

# 港湾技研資料

TECHNICAL NOTE OF  
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE  
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 247

Sept. 1976

有限要素法による圧密問題の解析

小林 正 樹

運輸省港湾技術研究所



# 目 次

要 旨 .....	3
1. まえがき .....	3
2. 三次元圧密理論の基本方程式 .....	4
2.1 Terzaghi の一次元圧密理論 .....	4
2.2 Terzaghi - Rendulic の三次元圧密理論 .....	4
2.3 Biot の三次元圧密理論 .....	4
3. 有限要素法への定式化 .....	5
3.1 Terzaghi - Rendulic の圧密方程式 .....	5
3.2 Biot の圧密方程式 .....	6
4. 数値計算例 .....	7
4.1 一次元圧密 .....	8
4.2 多次元圧密 .....	10
5. まとめ .....	12
謝 辞 .....	12
参考文献 .....	12
付録A 添字記号 .....	13
付録B 形状関数 .....	13

# Solutions of consolidation problems by finite elements

Masaki KOBAYASHI

## Synopsis

The main points of finite element formulations for pseudo three- and three-dimensional theories of consolidation are summarized. This method is general with respect to geometry, boundary conditions and material properties.

Some examples on one- and two-dimensional consolidation problems are presented and compared with closed form solutions to demonstrate accuracy and applicability.

---

\*Chief of the Soil Investigation Laboratory, Soils Division

# 有限要素法による圧密問題の解析

小林 正 樹\*

## 要 旨

有限要素法により、Terzaghi-Rendulic 系列および Biot 系列の圧密方程式を解いた。有限要素法は複雑な境界条件あるいは粘土層が不均一な場合にも容易に適用できる利点がある。一次元および二次元圧密のいくつかの例について計算を行った結果を報告し、解析解との比較を行い、有限要素法による解の精度の良いことが示された。

### 1. まえがき

圧密沈下の問題を解析する際には、Terzaghi の一次元圧密理論をそのまま、あるいは、若干の修正を行って適用する方法が一般に行われている。載荷が粘土層厚に比較して非常に広い範囲に対して行われ、粘土層が均一であれば、Terzaghi の一次元圧密理論がほぼそのまま適用できるであろう。しかし、実際に圧密沈下の解析を行う場合の地盤は不均一なことが多く、さらに、載荷の状況が三次元的な場合も少なくない。

一次元圧密の場合においても、地盤が不均一であると、換算層厚法のように層厚あるいは圧密係数に補正を加えて均一地盤として、Terzaghi の一次元圧密理論を適用する方法は、条件によっては誤差が大きくなる場合がある<sup>1)</sup>。

このような不均一地盤に対する圧密解析を行うためには、解析解を求めるのが困難であるので、何らかの数値計算を用いる必要が生じる。

これまでこのような場合の数値計算法として広く用いられてきたものに差分法がある。しかし、差分法では、粘土層の性質の異なる境界層において特別の工夫<sup>2)</sup>が必要となり、また、境界条件の種類によっては差分法が困難となることがある。さらに、差分法においては、規則正しい節点を用いる必要があるので、粘土層の変化が急激な場合などには節点数が多くなる欠点がある。

一次元圧密の問題に対して有限要素法を適用することに関しては、圧密の方程式が熱伝導の方程式と同一になるという点もあり、かなり以前から行われてきた。<sup>3)</sup> 一次元圧密の問題における有限要素法の利点は任意の間隔の節点をとることができること、不均一地盤に対しても容易に解析を行える点である。

圧密沈下の解析を行う場合に問題となる点の一つに沈

下が三次元的に生じるのに対して、一次元の理論を適用することがあげられる。この理由としては、三次元圧密理論に各種のものがあ、そのうちのどれを適用すべきかの問題が生じたり、また、実際の問題に対して解を得ることが困難である点が考えられる。

三次元圧密理論には大きく分けて Terzaghi-Rendulic の系列のものと Biot の系列のものがある。

Terzaghi-Rendulic の三次元圧密理論は熱伝導と圧密の類似性を考慮して、一次元の圧密方程式をそのまま三次元に拡張し、三次元の熱伝導の基本方程式と同じような方程式を導いたものである。

一方、Biot の系列の圧密理論<sup>4)~7)</sup>は土を多孔質材料と考え、土粒子骨格を弾性体とし、間げき流体の圧縮性も考慮して圧密方程式を導いたものである。Biot の圧密理論は吉岡<sup>8)</sup>によって圧密ポテンシャルという概念を用いて整理され直しているが、その場合、Biot の圧密方程式の本質が変化する訳ではなく、Biot の圧密方程式を異なった表し方で整理したものであると考えることができる。

圧密現象においては、土粒子骨格が圧密の進行とともに変形を生じ、そのために種々の応力再配分が起り、その影響により圧密の進行が変化することが認められている。Terzaghi-Rendulic の三次元圧密理論では、圧密を単なる間げき圧の消散現象と考えているので、このような現象を説明できない欠点がある。一方、Biot の圧密理論では、土粒子骨格の変形を考慮しているため、より厳密な圧密理論と考えることができる。

三次元圧密の解析を行うためには、Terzaghi-Rendulic の圧密理論を用いる場合にも、Biot の圧密理論を用いる場合にも、一般的な場合の解析解を得ることが困

\* 土質部 土質調査研究室長

難であるために数値計算法が用いられる。

Terzaghi-Rendulicの圧密方程式は熱伝導の方程式と同型であり、差分法を用いることも可能であるが、地盤の不均一性を考慮すると有限要素法の方が有利であろう。Terzaghi-Rendulicの圧密方程式に対して有限要素法を適用する場合は、その式が熱伝導の式と同じであるので、有限要素法の手法は時間次元の問題として十分確立している<sup>9)</sup>。

Biotの圧密方程式を有限要素法によって解いた例は、Sandhu・Wilson<sup>10)</sup>に始まり、Christian・Boehmer<sup>11)</sup>、Hwang・Morgenstern・Murray<sup>12)</sup>、Yokoo・Yamagata・Nagaoka<sup>13)</sup>、Ghaboussi・Wilson<sup>14)</sup>、Valliappan・Lee・Boonluahor<sup>15)</sup>、伊藤・赤木・色部<sup>16)</sup>、Smith・Hobbs<sup>17)</sup>などがある。この中で、Ghaboussi・Wilsonと伊藤・赤木・色部は間げき流体の圧縮性をも考慮した場合をとり扱っている。

今回、有限要素法によってTerzaghi-Rendulic系列およびBiot系列の圧密方程式を解き、いくつかの問題に対してそれらの解を解析解と比較検討し、圧密問題に対する有限要素法の適用性を調べた。

## 2. 三次元圧密理論の基本方程式

### 2.1 Terzaghiの一次元圧密理論

圧密沈下解析に際しては、Terzaghiの一次元圧密理論が一般に広く用いられている。この圧密理論は次のような基本方程式で表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

### 2.2 Terzaghi-Rendulicの三次元圧密理論

構造物の大きさすなわち載荷の広さが粘土層厚に比較して非常に大きい場合には、圧密沈下は一次的に生じると考えられるので、Terzaghiの一次元圧密理論が適用できる。しかし、一般の構造物の圧密沈下は二次元あるいは三次元的に生じるので、三次元圧密理論を用いて解析を行わなければならない。

RendulicはTerzaghiが一次元圧密の方程式を導いたときと同様な手順でこれを三次元の場合に拡張して次のような式を導いた<sup>18)</sup>。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

ただし、この式中の $c_v$ の値は一次元圧密の場合のように簡単ではなく、一般的には

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w f(x, y, z)} \quad (3)$$

と表わされる。

ここに、 $f(x, y, z)$ は粘土中の三次元的有効応力 $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ の変化とそれに対応する体積ひずみ $\varepsilon$ によって定まる関数である。

$$f(x, y, z) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma'_1} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma'_2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma'_3} \quad (4)$$

このように三次元圧密の場合の $c_v$ の値は一次元圧密の $c_v$ の値に比較して複雑になっているので、三次元圧密の解析を実際に行うのは困難となってくる。

Terzaghiは $f(x, y, z)$ を一定として計算を行うのは問題点が多いと指摘しているが、式(2)の中で $c_v$ の値を一定とする三次元圧密理論を一般にはTerzaghi-Rendulicの三次元圧密理論とよんでいる。この圧密理論の基本方程式(2)は三次元の熱伝導の基本方程式と同じであり、後に述べるBiotの三次元圧密方程式と比較して簡単であるので、サンドドレーンなどの二次元、三次元圧密の解析に用いられてきている。

### 2.3 Biotの三次元圧密理論

Biotは三次元弾性論の立場から、土を多孔質材料としてより一般的な三次元圧密の基本方程式を導いた<sup>19-21)</sup>。

土の粒子骨格を弾性体とし、間げき流体の圧縮性を考慮して三次元圧密の基本方程式を導く。骨格の変位成分を $v_i$ とし、間げき流体の骨格に対する相対変位成分を $w_i$ とする。骨格および間げき流体のひずみは次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \\ \zeta &= w_{i,i} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 $e_{ij}$ は骨格ひずみのテンソルであり、 $\zeta$ は間げき流体の体積ひずみである。ただし、式(5)は添字記号を用いて書いてあるので注意が必要である。付録Aに添字記号の簡単な説明をあげておくので参照されたい。化学反応による効果および慣性力の影響を無視すると、次のようなつり合い方程式が得られる。

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad (6)$$

ここに、 $\sigma_{ij}$ はこの多孔質材料として考えた土に作用する全応力テンソルであり、 $\rho, b_i$ はこの土の湿潤密度および単位質量当りの物体力のベクトル成分である。

土粒子骨格を弾性体とすると、この多孔質材料の応力-ひずみの関係式は次式のように考えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} e_{kl} + M_{ij} \zeta \\ u &= M_{ij} e_{ij} + M \zeta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 $C_{ijkl}$ は土粒子骨格の弾性定数テンソル、 $u$ は間げき圧であり、 $M_{ij}$ と $M$ は間げき流体の圧縮率と土粒子自体の圧縮率を規定するものである。 $C_{ijkl}$ と $M_{ij}$ は対称性から次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \\ M_{ij} &= M_{ji} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

等方性の場合は式(7)は簡単になり、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu e_{ij} + (\lambda + \alpha^2 M) \delta_{ij} \delta_{kl} e_{kl} + \alpha M \delta_{ij} \zeta \\ u &= \alpha M \delta_{ij} e_{ij} + M \zeta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。ただしここに、 $\mu$ と $\lambda$ は土粒子骨格のLaméの定数であり、 $\alpha$ と $M$ は間げき流体と土粒子の圧縮性を規定するものである。また、 $\delta_{ij}$ はデルタ記号である。間げき流体と土粒子の圧縮性が無視できる場合は、 $\alpha = 1$ 、 $M = \infty$ となる。

一般化したDarcyの法則は、

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k_{ij} (u, i + \rho_f b_i) \quad (10)$$

となる。ここに、 $k_{ij}$ は透水係数テンソルであり、 $\rho_f$ は間げき流体の密度である。式(7)を用いると、式(10)は、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = k_{ij} (u, i + \rho_f b_i), i \quad (11)$$

となり、連続の方程式が得られる。

Biotの三次元圧密の基本方程式は、式(6)のつり合い方程式、式(11)の連続方程式、式(7)の応力—ひずみ関係式の三つである。これらの式を一般的な場合に対して解くことは困難であり、単純化された条件でのみ解析解が得られている。Biotの三次元圧密理論の方がTerzaghi-Rendulicの三次元圧密理論に比較してより厳密であることが認識されていたにもかかわらず、Biotの理論が一般に用いられなかった原因はこのためであると考えられる。Barron<sup>19)</sup>がサンドレーンの解析を行うにあたって、Biotの圧密理論による解が得られなかったために、Terzaghi-Rendulicの圧密理論を用いたと述べているのもこれを表わす一つの例である。

一次元圧密の場合はBiotの圧密方程式とTerzaghi-Rendulicの圧密方程式が一致することが証明されている<sup>20)</sup>。

### 3. 有限要素法への定式化

#### 3.1 Terzaghi-Rendulicの圧密方程式

Terzaghi-Rendulicの三次元圧密理論の基本方程式は式(2)で表わされる。この式は熱伝導の基本方程式と同一であるので、有限要素法による解法は十分に確立して

いて、その方法は標準的な有限要素法の教科書<sup>9)</sup>にもくわしく述べられている。

圧密の基本方程式(2)のある初期条件と境界条件のもとで解くことを考える。この場合、境界条件として次の二種類のものが考えられる。

(1) 境界上で $u$ の値が指定される場合

$$\text{すなわち、境界 } \Gamma_1 \text{ で } u = \bar{u}(t) \quad (12)$$

圧密の問題では、排水面で $u = 0$ となるが、これは(1)の境界条件の一例である。

(2) 境界上の次式のような条件が与えられている場合

$$\text{境界 } \Gamma_2 \text{ で } \partial u / \partial n = q \quad (13)$$

ここに、 $n$ は境界面上の法線方向を表わす。式(13)は境界面を出入りする流量 $q$ を規定するものである。たとえば、非排水面では $\partial u / \partial n = 0$ と表わされる。

Terzaghi-Rendulicの圧密理論は式(2)の基本方程式と式(12)、式(13)の境界条件によって一義的に定義されるが、有限要素法を適用する場合には、変分法によってそれに代わる別の定式化を行う方が便利である。変分原理によれば、Terzaghi-Rendulicの圧密方程式を解くことは次のような関数 $\Pi$ を最小にするような $u$ を求めると等価である。

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ C_v \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial t} u \right] d\Omega - \iint_{\Gamma_2} q u d\Gamma \quad (14) \end{aligned}$$

ここに、 $\Omega$ は解析すべき全領域を表わし、 $\Gamma_2$ 、 $\Gamma$ は式(13)で規定されるような境界面を表わす。関数 $\Pi$ は変分原理において汎関数とよばれるものである。

有限要素法においては、解析すべき領域を適当な有限要素に分割し、要素内における未知関数 $u$ を要素節点における $u$ の値を用いて次式のように表わす。

$$u = [N] \{u\}^e \quad (15)$$

ここに、 $u$ は要素内の間げき圧、 $[N]$ は形状関数、 $\{u\}^e$ は要素内の節点間げき圧ベクトルである。式(15)を用いると、節点での $u$ の値が決まれば要素内での $u$ の値が求められることになる。有限要素法では節点での未知関数の値を未知数として汎関数を最小化するような値を求めるとなる。

汎関数 $\Pi$ を節点での $u$ の値に関して最小化するためには次の式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = \begin{Bmatrix} \partial \Pi / \partial u_1 \\ \partial \Pi / \partial u_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (16)$$

ここに、 $\{u\}$ は求めるべき各節点での $u$ の値の全体ベクトルである。全体の汎関数は各要素からの寄与の和で表わされるので、式(18)のある代表的な節点に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_n} = \sum \frac{\partial \Pi^e}{\partial u_n} = 0 \quad (17)$$

ここに、 $\Pi^e$ はある一つの要素の $\Pi$ に対する寄与を表わす。また、総和は全要素にわたってとるものとする。式(14)の型の汎関数に対しては、ある一つの要素において次のような式が得られる。

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \{u\}^e} = [h]^e \{u\}^e + [C]^e \frac{\partial}{\partial t} \{u\}^e + \{F\}^e \quad (18)$$

全体の系の最小化方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = [H] \{u\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{u\} + \{F\} = 0 \quad (19)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} H_{ij} &= \sum h_{ij}^e \\ C_{ij} &= \sum c_{ij}^e \\ F_i &= \sum F_i^e \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

したがって、一つの要素に対する $h_{ij}^e$ 、 $c_{ij}^e$ 、 $F_i^e$ が得られれば全体の系に対する方程式が求められることになる。

要素内における $u$ は式(14)のように各節点での $\{u\}^e$ によって表わされるので、この式を用いると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} h_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \left\{ C_v \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} d\Omega \\ c_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} N_i N_j d\Omega \\ F_i^e &= \int_{\Gamma_2^e} q N_i d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここに、積分 $\Omega^e$ はその要素について行い、 $\Gamma_2^e$ はその要素中で式(14)の型の境界条件で規定されるような境界について行う。式(19)は時間に関する微分を含んでいるので、その漸化式を求める必要がある。漸化式が求められると、ある初期条件に対して逐次計算法を行うことによって全時刻に対する解が得られる。式(19)の漸化式は種々のものが考えられるが、今回は最も簡単な中央差分をとるものを考えた。時刻 $t = t_{n-1}$ から $t = t_n$ までの時間区間を考え、それぞれの $\{u\}$ の値を $\{u\}_{n-1}$ 、 $\{u\}_n$ とすると式(19)は次のようになる。

$$\begin{aligned} [H] \left( \frac{1}{2} \{u\}_{n-1} + \frac{1}{2} \{u\}_n \right) + \frac{1}{\Delta t} [C] \\ \left( -\{u\}_{n-1} + \{u\}_n \right) + \{F\} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

適当な形状関数 $[N]$ を仮定すれば、式(22)、(23)を用いて、任意の初期条件および境界条件に対してTerzaghi-Rendulicの圧密方程式を連立一次方程式として解くことができる。

ここで行った解析で用いた有限要素は、二次の任意形状のアイソパラメトリック四辺形<sup>3)</sup>である。この要素の形状関数がどのように表わされるかは付録Bに簡単に述べてある。

### 3.2 Biotの圧密方程式

Biotの圧密理論の場合もTerzaghi-Rendulicの圧密方程式と同様に、基本方程式を変分原理を用いて汎関数 $\Pi$ の最小化として表わすことができる。この場合の汎関数 $\Pi$ は次のように表わされる<sup>14)</sup>。

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Omega} & (e_{ij} * C_{ijkl} e_{kl} + 2u * \alpha d_{ij} e_{ij} \\ & - 1 * u, i * \frac{k}{\eta} u, i - u * \frac{1}{M} u \\ & - 2\rho b_i * v_i - 2 * \rho_f b_i * u, i) d\Omega \\ & + 2 \int_{\Gamma_2} 1 * q * u d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、ここに $*$ はconvolution積分とよばれるもので、次式のように表わされる。

$$V * W = \int_0^t v(r, \tau) w(r, t - \tau) d\tau \quad (24)$$

3.1で行ったと同様の汎関数の最小化を行うと、Biotの圧密方程式を有限要素法により解く場合の基本式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} [K] \{v\} + [C] \{u\} &= \{F\} \\ [C]^T \frac{\partial}{\partial t} \{v\} - [E] \frac{\partial}{\partial t} \{v\} - [H] \{u\} &= -\{Q\} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

各要素におけるマトリックスの値は次式で求められる。

$$[K]^e = \int_{\Omega^e} [B]^T [C] [B] d\Omega$$

$$\left. \begin{aligned}
\{C\}^e &= \int_{\Omega^e} [N]^T \alpha_1 [B] d\Omega \\
\{H\}^e &= \int_{\Omega^e} [A]^T [k] [A] d\Omega \\
\{E\}^e &= \int_{\Omega^e} [N]^T \frac{1}{M} [N] d\Omega \\
\{F\}^e &= \int_{\Omega^e} [N]^T \rho \{b\} d\Omega \\
\{Q\}^e &= \int_{\Gamma_2^e} [N]^T [N] q d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega^e} [A]^T [k] \rho_f \{b\} d\Omega
\end{aligned} \right\}$$

ただしここに、 $[B]$  は土粒子骨格のひずみと節点変位の関係を表わすマトリックスであり、 $[A]$  は動水勾配と節点間けき圧の関係を表わすものであり、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
\{e\} &= [B] \{v\} \\
\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} &= [A] \{u\}
\end{aligned} \right\}$$

式(24)も 3.2 で行ったと同じように漸化式を求めなければならぬ。Biot の圧密解析を行うにあたっては、単純な中央差分でなく時間区間においても適当な関数を用いて内挿する方法をとった。圧密の進行は時間とともに遅くなるので、対数型の関数を用いて時間領域での内挿を行った<sup>12)</sup>。

対数型の内挿公式を用いると、ある時刻  $t = t_{n-1}$ 、および  $t = t_n$  における  $\{F\}$ 、 $\{Q\}$  の値をそれぞれ  $\{F\}_{n-1}$ 、 $\{Q\}_{n-1}$  と  $\{F\}_n$ 、 $\{Q\}_n$  とすれば、その区間内の任意の時刻  $t$  における値  $\{F\}_t$ 、 $\{Q\}_t$  は次のように表わされる。

$$\{F\}_t = \{F\}_{n-1} + \left\{ \{F\}_n - \{F\}_{n-1} \right\} \frac{\ln(1+\tau)}{\ln(1+\tau_0)}$$

$$\{Q\}_t = \{Q\}_{n-1} + \left\{ \{Q\}_n - \{Q\}_{n-1} \right\} \frac{\ln(1+\tau)}{\ln(1+\tau_0)}$$

ここに、 $\tau = (t - t_{n-1}) / t_{n-1}$ 、 $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ 、 $\tau_0 = \Delta t / t_{n-1}$  である。

式(24)を漸化すると、

$$\left. \begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t} [C]^T (\{v\}_n - \{v\}_{n-1}) - \frac{1}{\Delta t} [E] \\
&(\{v\}_n - \{v\}_{n-1}) - \int_0^{\Delta t} \frac{t}{\Delta t} [H] \{u\}_t dt \\
&= - \int_0^{\Delta t} \frac{t}{\Delta t} [Q]_t dt
\end{aligned} \right\}$$

となる。この式に式(25)を代入して積分すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
&[K] \{v\}_n + [C] \{u\}_n = \{F\}_n \\
&[C]^T \{v\}_n - [E] \{u\}_n - \alpha \Delta t [H] \{u\}_n \\
&= -\alpha \Delta t \{Q\}_n - \Delta t (1-\alpha) \{Q\}_{n-1} \\
&+ [C]^T \{v\}_{n-1} - [E] \{u\}_{n-1} \\
&+ (1-\alpha) \Delta t [H] \{u\}_n
\end{aligned} \right\}$$

初期条件および境界条件が与えられれば、式(26)を用いて Biot の圧密基本方程式を解くことができる。ただし、土粒子および間けき流体が非圧縮性の場合には注意が必要である。このような場合の載荷直後の  $t = 0$  における値を求めようとするとき式(26)で表わされる連立一次方程式の係数マトリックスの対角要素に零が現われ、解を求めるのが困難となる。土粒子および間けき流体が非圧縮性であると  $1/M$  の値が零になるが、今回行った計算では、 $1/M$  の値として骨格の圧縮率に比較して無視できるような小さな値を用いた。このようにすると、連立一次方程式を一般の Gauss の消去法によって解くことが可能となり、また、完全に土粒子および間けき流体が非圧縮性ではないが、それに非常に近い場合の値が得られることになる。

#### 4. 数値計算例

3. に述べた有限要素法への定式化を用いて、Terzaghi-Rendulic の圧密方程式および Biot の圧密方程式の解をいくつかの初期条件および境界条件のもとで解いた。この場合、連立一次方程式の解法としてはバンドマトリックス法による Gauss の消去法を用いた。



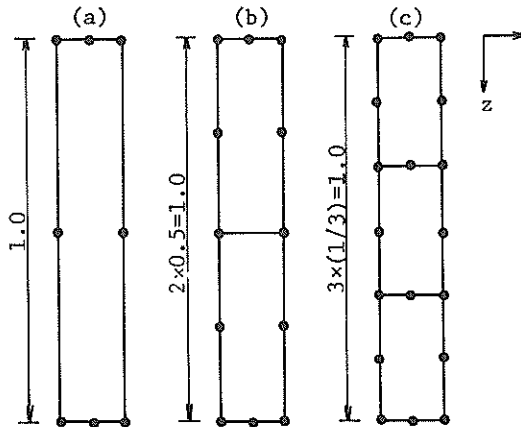
圧密の問題を有限要素法によって解析する場合には、構造系の問題を解析する際には異なる問題点が生じる。

圧密の問題においては、連立一次方程式の係数の対角要素が非対角要素に比較して小さい値の場合がしばしば現われる。このような連立方程式を解く場合には、計算が有限のけた数で行われるために解の精度が落ち、ill-conditioning とよばれる現象が生じることが知られている。今回用いた電子計算機は一語が36ビットであるために有効けた数が少ないので、特に何らかの手段を講じる必要がある。このためには、連立方程式の誤差を計算してその値が小さくなるまでくり返して連立方程式を解く方法、未知関数の不連続性を許すような特殊な有限要素を用いる方法などがある。しかし、各要素の剛性マトリックスを計算する際に用いる数値積分の次数を、厳密に積分するために必要な次数より下げて積分する方法により、この問題点を解決できることが報告されている<sup>21)</sup>。

今回はこの方法を用いて、数値積分を行う際に Gauss の求積法の2点積分<sup>9)</sup>を適用した。このように次数を下げて数値積分を行うと、節点における未知関数の値は誤差は大きくても、積分を行った点における値は精度の良い値が得られる。したがって、今回得られた結果も節点の値、特に Biot の圧密の場合の節点における間げき圧の値は非常に誤差が大きかったので、数値積分を行った点における値を用いて結果の整理を行った。

#### 4.1 一次元圧密

飽和土の一次元圧密の場合は Biot の圧密理論による結果と Terzaghi-Rendulic の圧密理論による結果が同一になることが証明されている<sup>20)</sup>。したがって、この場合には、Terzaghi-Rendulic による有限要素解析の方が一節点あたりの自由度も少なく、さらに連立一次方程式

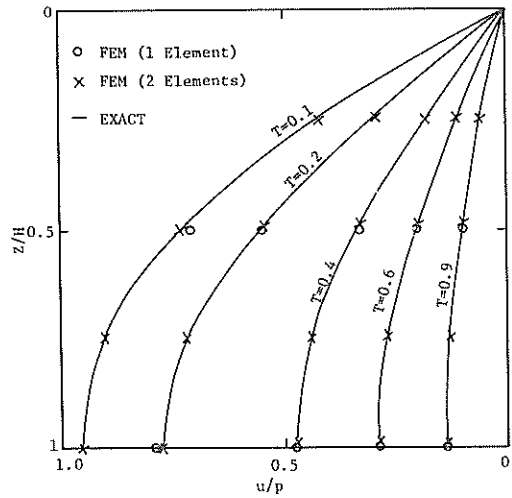


図一 1 一次元圧密の場合の有限要素分割

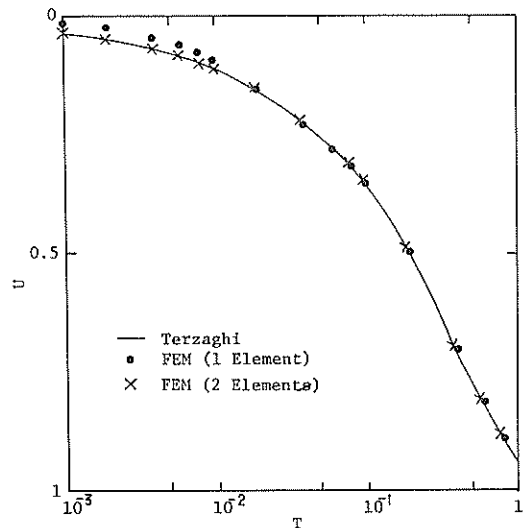
を解く際の ill-conditioning の問題も少ないので有利である。

一次元圧密の場合の Terzaghi-Rendulic の圧密方程式を有限要素法によって解いた結果を解析解と比較してみる。排水条件を片面排水とし、要素の数を変化させて図一1のように一要素の場合と二要素の場合について計算結果を比較したものが図一2および図一3である。

図一2は有限要素法の結果から得られた等時曲線を厳密解と比較したものである。この図にみられるように、



図一 2 一次元圧密の等時曲線



図一 3 一次元圧密の場合の平均圧密度と時間係数の関係

一要素の場合は時間係数の初期においてやや厳密解との差がみられるが、 $T > 0.2$  以降ではほぼ厳密解と一致している。一方、二要素を用いた場合には、厳密解との一致は非常に良いことが分る。図-3は平均圧密度について同様の比較を行ったものである。この結果も等時曲線と同様の傾向を示している、一要素の場合は初期における厳密解との差がみられるが、二要素の場合においては全区間にわたって良い一致を示している。この結果から、今回用いた8節点の有限要素は非常に少ない数の要素で精度の良い結果が得られることが分る。

次に多層地盤の場合の圧密について、有限要素法によ

る値と解析解の比較を行ってみる。多層地盤の圧密において一般に行われている簡便な換算層厚法を用いると、条件によっては非常に大きな誤差を生じることが指摘されている<sup>1)</sup>。このような多層地盤あるいは不均質地盤の圧密の解析に対しても有限要素法を適用することは容易である。

図-4に示すような二層地盤の圧密を考える。排水条件は片面排水とし、層厚、圧密係数、透水係数の値および有限要素の分割の様子は図中に示されている。この問題に対してはGray<sup>2)</sup>によって解析解が得られているので、この結果と有限要素法による結果を比較したのが図

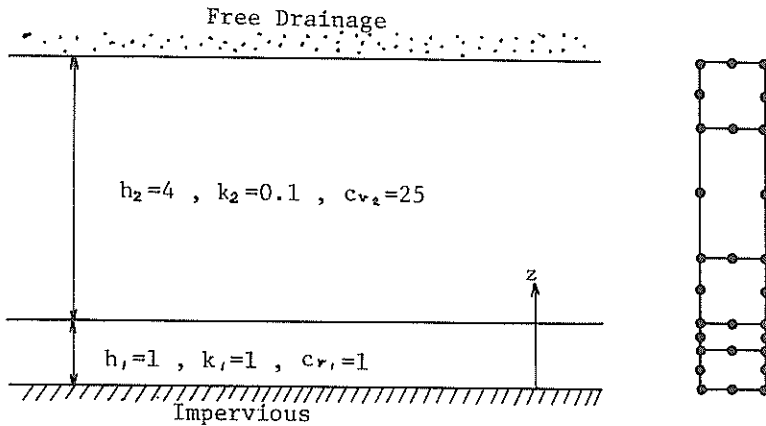


図-4 二層地盤の圧密の場合の有限要素分割

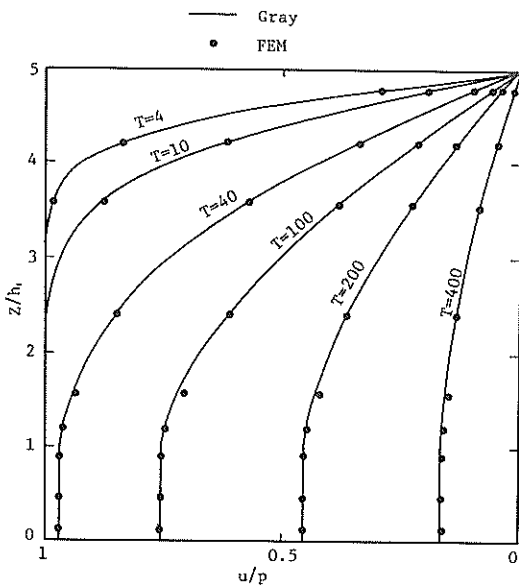


図-5 二層地盤の場合の等時曲線

一5および図-6である。図-5は等時曲線に関して比較を行ったものである。この図に示されるように有限要素法の結果はGrayの解析解と良く一致している。図-6は同様の比較を平均圧密度 $U$ と時間係数 $T$ の関係について行ったものである。ただしここに、 $T = C_v t / h_1^2$ で表わされる。図-6から分るように平均密度と時間係

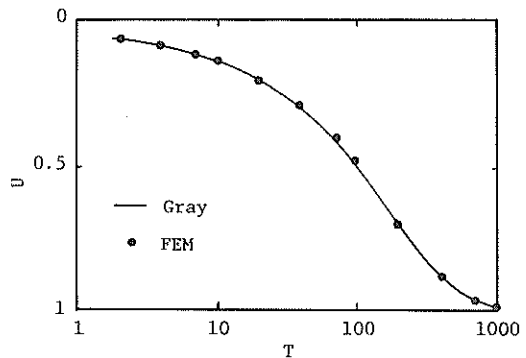


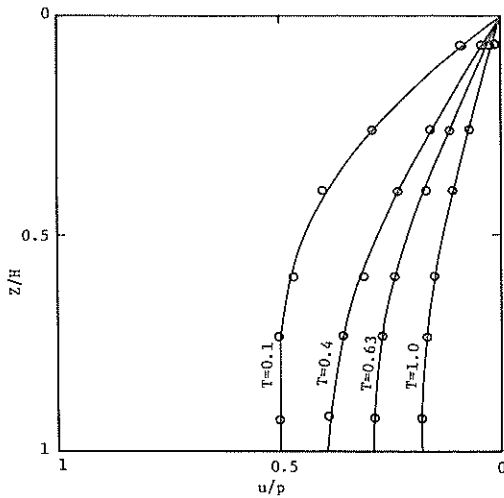
図-6 二層地盤の場合の平均圧密度と時間係数の関係

数の関係においても、有限要素法による解の精度は良い。

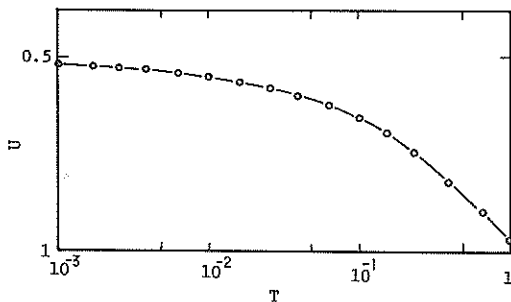
一次元圧密の最後の問題として、不飽和土の圧密を考える。この場合は Biot の圧密理論を用いなければならない。式(9)の  $M$  と  $\alpha$  の値が不飽和の程度を表わすものであるが、ここでは、 $M = 1$ 、 $\alpha = 1$  の値を用いた。また、土粒子の骨格の係数は  $E = 1$ 、 $\nu = 0$ 、 $k = 1$  である。

有限要素の分割は図一(C)のように三要素を用いた。

図一7は有限要素法の結果から得られた等時曲線を示したものであり、図一8は沈下に関する圧密度  $U$  と時間



図一7 不飽和土の圧密の等時曲線



図一8 不飽和土の沈下に関する圧密度と時間係数の関係

係数  $T$  の関係を示したものである。この場合には、不飽和のために間げき圧が加えた圧力の半分しか発生せず、沈下も  $t = 0$  で半分生じていることが分る。

このような不飽和土の解析を行う場合には、定数  $M$  および  $\alpha$  の値のもつ物理的意味を考慮して行われなければならない。また、この Biot の理論においては単に間げき流体および土粒子の圧縮性のみを考えているが、実際

の不飽和土においては、間げき水圧と間げき空気圧の相違、あるいは、圧密中の気体の溶解現象などの問題も生じて、このような単純な取扱いが不可能な場合も生じると考えられる。

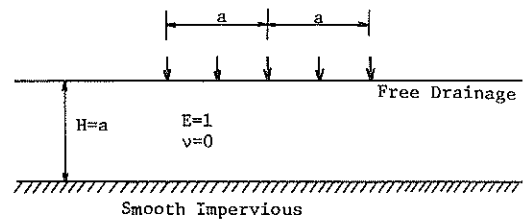
#### 4.2 多次元圧密

Biot の圧密理論による解はその基本方程式の複雑さのためにあまり多く得られていない。さらに、解が報告されている場合にも、その解析における収れん性の疑問点が指摘されている場合もある。

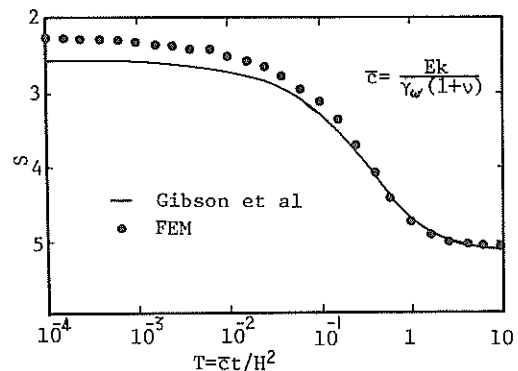
有限粘土層上の帯状基礎による圧密問題は Gibson ら<sup>23)</sup>によって解が求められているが、山口ら<sup>24)</sup>はその収れん性の問題を提起し、やや異なった境界条件に対する解を報告している。ここでは、この問題を取り上げ、その結果を Gibson らの解および山口らの解と比較した。

図一9に示すような有限粘土地盤上のたわみ性帯基礎による圧密の問題を考える。排水条件は上面排水とし、底面の境界は完全に滑らかとする。この問題に対して Gibson らは地表面におけるせん断力が零の場合の解を求めたが、山口らはその解に問題点があるとして、地表面における水平変位が零の場合について解を求めている。

図一10は地表面のせん断力が零の場合に対して、基礎中心における沈下量  $S$  と時間係数  $T$  の関係について、有



図一9 有限粘土層上の帯基礎の圧密



図一10 地表面でせん断力が零の場合の沈下量と時間係数の関係

有限要素法の結果と Gibson らの結果を比較したものである。この図に示されるように両者の結果には差がみられる。この原因が Gibson らの解の収れん性の問題点によるものかどうかは今後の検討事項であろう。

図-11は水平変位が零の場合に対して基礎中心における沈下量に関する圧密度について、有限要素法の結果と

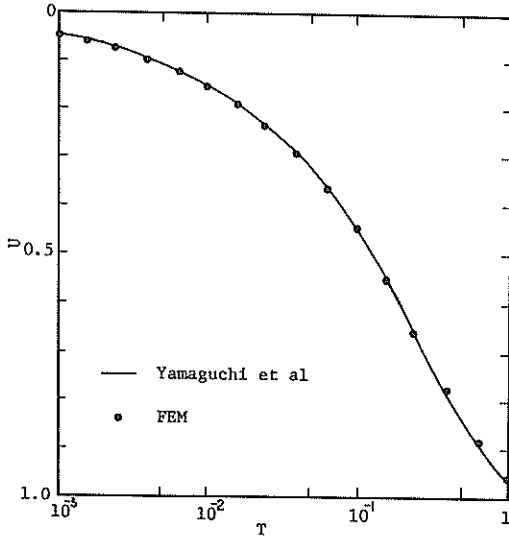


図-11 地表面で水平変位が零の場合の沈下に関する圧密度と時間係数の関係

山口らの解とを比較したものである。この図に示されるように、両者の結果は非常に良く一致していて、有限要素法により、Biot の圧密方程式が精度良く解けることを表わしている。

多次元圧密においては、Biot の圧密理論による結果と Terzaghi-Rendulic の圧密理論による結果に大きな差がある場合がある。

その一例として球状粘土の圧密の問題を考える。周面に一定の静水圧  $P$  が加わり、周面が排水面だとする。図-12は、軸対称条件とした、有限要素の分割の様子を示したものである。この場合の中心点における間げき圧  $u$  と加えられている水圧  $P$  の比  $u/P$  と時間係数  $T$  の関係を図-13に示した。ただし、ここに、 $T = kE(1-\nu)t / r_w(1+\nu)(1-2\nu)r^2$  である。この問題に対しては、解析解が得られている<sup>25)</sup>ので、図-13には Biot および Terzaghi-Rendulic の両方の圧密理論に対して、有限要素法の結果と解析解をそれぞれ示してある。図-12から有限要素法による解の精度の良いことが分る。この図には、Biot の圧密理論と Terzaghi-Rendulic の圧密理論の大きな差が現われている。すなわち、Terzaghi-

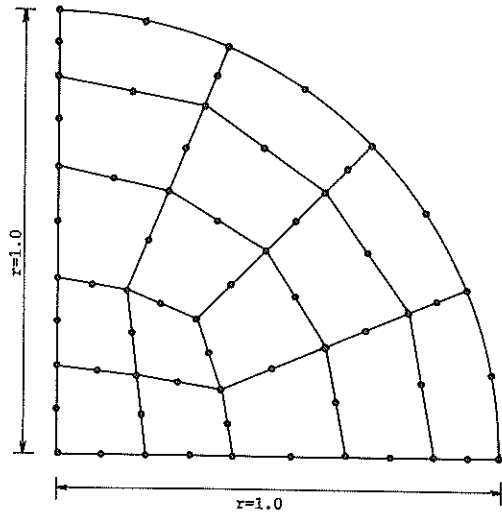


図-12 球状粘土の圧密の場合の有限要素分割

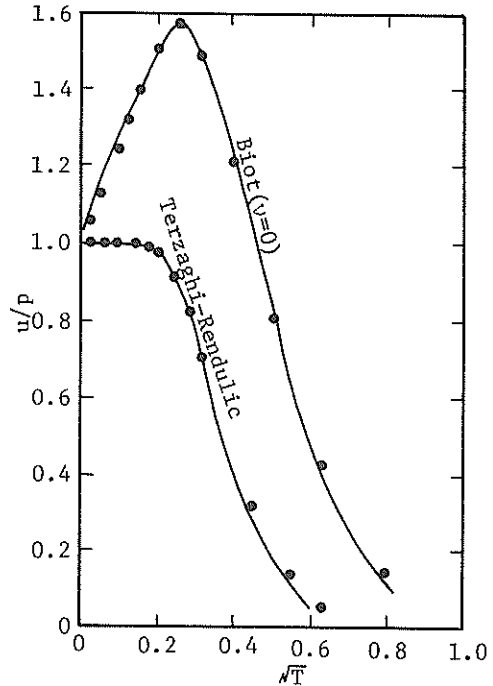


図-13 球状粘土の圧密の中心点の間げき圧と時間係数の関係

hi-Rendulic の圧密の場合には、中心点での間げき圧は時間とともに徐々に下って行くのに対して、Biot の圧密の場合には間げき圧が初期には大きな上昇を示して

いる。この現象は Mandel-Cryer 効果とよばれるものであり、土が圧密されると変形が生じるために全応力の再配分が起り、このような間げき圧の一時的上昇が生じる。このことは、土の圧密現象に特有なものであり、単に熱伝導の場合との基本式の類似性から、一次元の方程式を三次元に拡張したような Terzaghi-Rendulic の圧密理論では説明できないものである。

以上これまで示してきたように、有限要素法による圧密問題の解法は解析解と比較して非常に良い精度を有している。さらに、一般の複雑な問題に対して解析解を得ることが困難であることを考慮すると、任意の初期条件および境界条件に対して解の得られる有限要素法の適用性は大きいと思われる。

## 5. まとめ

今回は有限要素法によって Terzaghi-Rendulic 系列および Biot 系列の圧密方程式をいくつかの問題に対して解いた結果を報告した。

一次元圧密の場合は Terzaghi-Rendulic の圧密方程式と Biot の圧密方程式は一致する。解法の簡単な Terzaghi-Rendulic の理論を用いて一次元圧密の有限要素解析を行った結果によると、ここで用いた 8 節点有限要素を用いた方法は非常に少ない要素数で精度の良い結果が得られた。また、Biot の理論を用いると、間げき流体の圧縮性をも考えた解析が容易に行えることが分った。

帯状荷重をうける二次元圧密に対して、Biot の圧密理論を用いて有限要素法を行った結果は山口らの解析解と良く一致したが、Gibson らの解との一致はあまり良くなかった。この原因が Gibson らの解の収れん性にあるかどうかは今後の課題であろう。

Terzaghi-Rendulic と Biot の圧密理論の差を示す例として、球状粘土の圧密について球の中心での間げき圧の値の比較を行った。Biot の理論によると、中心点での間げき圧は初期に徐々に増加し、その後減少するという結果が得られた。この現象は Mandel-Cryer 効果とよばれるもので、土が圧密するに従って変形が生じるので、応力の再配分が起るためであると考えられる。Terzaghi-Rendulic の圧密理論によればこのような現象はみられず、間げき圧は単に減少するのみである。

実際の土は間げき圧の減少にともなってより複雑な非弾性的な変形が生じると思われ、土の骨格を弾性体と仮定した Biot の圧密理論ではまだ不十分な点も多い。

しかし、土の変形を考慮して圧密理論を構成している点で Biot 系列の圧密理論の利点は大きい。その Biot

の方程式をいかなる境界条件に対しても解くことのできる有限要素法の実際問題への適用性は大きいと思われる。

## 謝 辞

二次元圧密の解析解との比較を行うにあたって、東京工業大学山口柏樹教授より解析解の結果を提供していただいた。また、図面作成においては、土性研究室佐藤長成技官に多大の労をとって頂いた。ここに記して謝意を表する次第である。

(1976年6月30日受付)

## 参考文献

- 1) 小林正樹, 松本一明, 奥村樹郎: 広島空港における圧密沈下現象の解析, 第19回土質工学シンポジウム論文集, 1974年, pp. 61-70.
- 2) Scott, R. F.: Principles of soil mechanics, Addison-Wesley, London, 1963年, p. 550.
- 3) Zienkiewicz, O. C. and Y. K. Cheung: The finite element method in structural and continuum mechanics, McGraw-Hill, 1967.
- 4) Biot, M. A.: General theory of three dimensional consolidation, Journ. Appl. Phys., 12, 1941年, pp. 155-164.
- 5) Biot, M. A.: Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic media, Journ. Appl. Phys., 26, 1955年, pp. 182-185.
- 6) Biot, M. A.: Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid, Journ. Appl. Phys., 27, 1956年, pp. 459-467.
- 7) Biot, M. A.: Consolidation settlement under a rectangular load distribution, Journ. Appl. Phys., 12, 1941年, pp. 426-430.
- 8) 吉岡洋: 三次元圧密の基礎理論, 土木学会論文報告集, No 201, 1972年.
- 9) Zienkiewicz, O. C.: The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, 1971年.
- 10) Sandhu, R. S. and E. L. Wilson: Finite element analysis of seepage in elastic media Proc. ASCE, Vol. 95, No EM3, 1969.
- 11) Christian, J. T. and J. W. Boehmer: Plane strain consolidation by finite elements, Proc. ASCE, Vol. 96, No SM4, 1970.
- 12) Hwang, C. T., N. R. Morgenstern and D. W. Murray: On solutions of plane strain con-

solidation problems by finite element methods, Canadian Geotechnical Journ., Vol. 8, No 1, 1971年, pp. 109-118.

13) Yokoo, Y, K. Yamagata and H. Nagaoka : Finite element method applied to Biot's consolidation theory, Soils and Foundations, Vol. 11, No 1, 1971年.

14) Ghaboussi, J. and E. L. Wilson : Flow of compressible fluid in porous elastic media, Int. Journ. Numerical Methods in Eng., Vol. 5, 1973年, pp. 419-442.

15) Valliappan, S., I. K. Lee and P. Boonluahor : Finite element analysis of consolidation problem, Proc. Int. Symp. F. E. M. in flow problems, 1974年.

16) 伊藤洋, 赤木知元, 色部誠 : 有限要素法による不飽和土の圧密解析, 土木学会論文報告集, No 244, 1975年, pp. 15-22.

17) Smith, I. M. and R. Hobbs : Biot analysis of consolidation beneath embankments, Géotechnique, Vol. 26, No 1, 1976年, pp. 149-171.

18) 網千寿夫 : 圧密, 土質力学第4章, 技報堂, 1969年, pp. 331-471.

19) Barron, R. A. : Discussion on Rate of settlement under two- and three-dimensional consolidation, Géotechnique, Vol. 22, No 3, 1972年, pp. 533.

20) Sills, G. C. Some conditions under which Biot's equations of consolidation reduce to Terzaghi equation, Géotechnique, Vol. 25, No 1, 1975年, pp. 129-132.

21) Zienkiewicz, O. C., J. T. Too and R. L. Taylor : Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, Int. Jour. Numerical Methods in Eng., Vol. 3, 1971年, pp. 275-290.

22) Gray, H. : Simultaneous consolidation of contiguous layers of unlike compressible soils, Trans. ASCE, 110, 1945年.

23) Gibson, R. E, R. L. Schiffman and S. L. Pu : Plane strain and axially symmetric consolidation of a clay layer on a smooth impervious base, Q. Journ. Appl. Math., 16, 1970年, pp. 34-50.

24) 山口柏樹, 村上幸利 : 有限粘土層の多次元圧密につ

いて, 土木学会論文報告集, No 204, 1972年.

25) Gibson, R. E., K. Knight and P. W. Taylor : A critical experiments to examine theories of three dimensional consolidation, Proc. Europ. Conf. Soil. Mech., 1963年.

### 付録A. 添字記号

Biot の圧密方程式は複雑なものとなるので, 添字記号を用いて示した。添字記号を用いて書かれた数式をみる場合には次のような注意が必要である。

i) 添字がくり返されている場合には総和を意味する。

たとえば,  $\sigma_{ii}$  は次のような意味をもつ。

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

ii) くり返し現われる文字の添字を擬標, そうでないものを自由標とよび, 総和は擬標に関してとり, 自由標のすべての値に対してその方程式が成立するものと考ええる。たとえば  $P_{ij} x_j = 0$  という方程式は次の三つの方程式を一つの式で表わしたものである。

$$P_{11} x_1 + P_{12} x_2 + P_{13} x_3 = 0$$

$$P_{21} x_1 + P_{22} x_2 + P_{23} x_3 = 0$$

$$P_{31} x_1 + P_{32} x_2 + P_{33} x_3 = 0$$

iii) コンマの後の添字は微分を表わす。たとえば, 1, 2, 3 それぞれの座標軸を  $x, y, z$  とすると,  $\sigma_{ij}, j = 0$  という式は次の三つの式を表わすことになる

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

### 付録B. 形状関数

今回用いた有限要素は図-13に示すような8節点のアイソパラメトリック四辺形である。この要素の形状関数を考える際には, 全体系の座標  $x, y$  で考えると定式化

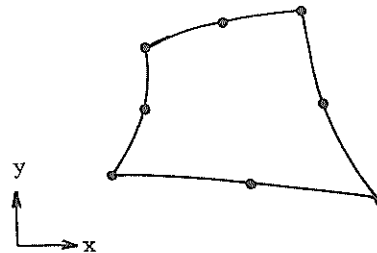


図-14 全体座標における形状関数

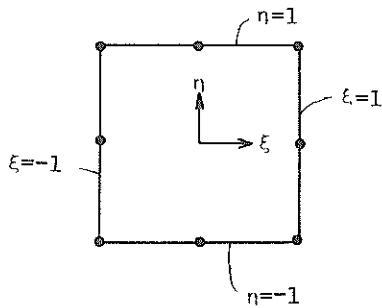


図-15 局所座標における形状関数

が困難であるので、図-14のような局所座標  $\xi, \eta$  に変換して、任意形状の四辺形を正方形とすると便利である。

このようにして、局所座標系で考えるとこの四辺形(正方形)の四辺は  $\xi = \pm 1, \eta = \pm 1$  で表わされる。また、形状関数  $[N]$  の成分  $N_i$  は次のようになる。

頂点の節点

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (\xi_0 + \eta_0 - 1)$$

辺上の中点 ( $\xi_i = 0$ )

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0)$$

辺上の中点 ( $\eta_i = 0$ )

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_0) (1 - \eta^2)$$

ただしここに、 $\xi_0 = \xi \xi_i, \eta_0 = \eta \eta_i$  である。

このようにして、局所座標系において形状関数  $[N]$  が求められたので、 $[N]$  を  $\xi$  あるいは  $\eta$  で偏微分したのも容易に計算できる。しかし、有限要素法によって解析を行う場合には  $[N]$  を  $x$  あるいは  $y$  で偏微分したものが必要になり、また、全体座標系に関する積分を行う必要もある。このような場合の局所座標系における値と全体座標系における値の関連をつけるものとして、Jacobi のマトリックス  $[J]$  がある。 $[J]$  は次のように表わされる。

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

全体座標による微分は  $[J]$  の逆マトリックスを用いて、

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

と表わされ、全体座標に関する積分は、

$$dx dy = \det [J] d\xi d\eta$$

と表わされる。

港灣技研資料 No.247

1976・9

編 集 兼 運 輸 省 港 灣 技 術 研 究 所  
發 行 所

運 輸 省 港 灣 技 術 研 究 所  
橫 須 賀 市 長 瀬 3 丁 目 1 番 1 号

印 刷 所 株 式 會 社 美 巧 社