港湾技研資料

TECHNICAL NOTE OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 434　Sept. 1982

物理的意味を持つ直接法による有限要素定式化

岩　崎　峯　夫

運輸省港湾技術研究所

目　　次

A Direct Finite Element Formulation Having Physical Meanings

Mineo IWASAKI*

Synopsis

This paper presents a method of changing a continuous function distributed on a element domain or boundary into a discrete function that have nodal quantities. The method is obtained by the use of the least squares criterion and a special differential operator matrix.

The matrix is allowed to move out and inside integral signs even if the matrix is a differential operator. The matrix is expressed in terms of constant values associated with the element nodal co-ordinates. The conception of the method is very useful to understand physical meanings of the finite element formulations.

This paper presents also a direct method of the finite element formulation that has physical meanings. The formulation is obtained by the use of the least squares criterion, the differential operator matrix and the Gauss' theorem. The Gauss' theorem is used to express the residuals yielding on boundaries of elements, and the boundary residuals are formulated. Therefore, the element trial functions are not required Cm-1 continuity, and it is not necessary to integrate by parts to avoid the continuity requirement.

The finite element formulation, presented here, may be available for problems whose functionals have not been found.

*Chief of the Dredger and Construction Equipment Laboratory, Machinery Division.

物理的意味を持つ直接法による有限要素定式化

岩崎　峯夫*

要　旨

本論文において，要素の内部と境界に分布する連続関数を節点集中量をもつ離散関数に直接変換する手法と，要素境界に発生する残差を考慮した有限要素定式化が述べられている。

これらを求めるために，微分作用素がある条件のとき定数行列となることを導き，これが用いられている。

直接離散化においては，最小2乗法により変換公式が導かれ，このようにして導かれた離散関数が，元の連続関数と同じモーメントを有していることや，ある量との積の積分量が同じ値を示すことが示されている。

有限要素定式化においては，以上の結果を用いガレルキン法の重みの優位性が数学的に証明されている。同時に，このような優位性を有するためには形状関数がある条件を満しているときであることも示されている。

さらに，要素内部に発生する残差と境界に発生する残差の関係をガウスの発散定理を用い関係づけ，上述の結果と変分法により定式化する方法が示されている。この定式化の方法によると，要素境界の残差が式で表されており，要素境界で支配微分方程式の一次低い微分量の連続性は，要求されない。さらに，上述の局部的な離散化の理論を適応することにより，直接法にもかかわらず物理的解釈が容易な定式化となっている。この容易さを示すため，弾性問題，流体解析の例が示されている。

1．まえがき

有限要素定式化は，直接法と間接法に分けることができる。直接法は，重みつき残差法，変分法で代表されるような純数学的手法により定式化を行う方法である。他方，間接法は，仮想仕事の原理のように物理的意味を用いて定式化する手法である。

一般に直接法による定式化においては　物理的意味が失われがちであり，物理的解釈に努力を要する。また，間接法では，全体的な物理的意味が理解できても局部的な物理的意味を直観的に理解する容易さが失われている。

例えば，有限要素法定式化の初期に考えられた直接剛性法は，要素の境界に作用する力の全量と一次モーメントの均合から直接定式化されており，局部的な物理的意味が明白である。しかし，この方法は，高次の形状関数を使用する場合に用いることができない欠点を有している。

現在用いられている定式化に，このような局部的な物理的意味が失われているのは，要素内部と要素境界に分布する連続量を節点集中量をもつ離散的分布に直接変換することの意味が明白にされていないからであると思われる。すなわち，このような局部的な離散化の意味を明らかにしておくと，直接法や間接法による定式化における局部的な物理的意味の理解が容易となる。

直接法では，ガレルキン法が有限要素定式化のほとんどに用いられている。ガレルキン法は，重みつき残差法の重み関数として形状関数を用いる方法として位置づけられている手法である。

ガレルキン法は，要素間で，要素内で成立する支配微分方程式より1次低い微分量が連続することが要求され，それが成立するとして，要素内で発生する残差をゼロとすることにより定式化を行うことが基本的考え方である。この要素間の連続性が満たされないとき，部分積分を行って式を変形する。この式の変形は，物理的理解をほとんどなくしてしまう欠点を有している。

このために，要素間で発生する残差を具体的に表す定

* 機材部　作業船研究室長

式化の方法を用い，上述の局部的な物理的解釈を合わせて定式化を考えると，物理的理解の容易な直接法による定式化が行えると思われる。

他方，ガレルキン法が他の重み関数を用いる重みつき残差法より有利であることは，汎関数が見い出されている問題を変分法で定式化した結果とガレルキン法が一致することで証明されている。しかし，汎関数が見い出されていない問題または存在しないであろう問題に対しても経験的にその優位性が知られている。そして，このような問題に対するガレルキン法の優位性の証明は，十分なされていない。

以上の問題を解決するために，筆者は，定数微分作用行列を導入した。定数微分作用行列は，微分作用素（differentlal operator）が定数行列で表されるもので，ある条件を満たす形状関数を用いて表される関数に対して有効である。一般に，微分作用素は，積分記号の内から外へまたはその逆の移動が許されないが，この定数微分作用行列は，定数であるためその移動が許される特殊性を有している。

この特殊性を用いて，有限要素法定式化を行った結果が本論文に述べられている。

2．連続量の離散化のための前提条件

2.1 重み関数の定義

ここでは，全体的な見方を行わず，一つの要素の内部または境界において分布する連続量を節点に集中量をもつ離散関数へ変換すること，すなわち，局部的な連続量の離散化を考える。

ここで用いる重み関数 $[W(x, y, z)]$ は，連続関数をそれと等価な離散関数に変換するときに用いる関数とする。要素 i の内部または境界に連続関数 ϕ が分布しているとき，関数 ϕ を n 個の節点に集中量 $\{R\}_i$ をもつ離散関数 g へ，次式を用いて変換するものとする。ϕ を要素内部に分布する関数とすると，次式となる。

$$\{R\}_i = \int_{\Omega_i} [W]_i^T \phi \, d\Omega \qquad (1)$$

ただし，$\{R\}$ と $[W]$ の成分は，次のように表される。

$$\left.\begin{aligned} [R]^T &= [R_1, R_2 \cdots\cdots R_n] \\ [W] &= [W_1, W_2 \cdots\cdots W_n] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

また，Ω_i は，要素 i の内部領域を表す。

この式は，次のように物理的に解釈される。

要素の内部に，単位体積あたりの物理量を表す連続関数 ϕ があると，要素内部の一点で微少体積をとり，そこでの関数 ϕ の積分量を重みをつけて各節点に分配することを意味している。

関数 ϕ を要素の境界に単位面積あたりの物理量を表す連続関数とすると，この関数の離散関数の節点量 $\{R\}_i$ は，同様に考えて次のように表すことができる。

$$\{R\}_i = \int_{\Gamma_i} [W]_i^T \phi \, d\Gamma \qquad (3)$$

ただし，Γ_i は，要素の境界を表す。

式（1）と式（3）の重み関数は，後述するように，要素内部と境界においても同じ関数で表現できる。これは，式（3）を計算するときに，$[W]_i$ の要素境界における値を用いることで計算できることを示している。

もし，十分意味のある重み関数 $[W]_i$ が見い出されると，式（1），式（3）により，連続関数を離散化することができる。

我々の直感により，この重み関数の条件を考えると，各節点の集中量の和は，ϕ の領域 Ω_i の積分量に等しくなるべきである。すなわち，等価な離散関数は，全量で同じ量を持つべきであると考えるであろう。すなわち，次式が成立すべきと考えるであろう。

$$\sum_{j=1}^{n} R_j = \int_{\Omega_i} \phi \, d\Omega \qquad (4)$$

この重み関数に対する条件は，式（1）を式（4）に代入すれば得られる。すなわち，重みの合計が常に1になればよいことを示している。しかし，これだけでは，

$$\sum_{j=1}^{n} W_j = 1 \qquad (5)$$

$[W]_i$ を決定することができない。次に，我々の経験から，もし，ϕ が単位体積あたりの力とすると，任意の点Pを中心とした，1次モーメントを両関数について計算し，その結果が等しくなるべきであると考えるであろう。すなわち，次式が成立するべきであろうと考えるであろう。ただし，(x_p, y_p, z_p) は，点Pの座標値とする。また (x_j, y_j, z_j) を節点 j の座標とする。

$$\sum_{j=1}^{n} R_j (x_j - x_p) = \int_{\Omega_i} \phi \cdot (x - x_p) \, d\Omega \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} R_j (y_j - y_p) = \int_{\Omega_i} \phi \cdot (y - y_p) \, d\Omega \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} R_j (z_j - z_p) = \int_{\Omega_i} \phi \cdot (z - z_p) \, d\Omega \qquad (8)$$

式（6），（7），（8）は，式（4）の結果を用いると，次の式で表されるように変形できる。

$$\sum_{j=1}^{n} R_j x_j = \int_{\Omega_i} \phi \cdot x \, d\Omega \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{n} R_j y_j = \int_{\Omega_i} \phi \cdot y \, d\Omega \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} R_j z_j = \int_{\Omega_i} \phi \cdot z \, d\Omega \qquad (11)$$

そして，式（9），(10)，(11) に式（1）を代入すると，次の重み関数の必要条件が得られる。

$$\sum_{j=1}^{n} W_j x_j = x \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} W_j y_j = y \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} W_j z_j = z \tag{14}$$

もし，1次元問題で節点数が2の場合，式（5）と式(12) により，2個の成分を持つ重み関数［W］$_i$ が求められ，同様に，2次元問題では，3節点，3次元問題では，4節点の重み関数［W］$_i$ を求めることができる。

有限要素定式化の直接剛性法は，基本的には，以上の考え方による定式化である。

しかし，さらに要素の節点が多くなると，もはや我々の経験からどのようにすべきかの指針は，得られない。

また，関数 ϕ が力を表していない場合は，どうすべきかは，不明である。

しかし，式（5），(12)，(13)，(14) を一般化すると，次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^{n} W_j \cdot x_j^l \cdot y_j^m \cdot z_j^k = x^l \cdot y^m \cdot z^k \tag{15}$$

ここで，l，m，k をそれぞれゼロから順番に上げてゆき，それらの組合せを用いれば，式（5），式 (12) 等の式が得られ，さらに，多くの式が得られ，節点数の多い要素の重み関数が決定できるであろうと考えられる。

すなわち，式 (15) から考えて，0次，1次，2次…のモーメントの均合から離散化できるであろうと考えられる。しかし，この推測は，我々の経験による推測であり，その理論的根拠は，十分でない。本論文では，これらの根拠が明らかにされており，事実，この推測は，完全多項式で表される試験関数を用いたとき正しいことが後述される。

2.2　形状関数の条件

一般に求めようとする未知関数に対する i 番めの要素の試験関数を ϕ_i^* とすると，関数 ϕ_i^* は，節点での関数値 $\{\delta^*\}_i$ と形状関数［N］$_i$ により次のように表される。

$$\phi_i^* = [\mathrm{N}]_i \{\delta^*\}_i \tag{16}$$

形状関数［N］$_i$ は，次のようにして定められる。まず，関数 ϕ_i^* を表すために，n 個の関数を選択する。そして，関数 ϕ_i^* を，これらの関数に係数をもった項の和として表されるものとする。

例えば，

$$\phi_i^* = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy \tag{17}$$

などである。形状関数は，これらの係数 (a_0，a_1 …) が任意であるすべての関数 ϕ_i^* を表現できるように定めなければならない。これは，任意の係数をもつ n 個の関数を，式 (16) の ϕ_i^* に，それぞれ別々に代入し，式 (16) を満足すればよい。なぜなら，それらの項の和で表される関数 ϕ_i^* は，式 (16) が線形であるため，必ず式 (16) を満足するからである。これらの n 個の関数の j 番目の関数を g_j とし，その関数の節点値を $\{\mathrm{r}_j\}$ とすると，次の連立一次方程式が得られ，これを解くことにより［N］$_i$ が定められる。

$$g_j = [\mathrm{N}]_i \{\mathrm{r}_j\} \qquad (j = 1 \sim n) \tag{18}$$

例えば，式 (17) で表される場合は，

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]_i^T \tag{19}$$

となる。ただし x_i，y_i は，節点 i の座標値である。

一般には，このようにして，形状関数が定められるが，本論文では，さらに，次の条件を満足するように，形状関数を定めることにする。

今，関数 ϕ_i^* に，微分作用素 L_m を作用させて，得られる関数を ϕ_{mi}^* とする。例えば，$L_m = \partial/\partial x \partial y$ とすると，

$$\phi_{mi}^* = L_m(\phi_i^*) = \frac{\partial \phi_i^*}{\partial x \partial y} \tag{20}$$

となる。

この関数 ϕ_{mi}^* も，式 (16) で用いている形状関数［N］$_i$ を用いて，表すことができるように関数［N］$_i$ を定めたとすると，次式が得られる。

$$\phi_{mi}^* = [\mathrm{N}]_i \{\delta_m^*\}_i \tag{21}$$

ただし，$\{\delta_m^*\}_i$ は，関数 ϕ_{mi}^* の節点値である。

式 (21) の表現が許されるための形状関数の条件は，［N］$_i$ を定めるために選定した n 個の関数に係数をもったもので，ϕ_{mi}^* も表現できることである。この表現を可能にするためには，n 個の関数の選定に条件が課せられる。

例えば，ϕ_i^* を次のように表現したとする。

$$\phi_i^* = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^3 \tag{22}$$

そして，$L_m = \partial/\partial x$ とすると，ϕ_{mi}^* は，次のように表される。

$$\phi_{mi}^{*}=a_1+3a_3x^2 \qquad (23)$$

この場合は，ϕ_{mi}^{*} の表現に用いている x^2 の関数が，式(22)に含まれないために，式（21）式を満足しない。

しかし，式（17）によって，ϕ_i^{*} が表現されていると，ϕ_{mi}^{*} は，次のようになる。

$$\phi_{mi}^{*}=a_1+a_3y \qquad (24)$$

式（24）で表される関数 ϕ_{mi}^{*} は，式（17）の任意の係数により表現できるすべての関数の内に含まれる。よって，この場合は，式（21）を満足する。

以上の結果をまとめると，次のようになる。

式（16）および式（21）を満足するための n 個の関数の選択条件は，n 個の関数を別々に微分したとき，それを表す関数が，n 個の関数に含まれることである。

もし，多項式を用いるなら，完全多項式がこの条件を満足する。以後，形状関数は，式（16）および式（21）を満足するように定められているものとする。

2.3　定数微分作用行列

式（16）から，次式が得られる。

$$\phi_{mi}^{*}=L_m(\phi_i^{*})=L_m([\mathrm{N}]_i)\{\delta^{*}\}_i \qquad (25)$$

一方，式（21）の $\{\delta_m^{*}\}_i$ は，関数 ϕ_{mi}^{*} の要素 i での節点での値であるから，式（25）の $L_m([\mathrm{N}]_i)$ に全節点の座標値を代入することにより得られ，次式で表現できる。

$$\{\delta_m^{*}\}_i=[\mathrm{B}_m]_i\{\delta^{*}\}_i \qquad (26)$$

ただし，行列 $[\mathrm{B}_m]_i$ は，$L_m([\mathrm{N}]_i)$ に，要素 i の全節点の座標値を代入して得られる $n\times n$ の正方行列である。

式（21）に，式（26）を代入すると，次式が得られる。

$$\phi_{mi}^{*}=L_m([\mathrm{N}]_i)\{\delta^{*}\}_i=[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_m]_i\{\delta^{*}\}_i \qquad (27)$$

式（27）は，微分作用素 L_m の作用が，行列 $[\mathrm{B}_m]_i$ で行うことができることを示している。また，行列 $[\mathrm{B}_m]_i$ は，要素 i の節点座標値に関する定数で表されており，定数行列である。以後，このような行列を定数微分作用行列と呼ぶことにする。

2.4　定数微分作用行列の性質

定数微分作用行列は，次のような性質をもっている。

今，微分作用素 L_m を次のようなものとすると，

$$L_m=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial b}\left(\cdots\cdots\left(\frac{\partial}{\partial e}\right)\right)\right) \qquad (28)$$

次式が成立する。

$$[\mathrm{B}_m]_i=[\mathrm{B}_a]_i[\mathrm{B}_b]_i\cdots\cdots[\mathrm{B}_e]_i \qquad (29)$$

ただし，行列 $[\mathrm{B}_a]_i$ などは，$\partial[\mathrm{N}]_i/\partial a$ に，要素 i の全節点値を代入して得られる定数微分作用行列で，要素 i で $\partial/\partial a$ の微分作用をもつものとする。

証明は，次のようにして行われる。

説明を簡単にするために，L_m を次のようなものとする。

$$L_m=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial(\,)}{\partial b}\right) \qquad (30)$$

関数 $\partial\phi_i^{*}/\partial b$ は，式（27）の L_m を $\partial/\partial b$ とすると次のように表すことができる。

$$\frac{\partial\phi_i^{*}}{\partial b}=[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_b]_i\{\delta^{*}\}_i \qquad (31)$$

また，式（30）に $\partial/\partial a$ を作用させると，

$$\frac{\partial^2\phi_i^{*}}{\partial a\partial b}=\frac{\partial[\mathrm{N}]_i}{\partial a}[\mathrm{B}_b]_i\{\delta^{*}\}_i \qquad (32)$$

ここで，関数 $\partial^2\phi_i^{*}/\partial a\partial b$ の節点値 $\{\delta_m^{*}\}_i$ は，式(32)の $\partial[\mathrm{N}]_i/\partial a$ に全節点値を代入したものとなるので，次式が得られる。

$$\{\delta_m^{*}\}_i=[\mathrm{B}_a]_i[\mathrm{B}_b]_i\{\delta^{*}\}_i \qquad (33)$$

式（33）を式（21）に代入すると，次式が得られる。

$$\phi_{mi}^{*}=[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_a]_i[\mathrm{B}_b]_i\{\delta^{*}\}_i \qquad (34)$$

ここで，式（27）と式（34）を比較すると，

$$[\mathrm{B}_m]_i=[\mathrm{B}_a]_i[\mathrm{B}_b]_i \qquad (35)$$

が得られる。同様な操作をすることにより，式（29）が得られる。

3．局部的連続量の離散化

局部的な連続量の離散化の意味を明らかにしておくことは，後述する有限要素定式化に現れる式の理解に役立つのみならず，境界の分布量や体積力などの等価節点量への変換の意味が明らかにされる。

要素 i の節点において集中量があり，その他の点でゼロである離散関数を g とすると，次のように表すことができる。

$$g=\sum_{j=1}^{n}R_j\delta(x-x_j)\delta(y-y_j)\delta(z-z_j) \qquad (36)$$

ただし，n は，要素の節点数で，$\delta(t)$ は，$t=0$ で1，それ以外でゼロとなるデルタ関数であり，座標 $(x_j, y_j,$

z_j）は，節点 j の座標値である。また，R_j は，関数 g の節点集中量 $\{R\}_i$ の節点 j に関する成分とする。

成分 R_j は，形状関数［N］$_i$ に節点 j の座標値を代入すると，この節点に関する N_j の成分が1で他の成分がゼロになる性質を有していることから，次のように表される。

$$R_j = [N(x_j, y_j, z_j)]_i \{R\}_i \qquad (37)$$

3.1　形状関数で表される連続関数の離散化

要素試験関数 ϕ_i^* に微分作用素 L_b を作用させて得られた関数を ϕ_{bi}^* とすると，要素 i の微分作用素 L_b に対応する定数微分作用行列［B_b］$_i$ を用いて次のように表される。

$$\phi_{bi}^* = [N]_i \{\delta_b^*\}_i = [N]_i [B_b]_i \{\delta^*\}_i \qquad (38)$$

ただし，$\{\delta_b^*\}_i$ は，関数 ϕ_{bi}^* の節点値である。

さらに，この関数 ϕ_{bi}^* に微分作用素 L_a を作用させて得られた関数を ϕ_{mi}^* とすると，式（31），（34），（35）から次式が得られる。

$$\phi_{mi}^* = [N]_i [B_a]_i \{\delta_b^*\}_i \qquad (39)$$

$$= [N]_i [B_a]_i [B_b]_i \{\delta^*\}_i \qquad (40)$$

$$= [N]_i [B_m] \{\delta^*\}_i \qquad (41)$$

この関数 ϕ_{mi}^* と離散関数 g が最も近くなるように，$\{\delta_b^*\}_i$ の係数を決定する問題を考える。

最小2乗法によると，要素 i の全領域 Ω_i 内のすべての点での2つの関数の差の2乗の総和を最小となるように，$\{\delta_b^*\}_i$ の係数を決定する。

この総和をⅡとすると，次のように表される。

$$\mathrm{II} = \int_{\Omega_i} (\phi_{mi}^* - g)^2 d\Omega \qquad (42)$$

$$= \int_{\Omega_i} ([N]_i [B_a]_i \{\delta_b^*\}_i)^2 d\Omega - \sum_{j=1}^{n} ([N(x_j, y_j, z_j)]_i [B_a]_i \{\delta_b^*\}_i)^2 + \sum_{j=1}^{n} ([N(x_j, y_j, z_j)]_i [B_a]_i \{\delta_b^*\}_i - [N(x_j, y_j, z_j)]_i \{R\}_i)^2 \qquad (43)$$

式（43）の第1項と第2項は，節点以外の点での残差の2乗の総和を示している。特に，第2項は，第1項の内に含まれる節点でのこの残差を差引いている。第3項は，節点における残差の2乗の総和を示している。

次に，この全残差Ⅱを最小にするよう $\{\delta_b^*\}_i$ の係数を定めるため，Ⅱを $\{\delta_b^*\}_i$ の各成分で微分したものをゼロとおき，次式関係

$$\sum_{j=1}^{n} [N(x_j, y_j, z_j)]_i^T [N(x_j, y_j, z_j)]_i \{R\}_i = \{R\}_i \qquad (44)$$

を用いると次の式が得られる。

$$[B_a]_i^T \left[\int_{\Omega_i} [N]_i^T [N]_i d\Omega [B_a]_i \{\delta_b^*\}_i - \{R\}_i \right] = 0 \qquad (45)$$

式（45）において，どのような定数微分作用行列に対しても，式（45）が成立するには，次式を満足すればよい。

$$\left[\int_{\Omega_i} [N]_i^T [N]_i d\Omega \right] [B_a]_i \{\delta_b^*\}_i - \{R\}_i = 0 \qquad (46)$$

式（46）は，もし関数 ϕ_{bi}^* の節点値が与えられると，関数 ϕ_{mi}^* と関数 g との残差を最小にするような関数 g を定める連立一次方程式を与える。また，逆に，関数 g が与えられると，関数 ϕ_{mi}^* と関数 g との残差を最小にするように，関数 ϕ_{bi}^* の節点値 $\{\delta_b^*\}_i$ を定める式を与える。

例えば，$L_b = 1$，$L_a = L_m$ とすると，$\{\delta_b^*\}_i = \{\delta^*\}_i$，$[B_a]_i = [B_m]_i$ となり，式（46）に代入すると次式が得られる。

$$\left[\int_{\Omega_i} [N]_i^T [N]_i d\Omega \right] [B_m]_i \{\delta^*\}_i - \{R\}_i = 0 \qquad (47)$$

式（47）は，ϕ_{mi}^* と g ができるだけ近く近似するように，ϕ_i^* の節点値 $\{\delta^*\}_i$ の値を定めるか，$\{R\}_i$ を定める式である。

また，$L_b = L_m$，$L_a = 1$ とすると，同様に次式が得られる。

$$\left[\int_{\Omega_i} [N]_i^T [N]_i d\Omega \right] \{\delta_m^*\}_i - \{R\}_i = 0 \qquad (48)$$

式（48）は，ϕ_{mi}^* と g が近似するように，ϕ_{mi}^* の節点値 $\{\delta_m^*\}_i$ を定めるか，$\{R\}_i$ を定める式を与えている。

式（47），（48）は，いずれも次の式を導く。

$$\int_{\Omega_i} [N]_i^T \phi_{mi}^* d\Omega - \{R\}_i = 0 \qquad (49)$$

$$\int_{\Omega_i} [N]_i^T L_m (\phi_i^*) d\Omega - \{R\}_i = 0 \qquad (50)$$

式（49），（50）は，式（3）の定義から考えると，要素内部 Ω_i に分布する連続関数 ϕ_{mi}^* が重み関数［W］$_i$ を形状関数［N］$_i$ にして，節点集中量 $\{R\}_i$ をもつ離散関数に離散化することを意味している。

すなわち，最小2乗法により，形状関数で表される任意の関数は，離散化できる。また，逆に離散関数が与えられると，それに近似する形状関数で表される連続関数を求めることもできる。そして，この連続関数が，形状関数で表される関数を微分したものであれば，この微分された関数をも定めることができる。

3.2　任意の連続関数の離散化

任意の連続関数の離散化は，特に，境界に任意の連続関数で分布する物理量を等価節点量に変換するときに使用される。

この離散化は，任意の連続関数を形状関数で表される連続関数に一度近似させ，その後，前述の結果を用いて離散化することができる。

要素 i の内部領域で定義される任意の連続関数 f が与えられたとする。この関数 f と形状関数を用いて表される関数 ϕ_{mi}^* が最も近くなるように，$\{\delta_\delta^*\}_i$ の係数を定める問題を考える。残差の2乗の総和IIは，次式で与えられる。ただし，$\{\delta_\delta^*\}$ は，式 (39) で用いられているものと同一のものとする。

$$\mathrm{II} = \int_{\Omega_i} (\phi_{mi}^* - f)^2 d\Omega \tag{51}$$

$$= \int_{\Omega_i} ([\mathrm{N}]_i [\mathrm{B}_a]_i \{\delta_\delta^*\} - f)^2 d\Omega \tag{52}$$

IIを $\{\delta_\delta^*\}$ の各成分で微分し，ゼロとすると次式が得られる。

$$[\mathrm{B}_a]_i^T \int_{\Omega_i} [\mathrm{N}]_i^T ([\mathrm{N}]_i [\mathrm{B}_a]_i \{\delta_\delta^*\} - f) d\Omega = 0 \tag{53}$$

式 (53) が，どのような $[\mathrm{B}_a]_i^T$ に対しても成立するには，

$$\int_{\Omega_i} [\mathrm{N}]_i^T [\mathrm{N}]_i [\mathrm{B}_a]_i \{\delta_\delta^*\} d\Omega - \int_{\Omega_i} [\mathrm{N}]_i^T f d\Omega = 0 \tag{54}$$

である。

式 (54) は，次のように変形できる。

$$\int_{\Omega_i} [\mathrm{N}]_i^T \phi_{mi}^* d\Omega = \int_{\Omega_i} [\mathrm{N}]_i^T f d\Omega = 0 \tag{55}$$

さらに，式 (49) の結果を用いて，次式が得られる。

$$\int_{\Gamma_i} [\mathrm{N}]_i^T f d\Omega = \{\mathrm{R}\}_i \tag{56}$$

結局，式 (56) により，任意の連続関数は，節点集中量 $\{\mathrm{R}\}_i$ をもつ離散関数に変換できる。

ただし，式 (55)，(56) からわかるように，$\{\mathrm{R}\}_i$ が与えられても，元の関数 f は，得られなく，可逆性を有していない。しかし，関数 f の近似の連続関数 ϕ_{mi}^* は，得られる。

4．離散化された関数の性質

要素内部で定義される任意の連続関数 f が，形状関数を重み関数とすることにより，節点集中量 $\{\mathrm{R}\}_i$ をもつ離散関数 g に変換されることが最小2乗法により導かれた。

このように離散化された関数 g と f が，どのような関係を有しているか明らかにすると，物理的な解釈がより容易になると思われる。

4.1　モーメントの同一性

もし，形状関数を定めるとき，m 次の完全多項式で試験関数を表すようにして定められているなら，連続関数 f と離散関数 g の，任意の点に関する m 次モーメントは，等しくなる。

これは，次のようにして証明される。

式 (15) は，これらの関数がある次数までのモーメントが等しくなるための関数を求める式を与えている。もし，試験関数が完全多項式で表現されているなら，式 (18) から，形状関数 $[\mathrm{N}]_i$ を求める次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^{n} N_j \cdot x_j^l \cdot y_j^m \cdot z_j^k = x^l \cdot y^m \cdot z^k \tag{57}$$

ここで，式 (15) と式 (57) を比較すると，モーメントが等しくなるための重み関数 $[\mathrm{W}]_i$ も形状関数 $[\mathrm{N}]_i$ も同じ式を解くことにより得られ，この重み関数と形状関数は，等しくなる。よって，モーメントが等しくなる重み関数は，試験関数が完全多項式で表現する形状関数であるといえる。

4.2　積の積分量の同一性

今，任意の微分作用素を L_m とし，要素試験関数 ϕ_i^* に作用させた関数を ϕ_{mi}^* とする。

この関数 ϕ_{mi}^* と f の積の要素内部領域 Ω_i での積分量と関数 ϕ_{mi}^* と g の積の領域 Ω_i での積分量を比較してみる。

前者は，次のように表される。

$$\mathrm{II}_1 = \int_{\Omega_i} \phi_{mi}^* f d\Omega = \int_{\pi_i} [\mathrm{N}]_i \{\delta_m^*\}_i f d\Omega \tag{58}$$

$$= \{\delta_{mi}^*\}_i^T \int_{\pi_i} [\mathrm{N}]_i^T f d\Omega \tag{59}$$

後者は，g が節点以外でゼロであるので，次式となる。

$$\mathrm{II}_2 = \int_{\Omega_i} \phi_{mi}^* g d\Omega = \{\delta_m^*\}_i^T \{\mathrm{R}\}_i \tag{60}$$

もし，式 (56) が成立するなら，$\mathrm{II}_1 = \mathrm{II}_2$ である。

この事実は，“形状関数で表現できる任意の関数と任意の連続関数 f の積の Ω_i での積分量は，関数 f の代わりにその関数の離散関数 g を用いても変わらない” ことを示している。

またこの事実は，逆に，この積分量が一定であるという物理的事実が存在するなら，連続量 f は，式 (56) により離散化できることを示している。

5．要素境界での連続関数の離散化

要素 i の内部領域に分布する関数を ϕ_i^* とすると，この関数の境界での分布は，次式の $[N]_i$ に境界面の座標を代入すると得られる。すなわち，次式は，境界での分布も表している。よって，もし，積分を境界面だけで行

$$\phi_i^* = [N]_i \{\delta^*\}_i \qquad (61)$$

いたいときは，$\int_{\Omega_i}$，$d\Omega$ の記号を $\int_{\Gamma_i}$，$d\Gamma$ に置きかえるだけでよい。

前述した理論は，要素内部領域で論じていたが，境界に分布する関数の離散化は，上述した記号の変換のみで対応できる。このような変換により重み関数を求めると内部領域のみに用いていた重み関数も境界を含んでいることとなる。

このような理由から，要素内部に分布する関数を境界に分布する関数としたとき，Ω を Γ に変換するだけで同様な理論が成立する。

6．有限要素定式化

前節において，一つの要素の内部または境界に分布する連続関数の離散化について述べた。ここでは，要素と要素が結合した場合の有限要素定式化について述べる。

6.1　ガレルキン法の優位性の証明

一般に，有限要素法では，次のような支配微分方程式が与えられる。

領域 Ω 内で

$$L_m(\phi) - f = 0 \qquad (62)$$

そして，境界条件として

$$B(\phi) - q = 0 \qquad (63)$$

が与えられる。

ここで，式 (63) を満足する試験関数 ϕ^* を式 (62) に代入すると，式 (62) を満足せず領域 Ω において残差 r が生じる。r は，次のように示される。

$$r = L_m(\phi^*) - f \qquad (64)$$

領域 Ω を e 個の要素に分割して，それぞれの要素試験関数 ϕ_i^* の和として ϕ^* を表すと次の式となる。

$$\phi^* = \sum_{i=1}^{e} \phi_i^* \qquad (65)$$

次に，要素と要素の境界で，支配微分方程式より一次低い微分量が連続であるなら重み関数 $[W]_i$ を用いて，次式により定式化が行われる。

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{e} [W]_i^T (L_m(\phi_i^*) - f)\, d\Omega = 0 \qquad (66)$$

これは，もし，ϕ_i^* が式 (64) を満足するなら，$L_m(\phi_i^*) - f$ がゼロとなることから，任意の重み関数 $[W]_i$ を用いた場合でも式 (66) が成立すべきであるとして定式化されたものである。しかし，実際には，この重み関数として，形状関数 $[N]_i$ を用いる場合が最も良い結果を与えることが経験的に知られている。そしてこの方法がガレルキン法である。

すなわち，次式で示される。

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{e} [N]_i^T (L_m(\phi_i^*) - f)\, d\Omega = 0 \qquad (67)$$

式 (67) は，経験的にその優位性が知られているが，数学的には，十分証明されていない。

ガレルキン法の優位性については，前節の結果を用いて，次のように証明できる。

すなわち，要素 i の残差 r_i は，要素内に分布する連続関数である。これを，節点値 $\{R\}_i$ をもつ離散関数に前節の結果を用いて変換すると次式が得られる。

$$\{R\}_i = \int_{\Omega_i} [N]_i^T r_i\, d\Omega \qquad (68)$$

ただし

$$r_i = L_m(\phi_i^*) - f \qquad (69)$$

である。

ここで，注意すべき点は，$\{R\}_i$ の全成分の和は，r_i の領域 Ω_i での積分量に等しいことである。すなわち，次式で表される式を満足している。

$$\sum_{j=1}^{n} R_j = \int_{\Omega_i} r_i\, d\Omega \qquad (70)$$

これは，形状関数の性質からも言えるが，このような離散化を用いるとゼロ次のモーメントすなわち全量が等しいことが含まれていることからも言える。この全量が等しくなる性質は，いわゆる重ね合せの原理が成立することを示している。

そして，これらの残差 r_i をゼロにするには，節点集中量すべてゼロにすればよい。この条件を全要素について求め重ね合わせると，式 (67) が得られる。

また，これは，次のように，直接証明することができる。

全要素の残差の2乗の総和 Π は，次のように表される。[1]

$$\Pi = \sum_{i=1}^{e} A_i \int_{\Omega_i} (L_m(\phi_i^*) - f)^2\, d\Omega \qquad (71)$$

ただし，定数 A_i は，各要素の残差に対する重みである。

Ⅱを$\{\delta^*\}_i$の各成分で微分してそれをゼロとおき，Ⅱが最小になるよう$\{\delta^*\}_i$の各成分の係数を定めると，次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial \{\delta^*\}_i} = \sum_{i=1}^{e} A_i [\mathrm{B}_m]_i^T \int_{\Omega_i} [\mathrm{N}]_i^T (L_m(\phi_i^*) - f) d\Omega$$
$$= 0 \qquad (72)$$

ここで，重ね合せの原理を成立させるために各要素の残差の重みが，要素で発生する全残差すなわち，

$$\sum_{j=1}^{n} R_j = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_i} N_j (L_m(\phi_i^*) - f)\, d\Omega$$
$$= \int_{\Omega_i} (L_m(\phi_i^*) - f)\, d\Omega \qquad (73)$$

の比率で重みが与えられるように A_i を定めると

$$A_i = \left[[\mathrm{B}_m]_i^T \right]^{-1} \qquad (74)$$

となる。その結果，式（67）が得られる。

従来の最少2乗法による定式化では，定数微分作用行列 $[\mathrm{B}_m]_i$ の存在が知られておらず，式（72）の表現が得られなかった。また，このように表現できるためには，式（21）を満足する形状関数が用いられていなければならない。この条件を満たすなら，このような定式化が優位であることになる。一般に，ガレルキン法は，この条件を特に含んでいない。

6.2　境界残差を考慮した定式化

ガレルキン法による有限要素定式化においては，要素と要素の境界で生じる残差が式で与えられていなく，要素と要素の境界で支配微分方程式より一次低い微分量の連続性が要求される。これを避けるため部分積分が行われ，物理的な理解が失われてしまうことがある。

境界残差を考慮するには，要素内部と境界で発生する残差の関係を明らかにする必要がある。

この関係は，ガウスの発散定理により，次のように関係づけることができる。

説明を簡単にするために，2次元問題とする。

閉曲線 Γ とその内部領域 Ω で，次の微分方程式が与えられているとする。

領域 Ω で

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - f = 0 \qquad (75)$$

ただし，関数 M，N は，関数 ϕ に，微分作用素 L_m，L_n を作用させて得られたものとする。

$$M = L_m(\phi) \qquad (76)$$
$$N = L_n(\phi) \qquad (77)$$

また，境界 Γ で，ϕ が与えられるか（固定境界 Γ_r）か次式で境界条件が与えられる（自然境界 Γ_n）ものとする。

$$Mm + Nn - q = 0 \qquad (78)$$

ただし，(m, n) は，境界 Γ 上で外向に引いた法線の方向余弦である。また，(m_i, n_i) は，要素 i の境界 Γ_i でのこれらの値とする。

そこで，仮想の関数として正解を与える関数 ϕ を考える。関数 ϕ は，式（75)，(76)，(77)，(78）を満足しているものとする。

領域 Ω を e 個の有限な要素に分割し，それらのうち i 番目の要素の領域を Ω_i，その要素の境界を Γ_i とする。

ガウスの発散定理から，次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{e} \left(\int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_i} (Mm_i + Nn_i)\, d\Gamma \right) = 0 \qquad (79)$$

また，i 番めの要素の試験関数を ϕ_i^* とし，これに微分作用素 L_m，L_n を作用して得られた関数を次のように表わすものとする。

$$\phi_i^* = [\mathrm{N}]_i \{\delta^*\}_i \qquad (80)$$
$$M_i^* = L_m(\phi_i^*) = [\mathrm{N}]_i [\mathrm{B}_m]_i \{\delta^*\}_i \qquad (81)$$
$$L_i^* = L_n(\phi_i^*) = [\mathrm{N}]_i [\mathrm{B}_n]_i \{\delta^*\}_i \qquad (82)$$

ただし，行列 $[\mathrm{B}_m]_i$，$[\mathrm{B}_n]_i$ は，定数微分作用行列である。

関数 M_i^*，N_i^* は，連続関数であるので，ガウスの発散定理から，次式が成立する。

$$\int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial M_i^*}{\partial x} + \frac{\partial N_i^*}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_i} (M_i^* m_i + N_i^* n_i)\, d\Gamma = 0 \qquad (83)$$

式（83）を全要素について計算し，加えると次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{e} \left(\int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial M_i^*}{\partial x} + \frac{\partial N_i^*}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_i} (M_i^* m_i + N_i^* n_i)\, d\Gamma \right) = 0 \qquad (84)$$

式（84）から式（79）を引き，式（75）の関係を用いると，式（85）が得られる。式（85）は，関数 M, M_i^*, N, N_i^* が連続であれば，常に成立する式である。そし

て，総和記号の内側を要素ごとに計算し，加え合わすことを示しており，いわゆる重ね合わせの原理が成立することを示している。

$$\sum_{i=1}^{e}\left(\int_{\Omega_i}\left(\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}-f\right)d\Omega\right.$$
$$\left.+\int_{\Gamma_i}(Mm_i+Nn_i-M_i^*m_i-N_i^*n_i)\,d\Gamma\right)=0 \quad (85)$$

ここでは，正解を与える関数 M，N に対し，試験関数 M_i^*，N_i^* を近似する手法をとることにする。ただし，重ね合わせの原理を成立させるために，式（85）を満足するように近似するものとする。

式（85）の積分記号の内側の第1項は，式（75）に，要素試験関数を代入して得られる残差を表している。また，第2項は，支配方程式より一次低い微分量が要素境界で連続しないとき，要素の境界で発生する残差を表している。これらの残差を最小にすることにより，有限要素定式化が得られる。

1） 最小2乗法による定式化

最小2乗法による定式化は，要素内部と境界で発生する残差の2乗の積分量を最少にする手法である。

式（85）から，次式が得られる。

$$\Pi=\sum_{i=1}^{e}\left(A_i\int_{\Omega_i}\left(\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}+f\right)^2 d\Omega\right.$$
$$\left.+B_i\int_{\Omega_i}(Mm_i+Nn_i-M_i^*m_i-N_i^*n_i)^2 d\Gamma\right) \quad (86)$$

ただし，A_i，B_i は，各残差の重みを表す定数である。

ここで，Π が最小となるように，$\{\delta^*\}_i$ の各成分の係数を定めるために，Π をそれらの成分で微分しゼロとすると，次式の関係を用いて，次のように表される。

$$\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}=([\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_x]_i[\mathrm{B}_m]_i$$
$$+[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_y]_i[\mathrm{B}_n]_i)\{\delta^*\}_i \quad (87)$$
$$=[\mathrm{N}]_i[[\mathrm{B}_x]_i[\mathrm{B}_m]_i+[\mathrm{B}_y]_i[\mathrm{B}_n]_i]\{\delta^*\}_i \quad (88)$$
$$=[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}]_i\{\delta^*\}_i \quad (89)$$

$$M_i^*m_i+N_i^*n_i=m_i[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_m]_i\{\delta^*\}_i$$
$$+n_i[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_n]_i\{\delta^*\}_i \quad (90)$$
$$=[\mathrm{N}]_i[m_i[\mathrm{B}_m]_i+n_i[\mathrm{B}_n]_i]\{\delta^*\}_i \quad (91)$$
$$=[\mathrm{N}]_i[\mathrm{C}]_i\{\delta^*\}_i \quad (92)$$

ただし $[\mathrm{B}_x]_i$ と $[\mathrm{B}_y]_i$ は，それぞれ $\partial/\partial x$，$\partial/\partial y$ を表す要素 i の定数微分作用行列である。

$$\Pi=\sum_{i=1}^{e}\left(A_i\int_{\Omega_i}([\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}]_i\{\delta^*\}_i-f)^2 d\Omega\right.$$
$$\left.+B_i\int_{\Gamma_i}(Mm_i+Nn_i-[\mathrm{N}]_i[\mathrm{C}]_i\{\delta^*\}_i)^2 d\Gamma\right) \quad (93)$$

式（93）を $\{\delta^*\}_i$ で微分すると，次式が得れる。

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\{\delta\}_i}=\sum_{i=1}^{e}\left(A_i[\mathrm{B}]_i^T\left(\int_{\pi_i}[\mathrm{N}]_i^T[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}]_i\,d\Omega\{\delta^*\}_i\right.\right.$$
$$\left.-\int_{\Omega_i}[\mathrm{N}]_i^T f\,d\Omega\right) \quad (94)$$
$$+B_i[C]_i^T\left(\int_{\Gamma_i}[\mathrm{N}]_i^T(Mm_i+Nn_i)\,d\Gamma\right.$$
$$\left.\left.-\int_{\Gamma_i}[\mathrm{N}]_i^T[\mathrm{N}]_i[\mathrm{C}]_i\,d\Gamma\{\delta^*\}_i\right)\right)=0 \quad (95)$$

次に，定数 A_i，B_i を，重ね合わせの原理を表す式（85）を満足するように定める。

式（85）を式（89）(92）を用い式（93）のように表すと，次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{e}\left(\int_{\Omega_i}[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}]_i\,d\Omega\{\delta^*\}_i-\int_{\Omega_i}f\,d\Omega\right.$$
$$\left.+\int_{\Gamma_i}(Mm_i+Nn_i)\,d\Gamma-\int_{\Gamma_i}[\mathrm{N}]_i[\mathrm{C}]_i\,d\Gamma\{\delta^*\}_i\right)=0 \quad (96)$$

他方，形状関数の成分 N_j をすべて加えたものが1であることから，例えば，次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^{e}\left(\sum_{j=1}^{p}\int_{\Omega_i}N_j([\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_m]_i\,d\Omega\{\delta^*\}_i-f)\,d\Omega\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{e}\int_{\Omega_i}([\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_m]_i\,d\Omega\{\delta^*\}_i-f)\,d\Omega \quad (97)$$

ただし，N_j は，$[\mathrm{N}]_i^T$ の成分で，p は，要素 i の節点数である。

以上のことから，

$$A_i[\mathrm{B}]_i^T=1,\quad B_i[\mathrm{C}]_i^T=1 \quad (98)$$

となるように，A，B を定めれば，式（85）は，成立する。

結局，次式となる。

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\{\delta\}_i}=\sum_{i=1}^{e}\left(\int_{\Omega_i}[\mathrm{N}]_i^T[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}]_i\,d\Omega\{\delta^*\}_i\right.$$
$$-\int_{\Omega_i}[\mathrm{N}]_i^T f\,d\Omega+\int_{\Gamma_i}[\mathrm{N}]_i^T(Mm_i+Nn_i)\,d\Gamma$$
$$\left.-\int_{\Gamma_i}[\mathrm{N}]_i^T[\mathrm{N}]_i[\mathrm{C}]_i\,d\Gamma\{\delta^*\}_i\right)=0 \quad (99)$$

b） 変分法による定式化

変分法で，次の式を導くことができる汎関数 Π を見い

だすことができれば，定式化ができる。

$$\delta \mathrm{II}=\sum_{i=1}^{e}\left(\int_{\Omega_i}\delta\phi_i^{*T}\left(\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}-f\right)d\Omega\right.$$
$$\left.+\int_{\Gamma_i}\delta\phi_i^{*T}(Mm_i+Nn_i-M^*m_i-N^*n_i)\,d\Gamma\right)$$
$$=0 \qquad (100)$$

$$=\sum_{i=1}^{e}\left(\int_{\Omega_i}\delta\phi_i^{*T}([\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}]_i\{\delta^*\}_i-f)\,d\Omega\right.$$
$$\left.+\int_{\Gamma_i}\delta\phi_i^{*T}(Mm_i+Nn_i-[\mathrm{N}]_i[\mathrm{C}]_i\{\delta^*\}_i)\,d\Gamma\right)$$
$$=0 \qquad (101)$$

これは，次の汎用関数IIを最小にする必要条件を示している。

$$\mathrm{II}=\sum_{i=1}^{e}\left(\int_{\Omega_i}\tfrac{1}{2}[\mathrm{B}]_i^{-1}([\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}]_i\{\delta^*\}_i+f)^2\,d\Omega\right.$$
$$\left.+\int_{\Gamma_i}\tfrac{1}{2}[\mathrm{C}]_i^{-1}(Mm_i+Nn_i-[\mathrm{N}]_i[\mathrm{C}]_i\{\delta^*\}_i)^2\,d\Gamma\right)$$
$$(102)$$

すなわち，許容関数を，次の形で表現できるすべての関数とし，この関数の中における最良の近似解が，式(102)の極値を求めることにより得られることを示している。ただし L_a は，任意とする。

$$\phi_a^*=\sum_{i=1}^{e}L_a(\phi_i^*)=\sum_{i=1}^{e}[\mathrm{N}]_i[\mathrm{B}_a]_i\{\delta\}_i \qquad (103)$$

そして，汎関数IIを用いると，式(99)の定式化が得られる。

6.3 定式化の基本式

式(99)をもとの表現により表すと次式となる。

$$\sum_{i=1}^{e}\left(\int_{\Omega_i}[\mathrm{N}]_i^T\left(\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}-f\right)d\Omega\right.$$
$$-\int_{\Gamma_i}[\mathrm{N}]_i^T(M_i^*m_i+N_i^*n_i)\,d\Gamma$$
$$\left.+\int_{\Gamma_i}[\mathrm{N}]_i^T(Mm_i+Nn_i)\,d\Gamma\right)=0 \qquad (104)$$

式(104)の第3項は，要素と要素の境界で，M，N が連続していることと，この境界で接する2個の要素の m_i，n_i のこの境界での値の符号が逆で，絶対値が等しいために，要素と要素の境界で消失する。ただし，要素と全領域との自然境界 Γ_n に表れ，式(78)を用いて，式(104)は，次式のようになる。

$$\sum_{i=1}^{e}\left(\int_{\Omega_i}[\mathrm{N}]_i^T\left(\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}-f\right)d\Omega\right.$$
$$\left.-\int_{\Gamma_i}[\mathrm{N}]_i^T(M_i^*m_i+N_i^*n_i)\,d\Gamma\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{ej}\int_{\Gamma_{nj}}[\mathrm{N}]_j^T q\,d\Gamma \qquad (105)$$

ただし，$[\mathrm{N}]_j$ は，境界 Γ_n に接している要素 j の形状関数で，Γ_{nj} は，Γ_n と要素 j の接している境界である。また，ej は，Γ_n に接している要素の数とする。

式(105)に，部分積分の定理を用いて，変形すると次式が得られる。

$$-\sum_{i=1}^{e}\left(\int_{\Omega_i}\left(\frac{\partial[\mathrm{N}]_i^T}{\partial x}M_i^*+\frac{\partial[\mathrm{N}]_i^T}{\partial y}N_i^*-[\mathrm{N}]_i^Tf\right)\right.$$
$$\left.d\Omega\right)+\sum_{j=1}^{ej}\int_{\Gamma_{nj}}[\mathrm{N}]_j^T q\,d\Gamma=0 \qquad (106)$$

一般に，有限要素定式化では，式(106)の第1項が得られ，第2項の境界条件は，定式化が完了した時点で考慮される。式(106)を物理的に理解することは，容易でないが，式(105)を前述の局部的な離散化の式と合わせて考えると理解が容易となる。

7．応用例

ここでは，有限要素定式化の過程の違いを明らかにするために，本手法と他の方法による定式化について比較することにする。

7.1 弾性問題

例題として，図－1に示す問題について，仮想仕事の原理，ガレルキン法，本手法による定式化を行う。有限要素分割を図－1により行った場合について述べることにする。ここで，節点1，2は，x，y 方向とも変位が個定であり，境界12において，x，y 方向変位がゼロであることを示している。また，境界34には・単位面積あたりの力を単位にもつ分布荷重 $\sigma_x^{(B)}$，$\tau_{xy}^{(B)}$ が作用し，要素内部に x 方向の体積力 X と y 方向の体積力 Y が作用しているとする。

1） 仮想仕事の原理による定式化

仮想仕事の原理により導かれる定式化の式[2)]を，例題にあてはめると，式(107)が得られる。

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_4 \end{Bmatrix}=\int_{\Omega(1)}[\mathrm{B}]_{(1)}^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}]_{(1)}[\mathrm{B}]_{(1)}\,d\Omega\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}$$
$$-\int_{\Omega(1)}[\mathrm{N}]_{(1)}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{P}\}\,d\Omega \qquad (107)$$

$$\{f_n\}=\begin{Bmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \end{Bmatrix},\ \{\delta_n\}=\begin{Bmatrix} \delta_{nx} \\ \delta_{ny} \end{Bmatrix},\ \{\mathrm{p}\}=\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (108)$$

ただし，$\{f_n\}$ は，節点 n に作用する力であり，その x， y 方向成分を f_{nx} f_{ny} とする。また $\{\delta_n\}$ は，節点 n の変位であり，その x， y 方向成分を δ_{nx}, δ_{ny} とする。行列 $[\mathrm{N}]_{(e)}$ は，要素 e において，節点変位から要素内部の変位を内挿す関数で，形状内数と呼ばれるものである。行列 $[\mathrm{B}]_{(e)}$ は，要素 e において，節点変位から，要素内部のひずみを与える行列である。行列 $[\mathrm{D}]_{(e)}$ は，要素 e において，要素内部のひずみから，要素内部の応力を与える行列である。

同様に，要素（2）について，次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \int_{\Omega(2)} [\mathrm{B}]^T_{(2)} [\mathrm{D}]_{(2)} [\mathrm{B}]_{(2)}\, d\Omega \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_4 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} - \int_{\Omega(1)} [\mathrm{N}]^T_{(2)} \{\mathrm{P}\}\, d\Omega \quad (109)$$

また，境界43に作用する分布力も仮想仕事の原理から次のように表される。

ただし，$\sigma_x^{(B)}$ を境界43に作用する単位面積あたりの x 方向力の分布を表す関数とする。また，$\tau_{xy}^{(B)}$ をこの境界に作用する単位面積あたりの y 方向力の分布を表す関数とする。この例の場合では，$\sigma_x^{(B)}, \tau_{xy}^{(B)}$ ともに y のみの関数である。

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \\ f_3 \end{Bmatrix} = -\int_{\Gamma 43} [\mathrm{N}]^T_{(2)} \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(B)} \\ \tau_{xy}^{(B)} \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (110)$$

ただし，Γ_{43} は，境界 *34* を表すものとする。

また，式（110）の節点1に関する力 $\{f_1\}$ は，$[\mathrm{N}]^T_{(2)}$ の節点1に関する成分が境界 Γ_{43} でゼロであるので，ゼロである。

結局，これらの式により表される節点力が x， y 方向平衡するように，それらの節点力の和をゼロとおくと，次式が得られる。

$$\sum_{e=1}^{2} \left(\int_{\Omega(e)} [\mathrm{B}]^T_{(e)} [\mathrm{D}]_{(e)} [\mathrm{B}]_{(e)}\, d\Omega \{\delta\}^{(e)} - \int_{\Omega(e)} [\mathrm{N}]^T_{(e)} \{\mathrm{P}\}\, d\Omega \right) - \int_{\Gamma 34} [\mathrm{N}]^T_{(2)} \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(B)} \\ \tau_{xy}^{(B)} \end{Bmatrix} d\Gamma = 0 \quad (111)$$

ただし，$\{\delta\}^{(e)}$ は，たとえば $e=1$ なら次の式で与えられるもので，要素 e の3節点の変位を表すものとする。

$$\{\delta\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (112)$$

式（111）は，仮想仕事の原理により最終的に得られる式である。

この式において，境界条件により節点1と2の変位 $\delta_{1x}, \delta_{1y}, \delta_{2x}, \delta_{2y}$ をゼロとして，連立方程式を解けば $\delta_{3x}, \delta_{3y}, \delta_{4x}, \delta_{4y}$ の変位が求められ，したがって次の式から要素 e の応力が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_y^e \end{Bmatrix} = [\mathrm{D}]_{(e)} [\mathrm{B}]_{(e)} \{\delta\}^e \quad (113)$$

ここで，他の定式化の方法と比較するために，式(113)を式（107）に代入し，さらに，行列 $[\mathrm{B}]^T_{(e)}$ をその成分で表すと，次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2x} \\ f_{4y} \end{Bmatrix} = \int_{\Omega(1)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{N}_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \mathrm{N}_3}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \mathrm{N}_3}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{N}_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^1 \\ \sigma_y^1 \\ \sigma_y^1 \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega(1)} [\mathrm{N}]^T_{(1)} \{\mathrm{p}\}\, d\Omega \quad (114)$$

ただし，N_1，N_2，N_3 は，行列 $[\mathrm{N}]_{(1)}$ の成分とする。

また，式（109）についても，同様な式を導き，これらの式を加え，さらに式（110）を加えて，それをゼロと置くと，式（111）に対応する式が得られる。そして，その式のうち，x 方向成分と y 方向成分を分離すると，次式が得られる。

x 方向の均合の式は，次式で表される。

$$\sum_{e=1}^{2} \left(\int_{\Omega(e)} \left(\frac{\partial [\mathrm{N}]^T_{(e)}}{\partial x} \sigma_x^{(e)} + \frac{\partial [\mathrm{N}]^T_{(e)}}{\partial y} \tau_{xy}^{(e)} \right) d\Omega - \int_{\Omega(e)} [\mathrm{N}]^T_{(e)}\, d\Omega \right)$$

$$-\int_{\Gamma 34}[\mathrm{N}]_{(2)}^{T}\,\sigma_{x}^{(B)}\,d\Gamma=0 \qquad (115)$$

y 方向の均合の式は，次式で表される。

$$\sum_{e=1}^{2}\left(\int_{\Omega(e)}\left(\frac{\partial[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}}{\partial y}\,\sigma_{y}^{(e)}+\frac{\partial[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}}{\partial x}\,\tau_{xy}^{(e)}\right)d\Omega\right.$$
$$\left.-\int_{\Omega(e)}[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}\,Y\,d\Omega\right)-\int_{\Gamma 34}[\mathrm{N}]_{(2)}^{T}\,\sigma_{xy}^{(B)}\,d\Gamma=0 \qquad (116)$$

式（115），（116）は，仮想仕事の原理が存在するので，このような定式化を行うことができた。しかし，一般の物理現象では，このような原理が必らずしも存在しない。また，これらの式の第1項が物理的に何を意味しているか不明である。

2） ガレルキン法による定式化

ガレルキン法は，仮想仕事のような原理の存在に無関係に定式化が行える特徴を有している。そして，支配微分方程式から定式化を行うものである。

弾性問題は，次の支配方程式で表される。

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0 \qquad (117)$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0 \qquad (118)$$

ここで，式（113）で表される，$\sigma_x^{(e)}$，$\tau_{xy}^{(e)}$，$\sigma_y^{(e)}$を試験関数として，式（117），（118）に代入すると，式(117)，（118）は，必らずしも満足しなく次の残差 R_x，R_y を生じる。

$$\frac{\partial\sigma_x^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(e)}}{\partial y}+X=\mathrm{R}_x \qquad (119)$$

$$\frac{\partial\sigma_y^{(e)}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(e)}}{\partial x}+Y=\mathrm{R}_y \qquad (120)$$

そして，これらの残差に形状関数を乗じ積分し，それをゼロとする。この操作は，重み関数として形状関数を用いて，要素内部の残差を節点集中量に変換した後，それらの集中量をゼロにすることを意味している。

$$\int_{\Omega}\sum_{e=1}^{2}[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(e)}}{\partial y}+X\right)d\Omega=0 \qquad (121)$$

$$\int\sum_{e=1}^{2}[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}\left(\frac{\partial\sigma_y^{(e)}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(e)}}{\partial x}+Y\right)d\Omega=0 \qquad (122)$$

これらの式を計算するとき，$\partial\sigma_x/\partial x$, $\partial\sigma_y/\partial y$, $\partial\tau_{xy}/\partial x$, $\partial\tau_{xy}/\partial y$ より一次低い微分量すなわち，σ_x, σ_y, τ_{xy} が全領域内で連続であれば，$\partial\sigma_x/\partial x$ などの微分量は，ある有限な大きさをもつので，式（121），式（122）を計算することができる。しかし，節点の変数を変位として解析する弾性問題では，要素ごとに応力 σ_x, σ_y, τ_{xy} が異なり，要素の内部で応力が連続であっても，要素と要素の境界では，応力が不連続である。もし，連続であるとすれば，全ての要素内の応力が同じ値をもつことになり，不合理である。従って，要素と要素の境界で，応力は階段状に変化する。そのためこの変化の点における $\partial\sigma_x/\partial x$ などの微分量，すなわち，立上がりの部分の傾きは，無限大となり，式（121），（122）の計算値は，発散する。

これを回避するには，このような式の内に $\partial\sigma_x/\partial x$ などが含まれず，代りに σ_x, σ_y, τ_{xy} が含まれるようにすればよい。なぜなら，σ_x などの応力の一次低い微分量は，変位であり，変位は，要素と要素の境界で連続している。これは，形状関数が，要素と要素の境界においても変位が連続するように選ばられているからである。このために，要素と要素の境界では，σ_x などの応力が有限な値をもち，そのように表された式の値が発散しないからである。式（121），（122）をこのような式で表すために，部分積分を行う・すなわち，部分積分により，式(121)，（122）の微分を一次低くする。

上述のような不合理にもかかわらず，この部分積分が実施できるのは，式（121），（122）において，σ_x などの値が，要素と要素の境界で無限大の値をもち連続していると考えた上で，行っているのであろうと推定される。そして，部分積分して得られる外部境界における量が境界条件と一致するものと考える。

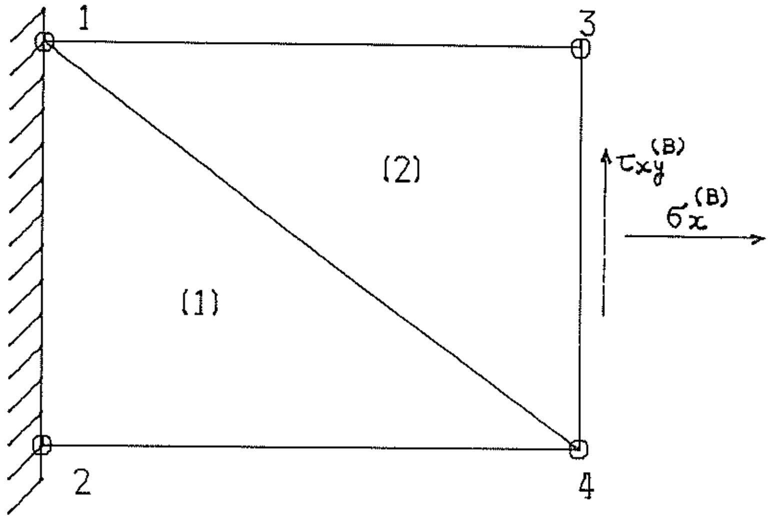
すると，この例題では，次のような式となる。

$$\int_{\Omega}\sum_{e=1}^{2}\left(-\frac{\partial[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}}{\partial x}\,\sigma_x^{(e)}-\frac{\partial[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}}{\partial y}\,\tau_{xy}^{(e)}\right.$$
$$\left.+[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}\,\mathrm{X}\right)d\Omega$$
$$+\int_{\Gamma 34}[\mathrm{N}]_{(2)}^{T}\left(\sigma_{xm_2}^{(13)}+\tau_{xy}^{(13)}n_2\right)d\Gamma=0 \qquad (123)$$

ただし，境界 Γ_{34} で $m_2=1$, $n_2=0$ であることと，式（123）の Σ が積分記号の外に出すことができることにより，式（123）は，式（115）と一致する。同様にして，式（116）と同じ式も導かれる。

最終的に，ガレルキン法による式と変分法による式が一致したが，この導出の過程には，概念的な思考が入り理解は，難しい。

もし，式（121），式（122）を単純に要素ごとに部分積分すると，次の結果が得られる。



図－1　弾性問題の例題

$$\sum_{e=1}^{2}\left(-\int_{\Omega(e)}\left(-\frac{\partial[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}}{\partial x}\sigma_x^{(e)}-\frac{\partial[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}}{\partial x}\tau_{xy}^{(e)}+[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}\,\mathrm{X}\right)d\Omega+\int_{\Gamma(e)}[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}\left(\sigma_x^{(e)}m_e+\tau_{xy}^{(e)}n_e\right)d\Gamma\right)=0 \qquad (124)$$

ここで，式（124）の第３項の積分は，図－１における境界線1243と，要素（1），要素（2）の境界14の積分が含まれる。

今，境界34に関する積分を取出すと，次式が得られる。

$$\int_{\Gamma 34}[\mathrm{N}]_{(2)}^{T}\left(\sigma_x^{(2)}m_2+\tau_{xy}^{(2)}n^2\right)d\Gamma \qquad (125)$$

ここで，注意すべきことは，$\sigma_x^{(2)}$，$\tau_{xy}^{(2)}$ は，要素内で一定であり，したがって，境界34上でも一定である。しかし，境界条件である $\sigma_x^{(B)}$，$\tau_{xy}^{(B)}$ は，y の関数で表される一定でないものである。これは，境界34で，要素側の応力と，外境界側の応力との間に残差が生じていることになる。同様に，このような境界24と境界13でも残差が生じる。

次に，境界14での要素（1），要素（2）の積分は，次のようになる。

$$\int_{\Gamma 14}\left([\mathrm{N}]_{(1)}^{T}\left(\sigma_x^{(1)}m_1+\tau_{xy}^{(1)}n_1\right)+[\mathrm{N}]_{(2)}^{T}\left(\sigma_x^{(2)}m_2+\tau_{xy}^{(2)}n_1\right)\right)d\Gamma \qquad (126)$$

また，式（126）は，$\sigma_x^{(1)}$ と $\sigma_x^{(2)}$，$\tau_{xy}^{(1)}$ と $\tau_{xy}^{(2)}$ が異なるために，一般にゼロとならず残差が発生する。しかし，もし，このような境界で発生する残差をゼロと概念上考えるなら，式（124）は，式（123）になる。

以上のことからわかるように，ガレルキン法による定式化において，２次以上の支配微分方程式から定式化する場合は，式（121），（122）の式を要素ごとに部分積分して最終的な結果が得られず，途中で必らず要素と要素の境界で発生する残差をゼロになるまで全領域に対して部分積分する特殊な操作が必要である。また，重み関数として，形状関数を用いることの理由は，単に経験的にその優位性が知られているだけで，理論的な意味は，明らかでない。

また，このようにして得られた式は，仮想仕事の原理で得られた式と同様に，局部的な離散化の意味を理解することは，難しい。

3）　要素境界の残差を考慮した定式化

式（116）の σ_x，τ_{xy} を，式（75）の M，N，X を $-f$ におくと，式（105）か（106）により定式化できる。ここでは，式（105）により定式化を行ない物理的に解釈を行う。式（105）から，x 方向の均合の場合，次の式が得られる。

$$\sum_{e=1}^{2}\left(\int_{\Omega(e)}[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}\left(\frac{\partial\sigma_x^{e}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}^{e}}{\partial y}+\mathrm{X}\right)d\Omega-\int_{\Gamma(e)}[\mathrm{N}]_{(e)}^{T}\left(\sigma_x^{(e)}m_e+\tau_{xy}^{(e)}n_e\right)d\Gamma\right)+\int_{\Gamma 34}[\mathrm{N}]_{(2)}^{T}\,\sigma^{(B)}d\Gamma=0 \qquad (127)$$

ここで，次の関数を定義する。

$$f_{\Omega e}=\frac{\partial\sigma_x^e}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}^e}{\partial y}+X \tag{128}$$

$$f_{\Gamma e}=\sigma_x^e\,m_e+\tau_{xy}^e\,n_e \tag{129}$$

式（128）で示される関数$f_{\Omega e}$は，要素eの内部に分布する連続関数で，単位体積あたりの力を示している。これは，Xが体積力であることや，式（117）の導出過程を調べることにより明らかである。いわば，関数$f_{\Omega e}$は，等価体積力を表している。

式（127）の第1項は，3.で述べた理論により，次のように理解できる。

すなわち，形状関数［N］^T_eを要素内部に分布する連続関数に乗じて，その要素の全内部領域で積分すると，この連続関数が節点に集中量をもつ離散関数に変換される。そして，この連続関数と離散関数との間には，つぎの関係をもっている。すなわち，集中量の和は，連続関数の要素領域内の積分量に等しい。また，任意の点に対する集中量によるモーメントと，連続関数によるモーメントが等しい。

式（127）の第1項は，$f_{\Omega e}$で表される体積力を要素内部領域で積分した量，すなわち要素内部で単位体積あたり発生するすべての力の和を，モーメント的に同じ量をもつように，節点に分配していることを示している。この体積力は，要素が外に対してすなわち節点に対して作用する力である。

他方，式（129）で示される$f_{\Gamma e}$は，σ_x^eが応力であり，m_e，n_eが単位を有していないことから，単位面積あたりのX方向力を表している。一般に$\sigma_x^e\,m+\tau_{xy}^e n$は，要素の境界において要素に作用する単位面積あたりのX方向外力であることが知られており，その符号を逆にした$f_{\Gamma e}$は，要素が外に対してすなわち，節点に対して作用する単位面積あたりの力である。したがって，式（123）の第2項は，境界に分布する連続関数を前述の理論により集中力に離散化することを意味している。

さらに，式（127）の第3項は，境界34に作用する連続関数$\sigma_x^{(B)}$を同様により集中力に離散化することを意味している。

結局これらの節点に作用する集中力を全要素から求め，さらに境界に作用する分布力の集中力を加え，すべての節点で力がつりあって，ゼロとなることをこの定式化は，要求している。

式（127）を，部分積分すると，式（115）が得られ，他の定式化の結果と一致する。

また，この定式化の過程は，ガレルキン法で部分積分により，要素境界の連続性の問題を回避する意味を明解に説明している。また，この定式化は，重ね合わせの原理についても，この定式化の過程から保証している。

7.2　流体問題

流体解析においては，力の均合に関して，同様な理論が適用できるので，連続の式について述べることにする。

また，この場合は，仮想仕事の原理に対応する原理や汎関数を見い出すことが難しいので，ガレルキン法と本論文で述べた方法により定式化することとする。

例題として，図－2に示す問題について定式化を行う。例題では，境界1234で，x方向流速u，y方向流速vが与えられているものとする。支配微分方程式は，次式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{130}$$

1）　ガレルキン法

ガレルキン法を式（130）に適応すると，式（121）と同様な導出過程から，次式が導かれる。

$$\sum_{e=1}^{2}\int_{\Omega(e)}[\mathrm{N}]^T_{(e)}\left(\frac{\partial u^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(e)}}{\partial y}\right)=0 \tag{131}$$

ただし，$u^{(e)}$，$v^{(e)}$は要素eにおける流速u，vの試験関数である。

この場合は，支配方程式の$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$より一次低い微分量すなわち$u^{(e)}$，$v^{(e)}$は，節点で同じ値を有すため，要素と要素の境界，要素と外部領域との境界で同じ値をもち，これらの境界で残差が発生しない。

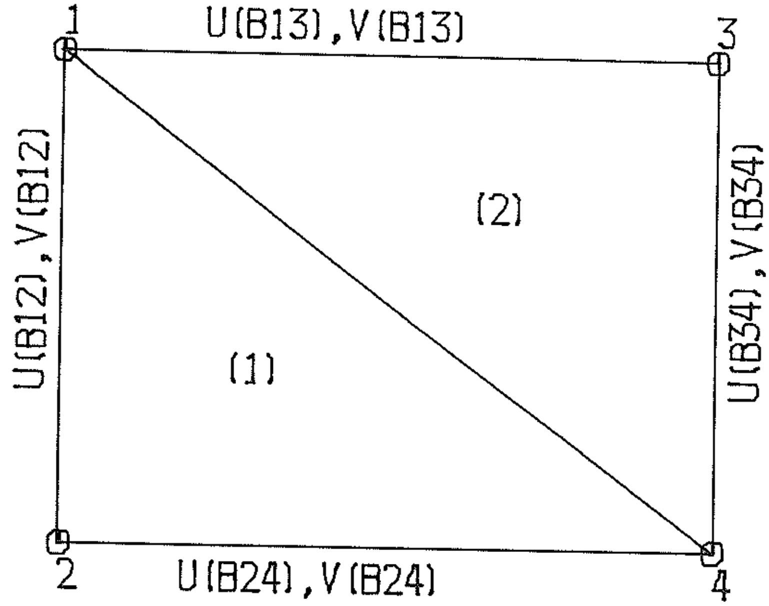
式（131）を単にガレルキン法の考え方から考えると，要素内部に発生する残差を節点に振り分けているにすぎなく，この式を物理的に解釈するには，努力を必要とする。

2）　要素境界の残差を考慮した定式化

式（130）のu，vを式（75）のM，N，とおけば，式（105）か（106）により定式化できる。

式（105）から定式化すると次式が得られる。

$$\sum_{e=1}^{2}\left(\int_{\Omega(e)}[\mathrm{N}]^T_{(e)}\left(\frac{\partial u^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(e)}}{\partial y}\right)d\Omega\right.$$
$$\left.-\int_{\Gamma(e)}[\mathrm{N}]^T_{(e)}\left(u^{(e)}m_e+v^{(e)}n_e\right)d\Gamma\right)$$
$$+\int_{\Gamma 12}[\mathrm{N}]^T_1\left(u(\mathrm{B}12)m_1+v(\mathrm{B}12)n_1\right)d\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma 24}[\mathrm{N}]^T_1\left(u(\mathrm{B}24)m_1+v(\mathrm{B}24)n_1\right)d\Gamma$$



図－2　流体問題の例題

$$+\int_{\Gamma 13}[\mathrm{N}]_2^T\ (u(\mathrm{B13})m_2+v(\mathrm{B13})n_2)\,d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma 34}[\mathrm{N}]_2^T(u(\mathrm{B34})m_2+v(\mathrm{B34})n_2)\,d\Gamma$$

$$=0 \qquad (132)$$

しかし，要素間で残差を発生しないので，式（132）の第1項以外は，互に打消し合って，ゼロとなり，ガレルキン法で得られる式（131）が導かれる。たとえば，要素と要素の境界14では，式（132）の第2項では，次の計算が含まれている。

$$-\int_{\Gamma 14}[\mathrm{N}]_1^T(u^{(1)}m_1+v^{(1)}n_1)\,d\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma 14}[\mathrm{N}]_2^T(u^{(2)}m_2+v^{(3)}n_2)\,d\Gamma \qquad (133)$$

式（133）の $[\mathrm{N}]_1$ と $[\mathrm{N}]_2$ は，境界 Γ_{14} では，同じ値となり，また，$u^{(1)}$，$v^{(1)}$，$u^{(2)}$，$v^{(2)}$ も同じ値となる。しかし m_1，n_1 と m_2，n_2 は符号が逆である。このため，式（133）は，ゼロとなる。

また境界12では，次式の計算が行われる。

$$-\int_{\Gamma 12}N_1^T(u^{(1)}m_1+v^{(1)}n_1)\,d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma 12}N_1^T(u(B12)m_1+v(B12)n_1)\,d\Gamma \quad (134)$$

同様に，$u^{(1)}$ と u(B12)，$v^{(1)}$と v(B12) は，同じ値であるため，式（134）はゼロとなる。

ここで，次の関数を定義する。

$$q_{\Omega e}=\frac{\partial u^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(e)}}{\partial y} \qquad (135)$$

式（135）で定義される関数 $q_{\Omega e}$ は，要素内部に分布する連続関数で，単位体積あたり要素の各点で発生する流量を表している。これは，式（130）の導出過程を調べれば，明らかである。そして式（130）は，この発生が生じないための条件である。他方，要素境界では，この発生が生じないので，式（131）だけで計算できる。

式（131）は，この要素内部に発生する流量を，前述の理論により，節点で集中的に発生する離散関数に変換していると考えることができる。そして，全要素からの発生をゼロにするために，各要素からの発生量を節点に集中化し，それをゼロとおくことを示している。

また，式（132）の形そのまま用いるか，式（106）により定式化した次式を用いると，

$$\sum_{e=1}^{2}-\int_{\Omega(e)}\left(\frac{\partial[\mathrm{N}]_{(e)}}{\partial x}\ u^{(e)}+\frac{\partial[\mathrm{N}]_{(e)}}{\partial y}\ v^{(e)}\right)d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma 12}[\mathrm{N}]_1^T(U(B12)m_1+V(B12)n_1\,d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma 24}[N]_1^T(u(B24)m_1+v(B24)n_1)\,d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma 13}[N]_2^T(u(B13)m_2+v(B13)n_2\,d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma 34}[N]_2^T(u(B34)m_2+v(B34)n_2)\,d\Gamma$$

$$=0 \tag{136}$$

境界で流出する流量が式に表されるので，流量を境界条件として取扱うことができる。なぜなら，次の関数を

$$q_B=u(B12)m_1+v(B12)n_1 \tag{137}$$

定義すると，q_B は，境界12から単位面積あたり流出する流量を示しており，前述の理論から，この連続関数を離散化すると，節点に集中した流出流量が得られる。すなわち，次の式で表される流量が各節点から流出する。

$$Q_B=\int_{\Gamma 12}[N]_1^T(u(B12)m_1+v(B12)n_1\,d\Gamma \tag{138}$$

このようにして，流体解析での定式化の物理的理解ができる。

8．まとめ

本論文において，要素の内部と境界に分布する連続関数を節点集中量をもつ離散関数に直接変換する式が最小2乗法により導かれた。そして，このようにして離散化された関数の性質について，モーメントの同一性，積の積分量の同一性が述べられている。これらの式の導出には，形状関数がある条件を有すとき，微分作用素が定数行列となることを導き，これが用いられている。

有限要素定式化においては，これらの結果を用いて，ガレルキン法の優位性が証明され，このような優位性を有するための形状関数の条件も示されている。

さらに，要素内部に発生する残差と境界に発生する残差の関係をガウスの発散定理を用いて関係づけ，上述の結果と変分法により定式化する方法が示された。この定式化の方法によると，要素境界の残差が式で表されており，要素境界で支配微分方程式の一次低い微分量の連続性は，要求されない。さらに，上述の局部的な離散化の理論を適応することにより，直接法にもかかわらず物理的解釈が容易な定式化となっている。この容易さを示すため，弾性問題，流体解析の例が示されている。

（1982年6月30日受付）

参考文献

1）O, C. Zienkie wicz, *The Finite Element Method in Engineering Science, 3rd edn*, McGraw-Hill, London, 1977

2）例えば，シェンキーヴィッツ，O.C.& チューン，Y. K.原著：マトリックス有限要素法，邦訳培風館，昭和45年.

港湾技研資料　No.434

1982．9

編集兼発行人　運輸省港湾技術研究所

発行所　運輸省港湾技術研究所
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所　阿部写真印刷株式会社

Published by the Port and Harbour Research Institute
Nagase, Yokosuka, Japan.