大きいほど（間隙圧力のおおきいほど）小さくなるのに対して、 σ'_x は中間の深さでこの傾向が逆転する。このような傾向は、 σ'_z 、 σ'_x に位相差があるためである。

図-42は、透水係数の差によって応力がどの様に変化するかを検討したものである。今までの検討によると、透水係数 10^{-3} m/s と 10^{-5} m/s の地盤は $\omega H/V_s = 2$ 程度の振動数においては、ほとんど変位分布が一致していた。この傾向は、 σ'_z 、 σ'_x には当てはまるがせん断応力及び

間隙水圧分布にはあてはまらない。透水係数の差によって間隙水圧分布は上部と下部で異なっている。間隙水圧を検討対象とする場合、 $\omega H/V_s = 2$ 程度の振動数でも透水係数の大きさによって、計算値が大きく異なると言える。また、その間隙水圧の大きさは、透水係数が大きいほど小さい。特に、透水係数が $10^{-1} \text{ m/s} \sim 10^{-3} \text{ m/s}$ の場合、全応力が地表面付近で大きいにも係わらず、地表面付近の間隙水圧は小さな値となる。これは排水によって、間隙水圧が大きく蓄積しないためと考えられる。

図-43は、図-33と同一の層分割で全層の透水係数が 10^{-1} m/s および 10^{-5} m/s の場合と、第一層の透水係数が 10^{-5} m/s で第2層から第10層の透水係数が 10^{-1} m/s の場合の間隙水圧の深さ方向分布を示したものである。地盤全体としての透水性は、最上層にある低い透水係数の層によって決まると考えられる。しかし、間隙水圧の深さ方向の分布は、地盤全体の透水係数が 10^{-5} m/s で一様なものとかなり違う結果となっている。間隙水圧の深さ方向の分布は、地盤の深さ方向の透水性の違いに大きく影響されると考えられる。

5. 結論

本研究では、Biotの式に基づく二相系の波動方程式に、薄層要素法を適用し、飽和地盤の波動伝播特性および動的地盤剛性を検討した。本研究は、飽和地盤を伝播する Rayleigh Wave の特性を検討したことに相当する。本研究の結論を要約すると、以下のとおりである。

- (1) 間隙流体の排水を考慮できる二相系飽和地盤の薄層要素を開発した。定式化は、直交座標系と円筒座標系で行った。

(2) 開発した飽和地盤の薄層要素を用いて、飽和地盤の波動伝播特性および動的地盤剛性を検討し、以下の結論を得た。

①飽和地盤を非排水状態と考えたとき、動的地盤剛性は、間隙流体の体積剛性があるため、乾燥地盤のそれよりも大きい。非排水条件を仮定することは、乾燥地盤のポアソン比を見かけ上大きくすることと等価である。

②飽和地盤に排水を許す場合、荷重の載荷速度が地盤の透水係数よりも十分小さいならば、波動伝播特性や地盤の動的剛性は、乾燥地盤のそれに近くなる。極端な場合、荷重が静的に載荷されるならば、乾燥地盤と飽和地盤の差はない。

③逆に、荷重の載荷速度が地盤の透水係数に比較して大きくなるほど、その挙動は非排水条件に近づく。

④波動伝播特性や地盤の動的剛性は水深の影響を受ける。

6. 今後の課題

(1) 液状化解析について

本研究では、飽和地盤の全体をマクロな連続体とみなし、応力-ひずみ関係は線形と仮定した。したがって、地盤に発生する間隙水圧は、波動が二次元的に伝わることによる土粒子骨格の体積変形に応じて発生し、純粋にせん断変形する場合には発生しないことになる。実際には、あるせん断ひずみレベル以上になると、せん断による体積変化が生じ、間隙水圧の変化をもたらす事はよく知られているとおりである。したがって、本研究で取り上げた間隙水圧の生成、消散の原理は、一次元の地盤のせん断振動で発生する間隙水圧の原理とは異なるものである。実際の強震時の間隙水圧の発生の原因はこの両者に起因するものと考えられる。現在、二次元の非線形の液状化解析コードはこれら両者を考慮できるものである。しかし、その適用に当たっては、物性の評価、境界の処理、計算時間等、困難な問題も多い。

また、最も簡便な数値解析法として、線形の全応力解析を行い、地盤要素に作用している有効拘束圧と地震時に発生したせん断応力から液状化を判定する方法がある。本研究の成果を勘案すると、この全応力解析法と非線形の液状化解析法の中間的な解析法が考えられる、すなわち、FEM 領域も二相系の線形理論で構築し、本研究の境界要素とつなぎ合わせる。純粋なせん断による間隙水圧の上昇分は、各要素に発生したせん断応力（あるいはひずみ）に応じて考慮し、地盤要素の物性を再評価し計算を繰り返す方法である。この方法では、間隙水圧

が各計算段階で大きく蓄積していき液状化に至るような解析は出来ない。しかし、設計の立場から液状化させない地盤を対象とするならば、地盤の排水条件を簡便に考慮でき、計算時間やモデル化が非線形解析に比較して格段に省力化されるため、有効となる可能性がある。

(2) 飽和地盤中の杭の横抵抗について

本研究によると、飽和地盤の地盤剛性は、地盤の透水係数と載荷速度に関係する。理論的には、杭の静的載荷試験をするとき、地盤中に発生する間隙水圧は、逸散してしまうため、飽和地盤であろうと乾燥地盤であろうと剛性に差はない。しかし、実際には、載荷によって地盤中に発生した間隙水圧が逸散するためには、透水係数の小さい地盤ほど時間を要する。したがって、飽和地盤中に施工される杭の横抵抗を検討するとき、注意する必要がある。完全に非排水と考えると、図-37より4割程度地盤剛性を過大評価することになる。

(3) 水の共振現象

水を地盤と同様に波動を伝播する媒体としてとらえると、水中を伝わる疎密波の共振現象が存在することがわかる。また、これによって地盤を伝わる波動も影響を受ける。このことは、ダムや防波堤に作用する動水圧とも関連する問題である。本研究では、水中に伝わる波の減衰を評価しなかったが、この減衰の程度を、対象とする振動数領域で精度よく評価することは重要と考えられる。

(4) 飽和地盤の地震時土圧について

現在、水中に建設される護岸や岸壁背後の地盤の地震時土圧は、二通りの算定方法がある。一つは、全応力法に基づくものであり、他方は有効応力法に基づくものである。どちらの考え方がより合理的であるかは、地震動の周期特性や裏込め地盤の透水性に関係するといっている。通常は、裏込め地盤内の土と水は同一の動きをすると考え（すなわち、非排水条件、全応力法）、見かけの震度をういて土圧を算定し、動水圧を考慮しない。しかし、実際は裏込めは割り石を用いることが多く、かなり透水性が大きいと考えられる。今後の研究課題の一つである。

(1991年3月31日受付)

参考文献

- 1) Biot, M.A. : Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid - Saturated Porous Solid, *Journal of the Acoustic Society of America*, Vol.28, No. 2, 1956, pp. 168~178.
- 2) Biot, M. A. : Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, *Journal of Applied Physics*, Vol.33, 1962, pp. 1482~1498.
- 3) Zienkiewicz, O. C., Chang, C.T. and Bettess, P., : Drained, Undrained, Consolidation and Dynamic Behavior Assumptions in Soils, *Geotechnique*, Vol. 30, No.4, 1980, pp. 385~395.
- 4) Zienkiewicz, O. C. and Shiomi, T. : Dynamic Behaviour of Saturated Porous Media ;The Generalized Biot Formulation and its Numerical Solution., *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.8, No.1,1984, pp. 71~96.
- 5) Simon, B. R., Zienkiewicz, O. C. and Paul, D. K. : An Analytical Solution for the Transient Response of Saturated Porous Elastic Solids, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.8,1984, pp. 381~398.
- 6) Simon, B. R., Wu, J. S. S., Zienkiewicz, O. C. and Paul, D. K. : Evaluation of u-w and u-p Finite Element Methods for the Dynamic Response of Saturated Porous Media Using One-Dimensional Model, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.10, 1986, pp. 461~482.
- 7) 地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集, 土質工学会, 1989年, 1月.
- 8) Prevost, J. H., Ferritto, J. M., and Slyh, R. J. : Evaluation and Validation of the Princeton University Effective Stress Model, *NCEL Technical Report R-919*, 1986.
- 9) Zienkiewicz, O. C., and Bettess, P. : Soil and Other Saturated Media under Transient, Dynamic Conditions ; General Formulation and the Validity of Various Simplifying Assumptions, *Soil Mechanics Transient and Cyclic Loads edited by Pande, G. N. and Zienkiewicz, O. C. and Wiley, J.*, 1980.
- 10) 土質工学ハンドブック : 土質工学会編, 第5章土の圧縮と圧密, 1982年版.
- 11) 石原研而 : 土質動力学の基礎, 鹿島出版会, 1976年.
- 12) Lysmer, J. : Lumped Mass Method for Rayleigh Waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.60, No.1, 1970, pp. 89~104.
- 13) Tajimi, H. : A Contribution to Theoretical Prediction of Dynamic Stiffness of Surface Foundation, *Proc. of the 7th WCEE*, Vol.5,1980, pp. 105~112.
- 14) Waas, G. : Linear Two-dimensional Analysis of Soil Dynamics Problems in Semi-infinite layered Media, *Thesis presented to the Univ. of Calif. at Berkeley*, California, 1972.
- 15) Kausel, E. : Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media, *M. I. T. Research Report R 74-11*, Soils Publication No. 336, Structures Publication No. 384, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1974.
- 16) Tassoulas, J. L.: Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Media, *M. I. T. Research Report R 81-2*, 1981.
- 17) 小堀鐸二, 立川 剛 : 飽和砂質地盤への複合体理論の定式化について, 日本建築学会論文報告集, 第220号, 1974年, pp. 47~53.
- 18) 小堀鐸二, 立川 剛 : 飽和砂質地盤への複合体理論の適用性について, 日本建築学会論文報告集, 第222号, 1974年, pp. 23~30.
- 19) 高谷富也, 北村泰寿 : 半無限多孔質飽和弾性体内部の鉛直点加振力による変位解, 土木学会論文集, 第404号 / I-11, 1989年, pp. 297~303.
- 20) 有限要素法ハンドブック II 応用編, 培風館, p84, 1983年.

付録1 固有方程式の誘導とその解法

ここでは、本文(71)式からの固有方程式の誘導方法とその解法を、直交座標系および円筒座標系について示す。

$$\sum_{j=1}^k \left\{ \iint_r [N_j]^T [H]^{*T} ([K] - i\omega[C] + \omega^2[M]) [H] [N_j] | u |_{j,j+1} dv - \oint_s [N_j]^T [H]^{*T} \sigma_n | ds \right\} = 0 \quad (\text{本文71})$$

ここで、境界s上の積分は、 $z=0$ 、 $z=H_j$ 上について行えばよい。境界上に作用している応力 σ_n と変位を関係づけるマトリックス $[K]_{nz}$ を用いて、(本文71)式の第二項は、

$$\begin{aligned} &= \oint_s [N_j]^T [H]^{*T} [K]_{nz} [H] [N_j] | u |_{j,j+1} ds \\ &= \iint_r \frac{\partial}{\partial z} | [N_j]^T [H]^{*T} [K]_{nz} [H] [N_j] | | u |_{j,j+1} dv \\ &= \iint_r \frac{\partial [N_j]^T}{\partial z} | [H]^{*T} [K]_{nz} [H] [N_j] | | u |_{j,j+1} dv \\ &\quad + \iint_r [N_j]^T [H]^{*T} \frac{\partial [K]_{nz}}{\partial z} [H] [N_j] | u |_{j,j+1} dv \end{aligned} \quad (\text{付1.1})$$

と書けるので、(本文71)式は、

$$\sum_{j=1}^k \left\{ \iint_r | [N_j]^T [H]^{*T} ([K] - i\omega[C] + \omega^2[M]) - \frac{\partial [K]_{nz}}{\partial z} - \frac{\partial [N_j]^T}{\partial z} [H]^{*T} [K]_{nz} [H] [N_j] | | u |_{j,j+1} dv \right\} = 0 \quad (\text{付1.2})$$

となる。また、各マトリックスが、

$$\left. \begin{aligned} [K][H] &= [H][\hat{K}] \\ [C][H] &= [H][\hat{C}] \\ [M][H] &= [H][\hat{M}] \\ [K]_{nz}[H] &= [H][\hat{K}]_{nz} \end{aligned} \right\} \quad (\text{付1.3})$$

と書けるものとすれば、(付1.2)式は、

$$\sum_{j=1}^k \left\{ \iint_r | [N_j]^T [H]^{*T} [H] ([\hat{K}] - i\omega[\hat{C}] + \omega^2[\hat{M}] - \frac{\partial [\hat{K}]_{nz}}{\partial z} - \frac{\partial [N_j]^T}{\partial z} [H]^{*T} [H] [\hat{K}]_{nz} | | u |_{j,j+1} dv \right\} = 0 \quad (\text{付1.4})$$

となる。また、

$$[N_j]^T [H]^{*T} [H] = \begin{bmatrix} [H]^{*T} [H] & [0] \\ [0] & [H]^{*T} [H] \end{bmatrix} [N_j]^T = [HH] [N_j]^T$$

$$\frac{\partial [N_j]^T [H]^{*T} [H]}{\partial z} = \begin{bmatrix} [H]^{*T} [H] & [0] \\ [0] & [H]^{*T} [H] \end{bmatrix} \frac{\partial [N_j]^T}{\partial z} = [HH] \frac{\partial [N_j]^T}{\partial z}$$

$$[HH] = \begin{bmatrix} [H]^{*T} [H] & [0] \\ [0] & [H]^{*T} [H] \end{bmatrix} \quad (\text{付1.5})$$

であるから、第j層について(付1.4)式は

$$\left\{ \int [HH] dx \left| \left(\int_0^{H_j} | [N_j]^T ([\hat{K}] - i\omega[\hat{C}] + \omega^2[\hat{M}] - \frac{\partial [\hat{K}]_{nz}}{\partial z} - \frac{\partial [N_j]^T}{\partial z} [\hat{K}]_{nz} | | u |_{j,j+1} dz \right) \right. \right\} = 0 \quad (\text{付1.6})$$

したがって、z方向に離散化した変位 $| u |_{j,j+1}$ は、次の方程式を満たさなければならない。

$$\sum_{j=1}^k \int_0^{H_j} \left\{ | [N_j]^T ([\hat{K}] - \omega^2[\hat{M}] - \frac{\partial [\hat{K}]_{nz}}{\partial z} - \frac{\partial [N_j]^T}{\partial z} [\hat{K}]_{nz} | | u |_{j,j+1} dz \right\} = 0 \quad (\text{付1.7})$$

(1) 直交座標系の場合

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} \\ K_{wu} & K_{ww} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.8})$$

$$[k_{uu}] = \begin{bmatrix} -h^2(\lambda_n + 2G) + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} & -ih(\lambda_n + G) \frac{\partial}{\partial z} \\ -ih(\lambda_n + G) \frac{\partial}{\partial z} & (\lambda_n + 2G) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - h^2 G \end{bmatrix} \quad (\text{付1.9})$$

$$K_{uw} = K_{wu} = \alpha Q \begin{bmatrix} -h^2 & -ih \frac{\partial}{\partial z} \\ -ih \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.10})$$

$$K_{ww} = Q \begin{bmatrix} -h^2 & -ih \frac{\partial}{\partial z} \\ -ih \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.11})$$

$$|\sigma_n\rangle = [K]_{nz} |u\rangle \quad (\text{付1.12})$$

$$[\bar{K}]_{nz} = \begin{bmatrix} K_{uu_{nz}} & K_{uw_{nz}} \\ K_{wu_{nz}} & K_{ww_{nz}} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.13})$$

$$[K_{uu}]_{nz} = \begin{bmatrix} G \frac{\partial}{\partial z} & -ihG \\ -ih(\lambda_n) & (\lambda_n + 2G) \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.14})$$

$$[K_{uw}]_{nz} = [K_{wu}]_{nz} = \alpha Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -ih & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.15})$$

$$[K_{ww}]_{nz} = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -ih & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.16})$$

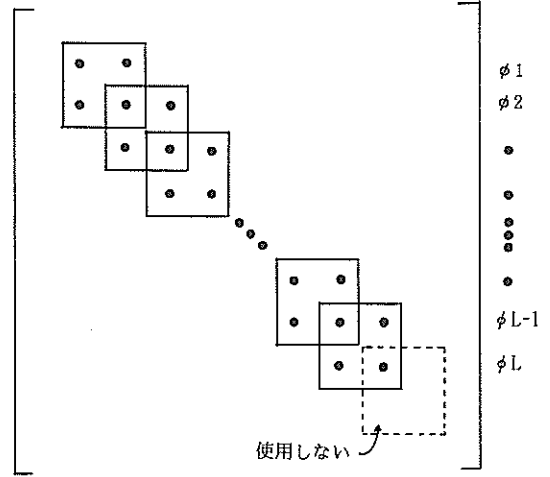
であるから、(付1.7)式に(付1.8~付1.16)を代入し、整理すると、結局、解ベクトル $\phi_{i, i+1}$ に関する次の固有方程式に帰着する。

$$(h^2[A] + ih[B] + [E])|\phi_{i, i+1}\rangle = 0 \quad (\text{付1.17})$$

$$[A]_i = \begin{bmatrix} 2(\lambda_n + 2G), & 0 & 2(\alpha Q), & 0 & (\lambda_n + 2G), & 0 & (\alpha Q), & 0 \\ 0 & 2G, & 0 & 0 & 0 & G, & 0 & 0 \\ H_i/6 & 2(\alpha Q), & 0 & 2Q, & 0 & (\alpha Q), & 0 & Q, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_n + 2G), & 0 & (\alpha Q), & 0 & 2(\lambda_n + 2G), & 0 & 2(\alpha Q), & 0 \\ 0 & G, & 0 & 0 & 0 & 2G, & 0 & 0 \\ (\alpha Q), & 0 & Q, & 0 & 2(\alpha Q), & 0 & 2Q, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.19})$$

$$[B]_i = [F]_i^T - [F]_i \quad (\text{付1.20})$$

$$[F]_i = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_n & 0 & (\alpha Q), & 0 & -\lambda_n & 0 & -(\alpha Q), \\ G, & 0 & 0 & 0 & -G, & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & (\alpha Q), & 0 & Q, & 0 & -(\alpha Q), & 0 & -Q, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n & 0 & (\alpha Q), & 0 & -\lambda_n & 0 & -(\alpha Q), \\ G, & 0 & 0 & 0 & -G, & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha Q), & 0 & Q, & 0 & -(\alpha Q), & 0 & -Q, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.21})$$



付1 全体マトリックスの構造

となる。上式は、各層で重ね合わせられて

$$(h^2[A] + ih[B] + [E])|\phi\rangle = 0 \quad (\text{付1.18})$$

となる。なお、 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[E]$ は、各層のサブマトリックス $[A]_i$ 、 $[B]_i$ 、 $[E]_i$ を重ね合わせて作られ、その構造は付図-1のようになっている。ここで、

$$[E]_r = [Ek]_r + i\omega [Ec]_r - \omega^2 [Em]_r, \quad (\text{付1.22})$$

$$[Ek]_r = \frac{1}{H_r} \begin{bmatrix} G_r & 0 & 0 & 0 & -G_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_n + 2G_r) & 0 & (\alpha Q_r) & 0 & -(\lambda_n + 2G_r) & 0 & -(\alpha Q_r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha Q_r) & 0 & Q_r & 0 & -(\alpha Q_r) & 0 & -Q_r \\ -G_r & 0 & 0 & 0 & G_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda_n + 2G_r) & 0 & -(\alpha Q_r) & 0 & (\lambda_n + 2G_r) & 0 & (\alpha Q_r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha Q_r) & 0 & -Q_r & 0 & (\alpha Q_r) & 0 & Q_r \end{bmatrix} \quad (\text{付1.23})$$

$$[Ec]_r = \frac{H_r}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & k_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & k_r^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 2k_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 2k_r^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.24})$$

$$[Em]_r = \frac{H_r}{6} \begin{bmatrix} 2\rho_r & 0 & 2\rho_{\theta r} & 0 & \rho_r & 0 & \rho_{\theta r} & 0 \\ 0 & 2\rho_r & 0 & 2\rho_{\theta r} & 0 & \rho_r & 0 & \rho_{\theta r} \\ 2\rho_{\theta r} & 0 & 2(\rho_r/n)_r & 0 & \rho_{\theta r} & 0 & (\rho_r/n)_r & 0 \\ 0 & 2\rho_{\theta r} & 0 & 2(\rho_r/n)_r & 0 & \rho_{\theta r} & 0 & (\rho_r/n)_r \\ \rho_r & 0 & \rho_{\theta r} & 0 & 2\rho_r & 0 & 2\rho_{\theta r} & 0 \\ 0 & \rho_r & 0 & \rho_{\theta r} & 0 & 2\rho_r & 0 & 2\rho_{\theta r} \\ \rho_{\theta r} & 0 & (\rho_r/n)_r & 0 & 2\rho_{\theta r} & 0 & 2(\rho_r/n)_r & 0 \\ 0 & \rho_{\theta r} & 0 & (\rho_r/n)_r & 0 & 2\rho_{\theta r} & 0 & 2(\rho_r/n)_r \end{bmatrix} \quad (\text{付1.25})$$

$2(\rho_r/n)_r$

$$|\phi\rangle_r^T = (\phi_{ux_r}, \phi_{uz_r}, \phi_{wx_r}, \phi_{wz_r}, \phi_{ux_{r+1}}, \phi_{uz_{r+1}}, \phi_{wx_{r+1}}, \phi_{wz_{r+1}}) \quad (\text{付1.26})$$

次に、固有値の解法について述べる。まず、マトリックス [A], [B], [E] を固有ベクトル $|\phi\rangle = (\phi_{ux_1} \cdots \phi_{ux_L}, \phi_{uz_1} \cdots \phi_{uz_L}, \phi_{wx_1} \cdots \phi_{wx_L}, \phi_{wz_1} \cdots \phi_{wz_L})$ に対応するように行と列を並べかえると、マトリックス [A] の ϕ_{wz} に対応する行と列はすべて 0 になることに気づく。固有方程式をサブマトリックスを用いて表わすと

$$\left(h^2 \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + ih \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{付1.27})$$

である。ここで、

$$\phi_1^T = (\phi_{ux_1} \cdots \phi_{ux_L}, \phi_{uz_1} \cdots \phi_{uz_L}, \phi_{wx_1} \cdots \phi_{wx_L})$$

$\phi_2^T = (\phi_{wz_1} \dots \phi_{wz_s})$ である。固有方程式は書き直されて、

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & A_{11} \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ A_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_1(-ih) \end{Bmatrix} + ih \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_1(-ih) \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{付1.28})$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & A_{11} \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ A_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_1(-ih) \end{Bmatrix} = -\frac{1}{ih} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_1(-ih) \end{Bmatrix} \quad (\text{付1.29})$$

したがって、固有値を求める行列は、

$$\begin{bmatrix} [E]^{-1}[B] & [E]^{-1} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{付1.30})$$

であり、固有値は i/h となる。ただし、行列の大きさは、全自由度の2倍から、Fluidのz方向の自由度を減じたものになる。なお、求められる固有値は、Solidの自由度を M_s 、Fluidのx方向の(r方向)自由度を M_{wx} 、Fluidのz方向の自由度を M_{wz} とすれば、 $(M_s + M_{wx})$ 個の共役の組と M_{wz} 個の0の解となる。

求められた2s個の固有値のうち、 $x \rightarrow \infty$ で0となる解を選択し(具体的には、虚数部の符号が負になるもの)、半分のs個とする。この固有値に対応するs個の固有ベクトルを用いて各層上面の変位は、

$$\{u\} = \{\phi\} a \exp(-ihx) \quad (\text{本文77})$$

$$\begin{Bmatrix} u_s \\ u_s \\ w_s \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \dots \phi_{1s} \\ \phi_{21} \dots \phi_{2s} \\ \phi_{31} \dots \phi_{3s} \\ \phi_{41} \dots \phi_{4s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \exp(-ihx) \\ \cdot \\ \cdot \\ a_s \exp(-ihx) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_m \\ \dots \\ \phi_{ms} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \exp(-ihx) \\ \cdot \\ \cdot \\ a_s \exp(-ihx) \end{Bmatrix} \quad (\text{付1.31})$$

と書ける。ここで、 $u_s \sim w_s$ 、 $\phi_{11} \sim \phi_{4s}$ はM個の列ベクトル、aは重み係数である。 $[\phi_m]$ は、 $s \times s$ の正方行列である。

(2)円筒座標系3次元の場合

直交座標系の場合と同様な取り扱いにより、固有方程式が導かれる。ここで、直交座標系の場合と同様にして、 $[\hat{K}]$ 、 $[\hat{K}]_{,z}$ を(付1.8)、(付1.13)のように表せば、

円筒座標系の場合、

$$[K_{uu}] = \begin{bmatrix} -h^2(\lambda_u + 2G) + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} & h(\lambda_u + G) \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ -h(\lambda_u + G) + G \frac{\partial}{\partial z} & (\lambda_u + 2G) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - h^2 G & 0 \\ 0 & 0 & G \frac{\partial^2}{\partial z^2} - h^2 G \end{bmatrix} \quad (\text{付1.32})$$

$$[K_{uw}] = [K_{wu}] = \alpha Q \begin{bmatrix} -h^2 & h \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ -h \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.33})$$

$$[K_{ww}] = Q \begin{bmatrix} -h^2 & h \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ -h \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.34})$$

$$[K_{uu}]_{,z} = \begin{bmatrix} G \frac{\partial}{\partial z} & hG & 0 \\ -h\lambda_u & (\lambda_u + 2G) \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & G \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.35})$$

$$[K_{uw}]_{,z} = [K_{wu}]_{,z} = \alpha Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -h & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.36})$$

$$[K_{ww}]_{,z} = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -h & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.37})$$

であるから、(付1.7)式に(付1.32~1.37)を代入し積分すると、直交座標系の場合と同様に解ベクトル $\{\phi\}$ に関する固有方程式に帰着する。ただし、rz方向と θ 方向の固有方程式は非連成であるので、計算上は別々に解くことになる。まず、rz方向の固有方程式は、直交座

標系の場合と同じマトリックス[A], [E]を用いて,

$$(h^2[A] + h[B_r] + [E])|\phi_n\rangle = 0 \quad (\text{付1.38})$$

となる。ここで,

$$[B_r]_r = [F_r]_r + [F_r]_r^T \quad (\text{付1.39})$$

$$[F_r]_r = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_n & 0 & \alpha Q & 0 & -\lambda_n & 0 & -\alpha Q \\ -G & 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & \alpha Q & 0 & Q & 0 & -\alpha Q & 0 & -Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n & 0 & \alpha Q & 0 & -\lambda_n & 0 & -\alpha Q \\ -G & 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha Q & 0 & Q & 0 & -\alpha Q & 0 & -Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.40})$$

である。rz 方向の固有方程式は、直交座標系の場合と全く同様にして解くことが出来る。rz 方向の固有方程式を解くマトリックスは,

$$\begin{bmatrix} [E]^{-1}[B_{rz}] & [E]^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \\ -[I & 0] & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{付1.41})$$

であり、固有値は $-1/h$ となる。なお、rz 方向の固有値の数も、直交座標系の場合と同じく ($s = M_r + M_{rz}$) 個の共役の組と M_{rz} 個の 0 の解となる。

次に、 θ 方向の固有方程式は,

$$(h^2[A^\theta] + [E^\theta])|\phi\rangle = 0 \quad (\text{付1.42})$$

となる。ここに,

$$[A^\theta]_r = \begin{bmatrix} 2G_r & 0 & G_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_r/6 & G_r & 0 & 2G_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.43})$$

$$[E^\theta]_r = [Ek^\theta]_r + i\omega [Ec^\theta]_r - \omega^2 [Em^\theta]_r \quad \dots \quad (\text{付1.44})$$

$$[Ek^\theta]_r = \begin{bmatrix} G_r & 0 & -G_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/H_r & -G_r & 0 & G_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.45})$$

$$[Ec^\theta]_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_r^{-1} & 0 & k_r^{-1} \\ H_r/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r^{-1} & 0 & 2k_r^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.46})$$

$$[Em^\theta]_r = \begin{bmatrix} 2\rho_r & 2\rho_\theta & \rho_r & \rho_\theta \\ 2\rho_\theta & 2(\rho_r/h) & \rho_\theta & (\rho_r/h) \\ H_r/6 & \rho_r & \rho_\theta & 2\rho_r & 2\rho_\theta \\ \rho_\theta & (\rho_r/h) & 2\rho_\theta & 2(\rho_r/h) \end{bmatrix} \quad (\text{付1.47})$$

となる。 θ 方向の固有方程式をサブマトリックスを用いて書くと,

$$\left(h^2 \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E^{\theta 11} & E^{\theta 12} \\ E^{\theta 21} & E^{\theta 22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \phi_{\theta 1} \\ \phi_{\theta 2} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{付1.48})$$

ここで,

$$|\phi_{\theta 1}\rangle^T = (\phi_{\theta 11} \dots \phi_{\theta n1})$$

$$|\phi_{\theta 2}\rangle^T = (\phi_{\theta 12} \dots \phi_{\theta n2})$$

である。第 2 行より、 $|\phi_{\theta 2}\rangle$ について解くと

$$|\phi_{\theta 2}\rangle = -[E^{\theta 22}]^{-1}[E^{\theta 21}]|\phi_{\theta 1}\rangle \quad (\text{付1.49})$$

となる。上式を第 1 行に代入すると,

$$[h^2[A^\theta] + ([E^{\theta 11}] - [E^{\theta 12}][E^{\theta 22}]^{-1}[E^{\theta 21}])]|\phi_{\theta 1}\rangle = 0 \quad (\text{付1.50})$$

となる。

$$[E^\theta] = [E^{\theta 11}] - [E^{\theta 12}][E^{\theta 22}]^{-1}[E^{\theta 21}] \quad (\text{付1.51})$$

とおけば,

$$\begin{bmatrix} 0 & A^\theta \\ A^\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\theta 1} \\ \phi_{\theta 1}/h \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} E^\theta & 0 \\ 0 & A^\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\theta 1} \\ \phi_{\theta 1}/h \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{付1.52})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & E^{n-1}A^n \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{n1} \\ \phi_{n1h} \end{Bmatrix} = (-1/h) \begin{Bmatrix} \phi_{n1} \\ \phi_{n1h} \end{Bmatrix} \quad (\text{付1.53})$$

となる。したがって、固有値を求める行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & E^{n-1}A^n \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付1.54})$$

であり、固有値は、 $\lambda = -1/h$ となる。なお、非排水条件のとき、

$$(h^2[A^n] + [E^{n1}])|\phi\rangle = 0 \quad (\text{付1.55})$$

であるから、(1.81)式において $E=E_{11}$ として解けばよい。なお、 θ 方向で求められる固有値は、($s2=M_{\infty}$ 個の共役の組となる。また、 rz 方向、 θ 方向とも固有値の選択方法は、 $r \rightarrow \infty$ で変位 $\rightarrow 0$ となる解を選択し(具体的には、固有値の虚数部の符号が負のものを選択する。)

固有方程式を解いて、固有ベクトルが求められると固有ベクトルから成る固有マトリックス $[\phi]$ が定義される。

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{ur1} \cdots \phi_{ur_s} & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{uz1} \cdots \phi_{uz_s} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \phi_{\theta 1} \cdots \phi_{\theta_{s2}} \\ \phi_{wr1} \cdots \phi_{wr_s} & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{wz1} \cdots \phi_{wz_s} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \phi_{w\theta 1} \cdots \phi_{w\theta_{s2}} \end{bmatrix} \quad (\text{付1.56})$$

次に、第 j 層上面の s 次のモードによる変位を考えると、

$$[H\phi] = \begin{bmatrix} H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{u\eta_{j1}} \cdots H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \\ h_1 H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{uz_{j1}} \cdots h_s H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \\ i \frac{m}{r} H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{u\eta_{j1}} \cdots i \frac{m}{r} H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \\ H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{w\eta_{j1}} \cdots H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \\ h_1 H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{wz_{j1}} \cdots h_s H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \\ i \frac{m}{r} H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{w\eta_{j1}} \cdots i \frac{m}{r} H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{m}{r} H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{u\eta_{j1}} \cdots \frac{m}{r} H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \\ 0 \cdots 0 \\ i H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{u\eta_{j1}} \cdots i H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \\ \frac{m}{r} H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{w\eta_{j1}} \cdots \frac{m}{r} H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \\ 0 \cdots 0 \\ i H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{w\eta_{j1}} \cdots i H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s} \end{bmatrix} \quad e^{im\theta} \quad (\text{付1.62})$$

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \end{Bmatrix}_s = a_s [H][N_j] \begin{Bmatrix} \phi_{j1} \\ \phi_{j+1} \end{Bmatrix}_s \quad (\text{付1.57})$$

ここで、

$$\{u\}^T = (u, u, u)$$

$$\{w\}^T = (w, w, w)$$

$$\{\phi\}^T = (\phi_{u\eta}, \phi_{uz}, \phi_{u\theta}, \phi_{w\eta}, \phi_{wz}, \phi_{w\theta})$$

である。ここで、 z 方向の座標は、第 j 層上面を支点とする部分座標とした。 $N_{\theta}(z_1=0)=1$, $N_{\theta}(z_2=0)=0$ より

$$\{u\}_s = a_s [H] \{\phi_{j1}\}_s$$

$$= a_s \cdot \exp(im\theta) \times$$

$$H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{u\eta_{j1}} + (m/r) H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s}$$

$$h_1 H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{uz_{j1}}$$

$$i(m/r) H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{u\eta_{j1}} + i H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s}$$

$$H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{w\eta_{j1}} + (m/r) H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s}$$

$$h_s H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{wz_{j1}}$$

$$i(m/r) H_m^{2s}(h_{1r})\phi_{w\eta_{j1}} + i H_m^{2s}(h_{s,r})\phi_{j,s}$$

(付1.58)

となる。 $s=1$ 次から全モードを重ね合わせると、

$$\{u\} = [H\phi] \{a\} \quad (\text{付1.59})$$

同様に第 j 層から第 L 層までの変位も同様に書いて、

$$\{u\} = [H\phi] \{a\} \quad (\text{付1.60})$$

となる。ここで、

$$\{a\}^T = \{a_1 \cdots a_s, a_{11} \cdots a_{s2}\} \quad (\text{付1.61})$$

付録2 薄層要素地盤の剛性マトリックスの誘導

(1)直交座標系の場合

まず、求められた固有ベクトルを用いて応力を表す。第j層の第s次のモードによる応力は、本文(51)式の|u|ベクトルに第s次の固有ベクトルを代入して、

$$|\sigma_j|_s = \begin{bmatrix} (D + \alpha^2 Q |m| |m|^T) [L] & \alpha Q |m| \nabla^T \\ \alpha Q \nabla^T & Q \nabla^T \end{bmatrix} \times [N_j] \phi_{j,s} + i a \exp(-ihx) \quad (\text{付2.1})$$

と表される。ここで、応力ベクトルを並びかえて、

$$|\sigma|^T = (\sigma_x, \sigma_y, \pi, \sigma_z) \quad (\text{付2.2})$$

と書けば、(付2.1)は、

$$|\sigma| = (-ih_s [T_1] + [T_2] \frac{\partial}{\partial z}) [N] |\phi_s| |m| + i a \exp(-ihx) \quad (\text{付2.3})$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} (\lambda_u + 2G) & 0 & (\alpha Q) & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 \\ (\alpha Q) & 0 & Q & 0 \\ \lambda_y & 0 & (\alpha Q) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付2.4})$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0 & (\lambda + \alpha Q) & 0 & (\alpha Q) \\ G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha Q) & 0 & Q \\ 0 & (\lambda_u + 2G) & 0 & (\alpha Q) \end{bmatrix} \quad (\text{付2.5})$$

と書ける。また、第1次から第s次までのモードを重ね合わせると、

$$|\sigma_j| = (-i [T_1] [N_j] [\phi]_{j,s+1} [h] + [T_2] \frac{\partial [N_j]}{\partial z} [\phi]_{j,s+1}) a \exp(-ihx) \quad (\text{付2.6})$$

$$[h] = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_s \end{bmatrix}$$

となる。また、応力を各層の中間点で評価するものとするれば、

$$N_u |_{z=h_j} z = N_u |_{z=h_j} z = 1/2 \quad (\text{付2.7})$$

$$\frac{\partial N_u}{\partial z} |_{z=h_j} z = -1/H_j \quad (\text{付2.8})$$

$$\frac{\partial N_u}{\partial z} |_{z=h_j} z = +1/H_j \quad (\text{付2.9})$$

あるから、

$$|\sigma_j|_{z=h_j} z = -i/2 ([T_1 \phi_j] + [T_1 \phi_{j+1}]) [h] + 1/H_j (-[T_2 \phi_j] + [T_2 \phi_{j+1}]) |a \exp(-ihx)| \quad (\text{付2.10})$$

$$[T_1 \phi_j] = [T_1] \begin{bmatrix} \phi_{u1,j}, \dots, \phi_{ux,j} \\ \phi_{u2,j}, \dots, \phi_{uz,j} \\ \phi_{wx,j}, \dots, \phi_{wx,j} \\ \phi_{wz,j}, \dots, \phi_{wz,j} \end{bmatrix} \quad (\text{付2.11})$$

である。

次に、x=0面における応力と節点力の釣合を考え、節点力と節点変位の関係を導く。したがって、ここではx=0面に作用している応力|σ_{x=0}|について考えればよいから、第j層、第s次のモードに対する節点力は、応力を(付2.2)の順に書けば、

$$|P_s|_{j,s+1} = -a \int_0^{H_j} [N_j]^T |\sigma_{x=0}| dz \quad (\text{付2.12})$$

となる。節点力ベクトルの要素の最後に0を加えて、(付2.3)式において[T₁]、[T₂]の第4行の要素をすべて0とすれば、

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 0 \end{bmatrix}_{j,s+1} = a (ih_s [A_j] + [F_j]) |\phi_s|_{j,s+1} \quad (\text{付2.13})$$

ここで、[A_j]、[F_j]は付録1で示したとおりである。第1次から第s次までのモードを重ね合わせると、第j層におけるx=0面に作用する応力と釣り合う節点力は、

$$|P|_{j,s+1} = (i[A] [\phi]_{j,s+1} [h] + [F] [\phi]_{j,s+1}) a \quad (\text{付2.14})$$

となる。上式は、第1層から第j層までの重ね合わせにより、

$$|P| = (i[A] [\phi] [h] + [F] [\phi]) a \quad (\text{付2.15})$$

$$[AA]_b = \begin{bmatrix} (\lambda_n + 2G), & 0 & 0 & (\alpha Q), & 0 & 0 \\ 0 & G_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_j & 0 & 0 & 0 \\ (\alpha Q), & 0 & 0 & Q & 0 & 0 \\ \hline \lambda_{nj} & 0 & 0 & (\alpha Q), & 0 & 0 \\ \lambda_{nj} & 0 & 0 & (\alpha Q), & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付2.28})$$

$$[FF] = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_{nj} & 0 & 0 & -(\alpha Q), & 0 \\ G_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha Q), & 0 & 0 & -Q & 0 \\ \hline 0 & -\lambda_{nj} & 0 & 0 & -(\alpha Q), & 0 \\ 0 & -(\lambda_n + 2G), & 0 & 0 & -(\alpha Q), & 0 \\ 0 & 0 & G_j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付2.31})$$

$$[GG] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_j/r & 2m & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付2.29})$$

$$[QQ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ G_j m/r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付2.32})$$

$$[PP] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2G_j m(m+1)/r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付2.30})$$

となる。

次に、 $r=r_0$ 面に作用する応力と節点力の釣合を考え、節点力と節点変位の関係を導く。第 j 層の第 s 次のモードによる応力による節点力は、

$$\{P_s\}_i = -a_{,i} r_0 \int_0^{h_j} [N^T] \sigma_{r,0} dz \quad (\text{付2.33})$$

と書けるから、 $r=r_0$ 面に作用する応力を上式に代入すると、(付2.21)、(付2.22)において $r=r_0$ としたときのベクトル $\{V_{0j}\}$ 、 $\{\phi_{0j}\}$ を用いて、節点力は次のように表される。

$$\begin{aligned} \{P\}_{i,j+1} = & r_0 ([A_n] \{V_{0j}\}_{,j+1} [h^2] + [G] \{\phi_{0j}\}_{,j+1} [h] \\ & + [P] \{V_{0j}\}_{,j+1} + [F] \{\phi_{0j}\}_{,j+1} [h] \\ & + [Q] \{V_{0j}\}_{,j+1}) \{a\} \end{aligned} \quad (\text{付2.34})$$

$$[A_n] = \begin{bmatrix} 2(\lambda_n + 2G), & 0 & 0 & 2(\alpha Q), & 0 & 0 & (\lambda_n + 2G), & 0 & 0 & (\alpha Q), & 0 & 0 \\ 0 & 2G_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_j & 0 & 0 & 0 \\ 2(\alpha Q), & 0 & 0 & 2Q & 0 & 0 & (\alpha Q), & 0 & 0 & Q & 0 & 0 \\ (\lambda_n + 2G), & 0 & 0 & (\alpha Q), & 0 & 0 & 2(\lambda_n + 2G), & 0 & 0 & 2(\alpha Q), & 0 & 0 \\ 0 & G_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_j & 0 & 0 & 0 \\ (\alpha Q), & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 2(\alpha Q), & 0 & 0 & 2Q & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{付2.35})$$

(付2.34)式で、第1層から第L層まで重ね合せると、

$$|P| = m([A_r][V_0][h^2] + [G][\phi_0][h] + [P][V_0] + [F_r][\phi_0][h] + [Q][V_0])|a| \quad (\text{付2.40})$$

となる。ここで、 $[A_r]$ 、 $[G]$ 、 $[P]$ 、 $[F_r]$ 、 $[Q]$ は、サブマトリックス $[A_r]$ 、 $[G]$ 、 $[P]$ 、 $[F_r]$ 、 $[Q]$ の重ね合わせから成り、その構造は、付図-1と同様である。上式に、本文(78)式において、 $r=r_0$ としたときの節点変位と重み係数ベクトルの関係、

$$|a| = [H \phi_m |_{r=r_0}]^{-1} |u| |_{r=r_0} \quad (\text{付2.41})$$

を代入すると

$$|P| = m([A_r][V_0][h^2] + [G][\phi_0][h] + [P][V_0] + [F_r][\phi_0][h] + [Q][V_0])[H \phi_m |_{r=r_0}]^{-1} |u| |_{r=r_0} = [R_0]|u| |_{r=r_0} \quad (\text{付2.42})$$

$$[R_0] = m([A_r][V_0][h^2] + [G][\phi_0][h] + [P][V_0] + [F_r][\phi_0][h] + [Q][V_0])[H \phi_m |_{r=r_0}]^{-1} \quad (\text{付2.43})$$

付録3 杭の動的剛性マトリックス

曲げ要素の剛性マトリックス

$$[K_r] = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & & & \text{symm.} \\ 3l & 2l^2 & & \\ -6 & -3l & 6 & \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$$

Mass マトリックス (曲げ変形を受ける一様断面のはり要素の整合質量マトリックス)

$$[m_r] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & \text{symm.} \\ 22l & 4l^2 & & \\ 54 & 13l & 156 & \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

杭の動的剛性マトリックス

$$\begin{Bmatrix} P \\ M_r \end{Bmatrix}_{r,r+1} = ([K_r] - \omega^2 [m_r]) \begin{Bmatrix} u_r \\ \theta_r \end{Bmatrix}_{r,r+1}$$

記号一覧表

ρ_s : 土粒子の密度
 ρ_f : 間隙流体の密度
 ρ : 土 (混合体) の密度
 V_s : 土粒子の体積
 V_f : 間隙流体の体積
 V : 土 (混合体) の体積
 n : 間隙率
 $\{u\}$: 土粒子の絶対変位ベクトル
 $\{U\}$: 間隙流体の絶対変位ベクトル
 $\{w\}$: 間隙流体の土粒子に対する平均相対変位ベクトル
 $\{\sigma\}$: 全応力ベクトル
 $\{\sigma'\}$: 有効応力ベクトル
 p : 間隙水圧 (圧縮が正)
 π : 間隙水圧 (引張が正)
 $\{m\}^T$: (1, 1, 1, 0, 0, 0)
 m : ハンケル関数の次数
 $\{\sigma_s\}$: 混合体の体積と等しい体積を土粒子骨格が有していると考えたときの土粒子骨格に平均的に作

用している応力
 $[L]$: 演算子マトリックス
 L : 地盤の層数
 $\{b\}$: 物体力ベクトル
 g : 重力加速度
 k_o : 透水係数 (本論文では, 方向性はなしとした)
 i : 圧力水頭
 k : 単位体積重量当りの透水係数
 π' : 単位面積当りに作用する流れによる圧力
 $\{\epsilon\}$: 全ひずみベクトル
 $\{\epsilon'\}$: 有効ひずみ成分ベクトル
 $\{\epsilon\}$: 水圧による平均ひずみ成分ベクトル
 $[D]$: 弾性の応力-ひずみマトリックス
 K_s : 土粒子の体積弾性係数
 K_f : 間隙流体の体積弾性係数
 G : 土のせん断剛性
 λ : ラメの定数
 K_D : 土の動的体積弾性係数
 α, Q : Biot の式の定数
 なお, ベクトルと行列は本文中では, $\{ \}$, $[\]$ 付で表した。

港湾技研資料 No. 707

1991・6

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発行所 運輸省港湾技術研究所
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所 横浜ハイテクプリンティング株式会社

Published by the Port and Harbour Research Institute
Nagase, Yokosuka, Japan.

Copyright © (1991) by P.H.R.I.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced by any means, nor transmitted, nor translated into a
maching language without the written permission of the Director General of P.H.R.I.

この資料は、港湾技術研究所長の承認を得て刊行したものである。したがって、本資料の全部又は一部の転載、複
写は、港湾技術研究所長の文書による承認を得ずしてこれを行ってはならない。