

港湾技研資料

TECHNICAL NOTE OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 273 Sept. 1977

MEMによる波浪スペクトル計算に関する考察(1)
—特に予測誤差とフィルター長について—

高 橋 智 晴
広 瀬 宗 一
佐 々 木 徹 也

運輸省港湾技術研究所



MEMによる波浪スペクトル計算に関する考察(1)

—特に予測誤差とフィルター長について—

目 次

| | |
|--------------------------|----|
| 1. まえがき | 3 |
| 2. MEM の概念 | 3 |
| 2.1 情報のエントロピー | 3 |
| 2.2 ME パワースペクトル | 4 |
| 2.3 MEM と従来の方法との比較 | 7 |
| 2.4 MEM における問題点 | 7 |
| 3. 計算結果について | 8 |
| 3.1 モデル波に対する計算結果 | 8 |
| 3.2 現地波に対する計算結果 | 22 |
| 4. 計算結果についての考察 | 29 |
| 5. あとがき | 33 |
| 参考文献 | 33 |

Consideration on Wave Spectra Estimation by
MEM (Maximum Entropy Method) (1)

—Relationship between Prediction Error
Power and Filter Length—

Tomoharu TAKAHASHI*

Munekazu HIROSE**

Tetsuya SASAKI**

Synopsis

MEM (Maximum Entropy Method) for power spectral density estimation has been experimentally investigated. It has been known that this method is particularly valuable if the process contains one or more narrow peaks, and is superior to the conventional methods (FFT etc.) because of much more resolution for a given series of data. However the comparison of the methods on the basis of equal resolution is very difficult since that of MEM is not very well defined.

The results for the deterministic continuous process (sine waves plus white noise) show the problem of the application of Akaike's FPE (Final Prediction Error) on a criterion for choosing the length of the required prediction error filter.

According to the results for sine waves plus white noise, it follows that the application of Akaike's criterion for the prediction error filter leads to the prediction of the unpredicted amount. But when the signal to noise ratio decreases to a certain extent, the application of that criterion provides the reasonable results.

Some preliminary results of the nonstationality of ocean waves are presented as an illustration of the application of MEM.

*Chief of the Coastal Observation Laboratory, Hydraulic Division.

**Member of the Coastal Observation Laboratory, Hydraulic Division.

MEMによる波浪スペクトル計算に関する考察(1)

—特に予測誤差とフィルター長について—

高橋 智晴*
広瀬 宗一**
佐々木 徹也**

要 旨

パワースペクトルを計算する方法として、J.P. Burg (1967) により MEM (Maximum Entropy Method) が提案されたが、従来の方法 (FFT 法, 相関法) に比べて非常に分解能が高く、また非現実な仮定をしないで済むという点でより現実的なスペクトルが得られるとされている。本稿では MEM を簡単な正弦波、及び現地波浪に適用し、MEM の分解能と S/N 比、初期位相、P.E.F (Prediction Error Filter) の長さ、及びデータ数の関係を調べた。

本稿における計算によると、P.E.F. 長の決定に赤池の基準がよく用いられるが、この適用には種々問題のあることがわかり、予測誤差パワーとフィルター長の関係を図示して大まかな基準を示した。

最後に海洋波の MEM による分析結果に基づいて海洋波の非定常性について議論している。

1. まえがき

従来より用いられてきたパワースペクトルの解析手法は相関法とベリオドグラム法に大別される。最近、J.P. Burg (1967, 1968) により提案された MEM (Maximum Entropy Method) は、従来より用いられてきた上記方法に比べて多くの点で優れていることから時系列解析を必要とする多くの分野において用いられ、種々の活用成果が報告されている。この方法は情報理論におけるエントロピー最大の概念を用いたものであり、この原理を利用すれば従来の方法でなされている非現実的な仮定 [データはサイクリックであり、その一周期はデータの長さに等しいという仮定 (ベリオドグラム法)、及び観測されたデータ以外の自己相関は 0 とみなす制限 (相関法)] をせずにパワースペクトルが得られることが示されている。

MEM によるパワースペクトルの計算例としては、地球物理学の分野において多く、たとえば地球磁場の逆転 (Ulrych, 1972)、地磁気運動 (Currie, 1974)、太陽活動周期と地表面気温の関係 (Currie, 1974) などの解析に適用され、かなりの成功がおさめられている。

本稿では、簡単なモデル波 (正弦波) を用いて MEM における分解能に与える初期位相、及び S/N 比の影響、フィルター長の決定方法について考察し、実際の海洋波へ MEM を適用することによって海洋波の非定常性の把握への第一段階としたものである。

2. MEM の概念

2.1 情報のエントロピー

情報理論においては、数個の可能性の内 i 番目の状態の起る確率を P_i とすると伝達される情報量は

$$I = -\log P_i \quad (1)$$

によって定義され、観測時間 T の間のその体系についての全情報量は

$$I_{TOTAL} = -P_1 T \log P_1 - P_2 T \log P_2 - \dots \quad (2)$$

で表わされる。

また単位時間間隔あたりの平均情報量

$$H = I_{TOTAL}/T = -\sum_i P_i \log P_i \quad (3)$$

* 水工部 海象観測研究室室長

** 水工部 海象観測研究室

を情報のエントロピーと定義し、情報の秩序のなご、または系の実際の構造についての不確かさを表わす。従って有効な情報は完全に記述するが、有効でない情報に関しては最大限の不確かさを示すような確率分布のエントロピーは最大になり、統計力学におけるマックスウェル・ボルツマン分布に対応する。情報量と確率の集合により描かれる不確定性の測定値であることは明らかである。エントロピーは、 p_i の内1つだけ1で他が0の場合そのシステムは完全に決定される。他の場合はどの場合もエントロピーは正であり、その時エントロピーはシステム内の無秩序さの測定値となる。

一般に、最大エントロピー確率分布を決定する方法は次のようである。

考えている過程 x_t は、 x_1, x_2, \dots, x_p といった値をとることができ、 x_t に関する有効な情報はいくつかの関数 $f_1(x_t), f_2(x_t), \dots, f_m(x_t)$, $m < n$ の平均値の形、 $\langle f_1(x_t) \rangle, \langle f_2(x_t) \rangle, \dots, \langle f_m(x_t) \rangle$ をとるものとする；この情報と矛盾せず他の制約からは最大限に自由な確率分布 $P_i = P(x_t)$ は次式のエントロピーを最大にするものである。

$$H = - \sum_i P_i \log_2 P_i \quad (4)$$

Hは次式の制約の下で最大にされる。

$$\sum_i P_i = 1 \quad (5)$$

また、

$$\sum_i P_i f_k(x_i) = \langle f_k(x_t) \rangle, k=1, 2, \dots, m \quad (6)$$

この変分問題に対するよく知られた解は

$$P_i = \frac{1}{Z(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)} \exp[\lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_m f_m(x_i)] \quad (7)$$

ここで

$$Z(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_i \exp[\lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_m f_m(x_i)] \quad (8)$$

ラグランジュ乗数 λ_k は次式で示される制約条件から決定される。

$$\langle f_k(x_i) \rangle = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \log Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (9)$$

James (1968) はエントロピーを最大にする確率分布は頻度分布に数値的に一致することを見出ししている。ここでいう頻度分布は $u_i = m_i/M$ の分布であり、 m_i は過程 x_t の M 回の観測において x_i の生起する回数である。

上記のようなエントロピー最大概念を用いると、1. で述べたような従来の方法における非現実的な仮定をせずにパワースペクトル密度を決定することができる。これがMEMの最大の特徴に他ならない。

2.2 ME (Maximum Entropy) パワースペクトル

前節に示した最大エントロピーの概念をスペクトル解析に適用する際、エントロピー（厳密に言えば無限過程に対するエントロピー率）と定常ガウス過程のスペクトル密度 $S(f)$ の関係を知らなければならぬ。これについては Smylie et al (1973) に詳しい。

不規則変数が連続値をとるとする時、エントロピーの定義における総和は積分によって置き換えられ、時系列 Z_0, Z_1, \dots, Z_N を扱う時、確率は次式で与えられる結合確率密度関数 $f(Z_0, Z_1, \dots, Z_N)$ により置き換えられる。

$$H = - \int f(Z_0, Z_1, \dots, Z_N) \log \{ a^{2N+2} f(Z_0, \dots, Z_N) \} dV \quad (10)$$

ここで、 dV は不規則変数によって作られる空間（サンプル空間で作られる体積分であり、 a はサンプル空間の次元と同単位をもった定数である。これによると、 $(N+1)$ 個の複素不規則変数に対してはサンプル空間は $(2N+2)$ の実次元を持っていることに気付く。

(10)式は次式のように表わすことができるから、 a の選択はエントロピーの絶対的な量を固定することになる。

$$H = - \int f(Z_0, Z_1, \dots, Z_N) \log f(Z_0, Z_1, \dots, Z_N) dV - (2N+2) \log a \quad (11)$$

一方、ガウス過程

$$Z_N = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{pmatrix}$$

に対する結合確率密度関数は

$$f(Z_N) = \frac{1}{[(2\pi)^{N+1} \text{Det } C_N]^{1/2}} \exp[-\frac{1}{2} (Z_N^T - m_N^T) C_N^{-1} (Z_N - m_N)] \quad (12)$$

ここで、 C_N は次の要素を持った分散・共分散マトリックスである。 T は転置行列を、 Det は行列式を意味する。

$$C_{ij} = E\{(Z_i - m_i)(Z_j^* - m_j^*)\} \quad (13)$$

ここで m_i は Z_i の期待値であり、 $*$ は共役転置を表わす。

これをエントロピーの定義式に代入すると

$$H = \frac{1}{2} \log \{ \text{Det } C_N \} \quad (14)$$

ここで、 $a = (2\pi)^{1/4}$ としている。

さらに、この過程は平均値が0であり、定常であるとすると、

$$c_{ij} = E\{z_i z_j^*\} = E\{z_k z_k^* - i+j\} = \phi(i-j) \quad (15)$$

かつ、

$$c_N = T_N$$

ここで、 $\phi(i-j)$ はラグ ($i-j$) の過程の自己相関を表わす。また、 T_N は自己相関を要素とする Toeplitz マトリックスである。

これ迄有限長 ($N+1$) の過程を扱ってきたが、無限過程に対してはもはや情報の測定値として絶対的なエントロピーを定義することができない。この時はエントロピーの代りに次式が用いられる。

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \{ (\text{Det } T_N)^{1/(N+1)} \} \quad (16)$$

それ故に、次の関係式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\text{Det } T_N)^{1/(N+1)} = 2f_N \exp \left\{ \frac{1}{2f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log \{ S(f) \} df \right\} \quad (17)$$

ただし、 $\text{Det } T_N \approx 0$ を用いると

$$h = \frac{1}{2} \log 2f_N + \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log \{ S(f) \} df = \frac{1}{2} \log P_\infty \quad (18)$$

ここで、

$$P_\infty = 2f_N \exp \left\{ \frac{1}{2f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log \{ S(f) \} df \right\} \quad (19)$$

実際の問題において、我々は無限過程の中のある有限サンプルを扱うだけである。従って数少ない自己相関の信頼できる推定値を得ることができるだけである。ここで残りの自己相関の値に関してどのような仮定がなされるべきかという問題が生じる。従来の方法ではスペクトル密度関数の周波数分解能を限定し、残りの自己相関は0であると仮定してきた。また、FFTの使用においてはデータの周期的な拡張を暗に仮定しており、データにはないようなスペクトルの周期性を入れることになっている。

Burg (1967, 1968) は、これらの問題に対して情報理論の方からアプローチし、未知の自己相関関数のもっとも良い決定というのは、何の情報もエントロピーも加え

ないものであるとして、次のエントロピー率

$$h = \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{-i2\pi f k \Delta t} \right\} df \quad (20)$$

が未知の自己相関に関して定常、すなわち

$$\frac{\partial h}{\partial \phi(k)} = 0, \quad |k| \geq N+1 \quad (21)$$

とした。

上式の微分の結果、

$$\int_{-f_N}^{f_N} \frac{e^{-i2\pi f k \Delta t}}{S(f)} df = 0, \quad |k| \geq N+1 \quad (22)$$

これは次式を意味している。

$$\frac{1}{S(f)} = \frac{1}{2f_N} \sum_{k=-N}^N c_k e^{i2\pi f k \Delta t} \quad (23)$$

ここで、 $c_k = c_{-k}^*$ とする。

$G(z)$ を $c_N, c_{N-1}, \dots, c_0, \dots, c_{N+1}, c_N$ の Z 変換とすると、これらの係数のエルミート特性により

$$C(z) = G(z)G^*(1/z^*) \quad (24)$$

ここで、 $G(z)$ は N 次の多項式である。もし、 $\phi(z)$ が自己相関列の Z 変換なら、(23) 式の代りに

$$\frac{1}{\phi(z)} = \frac{1}{4f_N^2} C(z) = \frac{1}{4f_N^2} G(z)G^*(1/z^*) \quad (25)$$

ここで、 $Z = e^{-i2\pi f \Delta t}$ 、 $G(z)$ の根は単位円の外になるようにとられ、 $G^*(1/z^*)$ の根は単位円の内側になるようにとられる。

上式から、未知の自己相関に関してエントロピー密度を定常にし、かつ既知の自己相関と矛盾しないスペクトル密度は

$$S(f) = \frac{P_{N+1}}{2f_N \Gamma \{ \exp(-i2\pi f \Delta t) \} \Gamma^* \{ \exp(-i2\pi f \Delta t) \}}$$

あるいは、

$$S(f) = \frac{P_{N+1}}{2f_N \left| 1 + \sum_{j=1}^N \gamma_j e^{-i2\pi f j \Delta t} \right|^2} \quad (26)$$

として導かれる。ここで、 γ_j は予測誤差フィルター係数であり、 P_{N+1} は誤差パワーを表わす。 γ_j と P_{N+1} を計算することによって ME パワースペクトル密度が計算される。

Burg (1968) は上記の予測誤差システムを解く再帰的な方法を提案している。

予測誤差フィルターに関する式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \phi_{ff}(0) & \phi_{ff}(-1) & \dots & \phi_{ff}(-N) \\ \phi_{ff}(1) & \phi_{ff}(0) & \dots & \phi_{ff}(1-N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{ff}(N) & \phi_{ff}(N-1) & \dots & \phi_{ff}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{N+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

上記システムにおいて $N=0$ の場合を考えると、

$$\phi(0) = P_1$$

ここで、 f_i は複素時系列である。

次に $N=1$ の場合を考えると

$$\begin{vmatrix} P_1 & \phi_{ff}(-1) \\ \phi_{ff}(1) & P_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ \gamma_{1,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (30)$$

予測誤差パワーは前方、及び後方への予測の平均と考えられる。前方への予測 (forward prediction) に対しては次の誤差系列を与え、

$$\varepsilon_{j,1}^f = f_j + \gamma_{1,1} f_{j-1}$$

また後方への予測 (backward prediction) に対しては、

$$\varepsilon_{j,1}^b = f_j + \gamma_{1,1}^* f_{j+1}$$

なる誤差系列を与える。これらから

$$P_2 = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{j=1}^{M-1} \{ |f_{j+1} + \gamma_{1,1} f_j|^2 + |f_j + \gamma_{1,1}^* f_{j+1}|^2 \}$$

$\gamma_{1,1}$ は P_2 を最小にするように決められ、

$$\gamma_{1,1} = -2 \frac{\sum_{j=1}^{M-1} \{ f_j^* f_{j+1} \}}{\sum_{j=1}^{M-1} \{ f_j f_j^* + f_{j+1} f_{j+1}^* \}}$$

(30)式を $\phi_{ff}(1)$ 、及び P_2 に関して解くと、

$$\phi_{ff}(1) = -\gamma_{1,1} \phi(0), P_2 = (1 - \gamma_{1,1} \gamma_{1,1}^*) P_1$$

これより次の再帰式が得られる。

$$\begin{vmatrix} \phi_{ff}(0) & \phi_{ff}(-1) & \phi_{ff}(-2) \\ \phi_{ff}(1) & \phi_{ff}(0) & \phi_{ff}(-1) \\ \phi_{ff}(2) & \phi_{ff}(1) & \phi_{ff}(0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ \gamma_{1,1} \\ 0 \end{vmatrix} + \gamma_{2,2} \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma_{1,1}^* \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_2 \\ 0 \\ \Delta_2^* \end{vmatrix} + \gamma_{2,2} \begin{vmatrix} \Delta_2^* \\ 0 \\ P_2 \end{vmatrix} \quad (31)$$

これが成立するためには

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + \gamma_{2,2} \Delta_2^* \\ \Delta_2 &= \gamma_{2,2} P_2 = 0 \\ \gamma_{1,2} &= \gamma_{1,1} + \gamma_{2,2} \gamma_{1,1}^* \end{aligned}$$

これから同様に

$$P_3 = \frac{1}{2(M-2)} \sum_{j=1}^{M-2} \{ |f_{j+2} + \gamma_{1,2} f_{j+1} + \gamma_{2,2} f_j|^2 + |f_j + \gamma_{1,2}^* f_{j+1} + \gamma_{2,2}^* f_{j+2}|^2 \}$$

以下、同様に手順をくり返すことにより、

$$\gamma_{N+1,N+1} = \frac{-2 \sum_{j=1}^{M-N-1} \varepsilon_{j+N+1,N}^f \varepsilon_{j,N}^{b*}}{\sum_{j=1}^{M-N-1} \left(|\varepsilon_{j+N+1,N}^f|^2 + |\varepsilon_{j,N}^b|^2 \right)}$$

$$P_{N+2} = P_{N+1} (1 - \gamma_{N+1,N+1} \gamma_{N+1,N+1}^*)$$

が得られる。

上記の Burg アルゴリズムによる予測誤差フィルターの計算に関する計算機用のアルゴリズムは Andersen (1974) に与えられる。

このように観測データ上に予測誤差フィルターを前後両方向に走査させて入力信号と予測の間の誤差の出力 P を最小にすることによって γ_j 、 P_{N+1} が求められる。

上述したのは定常確率過程のエントロピーを最大にするという概念から得られたものであるが、エントロピー最大は事象生起が等確率の場合に対応するから、MEM は入力時系列をホワイトニングするようなフィルターを作成することによってパワースペクトルを計算する方法であると考えられることも可能である。このフィルターは地震工学の分野でよく用いられる spiking filter であり (Peacock and Treitel, 1969)、予測誤差フィルターと等価である。

この考え方にもとづいて MEM を説明したものに Ulrich et al (1973) がある。

離散的時系列 x_t (そのフーリエ変換を $X(\omega)$ とする) が伝達関係 $\Gamma(\omega)$ をもったフィルターによりホワイトニングされることを考える。すなわち、

$$|X(\omega) \Gamma(\omega)| = K$$

ここで、 K は定数である。あるいは、

$$|X(\omega)|^2 = \frac{K^2}{|\Gamma(\omega)|^2} \quad (32)$$

Wold (1965) によれば、非決定論的定常確率過程はどれも次のような移動和で表わされる。

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \varepsilon_{t-s}$$

この成分 b_s は次のような特性を持っている。

$$b_0 > 0, b_0^2 + b_1^2 + \dots < \infty$$

ε_t を平均値 0、分散 1 の無相関列とする。すなわち、 ε_t をホワイトノイズ系列とすると、

$$x_t = b_t * \varepsilon_t$$

ここで、 $*$ はコンボリューションを表わす。

x_t をホワイトニングするフィルター a_t は次式で表わされる。

$$a_t * b_t = \delta_t$$

ここで、 δ_t は dirac delta 関数である。

R を $N \times N$ 相関マトリックス、 $a = \text{col}(a_1, a_2, \dots, a_N)$ 、及び $I = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ とすると、

$$R a = I$$

予測誤差フィルタ $r_t = \text{col}(1, r_1, \dots, r_2)$ 、 $P = \text{col}(P_N, 0, \dots, 0)$ とすると、

$$R r = P$$

ここで、 $P_N = r_0 + \sum_{i=1}^{N-1} r_i r_{i+1}$ 。ただし、 r_t は自己相関を表わす。

上式を Burg アルゴリズムを用いて解くと r_t 、 P が求まり、(32)式により(28)式が得られる。

以上が MEM の概念、及び ME パワースペクトル計算法の概要である。

2.3 MEM と従来の方法の比較

MEM は Burg (1967) により展開されたが、Parzen (1968, 1969) によっても提案されており、彼によると MEM は自己回帰過程として説明されている。また MEM はマルコフ過程としても言及されている。

スペクトル計算法の従来のものでは、データ、あるいは不規則過程の特性とは独立なウィンドウ関数を用いており、このウィンドウ関数は平均化された推定スペクトルと真のスペクトルを関連づける役割を果している。Blackman-Tukey の場合、ウィンドウ関数はテーバーのフーリエ変換にすぎず、相関関数に適用される。ウィンドウ関数は理想的にはインパルス関数であるべきであり、スペクトルの分解能もよくなる。MEM ではウィンドウ関数を用いていない、すなわちウィンドウ関数を推定スペクトルそのものとしているから、他の方法においてみられるような各周波数間の干渉は最小だと考えられる。

MEM は非二次形式のスペクトル計算法であり、他に MLM (Maximum Likelihood Method)、ARM (Autoregressive Model) がある。

MEM、及び MLM によるパワースペクトルの間の関係については、Burg (1972) により示されている。これは先に Capon (1969) により提案された高分解能な周波数・波数スペクトルの推定値 (MLM 推定手に等価) を用いたものである。

今、 N 個のセンサーが等間隔に直線に配置されているとすると、MLM により得られるスペクトルは次式で定

義される。

$$\text{MLM}(k) = N \Delta x / [E^T(k) R^{-1}(f) E(k)] \quad (33)$$

ここで、 k は波数、 Δx はセンサーの間隔、 $E(k)$ は $\exp(-i 2\pi n k \Delta x)$ 、 $n = 0, \dots, N-1$ を要素とする列ベクトル、 $R(f)$ は周波数 f のクロスパワーマトリックスである。なお、 T は複素共役転置を表わす。

(33)式は $-1/(2\Delta x) \leq k \leq 1/(2\Delta x)$ でのみ有効であり、 $|k| > 1/(2\Delta x)$ では $\text{MLM}(k) = 0$ である。

Burg によると、(33)式で定義された $\text{MLM}(k)$ と $\text{MEM}(k, N)$ の関係は次式のようにになる。

$$\frac{1}{\text{MLM}(k)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\text{MEM}(k, n)} \quad (34)$$

このように、ML スペクトルは一点予測フィルタから N 点予測誤差フィルタにより得られる ME スペクトルの相加平均に等しい。したがって、(34)式によると ML スペクトルの分解能は低分解能の ME スペクトルから高分解能のそれ迄の平均と解釈できるから、MLM は MEM に比して若干分解能の低いスペクトルを与えることが予想される。

ARM と MEM の関数については、Ulrych and Bishop (1975) により詳述されているが、得られるスペクトル密度の推定式の形がよく類似していることは興味深い。しかし、ARM の係数を決定する方法、式が異なっていることに注意する必要がある。

2.4 MEM における問題点

MEM は以上に示したように種々の利点を備えているが、その欠点の一つに予測誤差フィルタの次数の決定の仕方が明確にされていないことがあげられる。これ迄に報告されている MEM によるパワースペクトルの計算例においては、ARM における赤池の FPE (final prediction error) により決定されていることが多い。Akaike (1969) によると、平均値をあらかじめ除去した N 次の ARM に対して、 $(FPE)_N$ は

$$(FPE)_N = \frac{M + (N+1)}{M - (N+1)} S_M^2$$

と与えられ、平均値が除去されていない場合は、

$$(FPE)_N = \frac{M + N}{M - N} S_M^2$$

と与えられる。ここで S_M^2 は入力時系列と予測時系列の間の誤差パワーである。

MEM によるパワースペクトルの推定におけるもう 1 つの問題点は、スペクトル推定値の検定する方法がない

ことである。換言すれば、いまだ ME スペクトル推定値の密度関数、及び自由度が決定されていない。

Kromer (1970) は ME スペクトル推定値の漸近的特性を決定し、次の結論を得ている。すなわち、

1) MEM によるスペクトル推定値は漸近的には不偏である。

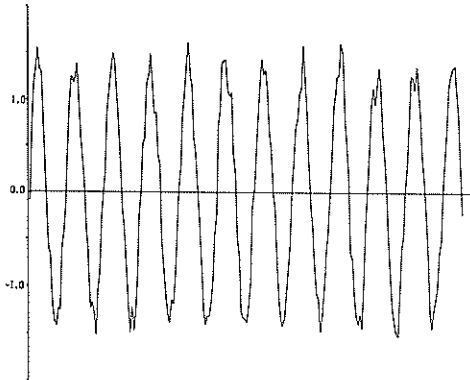
$$2) \text{Var}[P(f)] = (2/\nu) P^2(f)$$

ここで、 ν は自由度であり、AR 過程の次数 N と $\nu = M/N$ (M はデータ数) により関連づけられる。

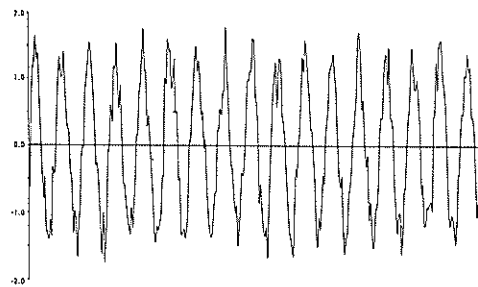
この結果は、 N 、及び M が大きく、かつ真のスペクトルが滑らかな時に成立する。

3. 計算結果について

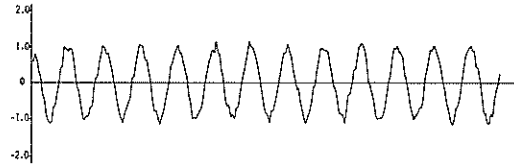
本稿では、MEM の分解能、信頼性、及び海洋波の非定常性を調べるために、モデル波 (正弦波 + ホワイトノイズ) について S/N 比、初期位相、フィルター長、及びデータ数の変化に対して計算・検討し、また実際の海洋波に対してもフィルター長、及びデータ数を変化させて計算をおこなった。



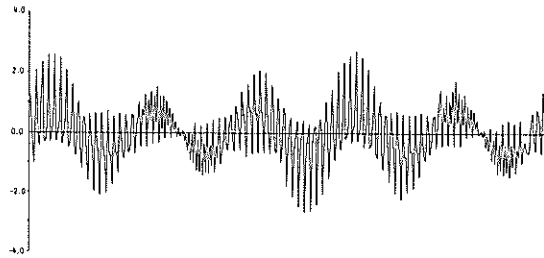
図一1. 周波数 1.0 の正弦波 (minimum-phase) + white noise (パワー 0.01) の波形



図一2. 周波数 1.0 の正弦波 (minimum-phase) + white noise (パワー 0.04) の波形



図一3. 周波数 1.0 の正弦波 (zero-phase) + white noise (パワー 0.01) の波形



図一4. 合成波 (周波数 0.3, 5.0, 5.1, 9.7) + white noise (パワー 0.01) の波形

3.1 モデル波に対する計算結果

モデル波による計算においては、いずれもサンプリング間隔 $\Delta t = 0.05$ sec とし、また正弦波に加えるホワイトノイズとしては $N(0, 1)$ に従う正規乱数を用いた。したがって、ナイキスト周波数 $f_N = 10.0$ となる。なお、ここでは S/N 比としては単純にパワーの比をとるものとする。

図一1~2 は S/N 比がそれぞれ 50.0 (ノイズのパワーは 0.01), 12.5 (ノイズのパワーは 0.04) の場合の周波数 1.0 の単一正弦波 (minimum) を正規化した波形を示している。図一3 は S/N 比が 50.0 (ノイズのパワーは 0.01) の場合の周波数 1.0 の正弦波 (zero-phase) の波形を示している。図一4 には S/N 比が 50.0 (ノイズパワーは 0.01) の場合の周波数 0.3, 5.0, 5.1, 9.7 をもつ正弦波 (minimum-phase) の合成波を正規化した波形を示している。

図一5 は図一1 の波形について MEM でパワースペクトルを求め、最大のエネルギーを持つ成分波の振幅で除し基準化したものであり、データ数の減少によるパワースペクトルの変化を示している。図中括弧内に書かれた数字は赤池の FPE により求めた P.E.F. (prediction error filter) の長さであり、 M はデータ数を示している。これによると、 M が 128 より少なくなると急に分解能が減少していることがわかる。したがって、この条件では 5~6 波をければ分解能の良い結果は得ら

れないことになる。図-6には S/N 比、ノイズパワーが図-1の場合と同じである周波数 9.0 の単一正弦波に対する計算結果である。図-5と図-6を比較すると、図-6の方が分解能の面では若干良好となっている。また赤池の FPE によるフィルタ長が図-6の方が短かめに出ていることから、 S/N 比、及びノイズパワーが同じ場合、高周波成分の波の方が分解され易い傾向がある。また、図-5では、データ数の減少に伴い高周波側にピーク周波数がシフトする傾向がみられるが、これに

反し図-6では低周波側にシフトする傾向がみられる。これらを考え合せると、ナイキスト周波数より高周波数の成分波は低周波数の成分波に比べて分解され易く、ピーク周波数は低周波側にシフトし、低周波数の成分波の場合は逆に高周波側にシフトすることになる。しかし、ナイキスト周波数の $1/10$ 程度の周波数を持つ波を 5~6 波程度含むデータ数で計算するならば、低周波の波であるか高周波の波であるかにかかわらず分解能は高く、上述した周波数のシフトも僅少であると考えられる。

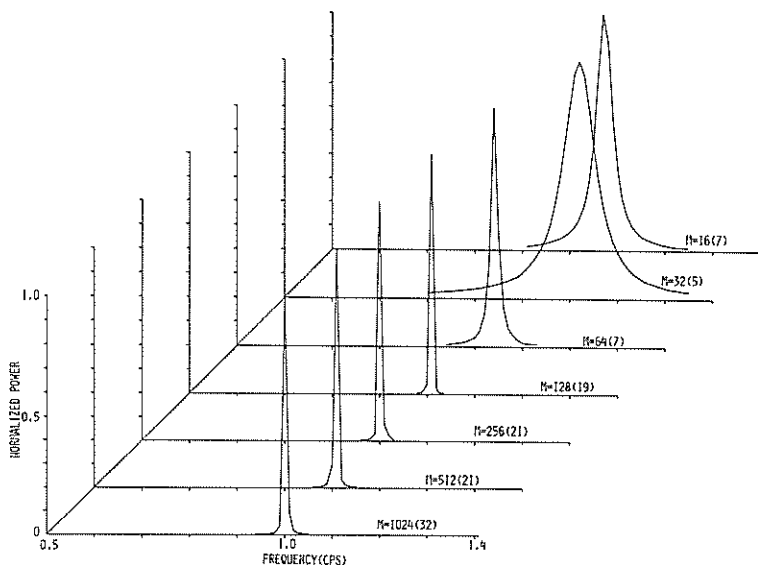


図-5. 図-1の波形に対するMEスペクトル

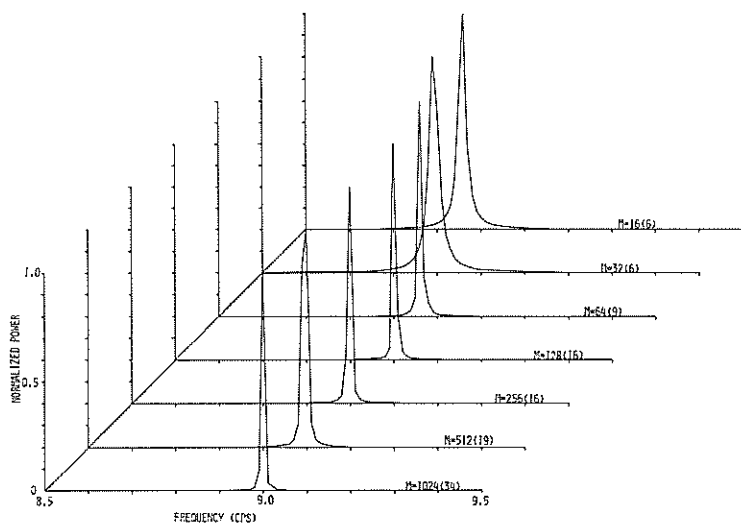


図-6. 周波数 9.0 の正弦波 (+ white noise パワー 0.01) に対する ME スペクトル

図-7には、周波数 1.0, 及び 2.0 の合成波にノイズ
 パワー 0.01 (S/N 比 50.0) を加えた波形に対する分析
 結果を示している。図-8, 図-9, 及び図-10はそれ
 ぞれデータ数を 256, 128, 及び 64 とし、フィルタ長
 を種々に変えて比較をおこなったものである。図-7に

よると、 M が 64 よりも大きい時は周波数のシフトも少
 なく分解能も高いと考えられる。図-8 では L が長すぎ
 ると入力データにはない点に余分のピークが出現して
 おり、 L の長いことが必ずしも良好な分析結果を得るこ
 とにつながらないことを暗示している。

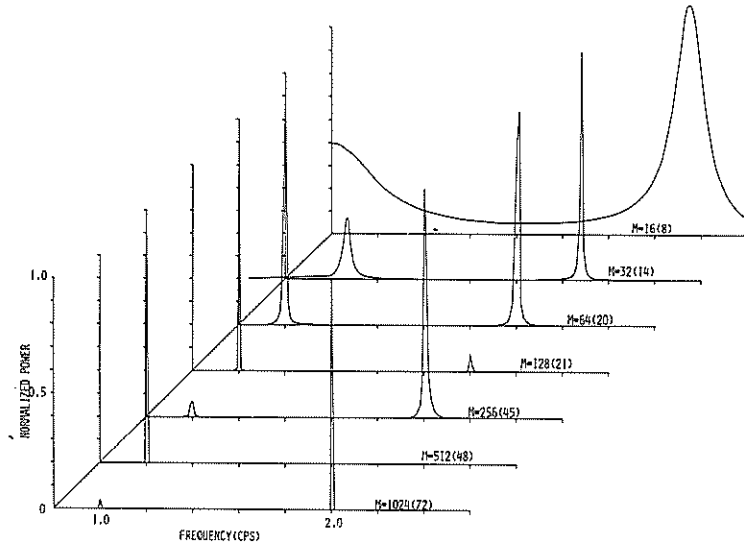


図-7. 合成波 (周波数 1.0, 2.0) (+white noise パワー
 0.01) に対する ME スペクトル

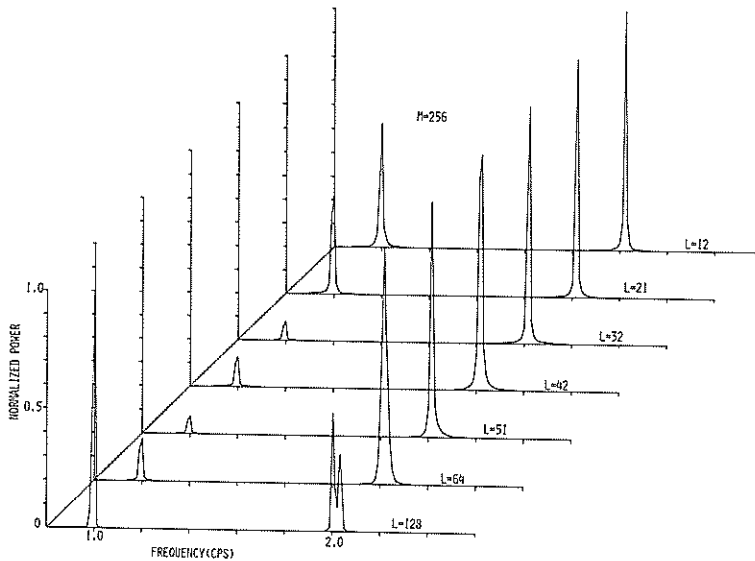


図-8. 合成波 (1.0, 2.0) (+white noise パワー 0.01) に対する
 ME スペクトルのフィルタ長による変化 ($M = 256$)

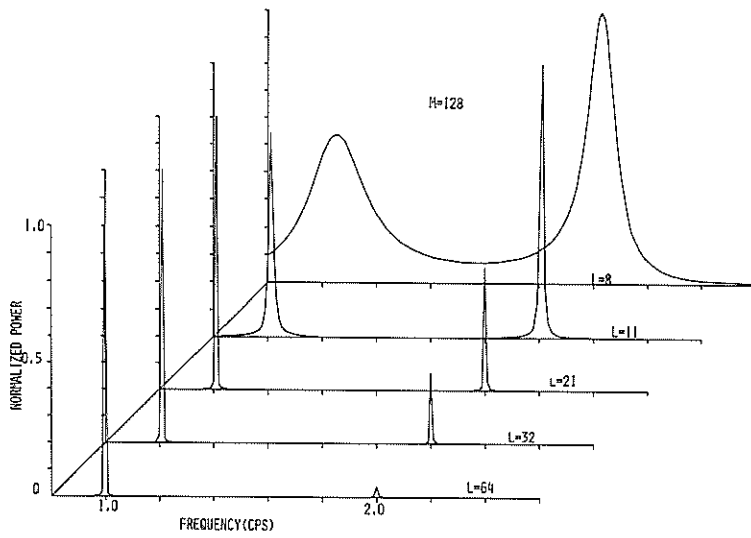


図-9. 合成波(周波数 1.0, 2.0) (+white noise パワー 0.01) に対する ME スペクトルのフィルター長による変化 ($M = 128$)

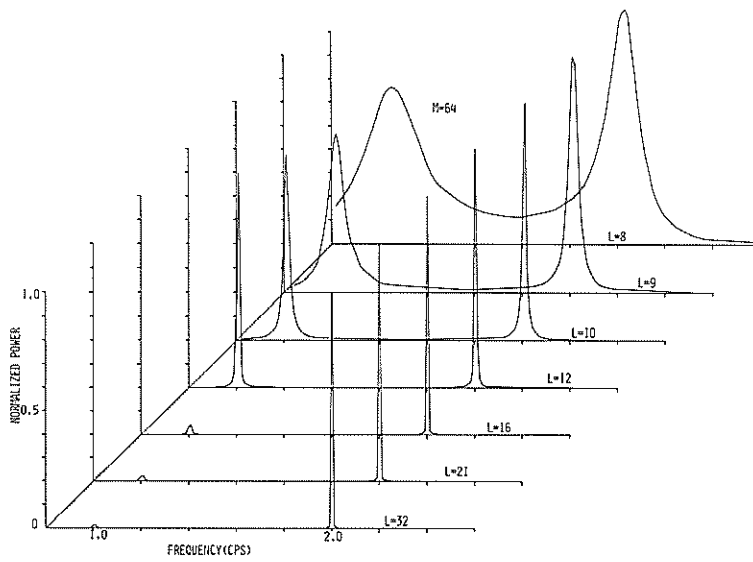


図-10. 合成波(周波数 1.0, 2.0) (+white noise パワー 0.01) に対する ME スペクトルのフィルター長による変化 ($M = 64$)

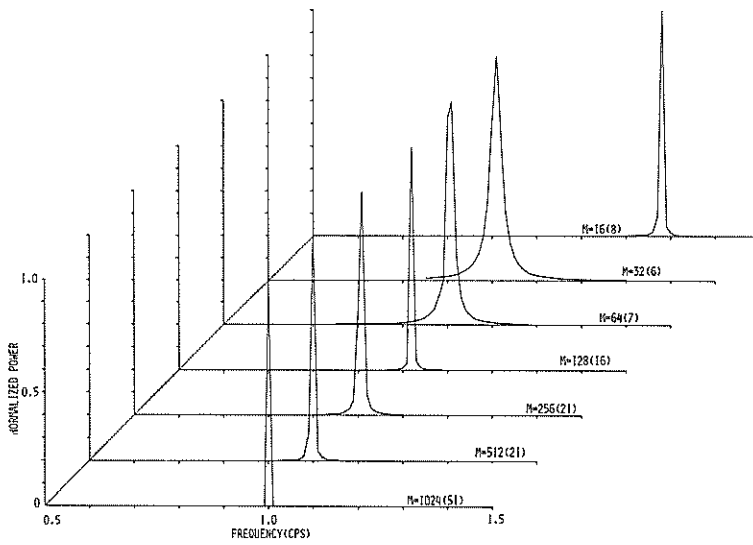


図-11. 図-3の波形に対するMEスペクトル

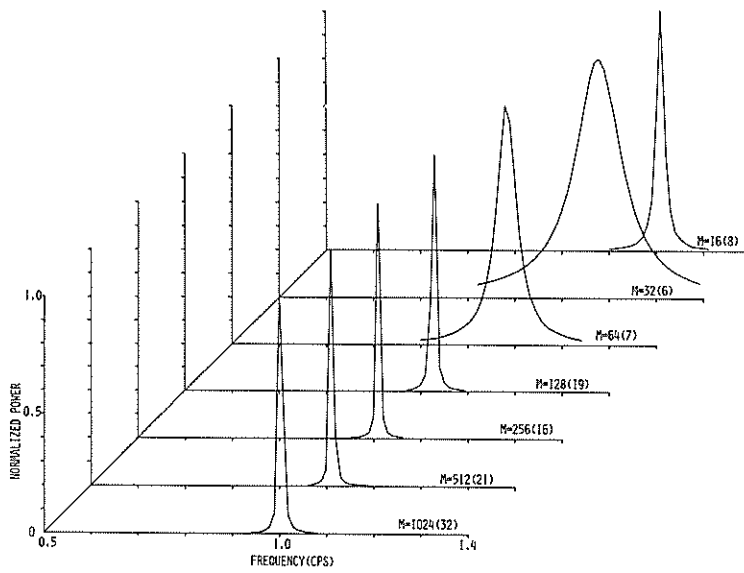


図-12. 図-2の波形に対するMEスペクトル

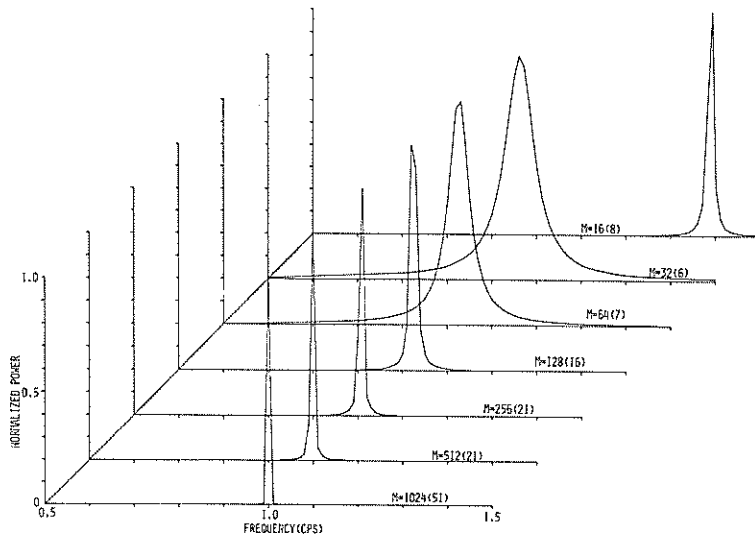


図-13. 図-3の波形のノイズパワーを0.04にした時のMEMスペクトル

図-11,及び図-13はそれぞれ S/N 比が 50.0 (ノイズパワーは 0.01), 12.5 (ノイズパワーは 0.04) の場合の単一正弦波 (zero-phase) について MEM によりパワースペクトルを計算した結果である。

図-5と図-11を比較すると,全般的に図-11の方がピーク周波数のシフトは少ないが,データ数が極端に少なく(1波以下)になると図-11の方が多くなる傾向がみられる。また,この場合もデータ長が5~6波程度あるなら分解能は良好であり,周波数のシフトも少ないとい

える。

図-12は S/N 比が12.5 (ノイズパワーは 0.04) の単一正弦波 (minimum-phase) に対する結果である。これを S/N 比の大きい図-5と比較すると,ここでは分解能が低下し,周波数のシフトも大きくなる傾向がみられる。本稿には掲載しなかったが,更に S/N 比を小さくして計算をするとこの傾向はより顕著となり,赤池のFPEによるP.E.F.の長さも短くなる傾向が明らかとなった。

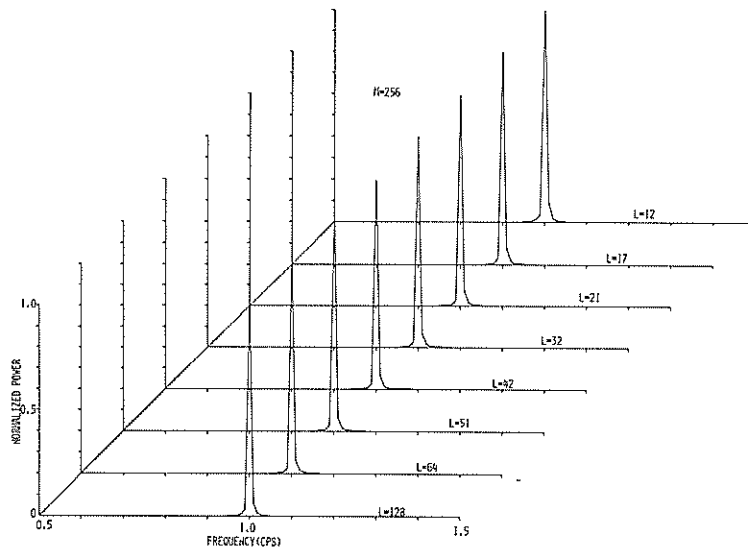


図-14. 図-1の波形に対するMEMスペクトルのフィルタ長による変化 ($M=256$)

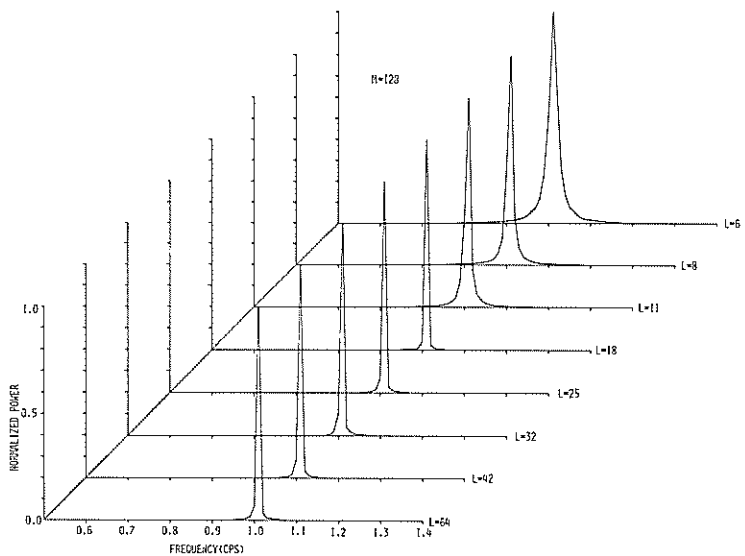


図-15. 図-1の波形に対するMEスペクトルのフィルター長による変化 ($M = 128$)

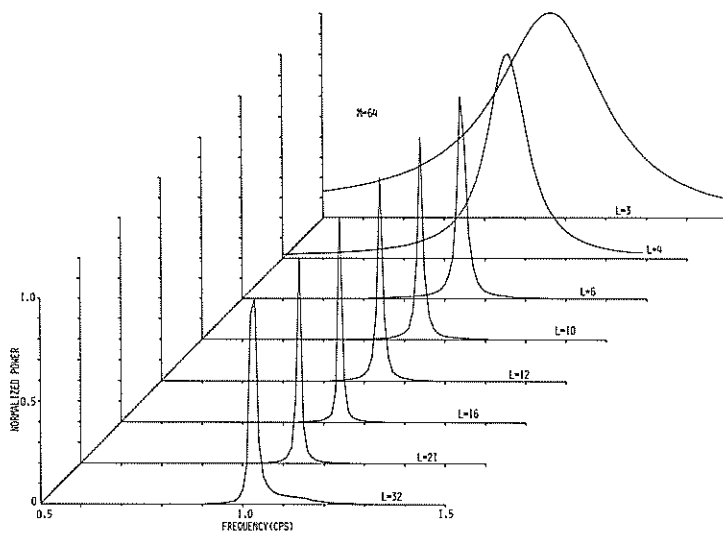


図-16. 図-1の波形に対するMEスペクトルのフィルター長による変化 ($M = 64$)

図-14~16は図-1に示した波形についてデータ数をそれぞれ256, 128, 64に固定し, P.E.F.の長さを逐次MEMにより計算した結果である。図中LはP.E.F.の長さを表わす。

これによると, データ数 M が256ではP.E.F.の長さによる分解能の変化はほとんどみられないが, これよりも M が小さくなるとそれが判然するようになる。しかし, 前述のようにナイキスト周波数の $1/10$ 程度の周波数の波が5~6波程度含むように M を選ぶなら(この場合 $M=128$ に対応), P.E.F.の長さによる変化は小さいといえる。図-5によると, $M=64$ の場合赤池のFPEにより決まるP.E.F.の長さは9であるが, これを図-16と照合するとこの場合分析結果は良好とはいえない(分解能低く, 周波数のシフト大)。また, 図-11, 13と図-5, 12を比較すると, $M=16$ の場合は $M=32$ の場合に比べて分解能が高く, 周波数のシフトが大きいという相反する結果を得ており, 赤池のFPEによるP.E.F.長決定における問題点を提起している。これは $M=16$ と $M=32$ の場合のP.E.F.の長さが前者で長くなるという結果に対応している。

図-17には, 図-4に示した波形に対するMEMによる分析結果を示している。これによると, データ数 M が128より小さくなると周波数5.0の成分波と5.1の成分波を区別できなくなっており, 従って分解能の低下が考えられる。図-4に示した波形の成分波の内, 最も低周波数のものは周波数0.3の成分波であるから, $M=64$ の場合この波を約1波含んでいることになる。図-5に対する結果から考えると, この波を良好に分解するためには少なくともデータ数としては300~400必要である。図-17は縮尺が大きいので周波数のシフト, 及び分解能の程度は判然としないが, この部分を拡大すると図-18のようになる。同様に周波数5.0と5.1の成分波の分解能についてみると(図-19参照), 前述の考え方からすると, 周波数5.0, あるいは5.1の成分波を良好に分解するためにはデータ数 $M=4\sim 5$ 程度で良いことになるが, この程度では両者を分解することはできない。これらを考え合せると, 必要とするデータ数は低周波側の分析したい成分波によって決まり, それより短くすると高周波側の成分波の分解能は極度に悪くなるということになる。

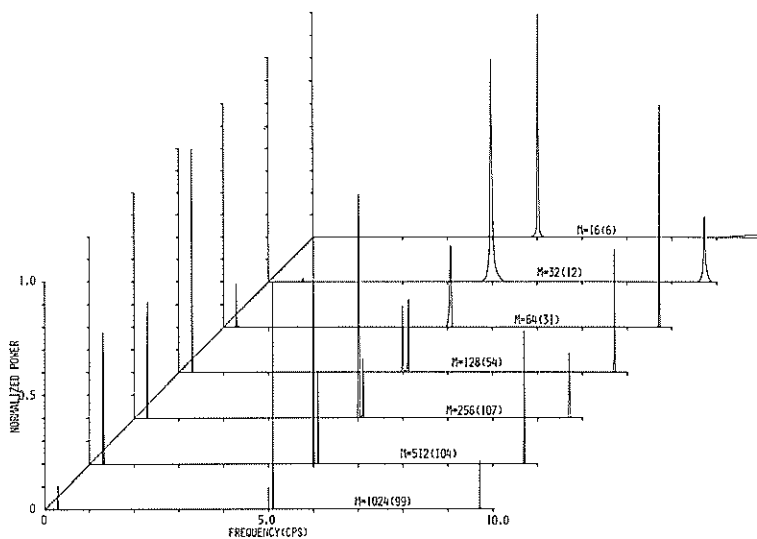


図-17. 図-4の波形に対するMEMスペクトル

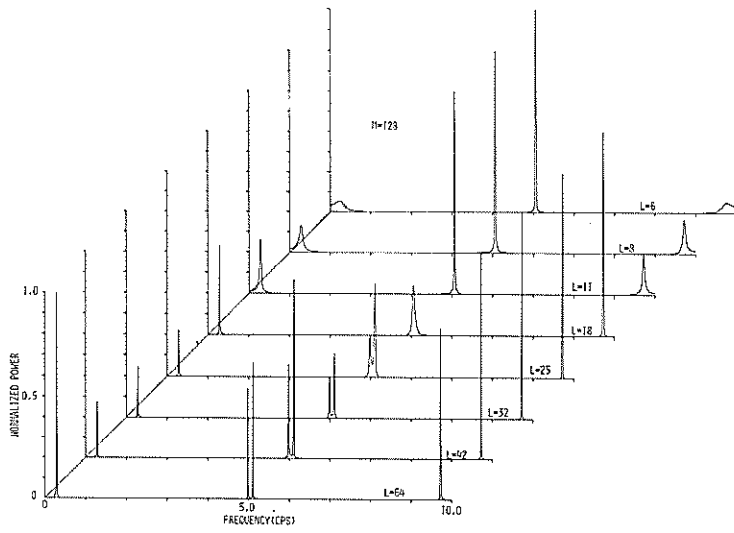


図-22. 図-4に示した波形に対するMEスペクトルのフィルタ-長による変化 ($M=128$)

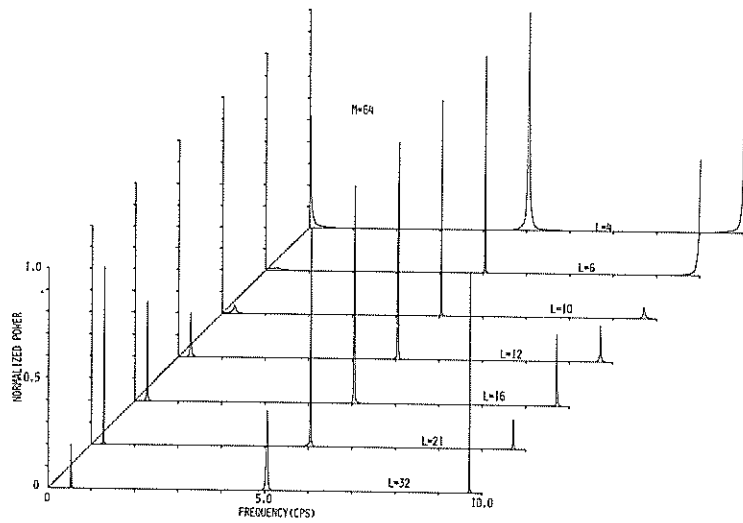


図-23. 図-4に示した波形に対するMEスペクトルのフィルタ-長による変化 ($M=64$)

図-21~23は図-4に示した波形についてMEパワースペクトルのフィルタ長による変化を調べたものであり、それぞれデータ数 M が256, 128, 64の場合について示している。 $M=256$ の場合は $L=32$, $M=128$ の場合は $L=25$ 程度迄は、程度の差こそあるが $f=5.0$ の成分波と $f=5.1$ の成分波を分解している。 $M=64$ の場合は $L=M/2$ としても両者を分解できない。赤池のFPEにより決まるP.E.F.の長さは、 $M=256, 128, 64$ の場合に対してそれぞれ107, 54, 31であるが、データ数がある値以下になるともはや高分解能な結果を得ることができず、赤池の基準は必ずしも分解能と結びついていないことがわかる。

図-24には、図-4の波形にさらに周波数0.4, 及び

9.6の正弦波 (minimum-phase) を加えた場合の分析結果を示している。ただし、 S/N 比は50.0, ノイズパワーは0.01としている。この場合最低周波数成分波は周波数0.3の波である。前述の単一正弦波(1Hz)の場合は5~6波あれば良好な結果が得られるということであったが、図-22でみると $M=64$ (周波数0.3の成分波で約5波にあたる)の場合は周波数0.3, 及び0.4の成分波はおろか、さらに高周波の成分波さえも分解することができない。一方 $M=32$ の場合は分解能は低いものの周波数5.0, 及び5.1の成分波は分解している。 $M=64$ と32赤池のFPEにより決まるP.E.F.の長さが同じであることを考えると、 $M=64$ の場合でもP.E.F.の長さを長くすれば分解能の高くなることが期待される。

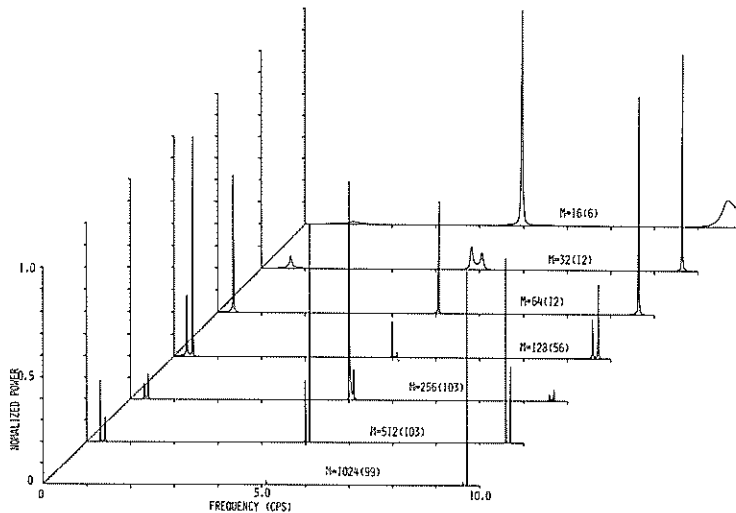


図-24. 図-4の波形に $f=0.4$, 及び9.6の成分波を加えた時のMEスペクトル

図-25~26は、図-22の計算に用いた波形に対してそれぞれ $M=128, 64$ としてP.E.F.の長さを変えて計算した結果である。ただし、ここでは得られたMEパワースペクトルをそのまま図示している。

これらの図によると、赤池のFPEによって計算した時分解できなかった成分波も、多少P.E.F.の長さを長くすると分解できるようになり、ナイキスト周波数に対して、低周波側、及び高周波側よりも中程の成分波の方が分解され易いことがわかる。

スペクトル計算法の精度について議論するためには、

厳密には各計算法における分解能を同じくしておかなければならないし、またフーリエ変換を用いる方法ではその手法上データ数がかなり多くなくては意味がない。しかし、残念ながら前述のようにMEMの分解能については今のところ十分に定義されていない。従来の方法では、FFT法では $1/M\Delta t$, Blackman-Tukeyでは $1/2m\Delta t$ で分解能が定義されているから $m=M/2$ の時両者の分解能は一致する。しかし従来方法同士の比較は本稿の目的からはずれる。

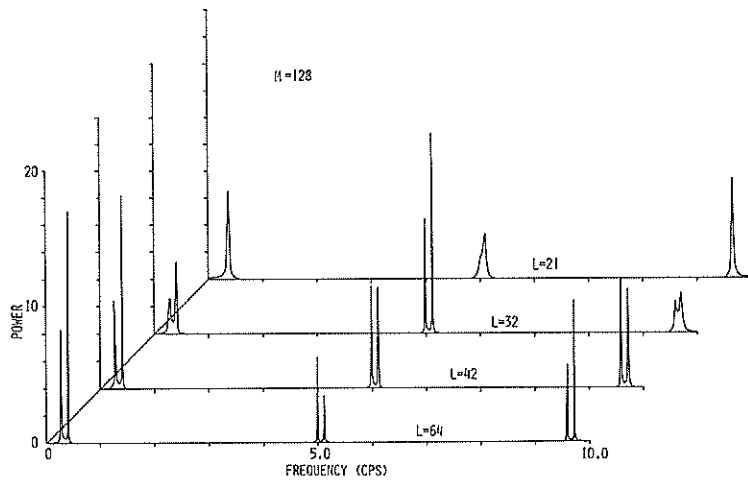


図-25. 図-4の波形に $f = 0.4$, 及び 9.6 の成分波を加えた時の
フィルター長による変化 ($M=128$)

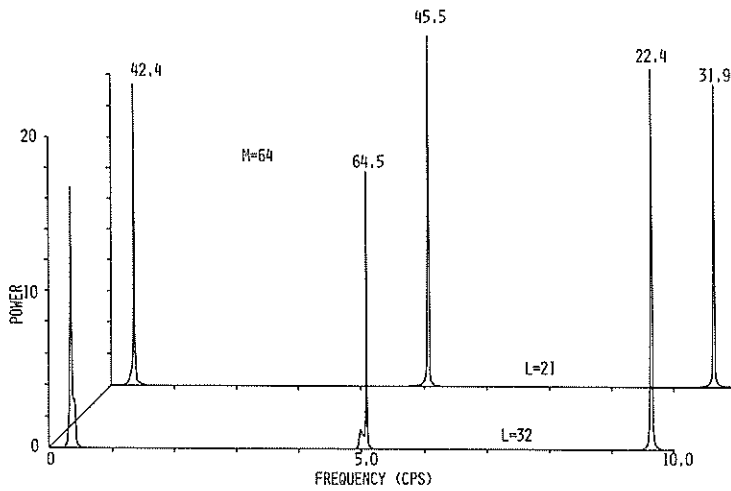


図-26. 図-4の波形に $f = 0.4$, 及び 9.6 の成分波を加えた時の
フィルター長による変化 ($M=64$)

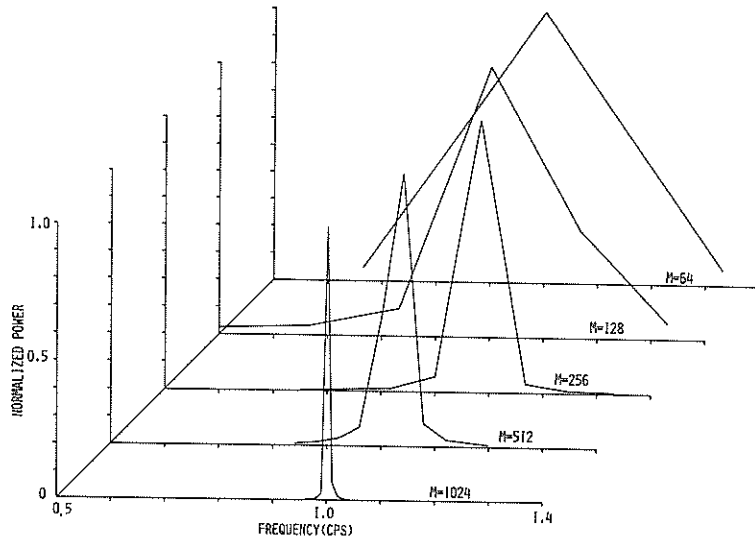


図-27. 図-1の波形に対するFFT法によるパワースペクトル

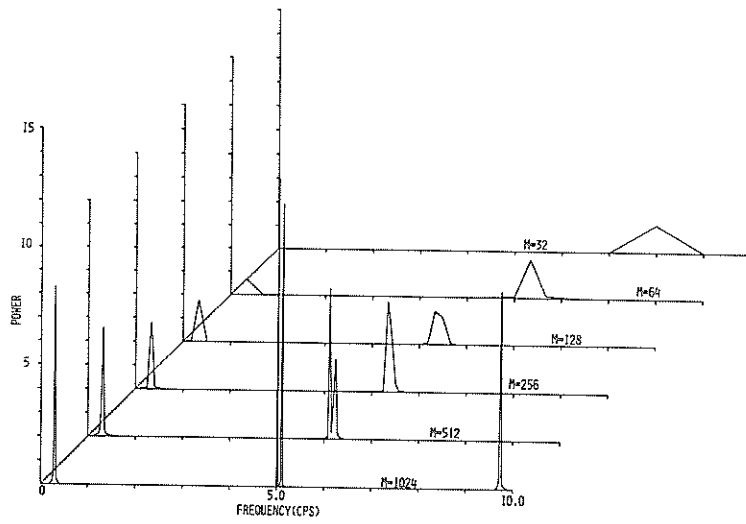


図-28. 図-4の波形に対するFFT法によるパワースペクトル

図-27には図-1に示した波形について、図-28には図-4に示した波形についてFFT法でパワースペクトルを計算した結果が示されている。FFT (Fast Fourier Transform) を用いる方法では、一次スペクトル (raw spectrum) をウィンドウにより平滑化をおこなった二次スペクトルが示されるが、ウィンドウを

自由に選べること、及び分解能の比較の目的から、図-27、及び図-28には一次スペクトルをプロットしている。

図-29には図-4に示した波形についてBlackman-Tukeyの方法で分析した結果を示している。ただし、これはHanning Windowを用いた結果であり、データ数Mは1024である。

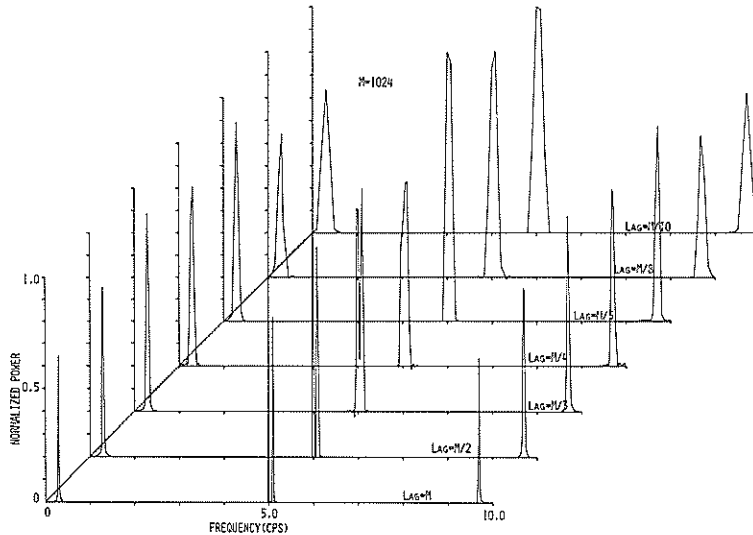


図-29. 図-4の波形に対する相関法によるパワースペクトル

図-5と図-27を比較すると、 $M = 1024$ の場合は両者でほとんど分解能はかわらず、MEMを用いる場合かなりデータ数が少なくてもFFT法 ($M = 1024$) と同等の分解能が得られることがわかる。また図-17と図-28、及び図-29を比較した時も、 $M = 1024$ の場合にはほとんど差がみられない。ラグは入力時系列の共分散に対するものであり、P.E.F.の長さはデータそのものに対するものであること、及びP.E.F.の長さは入力時系列から一意的に決められる(自己回帰過程の意味で)等実質的に異なっているが、図-29のラグによる挙動はP.E.F.長の変化に対応しているように見える。

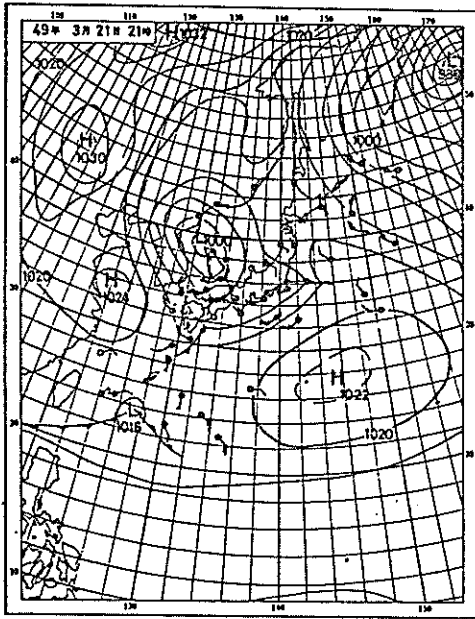
3.2 現在地に対する計算結果

3.1では不連続なスペクトルを持つ決定論過程の場合について計算をおこなった。本節では現地波への適用結果について示す。前述のように、MEMは地球物理学の

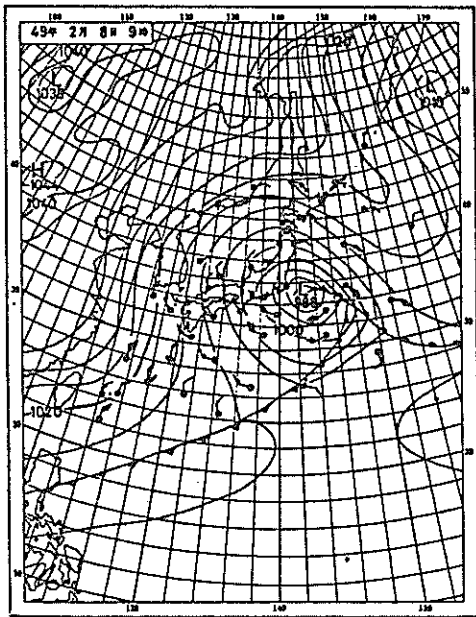
分野では盛んに適用、活用報告がなされているが、風浪への適用例はほとんど見当たらない。

ここで計算に用いた観測データは、運輸省第二港務建設局管内の波浪観測拠点港の一つである波浮港におけるものである。波高計は超音波式波高計であり、波浮港の東北東沖約1.5kmに設置されており、設置水深は-49.28m、デジタル記録計感度は12cm/dig., またサンプリング間隔は0.5 secである。

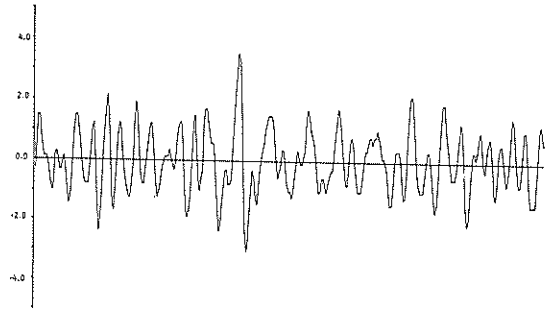
図-30、及び図-31に計算の対象とした時期の天気図を示している。図-32、及び図-33はそれぞれ昭和49年3月21日22時、24時に観測された波形を正規化してプロットしたものである。図-34は昭和49年2月8日10時に観測された波形を上と同様の処理をしてプロットしたものである。なお、以下の解析では定量化が目的ではないため感度は乗じていない。



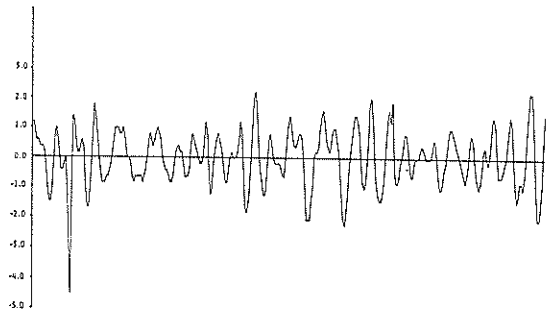
図一 30. 昭和49年 3月21日の天気図



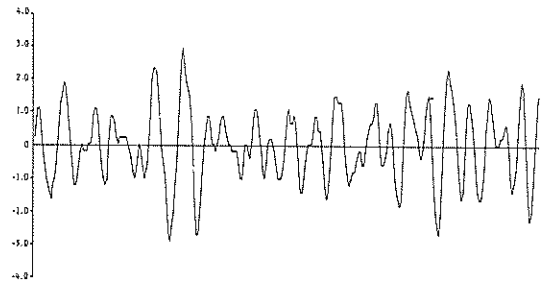
図一 31. 昭和49年 2月8日の天気図



図一 32. 昭和49年 3月21日22時の観測波形



図一 33. 昭和49年 3月21日24時の観測波形



図一 34. 昭和49年 2月8日18時の観測波形

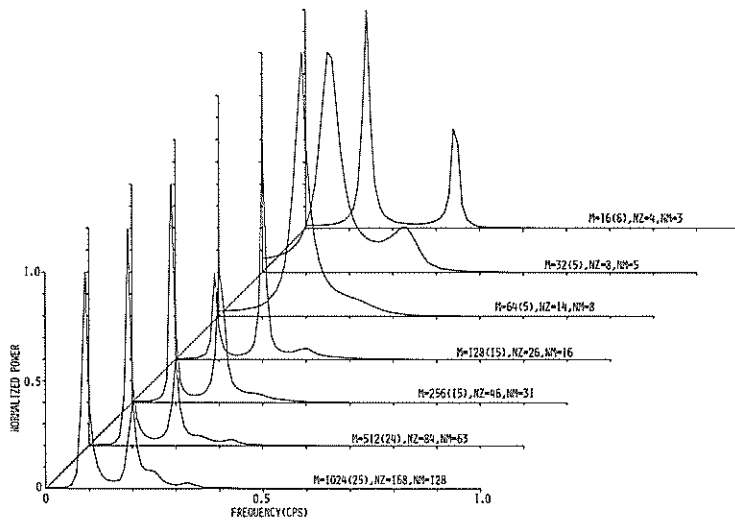


図-35. 図-32の波形に対するMEスペクトル

図-35は図-30に示した波形についてMEMによりパワースペクトルを計算した結果である。また図中NZはzero-crossingsの数を、NMはmaximasの数を、括弧内の数字は赤池のFPEにより定めたP.E.F.の長さを表わしている。データ数Mはいずれも観測開始時刻を起点として数えたものである。

図-35によると、 $M=1024$ では周波数0.09と0.2のあたりに明瞭なピークが見られるが、 $M=64$ ではスペクトルのピークが1つになり、 $M=32$ 、及び $M=16$ ではピークは2つみられるもののいずれもかなり高周波側にシフトしている。

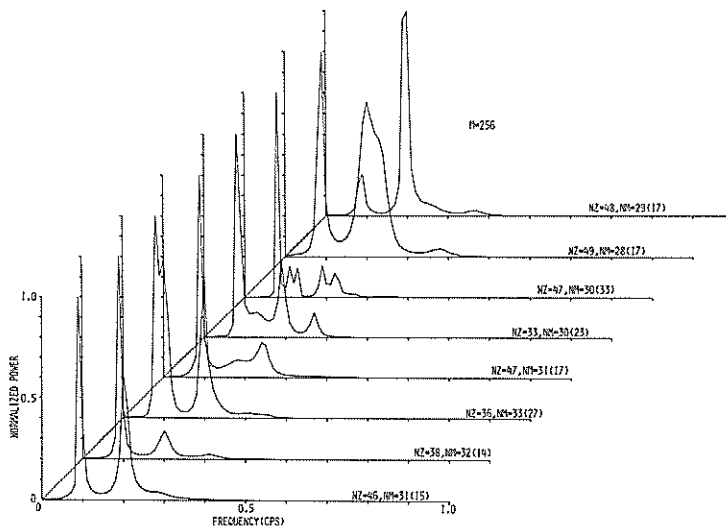


図-36. 図-32の波形の各セグメント毎のMEスペクトル

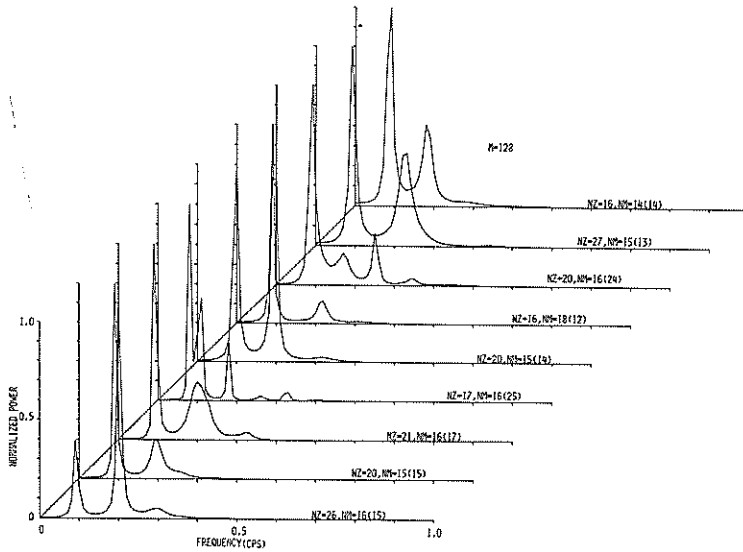


図-37. 図-32の波形の各セグメント毎のMEスペクトル

図-36~37は図-32に示した波形をそれぞれ $M = 256$, 128 ずつのセグメントに分けて、各々MEスペクトルを計算した結果である。これらによると、いずれも各セグメントで計算されたスペクトル形、及びP.E.F.長は異なっている。

図-38には図-33に示した波形に対するMEスペクトルを計算した結果を示している。この場合も M による変化については図-35と同様の傾向を示している。しかし

$M = 128$ の場合、図-35では M がそれより大きい場合と分解能の点でほとんど差がなかったのに対し、ここでは周波数 0.09 のところにあったピークは消え、 0.3 におけるピークが目立っている。これはデータ数が減ると低周波成分の変動は全体の変動の中に埋まってしまうのに反し、高周波成分の変動はより目立つようになることが考えられる。

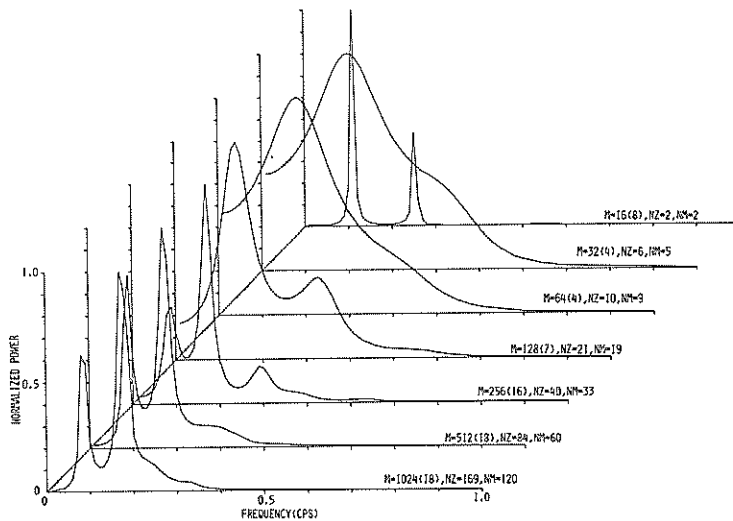


図-38. 図-33の波形に対するMEスペクトル

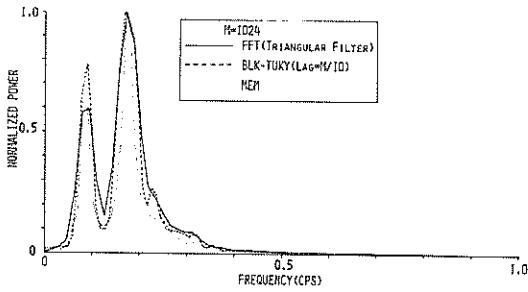


図-39. 図-33の波形に対するスペクトル計算方法の比較

図-39には、 $M=1024$ の場合のMEMと従来の方法との比較について示している。計算の対象としたのは図

-31に示した波形である。図中、FFTとあるのはフーリエ係数の2乗の和で定義される一次スペクトルを三角フィルターで平滑化したものであり、BLK-TKYとあるのは“Blackman and Tukeyの方法により”ラグを $M/10$ として計算したものにHanningのウィンドウをかけたものである。これによると、MEMによる結果では他の二法のそれに比して分解能の高いことが認められる。また顕著なピークの位置にはほとんど差がない。(約0.09と0.17)。

図-40と図-41は図-33に示した波形に対して、図-36、及び37と同様にMEスペクトルを計算した結果である。これによると、 $M=256$ の場合は各セグメント間の周波数特性の変化は $M=128$ のそれに比べてかなり小さくなっており、また赤池のFPEによるP.E.F.の長さの変化は小さい。従って図-39に示した周波数特性に対する相違も $M=128$ で大きくになっている。

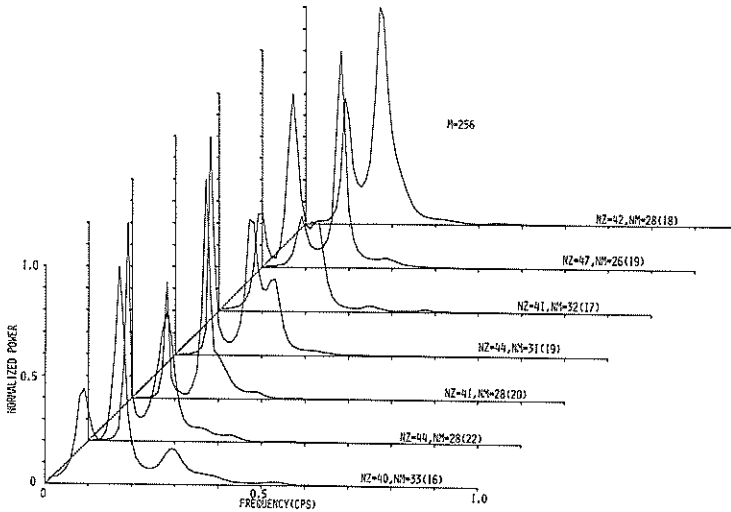


図-40. 図-33の波形の各セグメント毎のMEスペクトル

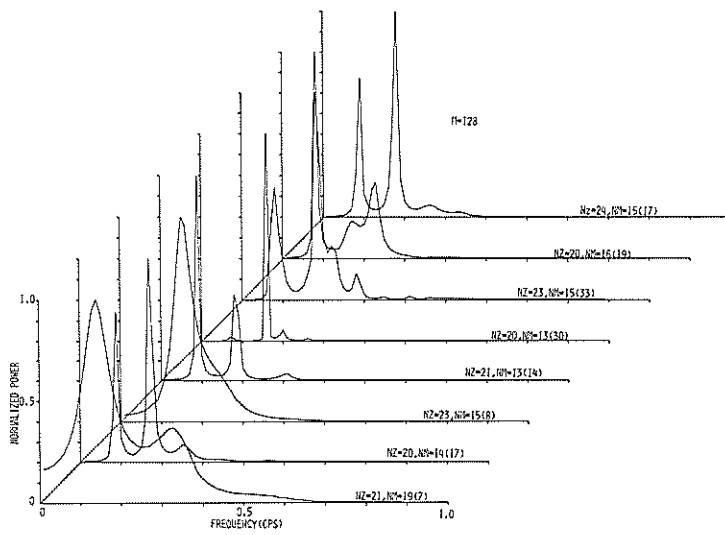


図-41. 図-33の波形の各セグメント毎のMEスペクトル

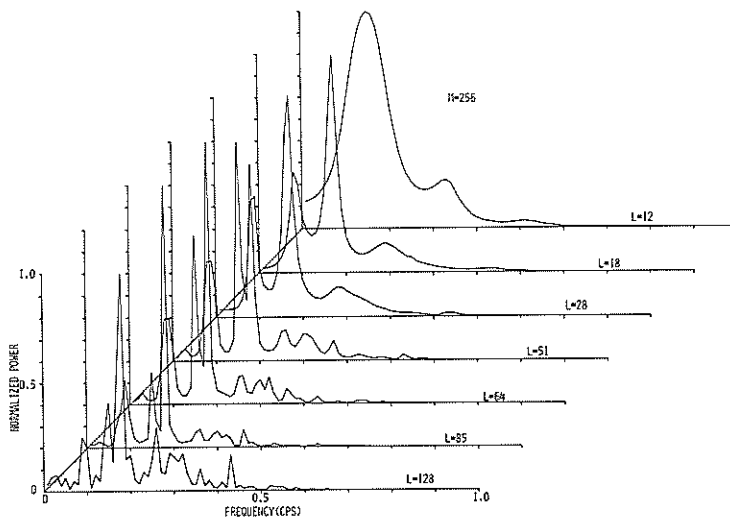


図-42. 図-33の波形に対するMEスペクトルのフィルター長による変化 ($M=256$)

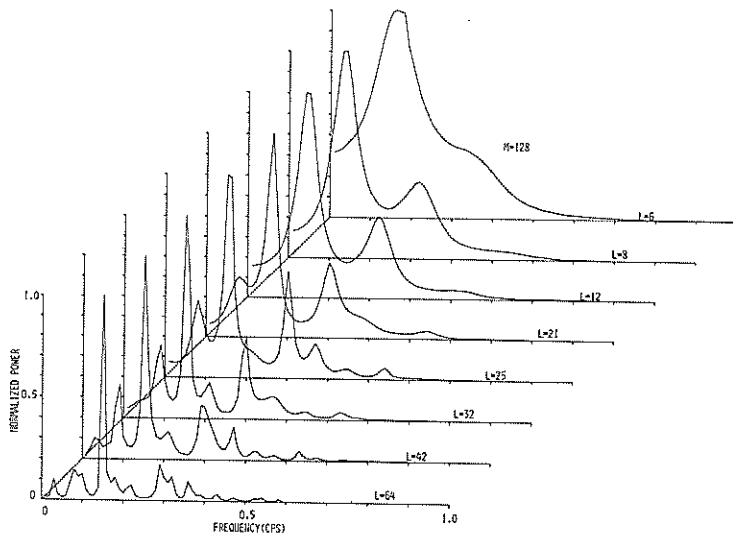


図-43. 図-33の波形に対するMEスペクトルのフィルター長による変化 ($M=128$)

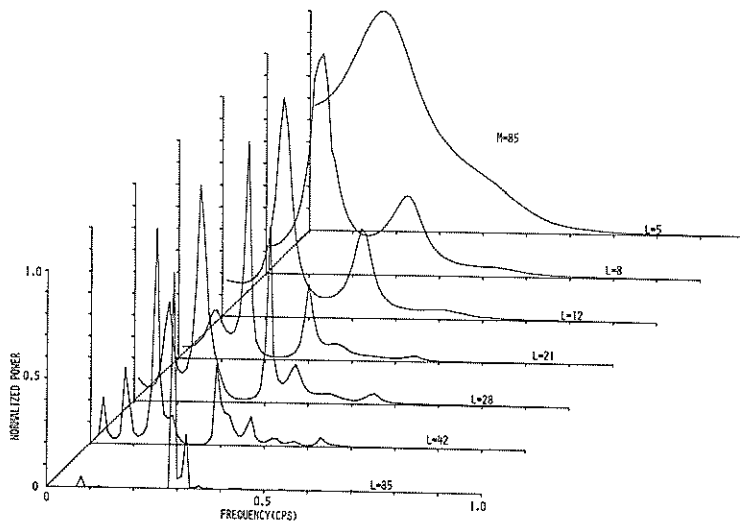


図-44. 図-33の波形に対するMEスペクトルのフィルター長による変化 ($M=85$)

図-42~44には図-33に示した波形の最初のセグメント(それぞれ $M=256, 128, 85$)についてフィルター長によるMEスペクトルの変化を調べたものである。一見フィルター長が短くなるほどスペクトル形は平滑化され、ウィンドウと同様の作用をしているように見える。しかし図-39に示したスペクトル形と比べると、 $M=256$ ではP.E.F.の長さが18の時類似しているが、 $M=128, 64$ では周波数のシフトが大きくかなり異なったものとなっている。

4. 計算結果についての考察

3.でみたように、MEMにおける分解能はP.E.F.の長さ、 S/N 比、初期位相、分解しようとしている成分波の周波数により変動する。しかしこれらの内P.E.F.の長さは他の変数の関数と考えられるから、この関係を調べることはMEMの適切な適用法を考える上で重要である。MEMを用いる際、赤池の基準によりP.E.F.の長さを決めれば良いといわれているが、3.における結果によると問題点のあることがわかった。このことをより理解するために次のようなことを考えてみる。すなわち、式(26)の P_{N+1} はももとの波形と予測波形の間の誤差パワーを表わしている。したがって原波形のラグ0における自己相関を r_0 とする時、 $r_0 - P_{N+1}$ は原波形における予測可能なパワーを表わしていると考えられる。そこで3.1で議論した正弦波について P_{N+1} をフィルター長の関数として示すと図-45~51のようになる。図-45, 46は1Hzの正弦波にそれぞれ0.01, 0.04のパワーをもつホワイトノイズを加えた波形に対する結果であり、図-47, 48は周波数0.3, 5.0, 5.1, 9.7の正弦波の合成波にそれぞれ0.01, 0.04のパワーのホワイトノイズを加えた場合である。また図-49は周波数9.0の正弦波に、図-50は周波数1.0と2.0の正弦波の合成波にパワー0.01のホワイトノイズを加えた場合である。図-45~50はいずれもminimum-phaseの正弦波を用いたものであるが、図-51にはzero-phaseの1Hzの正弦波に対する結果を示している。

したがって図-45, 47, 49~51では P_{N+1} が0.01, 図-46, 48では0.04となるようにP.E.F.の長さを定めることが望ましい。これらの図から読み取ったP.E.F.の長さや赤池のFPEにより決めるそれとを比較すると表-1のようになる。表中括弧内に示した数字が後者に対応する。

これによると、単一正弦波の場合にはデータ数の増加と共に前述の図より得られるフィルター長は短くなり

合成波になると逆に長くなる傾向がみられる。これに反し、赤池の基準より決めたフィルター長は、いずれの場合もデータ数と比例するようである。また単一正弦波の場合でしかもそれが低周波数の波(ナイキスト周波数の $1/10$)であれば4~5波程度以下の時には赤池の基準によるP.E.F.の長さは短くなるが、他の場合はいずれも長くなる傾向がある。フィルター長の長さ、丁度予測誤差パワーと予測しようとしている過程の予測不可能なパワーが等しくなるようなフィルター長の長さより長い時は予測不可能な部分迄予測していることになる。この顕著な例は図-21, 及び図-8であり、これらには存在すべきでないピークが出現している。したがってフィルター長は短かめの方が、換言すればMEスペクトルの形が滑らかな方が安全側だといえることができる。表-1によると、合成波の場合の赤池の基準によるフィルター長のデータ数による増加率は上記図より決定したフィルター長のそれより大きいことから、あるデータ数のところで両者の一致することが予想される。また図-45~51によると、曲線の傾きは徐々に急になっており、予測誤差の増加と対応しているが、曲線の急激な立上り部分をフィルター長として採用すれば良いようである。ただし、これは厳密な議論により得られるものではない。

表-1

| Frequency | Noise Power | No. of Data | | |
|-----------------------|-------------|-------------|------------|------------|
| | | 256 | 128 | 64 |
| 1.0 min. phase | 0.01 | 10 (21) | 14 (19) | 19 (7) |
| 1.0 min. phase | 0.04 | 10 (16) | 14 (19) | 19 (7) |
| 0.3, 5.0, 5.1, 9.7 | 0.01 | 51 (107) | 46 (54) | 35 (31) |
| 0.3, 5.0, 5.1, 9.7 | 0.04 | 38 (82) | 30 (56) | 23 (24) |
| 9.0 | 0.01 | 6 (16) | 8 (16) | 9 (9) |
| 1.0, 2.0 | 0.01 | 30 (45) | 19 (21) | 15 (20) |
| 1.0 zero phase | 0.01 | 10 (21) | 19 (16) | 13 (7) |

S/N 比の減少による影響についてみると、曲線は全体的に上方にシフトし、曲線形はほぼ相似を保っているようである(図-45, 及び図-46参照)。しかし、図-50と図-51の比較はこれと若干異なった様相を呈してい

る。すなわち S/N 比の減少に伴って曲線の傾きは大きくなっていく。このことは S/N 比の減少によるフィルター長の減少を意味する。

初期位相の影響については、図-45と図-47を比較すれば良いが、 $M=256$ では両者ほとんど同じであり、 $M=128$ は後者で傾きが急、 $M=64$ では逆に傾きが緩やかになっている。

また図-45と図-48を比較すると、後者では曲線の傾きが大きくなっており、データ数が少なくなるほど顕著となっている。このことは3.1の結果と一致する。

図-49と図-45~48を比較すると、図-49では曲線の急激な立ち上りはフィルター長の長いところで生じており、全体的に多少上方にシフトしている。したがって必要とするフィルター長は長くなる。

図-52には図-32に示された波形（現地波）についての同様の結果である。これによると、フィルター長の長い（ $h \geq 20$ 以上）部分の曲線の傾きはかなり小さいことがわかる。換言すれば、フィルター長の変化による誤差パワーの変化は小さい。またセグメント間で曲線のレベル、及び形状はかなり異なっている。このことは各セグメント間で得られるフィルター長の長さが異なっていることを意味している。このような各セグメント間でのフィルター長、及び形状の相違は海洋波の非定常性を示すものと思われる。また図-50から前述の基準によりフィルター長を決定して、赤池の基準によるものと比較すると、後者における各セグメント間の変動はかなり大きいようである。また図-52上に赤池の基準により決めら

れたフィルター長をプロットすると統一的な傾向がみられず、正弦波における結果と考え合せると安定性に欠けると考えられる。

3.1に示した結果によると、MEスペクトルの振幅のフィルター長による変動はかなり大きくあらわれていた。これには次のようなことが考えられる。すなわち予測誤差系列、入力時系列、及び予測誤差作用子のZ変換をそれぞれ $E(Z)$, $X(Z)$, $P(Z)$ とすると、これらの間には

$$E(Z) = X(Z)P(Z)$$

が成立するから、パワー $|X(Z)|^2$ は極の位置の関数となる。この極の位置が、単位円に近い時は非常にpeakyなスペクトルになる。極の位置はフィルター長によっても変動するから、前述のように種々の要素の関数となる。たとえば minimum-phase の場合は単位円の外側に、zero-phase の場合は内側に根をもつことになる。なお M. Schoenberger (1974) は両者のスペクトル解析における分解能について、zero-phase signal の方が良好であるとしているが、ここでの分析結果も概ね同様の結果を得ている。

このようにMEスペクトルのピークの値は極の位置に敏感な関数であるから、これ逆に Lacoss (1971) らによって指摘されているように各周波数成分のパワーの比をみる時にはスペクトル線の下の面積の比を採るべきであり、これはたとえば box car function との convolution により求められる。

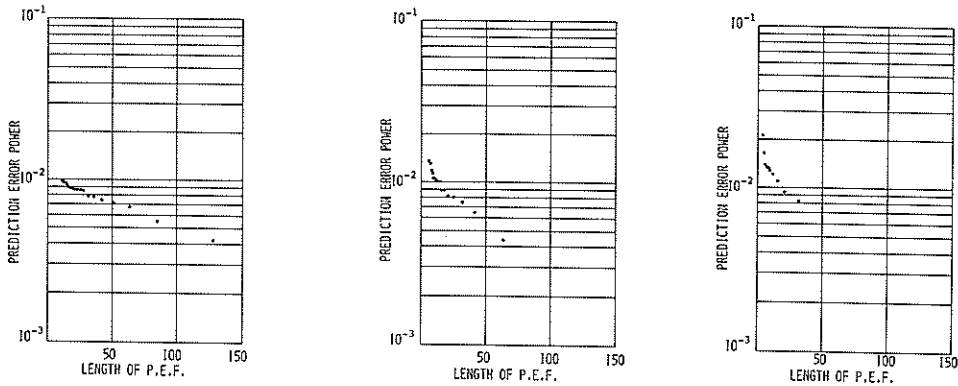
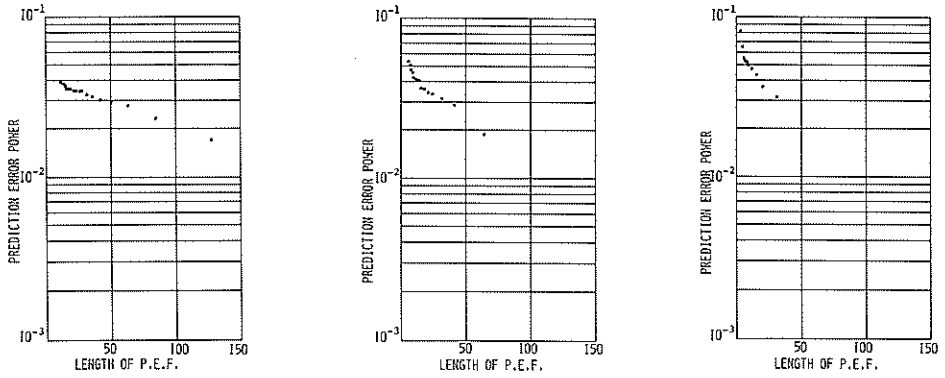
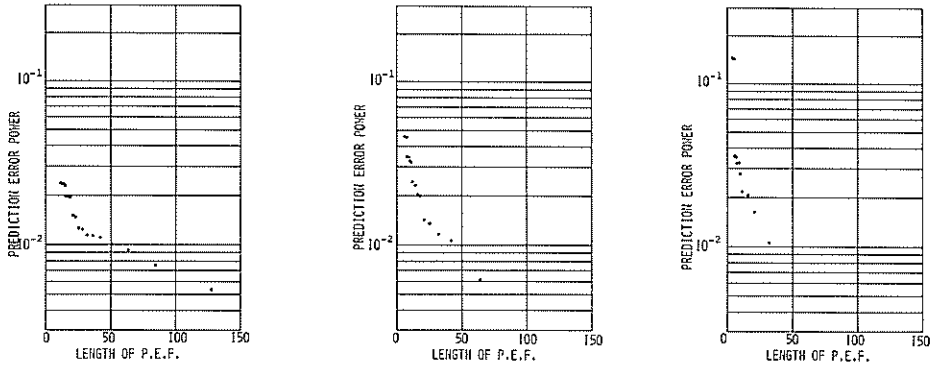


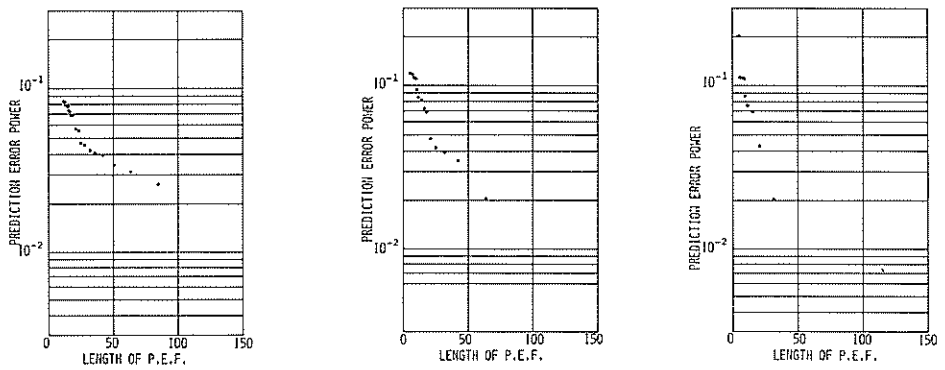
図-45. 図-1の波形に対する予測誤差パワーとフィルター長の関係



図一 46. 図一 2 の波形に対する予測誤差パワーとフィルタ一長の関係



図一 47. 図一 4 の波形に対する予測誤差パワーとフィルタ一長の関係



図一 48. 図一 4 のノイズパワーを 0.04 にした波形に対する予測誤差パワーとフィルタ一長の関係

- tion through autoregressive model fitting, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, 407-419, 1969.
- 3) Akaike, H. : Statistical predictor identification, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 22, 203-217, 1970.
 - 4) Akaike, H. : Autoregressive model fitting for control, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 23, 163-180, 1971.
 - 5) Andersen, M. : On the calculation of filter coefficients for maximum entropy analysis, *Geophysics*, 37, 375-376, 1972.
 - 6) Bartlett, M.S. : An introduction to stochastic process, 1966, Cambridge Univ. Press.
(日本語訳 ; 確率過程入門, 東京大学出版会)
 - 7) Burg, J. P. : The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra, *Geophysics*, 37, 375-376, 1972.
 - 8) Capon, J. : High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis, *Proc. IEEE*, 57, 1408-1418, 1969.
 - 9) Capon, J. and N. R. Goodman : Probability distributions for estimators of the frequency-wavenumber spectrum, *Proc. IEEE*, 58, 1785-1786, 1970.
 - 10) Chen, W. Y. and G. R. Stegen : Experiments with maximum entropy power spectra of sinusoids, *J. Geophys. Res.*, 79, 3019-3022, 1974.
 - 11) Currie, R. G. : Solar cycle signal in surface air temperature, *J. Geophys. Res.*, 79, 5657-5660, 1974.
 - 12) Galbraith, J. N. : Prediction error on a criterion for operator length, *Geophysics*, 35, 251-265, 1971.
 - 13) Jones, R. H. : Prediction of multivariate time series, *J. Appl. Meteorol.*, 3, 255-289, 1964.
 - 14) Lacoss, R. T. : Data adaptive spectral analysis methods, *Geophysics*, 36, 661-675, 1971.
 - 15) Peacock, K. L. and S. Treitel : Predictive deconvolution : Theory and Practice, *Geophysics*, 34, 155-169, 1969.
 - 16) Radoski, H. R., P. F. Fougere, and E. J. Zawalik : A comparison of power spectral estimates and applications of the maximum entropy method, *J. Geophys. Res.*, 80, 619-625, 1975.
 - 17) Robinson, E. A. : Mathematical developments of discrete filters for the detection of nuclear explosions, *J. Geophys. Res.*, 68, 5559-5567, 1963.
 - 18) Robinson, E. A. and S. Treitel : Principles of digital filtering, *Geophysics*, 29, 395-404, 1964.
 - 19) Schoenberger, M. : Resolution comparison of minimum-phase and zero-phase signals, *Geophysics*, 39, 826-833, 1974.
 - 20) Smylie, D. E., G. K. C. Clarke and T. J. Ulrych : Analysis of irregularities in the earth's rotation in *Methods in Computational Physics*, 13, 391-430, 1973.
 - 21) Ulrych, T. J. : Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids, *J. Geophys. Res.*, 77, 1396-1400, 1972.
 - 22) Ulrych, T. J. : Maximum entropy power spectrum of long periods geomagnetic reversals, *Nature*, 235, 218-219, 1972.
 - 23) Ulrych, T. J., D. E. Smylie, O. G. Jensen, and G. K. C. Clarke : Predictive filtering and smoothing of short records by using maximum entropy, *J. Geophys. Res.*, 78, 4959-4964, 1973.
 - 24) Ulrych, T. J. and O. G. Jensen : Cross-spectrum analysis by using maximum entropy, *Geophysics*, 39, 353-354, 1974.

- 25) Wiggins, R. A. : Recursive Solution to the multichannel filtering problem, J. Geophys. Res., 70, 1885-1891, 1965.
- 26) 高岡宣善 : 工学のための応用不規則関数論, 共立出版
- 27) 高橋智晴・佐々木徹也・金子大二郎・副島 毅 : 波浪に関する拠点観測年報 (昭和49年), 港湾技研資料, No. 233, 1976.
- 28) 高橋智晴・佐々木徹也・広瀬宗一 : 波浪に関する拠点観測年報 (昭和50年), 港湾技研資料, No. 258, 1977.

主要記号一覧表

| | | | |
|----------------------|--|--------------|--|
| I : | 伝達情報量 | R : | 相関行列 |
| p_i : | i 番目の事象の生起確率 | r_t : | 自己相関系列 |
| I_{TOTAL} : | 観測時間 T の全情報量 | k : | 波数 |
| H : | エントロピー (単位時間当りの平均情報量) | Δx : | センサーの間隔 |
| λ_k : | ラグランジュ乗数 | $R(f)$: | 周波数 f のクロスパワーマトリックス |
| C_N : | 要素 c_{ij} を持つ分散・共分散マトリックス | MLM(k) : | Maximum Likelihood Method による波数 k のパワースペクトル |
| $\phi(i)$: | ラグ i の自己相関 | (FPE) $_N$: | N 次の自己回帰過程での Final Prediction Error |
| T_N : | 自己相関を要素とする Toeplitz マトリックス | S_M^2 : | 自己回帰過程における入力時系列と予測時系列の誤差パワー |
| h : | エントロピー率 (無限長過程のエントロピー) | ν : | 自由度 |
| f_N : | ナイキスト周波数 ($1/2\Delta t$), Δt はサンプリング間隔 | $P(f)$: | パワースペクトルの推定値 |
| $S(f)$: | 周波数 f のパワースペクトル密度 | a_t : | 予測誤差フィルター |
| r_j : | 予測誤差フィルター係数 | α : | 予測誤差フィルターのマトリックス表示 |
| P_{N+1} : | 予測誤差パワー | γ : | α を規準化したマトリックス |
| e^f : | 前方への予測に対する誤差系列 | P : | 予測誤差パワーのマトリックス表示 |
| e^b : | 後方への予測に対する誤差系列 | N : | フィルター長 |
| $X(\omega)$: | 離散的時系列 x_t のフーリエ変換, ω は角周波数 | M : | データ数 |
| $\Gamma(\omega)$: | 伝達関数 | $E(k)$: | $\exp(-i 2\pi n k \Delta x)$ を要素とする列ベクトル, i は虚数単位。 |
| ξ_t : | 平均値 0, 分散 1 の無相関列 | K : | ホワイトノイズの振幅 |
| δ_t : | ディラックデルタ関数 | | |

港湾技研資料 No. 273

1977・9

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発行所 運輸省港湾技術研究所
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所 阿部写真印刷株式会社