

港湾技術資料

TECHNICAL NOTE OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 304 Sept. 1978

移動する平行平板間の流れの成長

東海林秀幸

運輸省港湾技術研究所



目 次

要 旨	3
1. ま え が き	3
2. 基 礎 方 程 式	3
2.1 境 界 層 近 似	3
2.2 差 分 表 示	4
2.3 成 長 流	5
3. 数 値 計 算 結 果 と 考 察	6
3.1 チャンネルフロー ($U_p = U_l = 0$)	6
3.2 クエツテの流れ ($U_p > 0, U_l = 0$)	9
3.3 同一速度で移動する平行平板間の流れ ($U_p = U_l$)	12
4. 結 論	14
5. あ と が き	14
謝 辞	14
参 考 文 献	15
記 号 表	15
付 録	15

Flow Development between Two Parallel Moving Plates

Hideyuki SHOJI*

Synopsis

This paper investigates flow development between disc rotators which are used to collect floating rubbish on a sea surface. The disc rotators are replaced by two parallel moving plates for a numerical analysis. Flow development between these two parallel plates is assumed two dimensional laminar flow. An iterative difference method is employed to obtain numerical solutions. The numerical solution for Plane Poiseuille flow shows that the iterative method leads to a better solution in comparison to Schlichting's method, Bodoia-Osterle's linear difference method and Kitani et.al's result.

Flow development between two parallel moving plates is investigated. The inlet length, the additional pressure decay and the additional energy loss are calculated.

Flow development in Couett's flow is investigated. Flow characteristics are presented.

* Senior Research Engineer, Machinery Division

移動する平行平板間の流れの成長

東海林秀幸*

要 旨

回転円板型ごみ回収装置内の流れを平行平板に近似し、数値解を求めた。2次元定常層流として境界層方程式を導き、反復型差分法によって解を計算した。解法の検討として2次元チャンネルフローをとりあげ、Schlichtingの摂動解、Bodoia-Osterleの線形化差分法による解、木谷等の方法と比較検討し、より精度のよい解を得られることを確認した。移動する平行平板間の流れの成長が明らかとなり、助走区間長さは平行平板の速度によって大きく変化することが判明した。付加圧力損失、付加エネルギー損失を求め、補正值を与えた。

従来、あまり検討されていないクエットの流れについても数値解を求め、Bodoia-Osterleの線形化差分法と比較した。

1. まえがき

現在使用されているごみ回収装置は、船首から船尾へ流れを誘起し、船尾に設けられたコンテナ中にごみを集める方式である。流れの誘起には、回転円板と水ジェットの2型式がある。前者は回転円板の一部を水中に没し、円板表面での摩擦によって水にエネルギーを与える。後者は水ジェットの運動量交換によって流れを誘起する方法である。流れの誘起については、運動量のバランスから石塚⁵⁾がその性能を調べている。しかし、エネルギー交換のメカニズムを探るには内部の流れがどのようになっているかを知る必要がある。本報告は円板を平行平板に近似し、流れの成長を調べたものである。平行平板間の流れで重要な課題となるのは、助走区間の長さとその内部での流れの成長である。平行平板が静止した場合は、過去に数多くの研究がなされており、その特性はよく知られている。平行平板がある速度で移動している問題は著者の調べた範囲ではない。このようなケースは工学上まれなことによるのであろう。解法としては、Schlichtingの方法を拡張することを考えられるが、最近発達を遂げた数値解法のほうが高次の近似で解を得られるので有利である。そこで、本報告ではチャンネルフローの解析に用いられたBodoia-Osterleの線形化差分法を拡張した反復形差分法で解析を試みる。この方法は入口からの各断面で繰り返し計算によって解が十分に収束したのち、下流へと進んで流れ場全体を求める。各断面で繰り返し計算を実行するので反復形差分法⁶⁾と呼ぶ。線形化差分法にくらべ、与えられた非線形微分方程式を必要な精度内で満足する解を求めるから、精度はかなり

良くなる。方法の精度検討のため、チャンネルフローを計算している。移動する平行平板間の流れの計算結果から助走区間長さ、付加圧力損失、付加エネルギー損失は平板速度によって増減することが判明した。成長流の計算結果から、平板速度が臨界速度を越えると逆流を生じ、下流から助走区間へと流れ込むことが明らかとなっている。

クエットの流れの性質も反復形差分法によって数値解を求める。

本報告では160元の連立方程式を各ケースごとに数百回も解かねばならないため、計算機のメモリー節約と計算時間の大幅な短縮を可能とした方法を付録に述べた。

2. 基礎方程式

2.1 境界層近似

流速が十分に大きいと物体表面近くに粘性の影響を強く受ける層が現われ、その外側の流れは非粘性として取り扱うことができるようになる。これが境界層近似である。この近似では方程式の階数を落とすことによって解析を容易にする。境界層近似を求める一般的な方法は、境界層が十分に薄いとして基礎方程式の各項のオーダーチェックを行う。このような方法では、円管流や、チャンネルフローで現われてくる厚い境界層に対して十分な説明を与えられない。本報告では、無次元変数の導入によって境界層厚さに関係なく、高レイノルズ数の流れであれば境界層近似の可能なことを示す。

図-2.1の座標系では2次元定常流れの基礎方程式は次のようになる。非圧縮性、層流と仮定している。

* 機材部 岩盤掘削主任研究官

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (2.3)$$

ここで、 ρ 、 ν は流体の密度、動粘性係数である。無次元数として下記の諸量を定義する。

$$X = \frac{x}{DR_e}, \quad Y = \frac{y}{D}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0} R_e, \\ P = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad R_e = \frac{D u_0}{\nu} \quad (2.4)$$

D 、 u_0 は4チャンネル幅、入口平均流速である。(2.4)式を(2.1)から(2.3)式に代入すると

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.5)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{1}{R_e^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{R_e^2} \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{R_e^2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{1}{R_e^4} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \quad (2.7)$$

(2.5)式は無次元の連続の式は R_e 数に無関係であることを示している。 x 方向の運動量釣り合いである(2.6)式は右辺の項が R_e 数の影響を受ける。右辺第三項は、高い R_e 数では他の項に比べて非常に小さくなり、無視できる。(2.7)式は静圧項以外は、 R_e 数の増加によって急速に減少する。これらの事から、大きな R_e 数では(2.5)式から(2.7)式は以下のような近似が可能である。

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (2.8)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2.9)$$

$$P = P(X) \quad (2.10)$$

(2.9)式は、オーダーチェックから境界層近似を実行し、(2.4)式で定義した無次元数を導入しても求まる。本報告では境界層厚さに関係なく(2.9)式を導いている点が流体力学の参考書に述べられている方法と異なる。高 R_e 数であれば、この近似は精度をそこねることはないと言えよう。

2.2 差分表示

高 R_e 数の流れも境界層近似によって計算できることを導いたが、(2.9)式は依然として非線形項を含んでいる。非粘性流れと仮定する主流から静圧を与えるケースでは相似変換によって解析解を求めることは可能である。しかし、境界層の発達によって主流速度が影響を受け、静圧が変わってくるチャンネルフローでは解析的に解くことはかなり困難である。このようなケースでは境界層方程式を差分表示し、数値解を求めるほうが有利である。(2.8)式と(2.9)式の微分項をTaylor展開から得られる第一近似で置換する。

$$\frac{U_{j+1,i+1} + U_{j+1,i} - U_{j,i+1} - U_{j,i}}{2\Delta X} + \frac{V_{j+1,i+1} - V_{j+1,i}}{\Delta Y} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{U_{j+1,i}^* U_{j+1,i} - U_{j,i}^* U_{j,i}}{\Delta X} + \frac{V_{j+1,i}^* U_{j+1,i+1} - U_{j+1,i-1}^* U_{j+1,i}}{2\Delta Y} \\ = -\frac{P_{j+1} - P_j}{\Delta X} + \frac{U_{j+1,i+1} - 2U_{j+1,i} + U_{j+1,i-1}}{\Delta Y^2} \quad (2.12)$$

(2.11)式の左辺第一項はBodoia-Osterle²⁾の差分のとりにかたで誤差の発生および下流への伝播を防ぐと言われている。平行平板間の流れでは各断面で流量は一定であるから

$$\sum_{n=1}^{N+1} U_{j+1,n} + \frac{1}{2}(U_p + U_l) = N+1 \quad (2.13)$$

U_p と U_l は上下平板の速度で、 N は各断面での Y 方向の分割数である。境界条件は、入口で一様流速とし、上下平板面ですべりがないとすれば、

$$X=0, Y \geq 0 : U=1.0, V=0.0, P=0.$$

$$X > 0 \begin{cases} Y=0 & : U=U_p, V=0.0 \\ Y=1 & : U=U_l, V=0.0 \end{cases} \quad (2.14)$$

(2.12)式は前進形差分をといているので上流で全ての量が既知であれば、 ΔX だけ離れた下流で解を求めることができる。次々と下流へと解を求めながら進んで行き、流れが十分に発達した点で計算を終了する。具体的な計算手続きは次のようになる。 j 断面上の各点で U 、 V 、 P がすべて既知とする。 $j+1$ 段目の各点に(2.12)式を適用して $N-1$ 個の連立方程式をたてる。その際に $U_{j+1,i}^* = U_{j,i}$ 、 $V_{j+1,i}^* = V_{j,i}$ と非線形項の一部を段目の値で近似して線形化する。さらに(2.13)式を連立させると、未知数と方程式の数は一致し、解を求められる。ここで求まるのは $U_{j+1,i}$ と P_{j+1} である。(2.11)式に $U_{j+1,i}$ を代入し、平板に隣り合う点から $V_{j+1,i}$ を計算

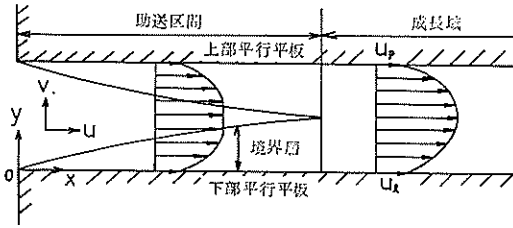


図-2.1 座標系と流れの区分

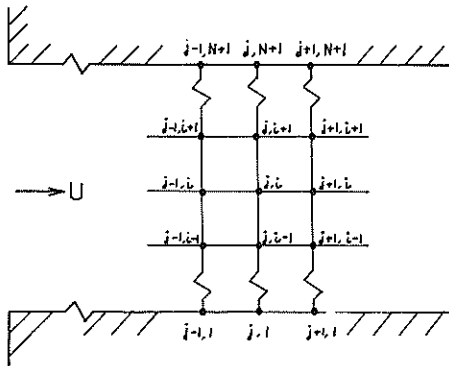


図-2.2 差分表示による座標系

する。j+1段目の流速と静圧は求めたことになる。ただし、注意すべき点は、(2.12)式 の非線項を線形化して解を求めていることである。求めた j+1段目の解から同様の手続きで j+2段目を解き、下流へと進むのが Bochia-Osterle²⁾ の線形化差分法である。この方法は厳密に非線形の方程式を解いていることにはならない。本報告では、図-2.3 の流れ図のようと j+1段目で繰り返し計算を実行する。線形化差分法で求めた $U_{j+1,i}$ 、 $V_{j+1,i}$ を再度、 $U_{j+1,i}^*$ と $V_{j+1,i}^*$ に代入して連立方程式を解く。この手続きを繰り返しの前後で U の最大パーセントエラーが、 10^{-9} 以下となった後、下流の j+2 段目に進み同様の計算を実行する。この方法では、線形近似からスタートし、非線形の式をある範囲の誤差で満足する解を求められる。Bodoia-Osterle²⁾ の解を第一近似として高次の近似解を計算できると言える。

この方法では、180元あるいは360元 の連立一次方程式を1ケースにつき数百回解かねばならないので付録に計算機の記憶容量と計算時間を大幅な短縮をはかる方法を述べた。連立一次方程式の解法は Gauss の消去法である。

2.3 成長流

移動する平行平板が十分に長いと流れは成長し、流速は放物線で表わされる。(2.9)式に $v=0$ 、 $\frac{\partial U}{\partial X}=0$ を代

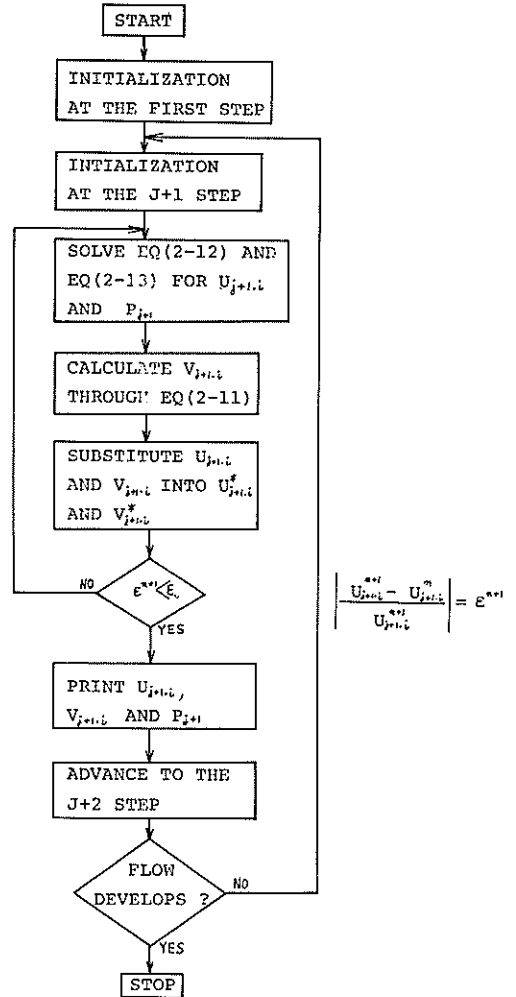


図-2.3 反復形差分法の計算手順

入し、Y について 2 重積分を行ない上下平板での境界条件を用いれば、U は

$$U = \frac{1}{2} \frac{dP}{dX} Y^2 + \left(U_p - U_t - \frac{1}{2} \frac{dP}{dX} \right) Y + U_t \quad (2.15)$$

となる。 $U_p = U_t = 0$ とすれば 2次元チャンネルフローとなり、 $U_t = 0$ 、 $U_p \neq 0$ ならばクエットの流れである。

流量は流路内で一定であるので、(2.15)式を流路断面上で積分すると静圧こう配、流量、上下平板速度の関係が求められる。

$$\frac{1}{2} (U_t + U_p) - \frac{1}{12} \frac{dP}{dX} = 1 \quad (2.16)$$

静圧こう配は上下平板速度によって、正、負あるいはゼロのいずれの値も取り得る。

本報告の性質から、 U_p と U_t は正として、その和と静圧こう配の関係を調べてみる。

$$\text{CASE 1 : } U_t + U_p < 2 \quad (2.17)$$

CASE 2 : $U_l + U_p = 2$ (2.18)

CASE 3 : $U_l + U_p > 2$ (2.19)

CASE 1

成長域での静圧こう配は負になる。平板を通じて流体に与えられるエネルギーが粘性逸散よりも小さいので流体の全エネルギーは減少する。 $U_p = U_l = 0$ はチャンネルフローで、最大の静圧こう配を与え、その値は-12である。

CASE 2 (図-2.4参照)

成長域での静圧こう配はゼロであるから、粘性逸散と流体に与えられるエネルギーは完全にバランスしている。 $U_p = U_l$ とすれば、上下平板と流体の相対速度はゼロとなるので、入口速度分布が変わることはない。この条件ではポテンシャルフローとなってしまう。境界層は発生しないので、助走区間長さはゼロでよい。 $U_p \neq U_l$ では上下平板と速度差があり、助走区間は有限の長さとなる。成長域ではせん断流となって直線速度分布を持つ流れである。

CASE 3 (図-2.4参照)

静圧こう配は正であるから下流に行くほど静圧が高くなる流れである。粘性逸散による損失以上に平板からエネルギーを与えられるので、流体の全エネルギーは下流ほど高くなる。速度分布は一定であるからエネルギー増加は静圧の上昇として現われてくる。

速度分布は上流に凸の形で、 U_p と U_l の値がある限界を越えると逆流を生じる。一方の平板が静止しているクエットの流れでは、静止平板近傍にこの逆流の存在が知られている。両平板が同一速度であると流路中心部に逆流を生じる。 $U_p \neq U_l$ ならば、速度の小さい側に生じてくる。流路断面上のある点で流速がゼロとなる時の上下平板速度を臨界速度と呼ぶことにする。(2.15)式に(2.16)式から $Y=0.5$ で $U=0$ となる壁の速度を求められる。両平板同一速度とクエットの流れについて計算すると

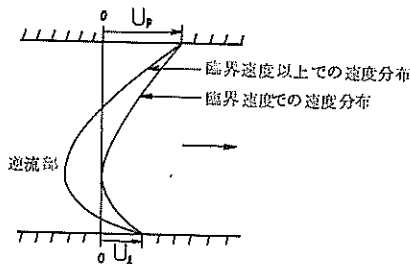


図-2.4 成長域での逆流の発生

臨界速度 U_{lc}

$$\left. \begin{aligned} U_p = U_l & : 3.0 \\ U_l = 0, U_l > 0 & : 3.0 \end{aligned} \right\} (2.20)$$

となる。

U_{pe} を(2.20)式で与えられる値以上にすると逆流域を生じる。このことは流路が十分に長い場合に言えることで、短い流路では発生しない。この節での計算では下流の条件を考慮しないためである。成長域に逆流が存在すると助走区間内に流れ込む流体によって不安定な層流境界層が乱流に遷移しやすくなり、臨界速度以上については層流の安定と並列に考えるべきである。詳しい検討は次の機会にゆづる。

3. 数値計算結果と考察

3.1 チャンネルフロー ($U_p = U_l = 0$)

本節では反復型差分法と他の方法との比較、 ΔX , ΔY の決定についてチャンネルフローの計算で述べる。差分法の精度はTaylor展開から ΔX , ΔY によってどのようになるか調べることは可能である。しかし、(2.12)式のように非線形項を含む式を解くケースでは詳細に検討した例は殆んどなく、試行錯誤によって決められている。HwangとFan⁴⁾はチャンネル内の熱伝達の計算でエネルギー式の差分に対して大まかな数値を発表している。この数値も $U \frac{\partial \theta}{\partial X}$ を除外しているのも一つの目安になるだけである。彼等の使用した ΔX , ΔY を表-3.1に示す。これを基準として、 ΔX , ΔY を変えて計算値の変動を調

表-3.1 HwangとFanによる ΔX , ΔY

X	ΔX	ΔY	N
0	0.001	0.0125	80
0.0001			40
0.0005	0.00025	0.025	40
0.001			20
0.01	0.01	0.1	10
0.1			10
∞	0.01	0.1	10

表-3.2 本報告での ΔX , ΔY

X	ΔX	N				
		No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
0	0.0001	80	160	80	160	320
0.0001		80	80	80	160	320
0.001	0.001	40	40	80	160	320
0.01		20	20	80	160	320
∞	0.005	20	20	80	160	320

No.1~No.5 : 線形化差分法
No.6~No.10 : 反復型差分法

表-3.3 助走区間長さと ΔX , ΔY の関係

反復型差分法		線形化差分法	
Run No.	L_c	Run No.	L_c
1	0.04586	6	0.04058
2	0.04820	7	0.04388
3	0.04875	8	0.04436
4	0.04893	9	0.04450
5	0.04897	10	0.04453

べる。 ΔX , ΔY と計算結果の精度を調べるのに、助走区間長さをを用いる。局所の速度分布あるいは静圧の変化は明確な基準を設けられない。助走区間長さは総合的な精度の検討に適している。助走区間長さは、中心線速度が成長流の99%に達した x 座標とする。表-3.2は使用した ΔX , ΔY である。表-3.3は計算値である。線形化差分法と反復型差分法の差は明らかである。前者は短かい助走区間を与える。これは一段前の速度を慣性項に使用するので流れの成長を促進すると考えられる。 ΔY と ΔX を下流に進むに従い変えると助走区間は変動する。すでに発表されている計算結果はすべてこのような方法をとっているが、表-3.3で明らかのように解の精度は十分でない。本報告では表-3.2中のNo.4の ΔX , ΔY を用いる。表-3.4は過去に発表された結果との比較である。Bodoia-Osterle²⁾はSchlichting¹⁾の解の問題点を指摘し、助走区間が短い原因を討論している。HwanhとFang⁴⁾の値がSchlichtingについて短かいのは、表-3.2で明らかのように分割が粗いことによる。木谷等はLeigh-Terrilの階差法を用いて計算し、Bodoia-Osterleよりも1.1%長い値を得ている。これは、木谷等が述べているとおり、線形化差分法と反復型差分法の差によると思われる。本報告はもっとも長い助走区間を与えている。これは、収束判定基準を 10^{-9} (木谷等は 10^{-4}) とし、 ΔY を $1/180$ 一定として (木谷等は $1/72 \sim 1/25$) 計算したことによる。このようなことから判断して本報告の結果は過去に発表された結果よりもかなり良い精度であると言える。

反復型差分法で本報告のような数値解を求める場合に、解くべき式が線形であれば各ステップで繰り返し計算をする必要はない。この点から考えると、ステップごとの繰り返し数は相対的な非線形性を表わしていることになる。電子計算機の有限けたのメモリー、収束判定基準によって非線形性の絶対的評価は困難である。表-3.5に各ステップでの反復数を示す。成長域に近づくに従って非線形性が減少することは無理なく期待できる。計算結果とその傾向を現わしている。注目すべきことは、反復数が ΔY によって変らないことである。入口からの距離に

よって ΔX , ΔY を変えると ΔY の変えた断面での繰り返し数が増加する。 ΔY を変えることによってノイズを発生し、その除去のために多くの繰り返し計算も必要なのであろう。表-3.5から判断すると線形化差分法で ΔX , ΔY をともに変えて計算するのは精度のよい解を得るには適当でないことがわかる。計算した流速を図-3.1に示す。

流れは入口から無限遠方で成長する。差分近似では、上流で発生する誤差の伝播、有限けたの計算によって入口から有限の距離で流れは成長してしまう。それゆえ、入口からより長い距離で成長する流れを与える方法が望ましい。線形化差分法と反復型差分法を同一の ΔX , ΔY で比較してみると表-3.6のようになる。 L_f は中心線速度が1.50となる x 座標である。2つの方法ともに入口から ΔY を変えずに計算したほうがよい。いずれの $\Delta X, \Delta Y$ でも反復型差分法は線形化差分法よりも長い L_f を与えるので、途中で発生する誤差は小さくないと言える。

表-3.7は $x=0.20$ での中心線速度を示したものである。2つの方法にはほとんど差がない。助走区間内では(2.9)式非線形項の取扱いによって解に差を生じるが、成長流に近い流れでは両者に差がないことを示している。

十分に長いチャンネル内の圧力損失を入口から成長流として計算すると実際の値よりも小さめに見積ってしまう。これは助走区間内の圧力損失を無視するからである。幅1m, $Re=1,000$ であれば、本報告の結果から助走区間長さは

$$x = L_c \times D \times Re = 0.0489 \times 10^3 = 48.9 \text{ (m)}$$

となる。これより長い流路では助走区間内の損出を付加してやる必要がある。成長流として入口から圧力損出を計算すれば

$$P(0) - P(X) = 12X \quad (3.1)$$

となるが、付加圧力損出 C_∞ を

$$C_\infty = \lim_{X \rightarrow \infty} [P(0) - P(X) - 12X] \quad (3.2)$$

と定義する。静圧の変化は図-3.2のようになる。静圧のこう配は $X=0.0489$ では一定とならず、 $X > 0.06$ 以上である。 C_∞ を $X=0.2$ で求めると表-3.8のようになる。 Y 方向分割が80以上では線形化差分法は反復型差分法より5.7%大きい付加圧力損失を与える。表-3.9は他の報告と C_∞ を比較したものである。本報告はもっとも高い C_∞ である。

線形化差分法との比較を中心にして反復型差分法の精度を調べた。その結果、表-3.2中No.4の ΔX , ΔY を用

表-3.4 他の文献との比較

研究者名	L_c (チャンネル半幅)
本報告	0.196
Bodoia-Osterle	0.176
Hwang-Fan	0.169
Roidt-Cess*	0.182
Schlichting	0.160
木谷等*	0.178

* 木谷等の論文より引用

表-3.5 各ステップでの反復数 ($\epsilon=10^{-9}$)

x	反 復 数				
	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
0.0001	29	27	29	27	27
0.0002	15	16	15	16	16
0.0004	14	13	14	13	13
0.0006	13	13	13	13	13
0.0008	12	12	12	12	12
0.001	12	12	12	12	12
0.002	20	20	12	12	12
0.003	11	11	11	11	11
0.004	11	11	11	11	11
0.005	11	11	11	11	11
0.006	11	11	11	11	11
0.007	11	11	11	11	11
0.008	10	10	10	10	10
0.009	10	10	10	10	10
0.010	17	17	9	9	9
0.015	9	9	9	9	9
0.020	9	9	9	9	9
0.025	9	9	9	9	9
0.030	8	8	8	9	9
0.035	8	8	8	8	8
0.040	8	8	8	8	8
0.045	8	8	8	8	8
0.050	8	8	8	8	8
0.055	8	8	8	8	8
0.060	8	8	8	8	8
0.065	16	15	8	8	8

表-3.6 $U_{0s}=1.50$ となる距離 x

Run No.	L_f	Run No.	L_f
1	0.06137	6	0.06074
2	0.07022	7	0.066095
3	0.115194	8	0.106575
4	0.139286	9	0.121891
5	0.36500	10	0.15143

表-3.7 $x=0.20$ での U_{0s} の値

Run No.	U_{0s}	Run No.	U_{0s}
1	1.515149	6	1.515152
2	1.503757	7	1.503759
3	1.500232	8	1.500234
4	1.500057	9	1.500058
5	1.500013	10	1.500014

表-3.8 付加圧力損失と $\Delta X, \Delta Y$ の関係

Run No.	C_{∞}	Run No.	C_{∞}
1	0.396	6	0.411
2	0.363	7	0.381
3	0.354	8	0.374
4	0.353	9	0.373
5	0.353	10	0.373

表-3.9 他の文献と本報告の付加圧力損失の比較

研究者	C_{∞}	研究者	C_{∞}
本報告	0.353	石 沢	0.330
木谷等*	0.333	Hwang-Fan	0.313
Schiller*	0.314	Roidt-Cess*	0.315
Schlichting	0.301	Sparrowほか*	0.325
Collins-Schowalter*	0.338	Bodoia-Osterle	0.338

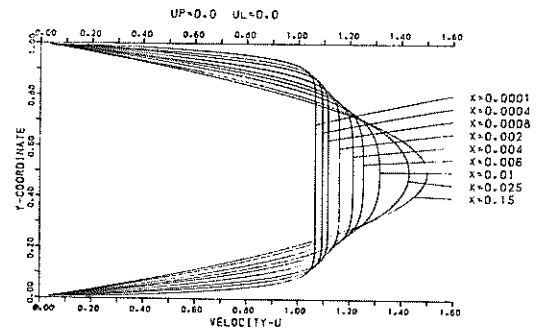


図-3.1 流れの成長の様子 ($U_p=U_t=0$)

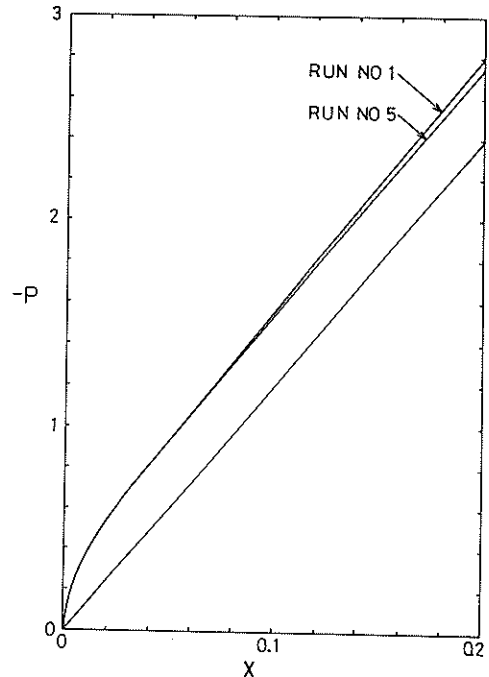


図-3.2 静圧の変化 ($U_p=U_t=0$)

いれば十分な精度の解を得られることがわかった。木谷等の結果と較べて他の方法よりも計算時間は短かくて信頼できる解を得たのも明らかである。

3.2 クエットの流れ ($U_p > 0, U_t = 0$)

クエットの流れはチャンネルフローに較べて詳しく調べられた機会が非常に少くない。これは工学上応用範囲が狭いことに起因すると思われる。2次元チャンネルフローはダクトや平板間に現われるが、クエットの流れとして知られているのは軸受の潤滑の問題ぐらいである。しかし、港湾工事関係に目を向けてみると図-3.3に描いたケースはクエットの流れである。図中(a)は本報告でとり上げた加速装置の船体側と船体間の流れである。加速装置は有限の速度で運動するが船体は静止している。(b)のように平坦な海底で静穏な浅水域を航行する船舶もクエットの流れの例となる。船底に働く静圧の低下によって、船体は沈むので十分な余裕水深がなければ海底に接触する危険性がある。図-3.3の2例はいずれも短い流路であるから成長流としては取り扱えず、助走区間内の性質を知る必要がある。

クエットの流れの助走区間内の性質を詳しく計算したのは著者の知る限りではBodoia-Osterle²⁾のみである。彼等の方法はチャンネルフローと同様に線形化差分法である。チャンネルフローでは入口での無次元平均流速と平板間の速度差は1.0にすぎず、線形化差分法を用いても極端に精度を落すことはない。しかし、クエットの流れでは、動平板の速度はかなり大きくなることもある。その場合には、入口付近での非線形項の影響が大きくなるので、線形化の誤差は無視しえなくなる。このような観点からすれば、反復型差分法によって計算するほうが、より精密に現象をは握できると考えられる。

(2.13)式で $U_t = 0, U_p > 0$ とすれば、

$$\sum_{n=1}^N U_{j+1, n} + \frac{1}{2} U_p = N+1 \quad (3.3)$$

となる。 $\Delta X, \Delta Y$ を表-3.2に示したNo.4の値を用いる。解を求める手法は前節のチャンネルフローと同一である。収束判定規準も同一で 10^{-9} とする。 U_p は0.2から0.2ピッチで5.0まで計算した。Run No. と U_p を表-3.10に示す。図-3.6に代表的な流れの成長の様子を示す。チャンネルフローと同じ定義で助走区間長 L_e を求めると表-3.11に列記したようになる。 L_e は $U_p = 1.4$ で最少となり、その後 U_p とともに増加する。Bodoia-Osterle²⁾の計算によると、 L_e は U_p に関して単調増加になるとされている。本報告では、線形化差分法を用いても単調増加になる結果は求まっていない。前節で $\Delta X, \Delta Y$ の検討

を行っており、反復型差分法についてもその精度は十分であることを確認している。Bodoia-Osterleの報告には疑問がある。前節チャンネルフローでも彼等は、 $\Delta X, \Delta Y$ の値を発表していないので、結果の信頼性は薄いと言わざるを得ない。

基礎方程式の非線形性の相対的評価として、各ステップでの反復数を調べてみると図-3.4のように U_p の値によって入口からの反復数は単調に減少しなくなる。全体の傾向として、 U_p が大であれば反復数も大となる。 $U_p < 2.0$ の範囲では、平板と流体間の相対速度の低下によって反復数の減少を期待したが、計算結果は逆となっている。これは上平板での相対速度が低下しても下平板では一定であることによる。 $U_p > 3.0$ では下流のある点から反復数は急激に上昇する。この流れは逆流を生じるため解が不安定になる。層流境界層は逆流に対して不安定になるので、助走区間内で逆流を生じる点附近から反復数は増加する。成長域近くでは非線形項の影響が小さくなるので反復数は減少する。

静圧は図-3.5のように U_p の値によっては正となる。 C_{∞} を(3.4)式で定義する。

$$C_{\infty} = \lim_{X \rightarrow \infty} \{ P(0) - P(X) - 6(U_p - 2)X \} \quad (3.4)$$

$U_p > 2$ の範囲では成長の静圧こう配が正になることを前節第3節で述べた。助走区間内の静圧は U_p が大になるほど入口近くから正になることは図-3.5からわかる。 $U_p = 3$ では流路内のいずれの点においても逆流を生じないが、静圧は $X = 0.65$ から正となる。この距離は助走区間の68.9%である。 $U_p = 4$ で $X > 0.015$, $U_p = 5$ ではほとんど全域で正の静圧となる。 C_{∞} の絶対値は表-3.12に示したように $U_p = 1.5$ で最少となり、 $U_p > 1.5$ では単調に増加する。この範囲では、助走区間は長くなるので成長流の仮定から静圧計算を行うのはかなりの誤差を伴うであろう。図-3.6は流速の成長の様子を示す。

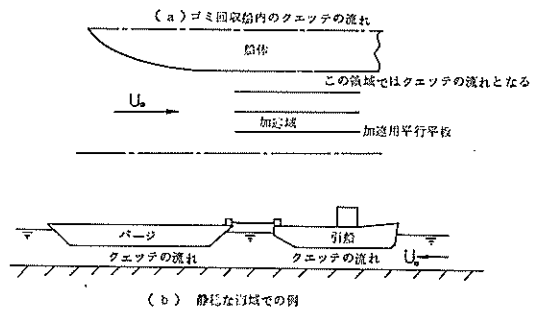


図-3.3 クエットフローの一例

表-3.10 Run No. と $U_p (U_z = 0.0)$

Run No.	U_p	Run No.	U_p
1	0.2	12	1.80
2	0.4	13	2.0
3	0.6	14	2.2
4	0.8	15	2.4
5	1.0	16	2.6
6	1.2	17	2.8
7	1.4	18	3.0
8	1.49	19	3.5
9	1.50	20	4.0
10	1.51	21	4.5
11	1.60	22	5.0

表-3.11 U_p と助走区間長さの関係

U_p	L_e	U_p	L_e
0.2	0.0480	1.8	0.0547
0.4	0.0464	2.0	0.0627
0.6	0.0439	2.2	0.0695
0.8	0.0395	2.4	0.0758
1.0	0.0330	2.6	0.0820
1.2	0.0220	2.8	0.0882
1.4	0.0103	3.0	0.0943
1.49	0.0345	3.5	0.1103
1.5	0.0358	4.0	0.1294
1.51	0.0369	4.5	0.1506
1.6	0.0443	5.0	0.1761

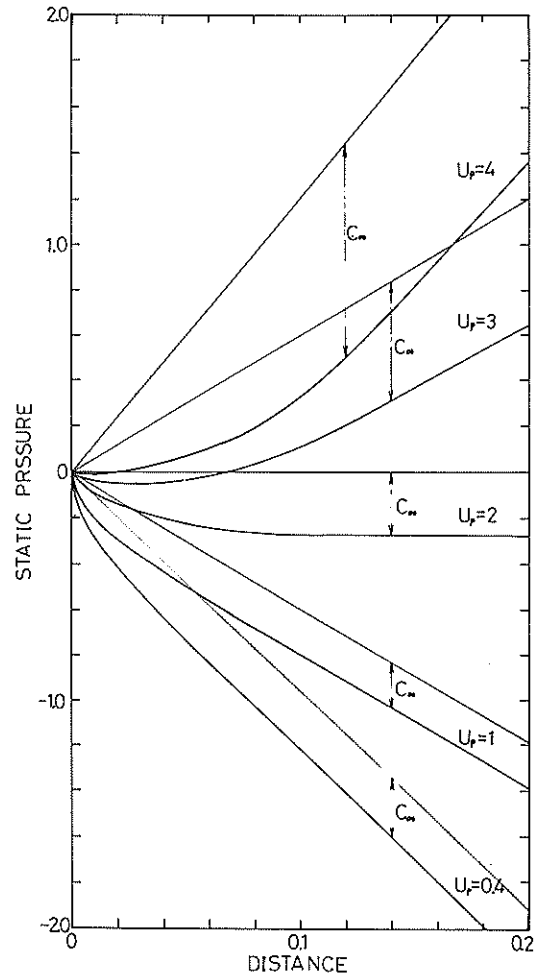


図-3.5 静圧の変化 ($U_z = 0$)

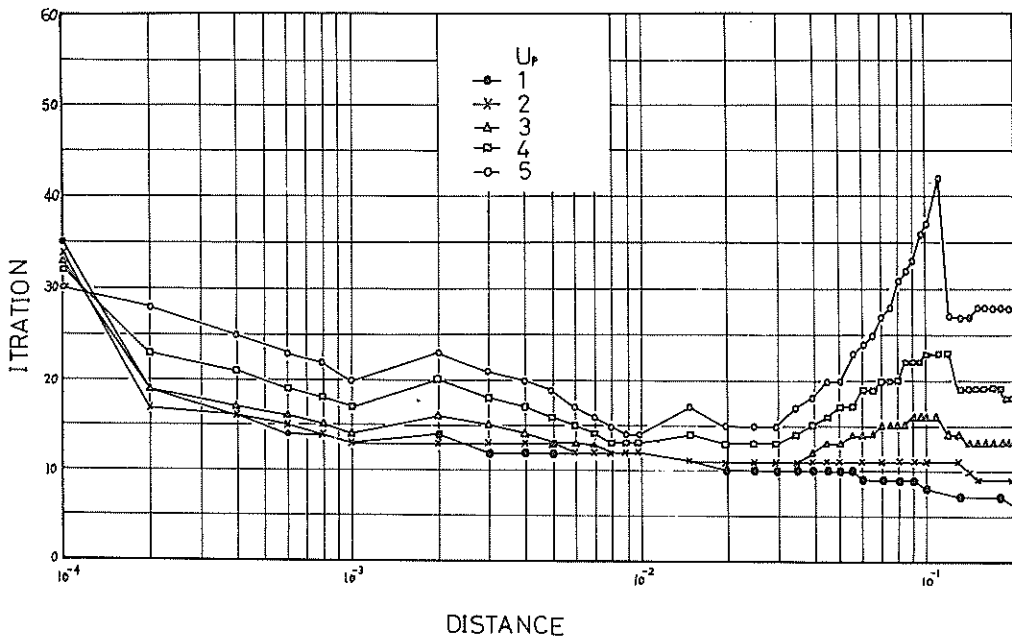


表-3.4 各ステップでの繰り返し数

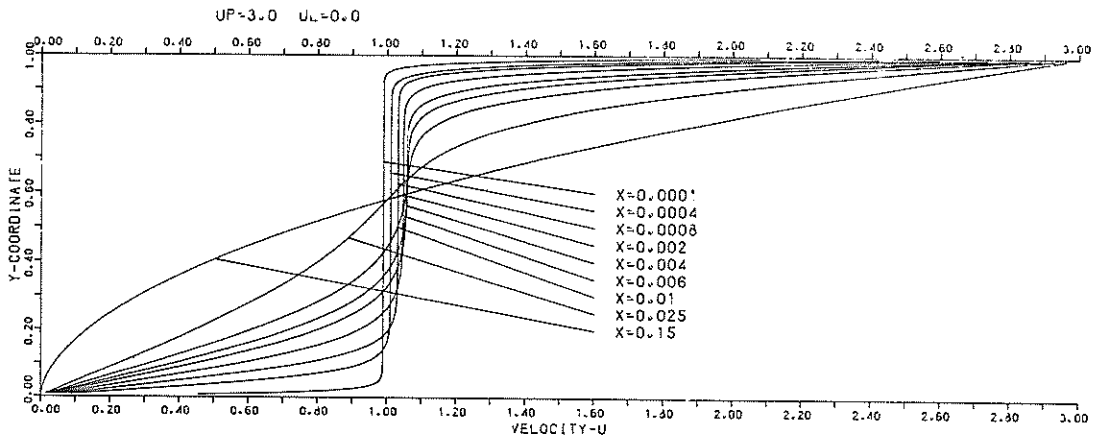
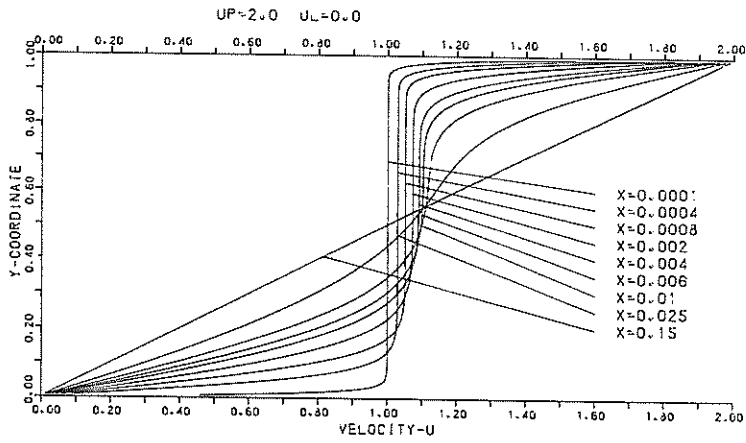
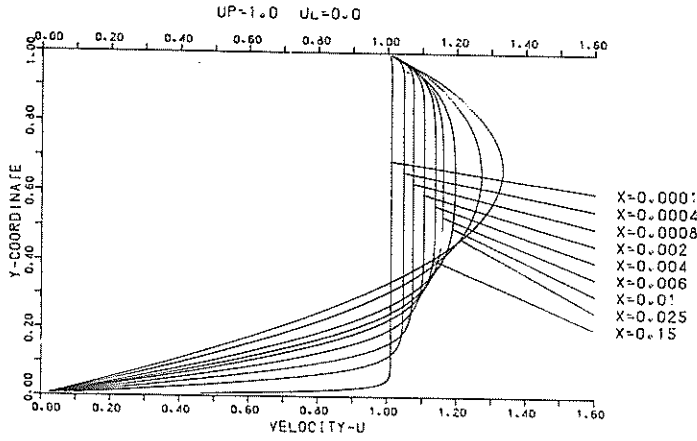


図-3.6 流れの成長の様子 ($U_L=0$)

表-3.12 付加圧力損失と U_p の関係

U_p	C_{∞}	U_p	C_{∞}	U_p	C_{∞}
0	0.353	1.49	0.215	2.6	-0.414
0.2	0.306	1.5	0.216	2.8	-0.477***
0.4	0.269	1.51	0.216	3.0	-0.547
0.6	0.241	1.60	0.223	3.5	-0.758
0.8	0.220	1.80	0.245	4.0	-1.016
1.0	0.208*	2.0	0.275**	4.5	-1.320
1.2	0.205	2.2	-0.167	5.0	-1.667
1.4	0.210	2.4	-0.360		

* Bodoia-Osterle の結果より 8.9%大
 ** " " " " 3.9%小
 *** " " " " 3.5%小

3.3 同一速度で移動する平行平板間の流れ

$$(U_p = U_l)$$

同一速度で移動する平板間の流れは、ごみ回収装置内で発生する流れと類似している。チャンネルフローやクエットの流れと同様の差分法を用いれば平板上での境界条件のみが異なる。この流れでは $U_p = U_l$ であるから (2.17), (2.18), (2.19) 式でわかるように、 $U_p = U_l = 1.0$ を境として静圧こう配が変る。臨界速度は 3.0 である。それ以上の平板速度では、下流から助走区間内へ流れ込む逆流を生ずるのはクエットの流れと同様である。この流れでは、流路中心線に関して対称なので、逆流域の最大流速は中心線上に現われる。

流量に関する (2.13) 式は

$$\sum_{n=1}^N U_{j+1,n} + U_p = N + 1 \quad (3.5)$$

である。取束判定基準は 10^{-9} とした。

各平板速度での流れの成長の様子は図-3.7 のようになる。前節と同じ定義で助走区間長さを求めると表-3.13 に示したように U_p によって大きく変る結果となった。 $U_p = 1.0$ では全域がポテンシャルフローとなるので粘性の影響は現われない。 L_s は最少値としてゼロとなる。 $U_p < 1.0$ では L_s は単調に減少し、 $U_p < 1.0$ の範囲では単調に増加する。 $U_p = 1.0$ に関して、 L_s は対称性を持たない。例えば、 $U_p = 0.8$ と $U_p = 1.2$ では後者は前者の 13.5% 長い助長区間であり、 $U_p = 0.0$ と $U_p = 2.0$ では 43.6% となる。このことは、 $U_p > 1.0$ のケースではかなり長い助走区間を有するので R_s 数の大なる場合は流路の大部分が助走区間となることを意味している。

表-3.14 は次式で定義した付加圧力損失の計算結果である。

$$C_{\infty} = \lim_{X \rightarrow \infty} \{P(0) - P(X) - 12(U_p - 1)X\} \quad (3.6)$$

C_{∞} の付加圧力損失という名称はチャンネルフローで使われたもので流路内でのエネルギー損失と関係している。本報告のように流体へエネルギー供給がある問題では適当でない。ここでは全域を成長流と仮定して計算した静圧の補正量として C_{∞} を解釈する。 $U_p = 1.0$ でポテンシャルフローとなるので、 $C_{\infty} = 0$ となり、 $U_p < 1.0$ では C_{∞} は単調に減少する。 $U_p > 1.0$ の範囲では、 C_{∞} は単調に増加せず $U_p = 1.6$ で最大値になりその後減少する。 $U > 1.0$ では、 C_{∞} が負となるが、これは成長流による計算値は過大になることを意味している。静圧を図-3.8 のようにプロットするとこの様子が明確になる。 C_{∞} はこの図中に示した直線と曲線の差である。 $U_p = 2.0$ では計算値が直線より上になるが $U_p = 3.0$ では逆転する。

U_p が増大するとともに静圧は上昇するので、平板を通じて流体にエネルギーが与えられることは明らかである。エネルギー上昇は静圧の増加と速度分布の変化として現われる。これを全圧の変化としてとらえ、入口からの距離 X の断面上での値 E を次式のように定義する。

$$E(X) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} U^2 + P \right) dY = \int_0^1 \frac{1}{2} U^2 dY + P \quad (3.7)$$

右辺第一項は速度分布によって決まり、第二項は静圧である。 $U_p < 1.0$ は全圧 E が入口からある距離で必ず負となる。この距離は U_p の増加に伴い下流へと移動する。 U_p の増加はエネルギー増大であるから、粘性逸散に全圧低下を補償していることである。換言すれば、 U_p の上昇によって $E = 0$ となる点が下流に移動するのはエネルギー供給の増加を示している。 $U_p = 1.0$ の流れについてエネルギー流入の点から考察してみる。この条件では全域でポテンシャルフローで圧力損失は全くない。平板からエネルギーを与えているので、流路各断面での損失と供給されるエネルギーが助走区間内でも完全に一致していると解釈できる。成長域では前章第3節で述べたことを助走区間についても同様のことが言える。 $U_p > 1.0$ では流路全域で E は正で単調に増加する。 $U_p < 1.0$ のケースは流路途中で E が負となる。これは入口で $P = 0$ の条件を用いているためで、(2.9) 式は静圧に関して線形であるから、入口で $P > 0$ の適当な値を使用すれば正とできる。

付加圧力損失と同様に付加エネルギー損失として E_{∞} を

$$E_{\infty} = E(X) - 12(U_p - 1)X - \frac{1}{2} \quad (3.8)$$

と定義する。表-3.15 に各平板速度に対する E_{∞} を示してある。 C_{∞} と同一の傾向を示している。

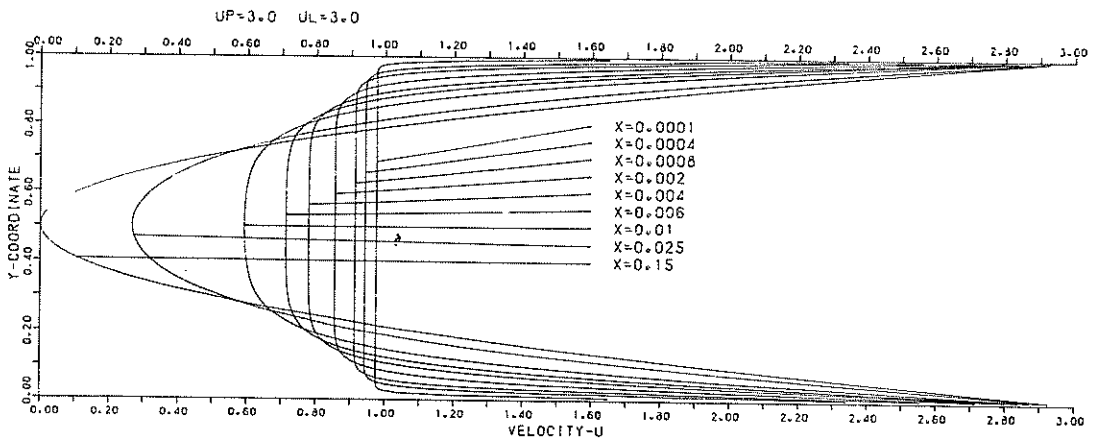
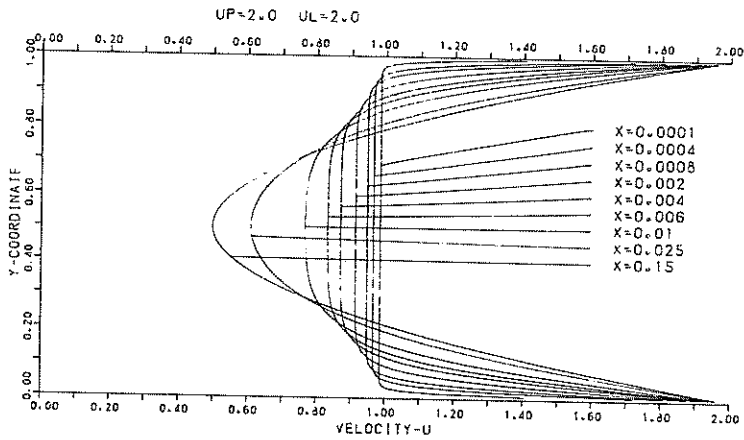
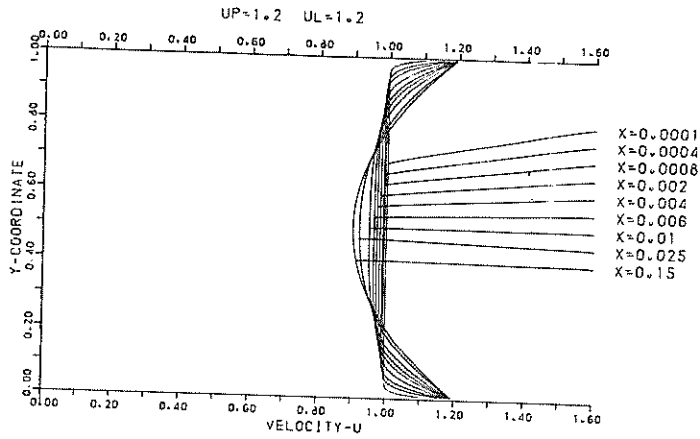


図-3.7 流れの成長の様子 ($U_p = U_i$)

表-3.13 助走区間長さと U_p の関係

U_p	L_e	U_p	L_e	U_p	L_e
0.2	0.0404	1.4	0.0488	2.6	0.0911
0.4	0.0446	1.6	0.0572	2.8	0.1022
0.6	0.0402	1.8	0.0640	2.9	0.1118
0.8	0.0319	2.0	0.0702	2.999	0.1385
1.0	0	2.2	0.0766	3.0	0.1390
1.2	0.0362	2.4	0.0833	3.2	0.1059

表-3.14 付加圧力損失と U_p の関係

U_p	C_{∞}	U_p	C_{∞}	U_p	C_{∞}
0.2	0.256	1.4	0.056	2.6	-0.060
0.4	0.174	1.6	0.067	2.8	-0.122
0.6	0.104	1.8	0.065	2.9	-0.157
0.8	0.046	2.0	0.052	2.999	-0.194
1.0	0	2.2	0.026	3.0	-0.195
1.2	0.034	2.4	-0.0111	3.2	-0.280

表-3.15 付加エネルギー損失と U_p の関係

U_p	E_{∞}	U_p	E_{∞}	U_p	E_{∞}
0.2	-0.192	1.4	0.072	2.6	0.196
0.4	-0.138	1.6	0.103	2.8	0.203
0.6	-0.088	1.8	0.129	2.9	0.205
0.8	-0.042	2.0	0.152	2.999	0.205
1.0	0	2.2	0.170	3.0	0.205
1.2	0.038	2.4	0.185	3.2	0.204

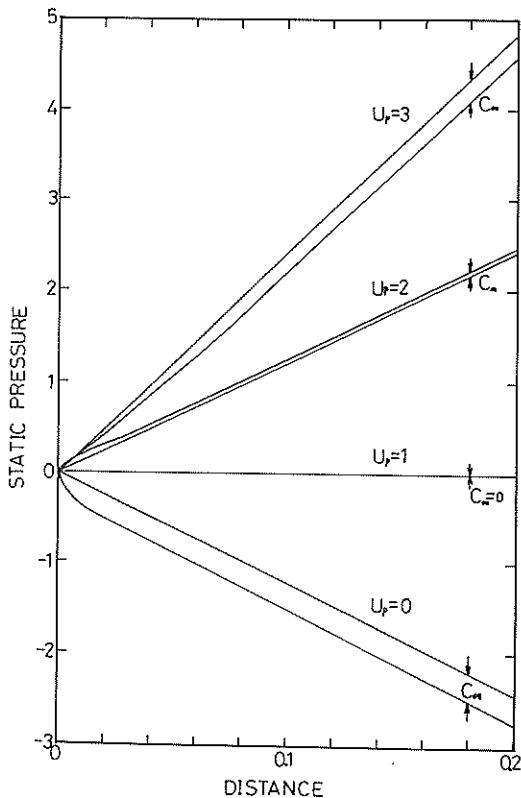


図-3.8 静圧の変化 ($U_p = U_i$)

4. 結論

本論文では回転円板型ごみ回収装置内で発生する流れの基本的な部分を取扱った。回転円板を移動する平行平板に置き換え、2次元層流と近似し、境界層方程式を誘導したのち、反復型差分法を用いて数値解を求めた。計算結果を検討すると次のような結論に達する。

- (1) N.S 方程式に無次元数を代入し、高いレイノルズ数では境界層近似は境界層厚さに関係なく成立することを明らかにした。
- (2) 反復型差分法によって従来の方法よりも精度の良い解を得た。
- (3) 移動する平行平板間の助走区間長さは、入口でのレイノルズ数と平行平板間の速度の関数である。
- (4) 平行平板速度が入口平均流速以上であれば、流体の全圧は下流ほど高くなる。

反復型差分法の精度の検討のため、チャンネルフローについて調べると次のようなことを言える。

- (5) 助走区間長さは $l = 0.0489 u_0 D / \nu$ である。
- (6) 付加圧力損失は $C_{\infty} = 0.353$ である。

クエッタの流れの数値解からは

- (7) 助走区間長さは入口でのレイノルズ数と平板速度の関数である。最少値は $U_p = 1.4$ で $l = 0.0134 u_0 D / \nu$ となる。
- (8) 付加圧力損失は、 l と同様に入口でのレイノルズ数と U_p の関数である。

5. あとがき

本論文で得た結果は回転円板内部の流れに対応するが、ごみ回収船の能力評価には船首前方から何メートルまでのごみを集められるかである。この問題には本報告のように境界層近似を用いるのは不可能である。本論文での(2.1)から(2.3)式を直接解かねばならない。解く方法について幾つかの問題点はあるが、今後検討してみたい。

謝 辞

本論文の骨子はカナダ国オンタリオ州立ウォータールー大学でのコースプロジェクトである。数値計算にはIBM 370を使用した。計算機使用料は著者の指導教官であるBurns教授が負担し、数値計算法と考察はStrong準教授にお世話になった。両氏に厚く感謝の意を表わします。補足計算は港湾技術研究所TOSBAC 5600/160を使用した。

参考文献

- 1) H. Schlichting, "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill 1955.
- 2) J. R. Bodoia and J. F. Osterle, "Finite Difference Analysis of Plane Poissuille ana Couette Flow", Applied Scientific Research, Section A, Vol.10, pp.265~276.
- 3) 木谷勝, 福迫尚一郎, 有江幹男, "層流助走区間流れにおよぼす入口速度分布の影響", 日本機械学会論文集, 37巻 299号 pp.1325~1335, 1971年7月
- 4) C. L. Hwang and L. T. Fan, "Finite Difference Analysis of Forced Convection Heat Transfer in Entrance Region of a Flat Plate Rectangular Duct", Applied Scientific Research, Section A, Vol.13, pp.401~422.
- 5) 石塚浩次, 藤井喜一郎, "海面清掃船の模型実験(その1)", 港湾技研資料No.245, 1976年9月
- 6) 藤井哲, 宮武修, 藤井 夫, 田中宏史, "サタパイ模型非ニュートン流体への自然対流熱伝達の数値解析", 日本機械学会論文集Vol.38, No.315, 1972年11月

記号表

x : x 座標
 y : y 座標

u : x 方向流速
 v : y 方向流速
 p : 静圧
 ν : 動粘性係数
 ρ : 密度
 X : 無次元 x 座標
 Y : 無次元 y 座標
 U : 無次元 x 方向流速
 V : 無次元 y 方向流速
 P : 無次元静圧
 R_i : 入口レイノルズ数
 u_0 : 入口平均流速
 D : チャンネル全幅
 U_p : 無次元上側平板速度
 U_l : 無次元下側平板速度
 N : y 方向分割数
 ΔX : 無次元 x 座標の増分
 ΔY : 無次元 y 座標の増分
 Y_c : 成長域内で最少流速となる無次元 y 座標
 U_{pc} : 臨界速度
 C_∞ : 無次元付加圧力損失
 L_e : 無次元助走区間長さ
 E : 無次元全圧力
 E_∞ : 無次元付加エネルギー損失

付録

(2.12) 式を未知数についてまとめると

$$-\left[\frac{V_{j+1,i}^*}{2\Delta Y} + \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,i-1} + \left[\frac{U_{j+1,i}^*}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,i} + \left[\frac{V_{j+1,i}^*}{2\Delta Y} - \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,i+1} + \frac{P_{j+1}}{\Delta X} = \frac{U_{j+1,i}^* U_{j+1,i}}{\Delta X} + \frac{P_j}{\Delta X} \quad (A-1)$$

となる。上式を $j+1$ 段目の各点にあてはめ、上下板上での境界条件を代入し、(2.13) 式と連立させると次のようなマトリックスを得る。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{U_{j+1,1}^*}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,1} + \left[\frac{V_{j+1,1}^*}{2\Delta Y} - \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,2} + \frac{P_{j+1}}{\Delta X} = \frac{U_{j+1,1}^* U_{j+1,1}}{\Delta X} + \frac{P_j}{\Delta X} + \left[\frac{V_{j+1,1}^*}{2\Delta Y} + \frac{1}{\Delta X^2}\right] U_p \\ & -\left[\frac{V_{j+1,2}^*}{2\Delta Y} + \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,1} + \left[\frac{U_{j+1,2}^*}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,2} + \left[\frac{V_{j+1,2}^*}{2\Delta Y} - \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,3} + \frac{P_{j+1}}{\Delta X} = \frac{U_{j+1,2}^* U_{j+1,2}}{\Delta X} + \frac{P_j}{\Delta X} \\ & \quad -\left[\frac{V_{j+1,3}^*}{2\Delta Y} + \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,2} + \left[\frac{U_{j+1,3}^*}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,3} + \left[\frac{V_{j+1,3}^*}{2\Delta Y} - \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,4} + \frac{P_{j+1}}{\Delta X} = \frac{U_{j+1,3}^* U_{j+1,3}}{\Delta X} + \frac{P_j}{\Delta X} \\ & \quad \vdots \\ & \quad -\left[\frac{V_{j+1,N-1}^*}{2\Delta Y} + \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,N-2} + \left[\frac{U_{j+1,N-1}^*}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,N-1} + \left[\frac{V_{j+1,N-1}^*}{2\Delta Y} - \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,N} + \frac{P_{j+1}}{\Delta X} = \frac{U_{j+1,N-1}^* U_{j+1,N-1}}{\Delta X} + \frac{P_j}{\Delta X} \\ & \quad -\left[\frac{V_{j+1,N}^*}{2\Delta Y} + \frac{2}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,N-1} + \left[\frac{U_{j+1,N}^*}{\Delta X} + \frac{1}{\Delta Y^2}\right] U_{j+1,N} + \frac{P_{j+1}}{\Delta X} = \frac{U_{j+1,N}^* U_{j+1,N}}{\Delta X} + \frac{P_j}{2\Delta Y} + \frac{1}{\Delta X^2} U_l \\ & U_{j+1,1} + U_{j+1,2} + U_{j+1,3} + U_{j+1,4} + \dots + U_{j+1,N-1} + U_{j+1,N} = N+1 - \frac{U_p + U_l}{2} \quad (A-2) \end{aligned}$$

(A-2)式は、 $U_{j+1,1} \sim U_{j+1,N}$ と P_{j+1} に関する連立一次方程式である。この解を求めるのは、 N があまり大きくなければ計算機の標準サブルーチンで十分である。しかし、本報告のように160元や320元の連立方程式を1ケースについて百回近く解くには時間がかかりすぎる。とくに320元では行列式だけで204k語（倍長計算として）のコアメモリーを必要とするので、あらゆる面で障害を起す。(A-2)式を調べると容易にわかるように行列式のほとんどの要素はゼロである。非ゼロ要素は規則的に配置されている。未知数の数を M とすれば、非ゼロ要素の数 K は

$$K = 5M - 6 \quad (A-3)$$

行列式の要素総数 M^2 で割れば

$$K' = \frac{5}{M} - \frac{6}{M^2} \quad (A-4)$$

となる。 $M=160$ では $K'=0.031$ 、 $M=320$ では、 $K'=$

0.016になり、解を求めるのに必要な非ゼロ要素の数は非常に少なくなる。(A-2)式をそのまま計算機内部にストアすると96%以上は無駄になる。計算時間も無駄になる。計算時間とメモリーの大幅の節約には、非ゼロ要素のみを記憶して解を求めるのが最上の方法である。本報告では、(A-2)式のように2次元配列としてプログラムせず、非ゼロ要素のみを一次ベクトルとして取り出している。解法には直接法と間接法のいずれも使用できるが、掃出法を用いた。ガウスザイデル、SOR、共役こう配法には、要素の行と列番号を他の配列に記憶し、計算プログラムに論理IFを使わざるを得ないので(A-2)式のように規則正しい位置に非ゼロ要素のあるケースでは適当でない。掃出法は厳密解を与えるので本報告にはもっとも適切である。IBM 370で倍精度計算(1ワードに8バイト)としてFORTRAN-Hで計算した結果では160元の方程式を2ミリ秒で解けた。標準のサブルーチンよりもはるかに早い。

港湾技研資料 No.304

1978. 9

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発行所 運輸省港湾技術研究所
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所 株式会社 東京プリント

Published by the Port and Harbour Research Institute
Nagase, Yokosuka, Japan.