

# 港湾技研資料

TECHNICAL NOTE OF  
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE  
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 162

June 1973

石油製品積出バースの特性解析の  
ためのシュミレーションモデル

笹島 博  
工藤 和男

運輸省港湾技術研究所



# 石油製品積出バースの特性解析の ためのシミュレーションモデル

## 目 次

1. はじめに .....	3
2. 船舶特性と埠頭特性 .....	4
2.1 概 説 .....	4
2.2 船舶特性に関して .....	4
2.3 埠頭特性に関して .....	6
3. 個々の特性を考慮した待ち行列理論 .....	6
3.1 概 説 .....	6
3.2 窓口のサービス率が異なる場合 .....	7
3.3 客に対するサービス率が異なる場合 .....	9
3.4 1つの窓口のサービス率が各客に対して異りさらに各窓口ごとのサ ービス率が異なる場合 .....	11
4. シミュレーションモデルの作成 .....	14
4.1 概 説 .....	14
4.2 シミュレーションモデルの内容 .....	16
4.3 シミュレーションモデルの検討 .....	20
4.4 乱数の検定 .....	24
4.5 解析手順 .....	25
4.6 適 用 例 .....	26
5. 結果の考察と問題点 .....	26
5.1 概 説 .....	26
5.2 シミュレーションモデルの問題点と今後の方向 .....	27
5.3 おわりに .....	27
参考文献 .....	27

Simulation Model for Loading Berth of petroleum products  
— Interdependence of Oil Tankers and Loading Berths —

Hiroshi SASAJIMA \*

Kazuo KUDO \*\*

Synopsis

Characteristics of waiting lines of oil tankers around the loading berths have been analyzed. This type of waiting line problem can not be solved in general by analytical approach of queueing theory because of its interdependence of characteristics, both for tankers and loading facilities. To this aim a simulation model covering (i) kinds of oil to be loaded for each oil tanker and (ii) loading speeds of each kind of oil at loading berths, are developed. Errors of this simulation model, in terms of average waiting time, for some cases which can be theoretically solved, are estimated. Procedures to utilize this model are also stated. It becomes clear through a check calculation to the actual case that some elements not included in the model, such as rules of berth operation, should be taken into, to make the model more powerful one.

---

\* Member of Systems Laboratory, Design Standard Division

\*\* Chief of Systems Laboratory, Design Standard Division

# 石油製品積出バースの特性解析のためのシミュレーションモデル

笹 嶋 博\*

工 藤 和 男\*\*

## 要 旨

石油製品の積出バースの特性を解析するためには、オイルタンカーの性質と積出棧橋の性質の両要素を取り入れた滞船現象を解析する必要がある。しかし、現在までに開発されている待ち行列理論では、これら両要素を取り入れて解析を行なう事が非常に困難である。本資料では、これらの要素のうちつきに示す2要素を取り入れたシミュレーションモデルを作成した。

① オイルタンカーの積荷の種類

② 各油種に対するバースの荷役能力

この2要素のうち1要素のみを取り入れた場合は、一部分が解析的に解かれているので、1要素を取り入れたシミュレーションのアウトプットと解析解の比較を行ない、シミュレーションモデルの誤差を示した。また、このモデルを用いて現象解析する手順を明らかにし、実例を通してシミュレーションモデルに取り入れるべき他の要素としてバースの指定方式等がある事を示した。

## 1. はじめに

港湾の流通機能としての活動を、滞船現象から解析し港湾における現象解析のシステム化が始められてから久しい。この際、待ち行列理論が取り入れられ解析が進められてきたが、電話交換問題から発した待ち行列理論を港湾の現象解析に適用する場合には、種々の制約がある。待ち行列理論が他の分野に利用されるようになってからも久しく、数々の応用分野でその特性に合ったモデルが開発されてきた。港湾計画を作成する際に、待ち行列理論を用いて現象解析を行なう事は、港湾計画をシステム化しようとする時重要な要素であった。しかし、システム化が進み、そのシステムを計画作成者が利用し計画立案に役立ててゆくためには、つぎのような性格を備えたシステムを作る必要がある。

① 利用しやすい形でまとめられており、手順が明確である事。

② インプットの変化や実際の現象との相違が考察でき、モデルの誤差が示されている事。

これらの要求を満たすためには、現象を精度よく解析す

るモデルの開発と、要求されるアウトプットと誤差の図表の整備が必要である。現在、図表などに整理され最も利用しやすい形となっているのはM/M/Sモデルであり、異ったタイプの現象であっても、このモデルを用いる事のできる場合が多い。異ったタイプのモデルとM/M/Sモデルとの対比が行なわれてれば便利である。

港湾における待ち現象の中で最も典型的なもの、船舶のバースに対する待ち現象である。この待ち現象を待ち行列理論を用いて解析しようとする時、つぎのような性格がある事がわかる。

① 待ち行列モデルの1要素である船舶には種々の特性<sup>1\*)</sup>があり、M/M/Sモデルで取扱われているような一意的な特性では不十分である。

② バースにも種々の特性<sup>1\*)</sup>があり単一に取扱い事できない。

性格の異なる船舶と性格の異なるバースがある時これらの性格が1対1に対応する場合には、その性格をパラメータとして、港湾をいくつかのサブシステムに分割して解析を行なう事ができる。しかし、現実にはこれらの性格は

\* 設計基準部 システム研究室

\*\* 設計基準部 システム研究室長

注1\*) ここでいう船舶の特性・バースの特性とは、たとえば、船舶の寸法、積荷の種類やバースの寸法、荷役能力などのように、船舶およびバースに附随する性格の事であり、船舶、バースの属性という事もできる。現象面から促えた滞船現象の特性とは異なる。

入り組んでいる場合が多く、性格を組み込んだモデルが必要となる場合が多い。このようなモデルとしてはシミュレーションモデルが便利である。

石油製品の積出バースの特性を解析しようとする、タンカーと棧橋の特性が複雑に関連している事がわかる。本資料では、種々の特性のうち各々1つずつの特性を取り入れたシミュレーションモデルを作成して、港湾における滞船現象の解析に役立てたいと考えた。

## 2. 船舶特性と埠頭特性

### 2.1 概 説

港湾における船舶の滞船現象の解析を進めるためには、①船舶特性と②埠頭特性の分析が必要である。

船舶の特性には①船舶固有の特性と②サービスを受ける状況にある船舶について考えるべき特性がある。また、埠頭特性にも、①埠頭そのものが所持している特性と②サービス施設としての荷役施設との関連のもとで考察しなければならない特性とがある。これらの特性を一括して表にすると表-2.1のようになるが、滞船現象を解析するためには個々の特性が相互にどのように関連しており、何が重要な要素として働いているかを考察する事が重要である。各特性相互の関連と

表-2.1 船舶特性と埠頭特性

① 船舶固有の特性
1) 種類・目的
① 客船、貨物船、客貨船、専用船、特殊船
② 外航船、内航船
③ 定期船、不定期船
④ 積荷の種類
2) 動力の種類
3) トン数
① 排水トン
② 重量トン
③ 総トン
④ 純トン
⑤ 登録トン
⑥ 載貨(客)重量トン
4) 寸法
① 全長
② 垂線間長

③ 深さ
④ 巾
⑤ 満載吃水
5) その他
① 艙口、舷門数
② 荷役機械
② サービス状況との関連のもとで所有する特性
1) 積載貨物量
2) 実吃水
3) バース占有船長
4) バース占有水面
③ 埠頭特性
1) 使用目的
2) 埠頭の長さ
3) 水深
4) 荷役施設の配置
5) 船席のとり方
6) 荷役能力

しては①船舶特性相互の関連、②埠頭特性相互の関連、③船舶特性と埠頭特性相互の関連がある。①は港口、航路、待船泊地、バース等の水域施設の計画・設計を行なう際に重要であり、②は埠頭の配置計画・設計の際特に重要となる。③は埠頭および船舶のオペレーションを行なう際に重要である。従来より、①に関しては、船舶諸元の相互関係をデータから、統計的に解析するアプローチがなされている<sup>5)9)</sup> ②③についてはあまり解析が進んでいるとは考えられない。②については機能的な配置論の研究が必要であるが、滞船現象解析のためには③が最も重要であると考えられる。以下では③に着目して滞船現象を解析し港湾施設の計画・設計に役立てるために必要な特性に関する若干の考察を行なっておくこととする。

### 2.2 船舶特性に関して

表-2.1で示したように船舶の特性には種々のものがあるが、すべての特性が滞船現象の解析に必要なではない。解析しようとする対象を決めると考察の対象とならないものもあるし、考察が必要でモデルに組み込まなければならないものもある。内航オイルタンカーの滞船現象を解析しようとするれば、使用目的は定まってしまうが、船のトン数、寸法、艙口数等は種々のも

のを対象としなければならない。その他、埠頭特性と関連するものとして積荷の種類・積荷量、実吃水、バース占有長、バース占有面積も対象とする必要がある。これらの特性をモデルに組み込む時には、特性が何に関連するかを具体化しなければならない。以下では、滞船現象を捉え、埠頭施設の計画、設計、マネジメントプランを作成する時、考察すべき船舶の特性について若干の考察を行なっておくことにする。

① 積荷の種類；積荷が何であるか、荷姿がどうかによって荷役施設が異なってくる。また揚荷であるか積荷であるかによって荷役施設は異なる。積荷の種類によって着機可能なバース、不可能なバースがある。石油製品の積荷棧橋においては、各製品事に積出し用のパイプが設置されており、あるバースでは特定の製品類に対する荷役しか行なえない事は、このよい例である。

② 実吃水；船舶はバースで荷役を受けるとき実吃水をもつ。実吃水がバース水深より大である船舶はそのバースに着機できない事になる。

③ バース占有長；これは船長に停泊のための余裕を加えたものであるが、バース占有長が大きい船舶は小型バースには入る事ができない。

④ 艀口数；これは荷役施設の単位と関連するものであって、船舶艀口数以上の荷役施設は利用する事ができない。オイルタンカーに対するローディングアームは小さな自由度をもって積出機橋上に固定されているが、タンカーの艀口数によって利用できるアーム数が異なる事はこの例である。

⑤ その他、石油製品では積荷の際埠頭ポンプを用いるが、その利用形態によっても、あるバースに着機できる場合とできない場合が生じる。これは埠頭のオペレーションに強く関連する事がらであるので、2.3で述べることにする。また、バース占有面積はスリップ幅、泊地等の水域施設の計画・設計の際問題となると考えられるが、船舶の操船技術との関連が強いためここでは述べない。

以上示したように、船舶の持つ特性によって利用できるバースと利用できないバースの区別が生じてくるが、上述のごとく、船舶の特性には船舶固有のものと船舶が入港したときの状況によるものがある。航路・埠頭の計画・設計は入港時の特性によって決定すべきであるが、船舶固有の特性と入港時の特性の関連が求められていると、船舶固有の特性を調査する事によって計画・設計に有用な情報が集収できる。このため、船舶が固有している特性と実際に生じる特性との関連を見い出そうとする研究も行なわれているが、本資料では、上記のようなサービス施設の計画・設計に役立つ情報と船舶固有の特性との関連を捉えるため、コースタルタンカーの船長と船舶の総トン数・純トン数・実吃水との関係を求め図 2.1

に示した。この図より、コースタルタンカーにも種々の船長のものがあり、実吃水もかなり幅がある事がわかる。設計基準にも、図 2.2 に示すように船長と総トン数・重

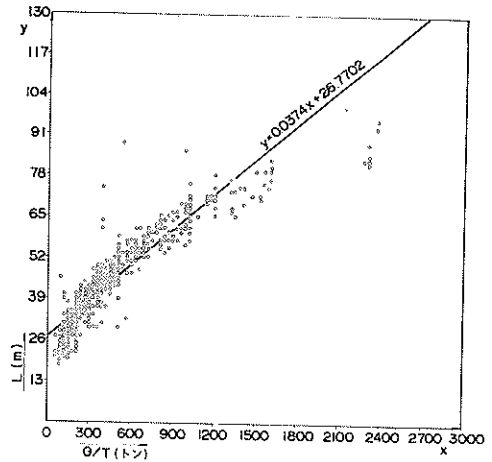


図 2-1 (その 1) 総トン数と船長の関係

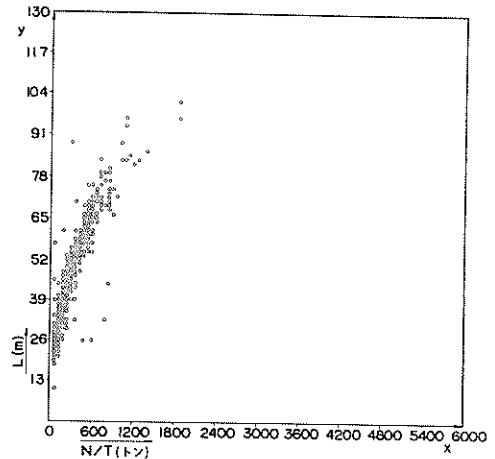


図 2-1 (その 2) 純トン数と船長の関係

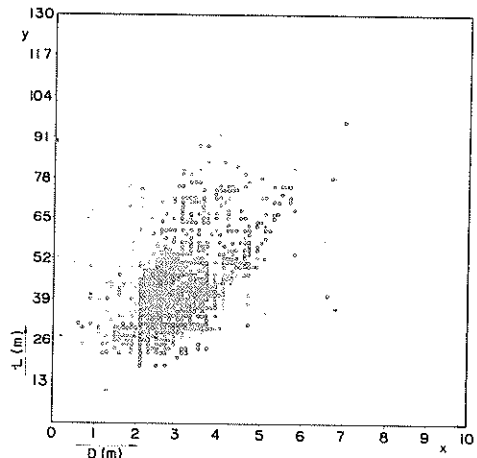


図 2-1 (その 3) 実吃水と船長の関係

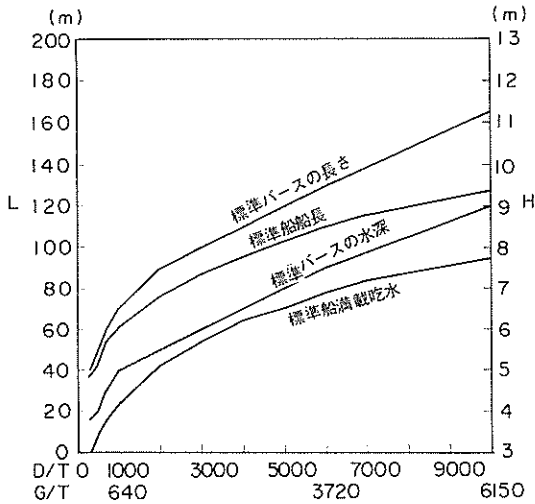


図 2-2 設計基準におけるバース特性と船舶特性の関係

量トン数・バース水深・バース占有長の関係が示されているが、これら船舶特性相互の関連図は、種々の船舶特性を取り入れて滞船現象を解析しようとする時重要な役割をはたすものとする。

### 2.3 埠頭特性に関して

2.2 とは逆に、船舶のサービス状況と強く関連しており、滞船現象に解析する際に重要である埠頭特性は

- ① 荷役施設（配置と能力）
- ② バース長
- ③ バース水深

である。滞船現象解析のためにこれらの特性を取り入れるのは、船舶が棧橋に着機できるかどうかを解析するためである。②③は船舶のバース占有長、実吃水との関連を捉えるためであり、2.2 で考察した。①に対する考察を厳密に行なえば、つぎの 2 つの問題を考える必要がある事がわかる。

- ① 船席の決め方
- ② 荷役能力の求め方

すなわち、バース占有長を組み込もうとすると、従来の待ち行列理論で取扱われているような固定した船席の取り方では不十分であり船席を変わり得るものとして取り扱う必要があり、変化するものとして取り扱った時には船舶のオペレーションをどのように行なうかも問題となってくる。また、船席が変わり得るものとして取扱うと船席に対する荷役施設の能力もはなはだ多様なものとなってくる。石油製品積出バースの場合の様に荷役施設が埠頭上のパイプ設備とポンプ設備とに区別でき、数バースのパイプ設備に対し数組のポンプ設備が対応させてある場合には、荷役設備のバースに対する競合関係も成り

たち、解析ははなはだ困難となる。そこで、本資料では、船席は固定させる事とし、埠頭特性としては荷役能力の違いのみを組み込む事とした。このように取扱う事によっても、バースに荷役設備が備えられているか否かの判定は行なえ、船舶が着機できるかどうかの判定が行なえる。船席に対する考察は後の研究で行なう事とした。

## 3. 個々の特性を考慮した待ち行列理論

### 3.1 概説

以上で各船舶の特性と各埠頭の特性を取り入れた考察の行なえるモデルを作成する必要性を述べたが、本章では待ち行列理論において、このような特性の違いがどのように取扱われてきたかを考察する事とする。

さて、バース占有長に対する考察を除けば、すなわちバースのサイズはサービスする船舶によって変化せず、全体のバース数は時間によって変わらないとすると、待ち行列理論に取り入れる必要がありかつ容易に取り入れることのできる船舶とバースの特性は、①船舶の積荷の種類と②各種船舶に対するバースの荷役能力である。これらについては、参考文献②に本間鶴千代氏等が窓口数（バース数）が 2 つの場合に「異なる平均到着率、平均サービス率をもった 2 種類の客（船種）」に対する解析を示されている。しかしこの場合には、窓口（バース）ごとの相異は取り入れられておらず、一方、参考文献③に示されているように、窓口（バース）ごとの相異については、Harold gumbel 氏が窓口数（バース数）は一般の場合について、「窓口（バース）の平均サービス率（荷役能力）が異なる待ち行列」として解析解を示し、普通のタイプの  $M/M/S$  モデルとの差異を示している。しかし、この場合には、客の種類（船種）の違いに対する考察はない。このように、両モデルとも上記 2 特性のすべてを取り入れてはおらず、滞船現象の詳細な解析を行なうには不十分と考えられるが、普通のタイプ  $M/M/S$  モデルとの対比を行なうためには便利である。上述の 2 特性を取り入れた滞船現象の解析を行なうためには、これら両モデルを組み合わせたモデルが必要である。これら 3 つのタイプのモデルを図示すれば図 3.1 のようになるが、タイプ 2 のモデルは、客の種類（船種） $M$  が 2 かつ窓口数（バース数） $S$  が 2 つの場合しか解かれておらず、客の種類と窓口数が増加すると解析解を得る事が困難である。タイプ 3 のモデルは、客の種類と窓口数が増加すれば解く事が困難であるのみならず、許容される待ち行列長を大きくすると非常に困難となる。そこで、本章では、タイプ 1 のモデル Harold gumbel 氏の論文から紹介し、タイプ 2 のモデルを本間氏の待ち行列理論より引用して、適当な平均的サービス率を考慮して普通のタイ

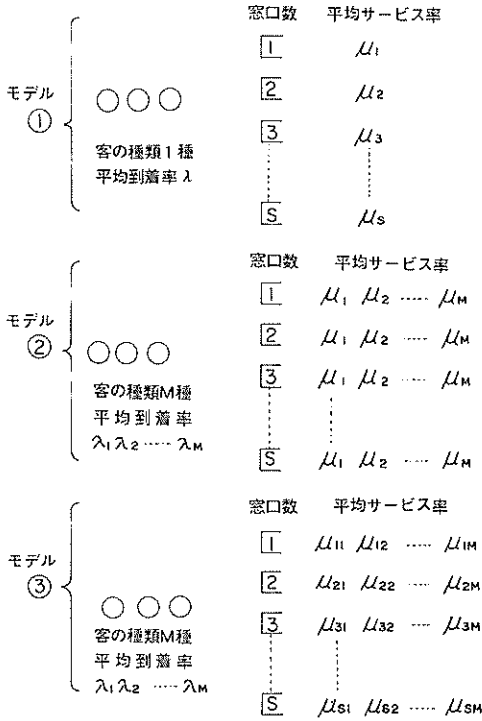


図 3-1 3種類のモデル

プM/M/2モデルで取扱った解析解との誤差の図表を示し、タイプ3のモデルに対しては窓口数S=2、客の種類M=2、許容される待ち行列長を2とした場合の数値解を示すこととする。

### 3.2 窓口のサービス率が異なる場合<sup>2)3)4)</sup>

以下は参考文献3) pp504~511よりの引用である。このモデルにおける前提条件は以下のとおりである。

① 到着は平均λのポアソン到着とする。

② サービス時間は各窓口において平均1/μ<sub>i</sub> (iは窓口の番号)の指数分布とし、サービス時間はサービス状態の履歴、占有状態および待ち行列長とは独立に定まるとする。

また、つぎのように記号を導入する。

E(a, b, c, …); 各窓口の占有状態を表わす。例えばS=3の場合、窓口1と窓口3が占有される状態はE(1, 3)で表わすものとする。

P(a, b, c, …); 状態E(a, b, c, …)の定常状態確率を表わす。

$p(a, b, c, \dots; t) = P\{E(a, b, c, \dots); t\}$ ; 時刻tにおける}

さて、S個の窓口のうちn個の窓口が占有されているという場合の数は、状態E(a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, …, a<sub>n</sub>)において、各a<sub>i</sub>に対する組み合わせの数であるから

$$E(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ の場合の数} = \binom{S}{n} \dots 3-1$$

ただし 0 ≤ n ≤ S

一方、n=0、n=Sの場合には起こり得る状態の数は各々1とおりでである。また、

$$(x+y)^S = \binom{S}{0}x^S + \binom{S}{1}x^{S-1}y + \binom{S}{2}x^{S-2}y^2 + \dots + \binom{S}{s-1}xy^{s-1} + \binom{S}{s}y^s$$

であり、ここでx=1、y=1とおくと

$$2^S = \binom{S}{0} + \binom{S}{1} + \binom{S}{2} + \dots + \binom{S}{s-1} + \binom{S}{s} \dots 3-2$$

すなわち、n=0からn=Sまでの全部の場合の数であるから、どの窓口に占有されているかを考えなければならない場合の数は2<sup>S</sup>-2のとおりとなる。したがって、窓口数が多くなるとすべての状態を列挙して定常平衡方程式を立てる事が困難となる。そこで、

$$P_k = \sum P(a_1, a_2, \dots, a_k) \dots 3-3$$

を導入する。ここでΣは、場合の数だけの組み合わせを考えて合計する事を意味している。

定常状態が存在するという仮定の下で定常平衡方程式は以下ようになる。

$$-\lambda P_0 + \sum_{a_i} \mu_{a_i} P(a_i) = 0 \dots 3-4$$

$$(\lambda/s)P_0 - (\lambda + \mu_{a_1})P(a_1)$$

$$+ \sum_{a_j \neq a_i} \mu_{a_j} P(a_i, a_j) = 0 \dots 3-5$$

$$\{\lambda/(s-r+1)\} \sum_{a_i} P(a_1, a_2, \dots, a_r; \bar{a}_i)$$

$$- (\lambda + \sum_{a_i} \mu_{a_i})P(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$$+ \sum_{a_j \neq a_i} \mu_{a_j} P(a_1, a_2, \dots, a_r, a_j) = 0 \dots 3-6$$

ここにr=2,3, …, s-1でありまた、P(a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, …, a<sub>r</sub>; a<sub>i</sub>)は窓口番号a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub> … a<sub>r</sub>の中でa<sub>i</sub>のみを除いた窓口が占有されている状態の確率である。



式 3-4, 3-5, 3-6 を  $\lambda$  で割り  $m_i = \mu_i / \lambda_i$  とすれば,

$$-P_0 + \sum_{a_1} m_{a_1} P(a_1) = 0 \quad \dots\dots\dots 3-4'$$

$$\frac{1}{s} P_0 - (1+m_{a_1}) P(a_1)$$

$$+ \sum_{\substack{a_2 \neq a_1 \\ \dots \\ a_1}} m_{a_2} P(a_1, a_2) = 0 \quad \dots\dots\dots 3-5'$$

$$\frac{1}{s-r+1} \sum_{a_1} P(a_1, a_2, \dots, a_r; a_1)$$

$$- (1 + \sum_{a_1} m_{a_1}) P(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$$+ \sum_{\substack{a_2 \neq a_1 \\ \dots \\ a_1}} m_{a_j} P(a_1, a_2, \dots, a_r, a_j) = 0 \quad \dots 3-6'$$

となる。ここで,

$$P(a_1, a_2, \dots, a_r) = \frac{(s-r)! P_0}{s! (m_{a_1} m_{a_2} \dots m_{a_r})} \quad \dots 3-7$$

とおけば、これは式 3-4', 3-5', 3-6' の解となる。これは式 3-7 を式 3-4', 3-5', 3-6' に代入すれば満足する事よりわかる。よって、式 3-3 は

$$P_k = \sum_{a_1} P(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{P_0}{s!} \sum_{a_1} \frac{(s-k)!}{m_{a_1} m_{a_2} \dots m_{a_k}}$$

$$= \frac{(s-k)!}{s!} \frac{P_0}{m_{a_1} m_{a_2} \dots m_{a_s}} \sum m_{a_{k+1}} m_{a_{k+2}} \dots m_{a_s}$$

\dots\dots\dots 3-8

ここに ( $0 < k \leq s$ )

とくに、 $k=s$  の場合は、

$$P_s = \frac{P_0}{s! m_{a_1} m_{a_2} \dots m_{a_s}} \quad \dots\dots\dots 3-9$$

つぎに、以下のような記号を導入する。

$C_k^s$ ;  $s$  個の  $m_i$  から  $k$  個の  $m_i$  をとったときの組合わせの合計

とする。すなわち、

$$C_k^s = \sum_{a_1=1}^{s-k+1} \sum_{a_2=a_1+1}^{s-k+2} \dots \dots \dots$$

$$\sum_{a_{k-1}=a_{k-2}+1}^{s-k+k-1} \sum_{a_k=a_{k-1}+1}^s m_{a_1} m_{a_2} \dots m_{a_k} \quad \dots 3-10$$

例えば、 $s=4$  で  $k=2$  の場合には、

$$C_2^4 = m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_1 m_4 + m_2 m_3 + m_2 m_4 + m_3 m_4$$

となる。また、

$$C_s^s = \prod_{i=1}^s m_i \quad \dots\dots\dots 3-11$$

$$C_1^s = \sum_{i=1}^s m_i \quad \dots\dots\dots 3-12$$

$$C_0^s = 1 \quad \dots\dots\dots 3-13$$

である。この記号を用いれば式 3-8 は

$$P_k = P_0 \frac{(s-k)!}{s!} \frac{C_{s-k}^s}{C_s^s} \quad \dots\dots\dots 3-14$$

ここに ( $0 < k \leq s$ ) となる。

つぎに、 $n > s$  の場合には、

微小時間  $dt$  の間にサービスが終了しない確率は

$$P_r \text{ (サービス終了なし)} = 1 - \lambda dt + o(dt^2) \quad \dots\dots\dots 3-15$$

よって、

$$P_n(t+dt) = P_n(t) [1 - dt (\lambda + \sum_{i=1}^s \mu_i)]$$

$$+ P_{n-1}(t) [\lambda dt] + P_{n-1}(t) [dt \sum_{i=1}^s \mu_i] \quad \dots 3-16$$

これより

$$dP_n/dt = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \sum_{i=1}^s \mu_i) P_n(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^s \mu_i P_{n+1}(t) \quad \dots\dots\dots 3-17$$

定常状態では  $dP_n/dt = 0$  であるから

$$P_{n-1} - P_n = C_1^s (P_n - P_{n+1}) \quad \dots\dots\dots 3-18$$

$n=n$  から  $n=N$  まで加えると

$$P_{n-1} - P_N = C_1^s (P_n - P_{N+1}) \quad \dots\dots\dots 3-19$$

ここで  $N \rightarrow \infty$  とすれば、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{N+1} = 0 \quad \dots\dots\dots 3-20$$

よって

$$P_n = P_{n-1} / C_1^s \quad (n > s) \quad \dots\dots\dots 3-21$$

これを一般形に書き換えると

$$P_{n+1} = P_s / (C_1^s)^j \quad (j \geq 0) \quad \dots\dots\dots 3-22$$

よって

$$C_1^s > 1 \quad \dots\dots\dots 3-23$$

であれば定常状態が存在することがわかる。

$n > s$  の場合についての合計をとると

$$\sum_{k=s}^{\infty} P_k = P_s \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(C_1^s)^j} = P_s \frac{C_1^s}{C_1^s - 1} \quad \dots\dots\dots 3-24$$

$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$  であるから

$$P_s \left\{ \frac{P_0}{P_s} + \frac{P_1}{P_s} + \dots + \frac{P_{s-1}}{P_s} + \frac{P_s}{P_s} \frac{C_1^s}{C_1^s - 1} \right\} = 1$$

\dots\dots\dots 3-25

また、 $0 \leq k \leq s$  の場合には

$$P_k / P_s = \frac{P_k / P_0}{P_s / P_0} = (s-k)! C_{s-k}^s \quad \dots\dots\dots 3-26$$

よって、式 3-25, 3-26 より

$$P_s = \frac{1}{\sum_{j=1}^s j! C_j^s + C_1^s / (C_1^s - 1)} \quad \dots\dots\dots 3-27$$

よって、式 3-26, 3-27 より

$$P_k = \frac{(s-k)! C_{s-k}^s}{\sum_{j=1}^s j! C_j^s + C_1^s / (C_1^s - 1)} \quad \dots\dots\dots 3-28$$

( $0 \leq k \leq s$  の場合)

また、式 3-22, 3-27 より

$$P_k = \frac{1 / (C_1^s)^{k-s}}{\sum_{j=1}^s j! C_1^s + C_1^s / (C_1^s - 1)} \dots\dots 3-29$$

( $k \geq s$  の場合)

いま、 $\langle k \rangle = \min(k, s)$

$$D_s = \sum_{j=1}^s j! C_1^s + C_1^s / (C_1^s - 1) \dots\dots 3-30$$

とおくと、一般に

$$P_k = \frac{(s - \langle k \rangle)! C_1^{\langle k \rangle}}{D_s (C_1^s)^{k - \langle k \rangle}} \text{ for all } k \geq 0$$

これで、 $P_k$  がすべて求められた。

つぎに、 $n$  をシステム中の客の数とすると

$$E(n) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = \sum_{k=0}^{s-1} k P_k + \sum_{k=s}^{\infty} k P_k$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \sum_{k=s}^{\infty} k P_k &= \frac{1}{D_s} \sum_{k=s}^{\infty} k \left( \frac{1}{C_1^s} \right)^{k-s} \\ &= \frac{1}{D_s} \frac{C_1^s [1 + s(C_1^s - 1)]}{(C_1^s - 1)^2} \dots\dots 3-32 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} E(n) &= \frac{1}{D_s} \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} k (s-k)! C_1^{s-k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_1^s [1 + s(C_1^s - 1)]}{(C_1^s - 1)^2} \right\} \dots\dots 3-33 \end{aligned}$$

として系の平均長さが求められる。

また、 $q$  を待ち行列中の客の数とすると

$$\begin{aligned} E(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k - \langle k \rangle) P_k \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} (k - k) P_k + \sum_{k=s}^{\infty} (k - s) P_k \\ &= \sum_{k=s}^{\infty} k P_k - s \sum_{k=s}^{\infty} P_k \\ &= \sum_{k=s}^{\infty} k P_k - s \left( 1 - \sum_{k=0}^{s-1} P_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} s P_k + \sum_{k=s}^{\infty} k P_k - s \\ &= \frac{1}{D_s} \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} s (s-k)! C_1^{s-k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_1^s [1 + s(C_1^s - 1)]}{(C_1^s - 1)^2} \right\} - s \dots 3-34 \end{aligned}$$

式 3-31 より明らかなように、各窓口の平均サービス率によって本システムの定常解を表わす事はできない。そこで、システム中の客の平均数を式 3-33 で求めた場合と平均サービス率  $\bar{\mu}$  を用いて求めた場合との誤差が

計算されて図示されている。この図を引用して示したものが図 3-2 である。この図より、窓口サービス率が異なる場合に、

$$\text{平均サービス率 } \bar{\mu} = \sum_{i=1}^s \mu_i / s \dots\dots 3-35$$

を用いて普通のタイプの M/M/S モデルで取替ってよいかどうかの判定が行なえる。図より誤差はかなり小さい事がわかる。

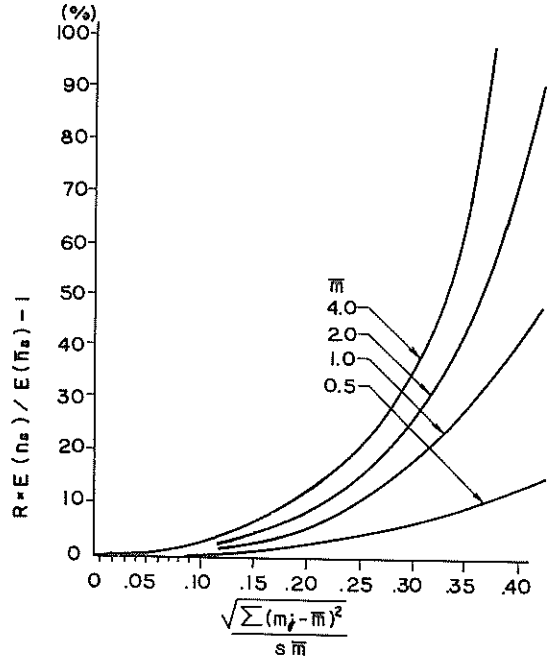


図 3-2 タイプ 1 のモデルに対する平均待ち行列長の誤差

### 3.3 各客に対してサービス率が異なる場合<sup>2)</sup>

このモデルは窓口数  $S = 2$  で客の種類  $M = 2$  の場合には解かれているが、 $S, M$  が増加すると組み合わせの数が増加して定常平衡方程式をたてて連立方程式を解き解を求める事が非常に困難となる。以下では参考文献 2) 164 ~ 168 に紹介されている  $M = S = 2$  の場合についての概略を説明する。

平衡状態のときを対象とし、まずつぎの記号を導入する。

$P_{20}^{(n)}$  ( $n \geq 0$ ) ; 第 1 種の客だけが 2 つの窓口を占有し、待ち行列の長さが  $n$  である確率。

$P_{20}^{(n)}$  ( $n \geq 0$ ) ; 第 1 種、第 2 種の客が 1 つづつ窓口を占有し、かつ待ち行列の長さが  $n$  である確率。

$P_{02}^{(n)}$  ( $n \geq 0$ ) ; 第 2 種の客だけが 2 つの窓口を占有し、待ち行列の長さが  $n$  である確率。

$P_{10}$  ; 2 つの窓口のうちの 1 つが第 1 種の客に占有され、他の 1 つは空いている確率。

$P_{01}$  ; 2 つの窓口のうちの 1 つが第 2 種の客に占有さ

れ、他の1つは空いている確率。

$P_0$ ; 2つの窓口が空いている確率。

このとき平衡方程式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 & \mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{01} = (\lambda_1 + \lambda_2) P_0 \\
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P_{10} = 2\mu_1 P_{20}^{(0)} + \mu_2 P_{11}^{(0)} + \lambda_1 P_0 \\
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) P_{01} = \mu_1 P_{11}^{(0)} + 2\mu_2 P_{02}^{(0)} + \lambda_2 P_0 \\
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1) P_{20}^{(0)} = 2\mu_1 \alpha P_{20}^{(1)} + \mu_2 \alpha P_{11}^{(1)} \\
 & \quad + \lambda_1 P_{10} \\
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P_{11}^{(0)} = 2\mu_1 \beta P_{20}^{(1)} + \mu_1 \alpha P_{11}^{(1)} \\
 & \quad + \mu_2 \beta P_{11}^{(1)} + 2\mu_2 \alpha P_{02}^{(1)} + \lambda_2 P_{10} + \lambda_1 P_{01} \\
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_2) P_{02}^{(0)} = \mu_1 \beta P_{11}^{(1)} \\
 & \quad + 2\mu_2 \beta P_{02}^{(1)} + \lambda_2 P_{01} \\
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1) P_{20}^{(n)} = 2\mu_1 \alpha P_{20}^{(n+1)} \\
 & \quad + \mu_2 \alpha P_{11}^{(n+1)} + (\lambda_1 + \lambda_2) P_{20}^{(n-1)} \quad (n \geq 1) \\
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P_{11}^{(n)} = 2\mu_1 \beta P_{20}^{(n+1)} \\
 & \quad + \mu_1 \alpha P_{11}^{(n+1)} + \mu_2 \beta P_{11}^{(n+1)} \\
 & \quad + 2\mu_2 \alpha P_{02}^{(n+1)} + (\lambda_1 + \lambda_2) P_{11}^{(n-1)} \quad (n \geq 1) \\
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_2) P_{02}^{(n)} = \mu_1 \beta P_{11}^{(n+1)} \\
 & \quad + 2\mu_2 \beta P_{02}^{(n+1)} + (\lambda_1 + \lambda_2) P_{02}^{(n-1)} \quad (n \geq 1)
 \end{aligned}
 \tag{3-36}$$

ここに、 $\alpha = \lambda_1 / \lambda$ ,  $\beta = \lambda_2 / \lambda$ ,  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  とする。

つぎに、つぎのような母関数を定義し、式3-36を加えると、式3-38になる。

$$\left. \begin{aligned}
 F_{20}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{20}^{(n)} z^n \\
 F_{11}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{11}^{(n)} z^n \\
 F_{02}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{02}^{(n)} z^n
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 3-37$$

$$\left. \begin{aligned}
 \{ \lambda z^2 - (\lambda + 2\mu_1)z + 2\mu_1 \alpha \} F_{20}(z) \\
 + \mu_2 \alpha F_{11}(z) &= \lambda_1 P_{10} (1-z) \\
 + \alpha (\mu_1 P_{10} - \lambda_1 P_0) &\equiv A(z) \\
 2\mu_1 \beta F_{20}(z) + \{ \lambda z^2 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2)z \\
 + (\mu_1 \alpha + \mu_2 \beta) \} F_{11}(z) + 2\mu_2 \alpha F_{02}(z) \\
 = (\lambda_1 P_{01} + \lambda_2 P_{10}) (1-z) \\
 + \alpha (\mu_2 P_{01} - \lambda_2 P_0) \\
 + \beta (\mu_1 P_{10} - \lambda_1 P_0) &\equiv B(z) \\
 \{ \lambda z^2 - (\lambda + 2\mu_2)z + 2\mu_2 \beta \} F_{02}(z)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 3-38$$

$$\left. \begin{aligned}
 + \mu_1 \beta F_{11}(z) &= \lambda_2 P_{01} (1-z) \\
 + \beta (\mu_2 P_{01} - \lambda_2 P_0) &\equiv C(z)
 \end{aligned} \right\}$$

これを解くと

$$\left. \begin{aligned}
 F_{20}(z) &= H_1(z) / d(z) \\
 F_{11}(z) &= H_2(z) / d(z) \\
 F_{02}(z) &= H_3(z) / d(z)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 3-39$$

ここに

$$d(z) = \frac{\lambda z^2 - (\lambda + 2\mu_1)z + 2\mu_1 \alpha}{2\mu_1 \beta} \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots \frac{\mu_2 \alpha}{\mu_1 \beta} \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots \frac{2\mu_2 \alpha}{\lambda z^2 - (\lambda + 2\mu_2)z + 2\mu_2 \beta}$$

$$= z(z-1) \{ \lambda z^2 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2)z + \mu_1 \alpha + \mu_2 \beta \} \times \{ \lambda^2 z^2 - \lambda(\lambda + 2\mu_1 + 2\mu_2)z + 2\lambda(\mu_1 \alpha + \mu_2 \beta) + 4\mu_1 \mu_2 \} \dots\dots\dots 3-40$$

また、 $H_i(z)$ は $d(z)$ の第*i*列を列ベクトル  $\begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \\ C(z) \end{pmatrix}$  で置き換えて得られる行列式である。

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} < 2 \dots\dots\dots 3-41$$

のときには $d(z) = 0$ ,  $|z| < 1$ を満たす根は次式の根であり、かつただ1つ求まる。

$$\lambda z^2 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2)z + \mu_1 \alpha + \mu_2 \beta = 0 \dots\dots\dots 3-42$$

この根を $\xi$ とすれば、式3-39より

$$H_i(\xi) = 0 \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots 3-43$$

ところが、この3つの方程式は、その中の1つが満たされれば、他は同時に満足されるため、独立する方程式の数はただ1つであることがわかる。すなわち、

$$H_1(\xi) - H_2(\xi) = 0$$

これは、

$$\begin{aligned}
 \{ (1-\xi) \lambda_2 + \beta \mu_1 \} \{ (\mu_1 - \mu_2) \xi + \mu_1 \alpha + \mu_2 \beta \} P_{10} \\
 + \{ (1-\xi) \lambda_1 + \alpha \mu_2 \} \{ (\mu_1 - \mu_2) \xi - \mu_1 \alpha \\
 - \mu_2 \beta \} P_{01} = 2\lambda_1 \beta (\mu_1 - \mu_2) \xi P_0 \dots\dots\dots 3-44
 \end{aligned}$$

となる。

一方、 $P_0$ ,  $P_{10}$ ,  $P_{01}$ に関する方程式は式3-36の第1式の他に、

$$P_0 + P_{10} + P_{01} + F_{20}(1) + F_{11}(1) + F_{02}(1) = 1 \dots\dots\dots 3-45$$

がある。

$F_{20}(1)$ ,  $F_{11}(1)$ ,  $F_{02}(1)$ を式3-39より求めその値を式3-45に代入した式と式3-36, 3-44より $P_0$ ,  $P_{10}$ ,  $P_{01}$ を求めることができるが、ここで、つぎの事実に着目すればこの手続は容易になる。すなわち、

サービス中の第1種、第2種の客の平均数はそれぞれ

$\rho_1, \rho_2$  で表わされる。ここに  $\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1, \rho_2 = \lambda_2 / \mu_2$  とする。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} P_{10} + F_{11}(1) + 2F_{20}(1) &= \rho_1 \\ P_{01} + F_{11}(1) + 2F_{02}(1) &= \rho_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 3-46$$

より、

$$\begin{aligned} P_{10} + P_{01} + 2(F_{20}(1) + F_{11}(1) + F_{02}(1)) \\ = \rho_1 + \rho_2 \dots\dots\dots 3-47 \end{aligned}$$

よって、式 3-46 に代入すると、

$$\begin{aligned} P_0 + P_{10} + P_{01} + 2(1 - P_0 - P_{10} - P_{01}) \\ = \rho_1 + \rho_2 \dots\dots\dots 3-48 \end{aligned}$$

この式と式 3-36 の第 1 式より、

$$\left. \begin{aligned} P_{10} &= \frac{(\lambda + 2\mu_2)P_0 - \mu_2(2 - \rho_1 - \rho_2)}{\mu_1 - \mu_2} \\ P_{01} &= \frac{(\lambda + 2\mu_1)P_0 - \mu_1(2 - \rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 - \mu_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 3-49$$

$(\mu_1 \neq \mu_2)$

式 3-44 に代入すると

$$P_0 = \frac{D(\xi)}{E(\xi)} \dots\dots\dots 3-50$$

ここに、

$$\begin{aligned} D(\xi) &= [ \{ (\mu_1 - \mu_2) (\alpha \mu_1^2 - \beta \mu_2^2) - \lambda (\mu_1 \alpha \\ &\quad + \mu_2 \beta) \} \xi + (\mu_1 \alpha + \mu_2 \beta) \{ -\alpha \mu_1^2 + 2\mu_1 \mu_2 \\ &\quad - \beta \mu_2^2 + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 \} ] \times (2 - \rho_1 - \rho_2) \\ E(\xi) &= \{ 2(\mu_1 - \mu_2) (\alpha \mu_1^2 - \beta \mu_2^2) - \lambda \mu_1 \mu_2 \\ &\quad - \lambda_1 \mu_1^2 - \lambda_2 \mu_2^2 - (\alpha \mu_1 + \beta \mu_2) \lambda^2 \} \xi \\ &\quad + (\mu_1 \alpha + \mu_2 \beta) \{ -2\alpha \mu_1^2 + 4\mu_1 \mu_2 - 2\beta \mu_2^2 \\ &\quad + (2\lambda_2 + \lambda_1) \mu_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2) \mu_2 + \lambda^2 \} \end{aligned}$$

すなわち、式 3-42 より  $|z| < 1$  なる根  $\xi$  を求め、式 3-50 より  $P_0$  を求め、式 3-49 より  $P_{10}, P_{01}$  を求めることができる。これを式 3-39 に代入すれば、 $F_{20}(z), F_{11}(z), F_{02}(z)$  が求まる。一方列の長さの平均  $L_q$  は、

$$\begin{aligned} L_q &= F_{20}(1) + F_{11}(1) + F_{02}(1) \\ &= \frac{1}{\mu_1 \mu_2 (2 - \rho_1 - \rho_2)} \{ (\mu_2 - \mu_1) (\lambda - 2\mu_1) \\ &\quad F_{20}(1) + (\mu_1 - \mu_2) (\lambda - 2\mu_2) F_{02}(1) + (\mu_2 \lambda_1 \\ &\quad + \mu_1 \lambda_2) - (\lambda^2 + \mu_2 \lambda_1 + \mu_1 \lambda_2) P_0 \} \dots\dots\dots 3-51 \end{aligned}$$

となる。また、待ち時間との関係としては

$$W_q = L_q / \lambda \dots\dots\dots 3-52$$

が成立つ事が示されている。

以上でこのモデルの概略を述べたが、 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  および平均サービス率を

$$\mu = \frac{(\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2)}{\lambda} \dots\dots\dots 3-53$$

とみなして、普通のタイプの  $\lambda$  と  $\mu$  が一定の  $M/M/2$  モ

デルにおける  $\bar{L}_q$  と  $L_q$  との誤差を計算して図 3-3 に示した。この図では、 $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  を 0 から 2 まで変化させ、 $\mu_1$  と  $\mu_2$  を 1 から 10 まで変化させたときの  $L_q$  の  $\bar{L}_q$  による誤差を % で示してある。他の  $\mu_1 \lambda_1$  の組合わせに対しても、 $\mu_1$  と  $\lambda_1$  をこの領域に入るとすると誤差が求められる。この図によって、各客によってサービス率が異なる場合に  $M/M/2$  モデルで、上述の  $\bar{\mu}, \lambda$  を用いればどれほどの誤差が生じるかがわかるから、 $M/M/2$  で取扱ってもよいかどうかの目安が得られると考える。

### 3.4 一つの窓口のサービス率が各客に対して異なりさらに各窓口ごとのサービス率が異なる場合

このタイプのモデルについても、一般の場合について解を求める事が困難であるから、 $S=M=2$  の場合に対してのみ求めておく事とする。ただし、システム中にいる客の数  $N$  が 5 以上になると定常平衡方程式をたてても連立方程式を解く事が非常に困難となるため、本資料では  $N=4$  の場合についてのみ解く事とする。連立方程式を解く際若干の操作を加えれば  $N$  がこれ以上の場合についても解けるが、ここではふれないこととする。

さて、定常平衡方程式をたてると表 3-1 のようになる。ただし、この表は定常平衡方程式の定常状態確率の係数を示したものであり、つぎの記号を導入してある。

$P_0$ ; システム中に客のいない確率

$P_{\begin{bmatrix} 10 \\ 00 \end{bmatrix}}$ ; 窓口 1 のみが客 1 により占有され窓口 2 は空いている確率

$P_{\begin{bmatrix} 01 \\ 00 \end{bmatrix}}$ ; 窓口 2 のみが客 1 により占有され窓口 1 は空いている確率

$P_{\begin{bmatrix} 00 \\ 10 \end{bmatrix}}$ ; 窓口 1 のみが客 2 により占有され窓口 2 は空いている確率

$P_{\begin{bmatrix} 00 \\ 01 \end{bmatrix}}$ ; 窓口 2 のみが客 2 により占有され窓口 1 は空いている確率

$P_{\begin{bmatrix} 11 \\ 00 \end{bmatrix}}$ ; 窓口 1, 2 とも客 1 に占有されている確率

$P_{\begin{bmatrix} 00 \\ 11 \end{bmatrix}}$ ; 窓口 1, 2 とも客 2 に占有されている確率

$P_{\begin{bmatrix} 10 \\ 01 \end{bmatrix}}$ ; 窓口 1 は客 1 に窓口 2 は客 2 に占有されている確率

$P_{\begin{bmatrix} 01 \\ 10 \end{bmatrix}}$ ; 窓口 2 は客 1 に窓口 1 は客 2 に占有されている確率

(ただし、以上は待ち行列中に客はいないとする。)

$P(\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n)$ ; システム中に  $n$  人の客がおり、つぎ



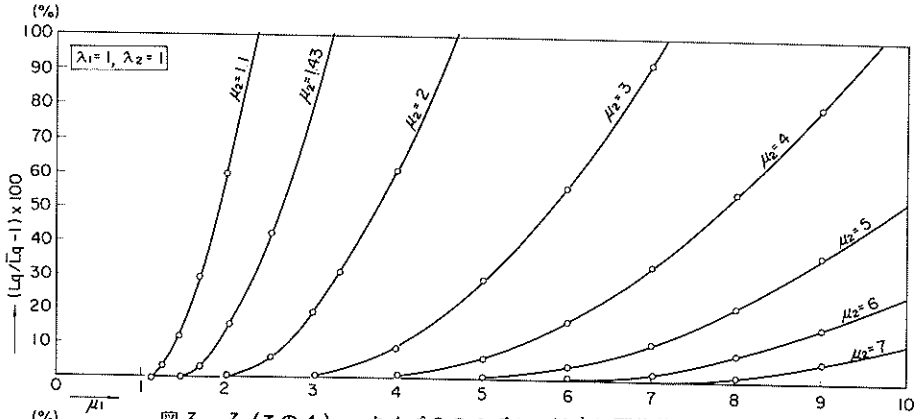


図 3-3 (その1) タイプ2のモデルに対する平均待ち行列長の誤差

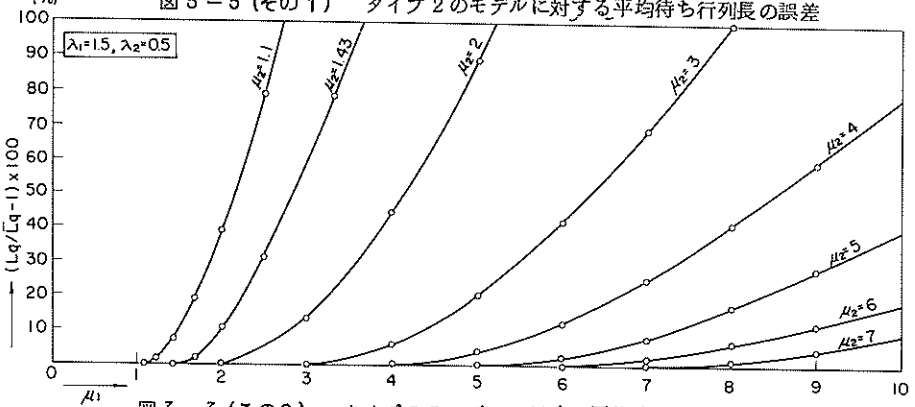


図 3-3 (その2) タイプ2のモデルに対する平均待ち行列長の誤差

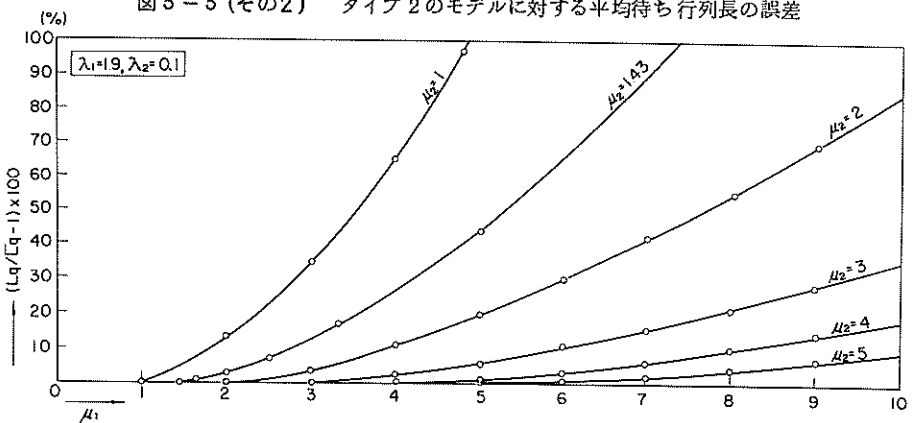


図 3-3 (その3) タイプ2のモデルに対する平均待ち行列長の誤差

のようなシーケンス (Sequence) を考えたとき、そのシーケンスの起る確率。シーケンスは、窓口1、窓口2、待ち行列中の第1番目、第2番目、…、第n-2番目により構成されている。このシーケンスの第k番目において、 $\delta_k = 1$  は客2が第k番目を占めている事を示し、 $\delta_k = 0$  は客1が第k番目を占めている事を示す。

また、表3-1の係数行列をマトリックスAで示す。Aの対角要素はすべて負の符号をもっている。これは表では $a_i$ 欄に示してある。定常確率を列ベクトルPで示すと、定常平衡方程式はつぎのようになる。

$$AP = 0$$

さて、この式の他に

$$P^0 + P \begin{bmatrix} 10 \\ 00 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 01 \\ 00 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 00 \\ 10 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 00 \\ 01 \end{bmatrix} \\ + P \begin{bmatrix} 11 \\ 00 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 00 \\ 11 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 01 \\ 10 \end{bmatrix} \\ + \sum_{\delta} P(\delta_1 \delta_2 \delta_n) = 1$$

が成立する。ここに $\sum$ はシーケンスの場合の数だけ合計する事を示す。1例として連立方程式を計算機で解き、

表 3-2 状態確率と平均待ち行列長

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\mu_{11}$	$\mu_{21}$	$\mu_{12}$	$\mu_{22}$	$P^0$	$P\begin{bmatrix} 10 \\ 00 \end{bmatrix}$	$P\begin{bmatrix} 01 \\ 00 \end{bmatrix}$	$P\begin{bmatrix} 00 \\ 10 \end{bmatrix}$
0.5	1.0	0.4	1.2	0.8	1.6	0.1614	0.1056	0.0353	0.1088
$P\begin{bmatrix} 00 \\ 01 \end{bmatrix}$	$P\begin{bmatrix} 11 \\ 00 \end{bmatrix}$	$P\begin{bmatrix} 10 \\ 01 \end{bmatrix}$	$P\begin{bmatrix} 01 \\ 10 \end{bmatrix}$	$P\begin{bmatrix} 00 \\ 11 \end{bmatrix}$	$P[000]$	$P[001]$	$P[010]$	$P[011]$	$P[100]$
0.0535	0.0424	0.0678	0.0465	0.0723	0.0117	0.0233	0.0176	0.0352	0.0118
$P[101]$	$P[110]$	$P[111]$	$P[0000]$	$P[0001]$	$P[0010]$	$P[0011]$	$P[0100]$	$P[0101]$	$P[0110]$
0.0236	0.0189	0.0338	0.0033	0.0066	0.0066	0.0132	0.0045	0.0090	0.0090
$P[0111]$	$P[1000]$	$P[1001]$	$P[1010]$	$P[1011]$	$P[1100]$	$P[1101]$	$P[1110]$	$P[1111]$	L
0.0179	0.0029	0.0058	0.0058	0.0115	0.0040	0.0079	0.0076	0.0152	2.811

各状態確率と系の平均長さLを求めたものを表3-2に示した。

以上で各モデルの概略を述べたが、モデル3のところでも述べたように、①窓口数Sが増加し、②待ち行列の許容長さN-Sを増加させ、③客の種類Mが増加すると、定常平衡方程式をたてて、各状態確率を求める事が非常に困難となってくる。このため、精度のよいシミュレーションモデルを作成して、その利用手順を明確に定めておけば便利である。シミュレーションモデルを作成して種々の場合に対する図表を作成しておけばより便利であり手軽に利用できるが、モデル3の場合にはその組合せの数が増大し、シミュレーション実行数が非常に多くなる。そこで、本資料では、シミュレーションモデルの提出のみにとどめ、その利用方法を具体的に説明することとした。

#### 4. シミュレーションモデルの作成

##### 4.1 概説

これまで述べてきたように、本資料で提出したシミュレーションモデルは、船舶の特性と埠頭の特性を組み込んだ待ち現象解析のシミュレーションモデルである。シミュレーションモデルにより現象を解析しようとするれば、まず、①シミュレーションモデルを作成し、②シミュレーションモデルの有効性を検討し、③現象解析にシミュレーションモデルを使用する手順を明らかにして、シミュレーションを実行し、④アウトプットの解析を行なう必要がある。つまり単にシミュレーションモデルを使用して現象を再現しただけでは不十分であって、解析の目的を明らかにし、手順を示し、精度を論じる必要がある。そこで、本資料では、①シミュレーションモデルの基本

の流れ、②モデルの内容、③モデルの検討、④乱数の検定、⑤解析手順、⑥実例の解説を行なうこととして、十分な解析が手軽に行なえるシミュレーションモデルの利用の便をはかりたいと考えた。

さて、図-4.1に示すように本シミュレーションモデルはつぎの3つの大きなステップから構成されている。

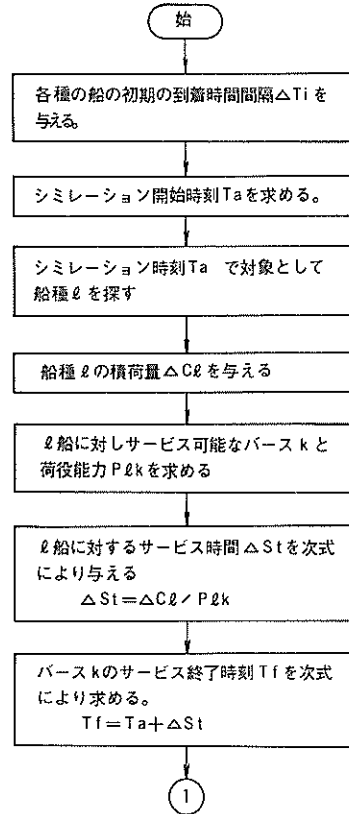


図 4-1 (その1) シミュレーションモデルのブロックチャート

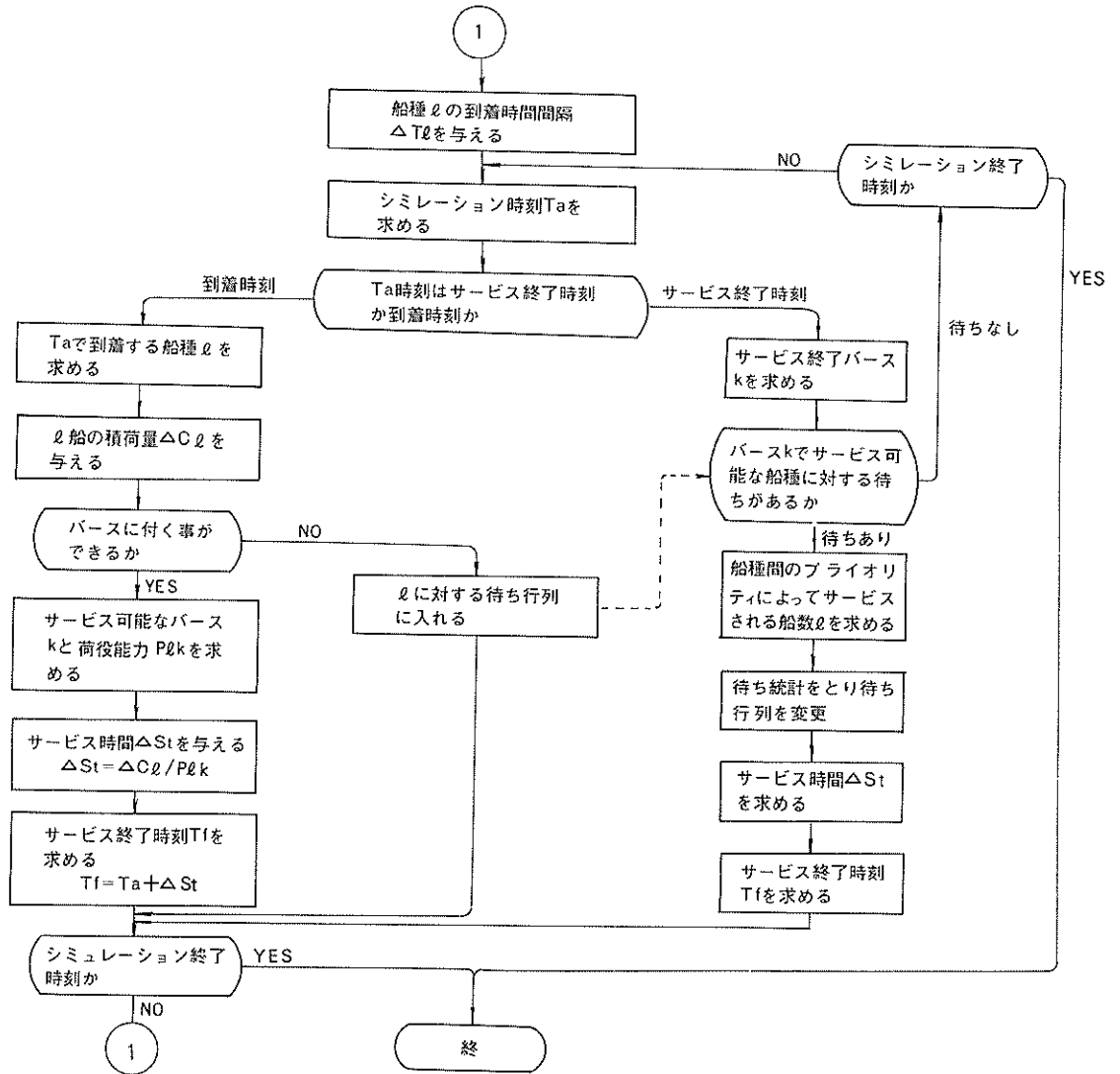


図 4-1 (その2) シミュレーションモデルのブロックチャート

- ① 初期ステップ
- ② メインステップ
- ③ 終了ステップ

初期ステップはシミュレーションを開始するステップであり、最初すべて0の状態にセットされていた現象に対して船舶を到着させサービスを開始させる。初期条件はすべて0にセットされているから、シミュレーションは十分な時間繰返して実行しないと安定な状態にならない。メインステップは船舶がバースに着機できるかどうかを、船舶の到着時にバースが空いているかどうかによって判断させ、待ち現象および荷役現象をつくるステップである。終了ステップは、シミュレーションが十分な

回数実行させたかどうかを判断し、船舶の発生隻数あるいはシミュレーション時刻でシミュレーションを終了させるステップである。

各ステップはつぎのような内容をもつマクロステップから構成されている。

<初期ステップ>

1-ジェネレーティングステップ(Generating Step) ;各船舶の特性の違いを示すパラメーターをI,異なる特性数をMとすると, I船の初期の到着時間間隔  $\Delta T_i$  を与える。シミュレーション開始時刻は0にセットしてあるから, I船の到着するシミュレーション時刻  $T_i = \Delta T_i$  となる。



II—シミュレーション開始時刻を次式により求める。

$$T_a = \min_i T_a^i \dots\dots\dots ①$$

III—シミュレーション時刻  $T_a$  で到着した船種  $\ell$  を求める。

IV—船種  $\ell$  に対する積荷量  $\Delta C_{\ell}$  を船種  $\ell$  の船型分布より与える。

V— $\ell$  船種を荷役する事のできるバース  $k$  を荷役施設マトリックス  $f_{ij}$  より求める。ここに  $f_{ij} = 1$  は  $i$  種船に対し  $j$  バースでは荷役可能であることを示し、 $f_{ij} = 0$  は荷役不可能であることを示す。

VI— $\ell$  船種に対するサービス時間 (荷役時間)  $\Delta S_i$  を次式により与える。

$$\Delta S_i = \Delta C_{\ell} / P_{\ell k} \dots\dots\dots ②$$

ここに  $P_{\ell k}$  は  $\ell$  種船に対し荷役可能なバース  $k$  の荷役能力を表わす。

VII—バース  $k$  のサービス終了時刻  $T_r$  を次式により求める。

$$T_r = T_a + \Delta S_i \dots\dots\dots ③$$

<メインステップ>

I—サービスを受け始めた船種  $\ell$  の到着時間間隔  $\Delta T_{\ell}$  を与え、 $\ell$  種船のつぎの到着時刻  $T_a^{\ell}$  を次式により与える。

$$T_a^{\ell} = T_a + \Delta T_{\ell} \dots\dots\dots ④$$

II—シミュレーション時刻  $T_a$  を次式により求める。

$$T_a = \min_{ik} \{ T_a^i, T_r^k \} \dots\dots\dots ⑤$$

ただし、 $T_r^k$  は第  $k$  バースのサービス終了時刻である。 $T_a$  が到着時刻であればステップ III へ、サービス終了時刻であればステップ VII へ進む。

III—シミュレーション時刻  $T_a$  で到着した船種  $\ell$  を求める。

IV—船種  $\ell$  に対する積荷量  $\Delta C_{\ell}$  を船種  $\ell$  の船型分布より与える。

V— $\ell$  種船がバースに付く事ができるかどうかを  $f_{ij}$  マトリックスと  $O_j$  マトリックスより求める。ここに  $O_j$  マトリックスは  $j$  バースの占有状態を表わすマトリックスであって、 $O_j = 1$  で占有、 $O_j = 0$  で空バースを示す。バースに着く事ができればステップ VI へ、できなければステップ X へ進む。

VI— $\ell$  種船に対するバース  $k$  でのサービス時間  $\Delta S_i$  を次式により求める。

$$\Delta S_i = \Delta C_{\ell} / P_{\ell k} \dots\dots\dots ⑥$$

VII—バース  $k$  のサービス終了時刻  $T_r^k$  を次式より求める。

$$T_r^k = T_a + \Delta S_i \dots\dots\dots ⑦$$

シミュレーション終了ステップに進む。

VIII—サービス終了バース  $k$  に対しサービス可能な船種

で待ちのあるものがあるかどうかを求める。待ちがあればステップ II へ待ちがなければシミュレーション終了ステップへ進む。

IX—待っていてサービスを受ける船種  $\ell$  を求め、待ち統計をとり、サービス時間  $\Delta S_i$  とサービス終了時刻  $T_r^k$  を求める。シミュレーション終了ステップに進む。

X— $\ell$  船種に対する待ち行列に入る。待ち統計を求める。

<終了ステップ>

I—シミュレーション終了時刻  $T$ 。(あるいは終了隻数  $C_s$ )かというかを判定し、終了時刻 (終了隻数) であれば、アウトプットを打出し終了する。終了時刻 (終了隻数) でなければ、サービス終了かつ待ちのないステップを通ったものは通常ステップ II へ、その他の場合は通常ステップ I へもどる。

以上でシミュレーションモデルの基本的な流れを述べたが、このような概説的な説明のみで本シミュレーションを使用する事はむづかしいと考えられる。以下では、本シミュレーションモデルを使用する為に必要なインプットとアウトプットの説明およびシミュレーションモデル細部の問題としてのプライオリティーの取り方、統計量の取り方について述べる事とする。

## 4.2 シミュレーションモデルの内容

### 4.2.1 インプット

本シミュレーションモデルに対するインプットデータには、①シミュレーションモデルのインプットデータと②解析のために必要なインプットデータとがある。①は①乱数の初期値、②シミュレーションの初期条件、③シミュレーション終了条件 (船舶の発生隻数あるいは終了時刻) であり、シミュレーションモデルを使用するためのインプットデータである。②は①各船種ごとの到着時間間隔分布、④積荷量分布、および⑤バースマトリックス  $F_{ij}$ 、⑥パワーマトリックス  $P_{ij}$  であり、現象を解析する対象が異なれば、それにとまって変更されなければならないものである。これらインプットデータを一括して表 4.1 に示した。このうち、乱数の初期値は 4.4 で述べるように、表 4.2 のものを用いる事ができる。もちろん、検定を行なえば任意のものを用いる事もできる。シミュレーションの初期条件はすべて 0 にセットしてあるが、これを変化させて用いる事もできる。終了条件は安定なアウトプットが得られたかどうかを確認して定める必要がある。これらは、与えられたものを用いるのが便利であるが、②はシミュレーション実行者が設定しなければならない。シミュレーションを実行するためには、これらのインプットデータの調査が必要であるが、調査項目については 4.5 で述べる事とする。インプット

表 4.1 インプットデータ

No.	記号	内 容	制限と使用法
1	M	船の種類の数	$\leq 10$
2	N	バースの数	$\leq 20$
3	MC1	1分布形のデータの最大個数	$\leq 30$
4	MC2	分布形の種類の数	$\leq 20$ 到着分布, 積荷量分布の種類合計
5	$F_{ij}$	バースマトリックス $F_{ij}=1$ でサービス可	$\leq 200$
6	$P_{ij}$	パワーマトリックス ( $k \ell / h$ ) で与える	$\leq 200$ 積荷量分布と同じ単位で与える
7	$R_k$	乱数の初期値 MC 2個与える	
8	MS	終了隻数	

データの使用方法と制限は表 4.1 にまとめて示してある。

4.2.2 アウトプット

アウトプットには、①シミュレーションモデルを検討するために必要なアウトプット、②滞船現象の解析に必要なアウトプット、③シミュレーションを途中段階から再開するのに必要なアウトプットがある。①は、与えたインプットデータかシミュレーションモデルにおいて偏らずに用いられたか、安定した結果が得られたかを検討するためのもので、①到着時間間隔分布、②積荷量分布、③乱数分布が、シミュレーションモデルで使用された統計量として求められる。②は解析に必要な各種の統計量であり、シミュレーション終了時点のもの、実行時の時系列とがあるが、アウトプット可能な統計量を一括して表 4.3 に示した。③はシミュレーション終了時点でシステムが保持している状態であって、シミュレーション終了条件を決める時に使用することができる。すなわち、終了時点で未だ安定した統計量が得られない場合に、シミュレーションを再開する時のインプットとして用いることができる。このアウトプットの一覧表を表 4.4 に示す。

表 4.2 (その1) 乱数の初期値

1,000個の乱数と初期値 (a=2899)

ケース		初期値 $x_0 = b$	度数検定 $\chi^2$ $\chi^2 < 36.4$	連検定 1 (Above and Below)		連検定 2 (Up and Down)	
万単位	千単位			$ Z  < 1.645$		6444 $< K < 6882$	
1	1	322450	26.10	-1.87820	○	660	
	2	433874	27.05	-0.09817		650	
	3	4413970	24.40	-0.75933		655	
	4	7506	14.00	-0.81471		636	○
	5	2222226	20.55	-1.29374		639	○
	6	2997202	22.00	1.28780		682	
	7	4757266	34.45	-0.37966		665	
	8	3635794	19.15	-1.56990		651	
	9	6251922	21.50	-0.37516		664	
	10	4544722	22.10	0.07355		651	
2	1	4570371	23.85	0.12655		680	
	2	2749155	24.25	-0.50572		650	
	3	2905283	17.95	-1.77185	○	642	○
	4	7889571	27.70	-1.51432		634	○
	5	6921347	30.05	0.19098		670	
	6	754275	22.10	0.56962		676	
	7	1676355	22.10	-1.83456	○	667	
	8	8344099	24.40	-0.36453		648	
	9	5782531	24.10	-0.72566		690	○
	10	7328227	25.30	0.50828		669	

表4.2 (その2) 乱数の初期値

ケース 万 単 位	千 単 位	初期値	度数検定 $\chi_0^2$	連検定1 (Above and Below)	連検定2 (Up and Down)
		$x_n = b$	$\chi_0^2 < 36.4$	$ Z  < 1.645$	644.4 <K力688.2
3	1	6532536	13.65	1.14509	685
	2	417976	21.00	0.64840	663
	3	2945976	32.75	0.35785	658
	4	4417208	18.30	0.53677	666
	5	3520952	20.30	-1.00459	662
	6	7335096	26.30	-1.49152	661
	7	6160312	24.55	0.27468	680
	8	7074488	21.65	-1.29775	662
	9	378296	13.30	0.34146	652
	10	1538232	26.60	-0.56639	678
4	1	1289065	22.40	0.55773	674
	2	3901705	24.60	-1.07131	658
	3	5466793	23.30	-0.30385	678
	4	5099593	27.85	-0.12605	673
	5	2963945	20.55	1.30825	669
	6	272265	22.95	1.52555	686
	7	7674153	24.00	-1.64221	648
	8	3313353	23.30	1.20871	658
	9	8325225	25.55	-0.08030	658
	10	2950665	25.50	-0.41484	660
5	1	8117254	18.75	1.27871	679
	2	3770310	23.10	-0.87801	662
	3	8096646	37.20	0.67944	671
	4	1632070	12.20	1.74708 ○	688
	5	4758278	14.70	0.63277	672
	6	2205382	25.55	0.02850	676
	7	1772166	38.75 ○	-1.17000	646
	8	771654	24.35	-1.77723 ○	672
	9	2808326	34.20	0.17782	674
	10	1000902	24.50	0.27613	659
6	1	2385133	22.65	-0.62967	651
	2	1549581	21.35	1.14738	673
	3	8288557	26.10	-0.89493	659
	4	4546893	26.05	0.80618	661
	5	2678125	30.90	-0.36476	664
	6	3501453	30.40	-0.16856	673
	7	4690349	20.65	1.59270	668
	8	772557	25.35	0.50943	675
	9	8295917	23.65	-0.12605	671
	10	7108109	30.20	-1.07131	658
7	1	5436873	25.45	0.00000	651
	2	6541161	14.45	-0.82211	645
	3	1191177	23.55	0.53517	668
	4	4230825	20.00	0.28292	674
	5	6386761	19.85	-0.16150	670
	6	7822825	17.10	-0.69943	666
	7	1362825	31.60	0.55773	687
	8	6044969	26.85	0.67012	675
	9	13001	19.10	-0.69159	683
	10	4402281	18.80	-0.54848	671

表 4.3 シミュレーション、アウトプット (統計量)

アウトプットの表示方法	記号	内 容
SERV ITAB ... ..	ITAB1	終了直前のサービス終了時刻
MACHI SU ... ..	MACHI(I)	船種 I の ITAB1 までに待った船の隻数
MEAN WAITING TIME OF EACH KIND ...	WT(I)	船種 I の ITAB1 までの平均待ち時間
MEAN WAITING TIME OF ALL ...	XMMTWT	ITAB1 までの平均待ち時間
MEAN LENGTH OF EACH KIND ...	XLENG(I)	船種 I の ITAB1 までの平均待ち行列長
MEAN LENGTH OF ALL ...	XTLENG	ITAB1 までの平均待ち行列長
SERVICE FINISHING COUNT ...	TC000(I, J)	ITAB1 までにバース J でサービスを終了した船種 I の隻数
P0 ... ..	P0	ITAB1 までのバースの空いている確率
RANDOM NUMBER DISTRIBUTION ...	ICOUN1(I, K) ICOUN2(I, K)	乱数の変数分布, ICOUN1 は到着時間間隔 ICOUN2 は積荷量に対するもの。I は船種
ARRIVAL TIME DISTRIBUTION ...	ITAAR(I, K)	使用した到着時間間隔の分布形 (実隻数で示してある)
SERVICE TIME DISTRIBUTION ...	ITASE(I, K)	使用した積荷量の分布形 (実隻数で示してある)
MEAN OF ARRIVAL TIME ...	XMAR	平均到着時間間隔
RAMDA ... ..	RAMDA	平均到着隻数
ARRIVAL ... ..	XMAR10(I), RAMD10(I)	各船種ごとの平均到着時間間隔と到着隻数
MEAN OF SERVICE TIME ...	XMSU	平均サービス時間
MUU ... ..	XMUU	平均サービス隻数
SERV ... ..	XMSU10(I), XMUU10(I)	各船種ごとが平均サービス時間と隻数
TC ... ..	TC	発生した船舶の隻数
OCCUPIED TIME ...	IDTIME(J)	各バース J を占有した時間
SENYU RITSU ... ..	OTIME(J)	各バース J の占有率
OCCUPIED TIME OF EACH KIND ...	IDTIM(J, I)	各バースにおける船種 I の占有した時間
SENYU NO HI ... ..	OTIM(J, I)	各バースにおける船種 I の占有の比率
MACH NO GOKEI ...	MIWI(I)	船種 I の待ち時間の合計
MACHI SHURYO SUU ...	IWI(I)	船種 I で待ちに入ってサービスを終了した隻数
MACHI NASHI SUU ...	ITTCO(I)	船種 I で待たずにサービスを終了した隻数
HEIKI MACHI JIKAN	WT(I)	シミュレーション終了時点の船種 I の平均待ち時間

表 4.4 シミュレーションアウトプット (終了時のシステムの状態)

アウトプットの表示方法	記号	内 容
SERVICE CHU NO FACILITY	ITABC(J), KINDA(J)	現在占有されている船種をKINDA(J)でそのサービス開始時刻をITABC(J)で示す
EQUIPED FACILITY	IO(J)	現在占有されているバスに対してはIO=1 空バスは0で与えられる
MACHI SUU	MACHI (I)	現在待っている船種 I の待ち行列長
ITAB	ITAB	シミュレーション終了時刻

#### 4.2.3 モデルの詳細

本シミュレーションモデルがもっている特徴を具体的に示すとつぎのとおりである。

① 船舶がバスに着く際に、複数個のバスが空いている場合にはどのバスに着かせるかが問題となる。つまりバスのプライオリティをどのように定めるかが問題となるが、本シミュレーションモデルでは一様乱数を発生させてランダムに着機させてある。もちろん、バスのプライオリティを設けて用いる事もできる。

② バスが空になった時に数種類の船舶が待っている場合、どの船種の船舶がサービスを受けるかが問題となるが、本シミュレーションではファーストカムファーストサーヴドの原則に従ってサービスを受けるようにしてある。ただし、同一時刻に到着した船舶がある場合には一様乱数を割りあてて、船種による優位性が表われないようにしてある。

③ 待ち時間に関する統計は、船舶がバスにおいてサービスを受け始める時点で求めてある。したがって、この時点に待ち行列にある船舶の待ち時間は含まれていない。このため、待ち行列が発散する状況にある場合や、シミュレーション時間が短い所では大きな誤差を含んでいる。しかし、シミュレーションを長時間実行すれば、現在待ち行列にある船舶の待ち時間による誤差は非常に少なくなる。一方、待ち行列長に関する統計は、①待ち行列に入った時刻および②待ち行列から出た時刻(サービス開始時刻)の両時刻で求めてある。平均待ち時間と平均待ち行列長は上述のような別個の方法で求めてあるから、シミュレーションアウトプットの両結果を比較することができる。

#### 4.3 シミュレーションモデルの検討

シミュレーションモデルを検討するためには、①簡易モデルの実行によって、待ち行列理論の理論解との比較によって検討する方法と、②実際に観測できる現象のモデルを実行させ、シミュレーションのアウトプットと観測値とを比較する方法があるが、本資料で意図しているように種々の場合にシミュレーションモデルを利用しよ

うとするときには、①の方法による方が便利で簡単である。

さて、簡易モデルとしては、普通のタイプのM/M/Sモデル( $\mu = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ )を用いるのが一番簡単であるが、本シミュレーションモデルのように窓口のサービス率や客の到着率が異なる事の特徴としているモデルにおいては、 $\mu = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$  のモデルだけでは十分な検討が行えないものと考ええる。そこで、以下においては、①M/M/S ( $\mu = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ ) の場合、②M/M/S ( $\mu_i \neq \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ )、③M/M/S ( $\mu_i \neq \text{const}$ ,  $\lambda_i = \text{const}$ , for i) の場合、すなわち前節で述べた待ち行列理論モデルを用いた検討をも行なっておく事とする。

シミュレーションモデルの検討を行なう時には、シミュレーションのアウトプットが理論解と合っているかを検討するだけでなく、つぎのような項目に対する検討も行なう必要がある。

① 与えたインプットデータとしての到着時間間隔分布やサービス時間分布が、シミュレーション終了時までモデルにおいて用いられたものの分布形と一致しているかどうかの検討。

② シミュレーション実行時間が十分長く、アウトプットとして得られた平均待ち時間や平均待ち行列長が十分安定しているかどうかの検討。

③ 用いた乱数によってシミュレーション結果が十分安定しているかどうかの検討。

##### 4.3.1 M/M/Sモデルによる検討

上記検討項目をまとめたものが表 4.5 である。ここで、①NO. はシミュレーションの実行ケース番号、②C はシミュレーションで発生させた船舶の総数、③S は窓口数、④M は船舶の種類の数、⑤ $\lambda_k$  はインプットデータとして与えた各種船舶の平均到着率。ここで $\lambda$  は全船種をひとつの種類とみなした時の平均到着率(以下システムの平均到着率と呼ぶことにする)である。⑥ $\mu_k$  はインプットデータとして与えた各種船舶の平均サービス率。また $\mu$  は全船種を同一種類のもののみとした時の平均サービス率(以下システムの平均サービス率と呼ぶ)であ

表 4.5 M/M/S ( $\lambda = \text{const.}, \mu = \text{const.}$ ) による検討

① No	② C	③ S	④ M	⑤ ⑥ $\lambda^i, \mu^i$			⑦ $R_k^i$	⑧ $R_k^i$	⑨ ⑩ $\lambda^o, \mu^o$			⑪ $\rho^i$	⑫ $\rho^o$	⑬ $W_q^i$	⑭ $W_q^o$	⑮ $W_q^i$		
				$\lambda^i (\frac{60}{\lambda^i})$	$\mu^i (\frac{60}{\mu^i})$	$\lambda^i (\frac{60}{\lambda^i})$			$\mu^i (\frac{60}{\mu^i})$	$\lambda^o (\frac{60}{\lambda^o})$	$\mu^o (\frac{60}{\mu^o})$						$\lambda^o (\frac{60}{\lambda^o})$	$\mu^o (\frac{60}{\mu^o})$
1	10.000	5	3	3.3 (18.2)	1 (60)	1.1 54.5 1 60	8253907	3757365	3.32 (18.1)	0.99 (60.6)	1.10 (54.5)	0.98 (61.5)	0.66	0.6703	11.8	12.20	12.98	
						1.1 54.5 1 60	4317753	5539713			1.09 (54.9)	1.01 (59.1)						
						1.1 54.5 1 60	6447309	6108613			1.13 (53.3)	0.98 (61.1)						
2	10.000	5	3	3.3 (18.2)	1 (60)	1.1 54.5 1 60	1289065	417976	3.32 (18.0)	0.98 (61.4)	1.08 (55.4)	0.96 (62.3)	0.66	0.6806	11.8	13.30	11.81	
						1.1 54.5 1 60	8111254	4570371			1.12 (53.7)	0.98 (61.2)						
						1.1 54.5 1 60	2385133	1289064			1.12 (53.3)	0.98 (60.7)						
3	10.000	5	3	3.3 (18.2)	1 (60)	1.1 54.5 1 60	6595045	322450	3.32 (18.1)	0.99 (60.5)	1.13 (53.2)	0.99 (60.8)	0.66	0.6672	11.8	11.91	12.22	
						1.1 54.5 1 60	7379501	6532536			1.08 (55.3)	1.01 (59.5)						
						1.1 54.5 1 60	2903953	5436873			1.10 (54.8)	0.98 (61.2)						

る。⑦  $R_k^i$  は各種船舶の到着時間間隔を与える乱数の初期値、⑧  $R_k^o$  はサービ時間を与える乱数の初期値である。⑨  $\lambda_k^o$ 、⑩  $\mu_k^o$  はシミュレーションの終了時にアウトプットとして得られた各種船舶の平均到着率と平均サービス率である。⑪  $\rho^i$ 、⑫  $\rho^o$  はそれぞれインプットとアウトプットの利用率であり、それぞれシステムの平均到着率と平均サービス率および窓口数によって次式で示される。

$$\rho^j = \lambda^j / S \mu^j \quad (j = i \text{ or } o) \quad \text{⑬}$$

ここに、 $\lambda^j, \mu^j$  はシステムの平均到着率と平均サービス率を示す。⑬  $W_q^i$  はインプットデータを待ち行列理論に入れて計算した平均待ち時間、⑭  $W_q^o$  はシミュレーションアウトプットとなった  $\mu^o, \lambda^o, \rho^o$  を待ち行列理論に入れて計算した平均待ち時間、⑮  $W_q^i$  はシミュレーションの直接的な結果として得られた平均待ち時間を示す。いずれの結果もシミュレーションのアウトプットとして得られた利用率  $\rho^o$  はインプットと大差なく、その誤差は 10% 以下であるが、 $\rho$  が 0.66 S が 5 の付近では、 $\rho$  の少しの誤差が平均待ち時間の誤差に強く影響を与えることがわかる。これに対して、 $W_q^i$  と  $W_q^o$  を比較すると、誤差は非常に少なく (10% 程度) このシミュレーション結果がよい近似を与える事を示している。インプットデータとして与えた到着時間間隔分布とサービス時間分布 (ただし本シミュレーションモデルでは前述のごとく積荷量分布として与えている) とシミュレーションアウトプットの各分布形の比較を行なったものが図 4.2 である。この図より明らかなように本シミュレーションモデルのインプットとアウトプットは十分一致しているとみなせると考える。また、図 4.3 に平均待ち時間の時系列を示したが、これより約 5,000 隻の所でほぼ定常な解が得られていることがわかる。さらに、この 3 ケースより乱数の初期値の変化によっては大差ない解が得られるが、この平均をとれば、

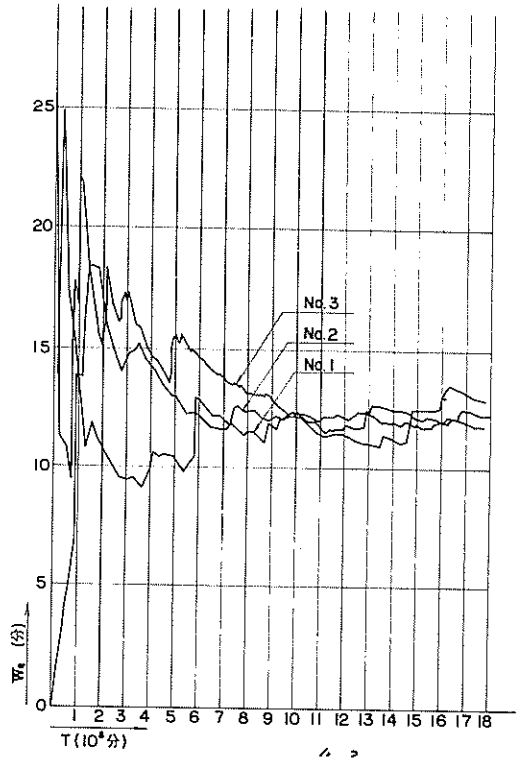


図 4-3 平均待ち時間の時系列

$$\bar{W}_q^i = 12.33 \text{ (分)} \quad \text{⑯}$$

となり、誤差  $E = (\bar{W}_q^i - W_q^i) \times 100 / W_q^i = 10\%$  であるからこのシミュレーションモデルでは 10% 以下の誤差は問題とすることができない。

#### 4.3.2 窓口のサービス能力が異なる場合

表 4.6 に示すケースに対してシミュレーションを実行した。各インプットデータより計算した  $E_q^i$  と、シミュレーションアウトプットより計算した  $E_q^o$ 、インプットと

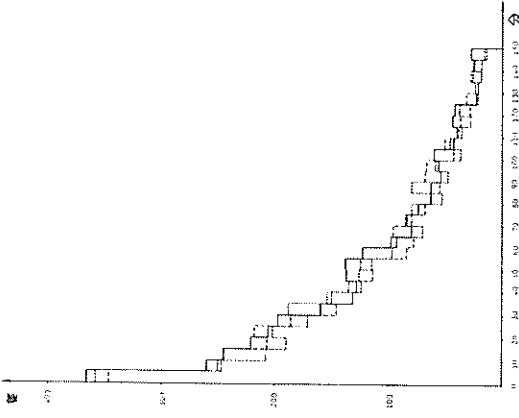


図 4-2 (その3) 到着時間間隔分布

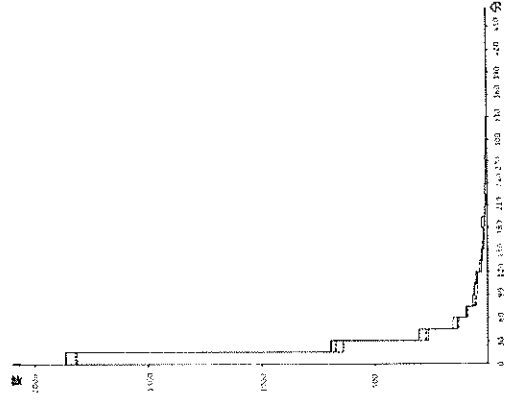


図 4-2 (その6) サービス時間分布

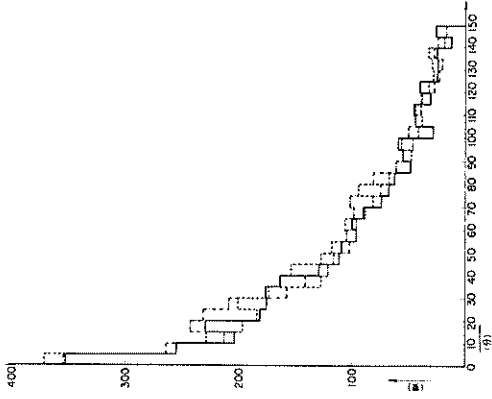


図 4-2 (その2) 到着時間間隔分布

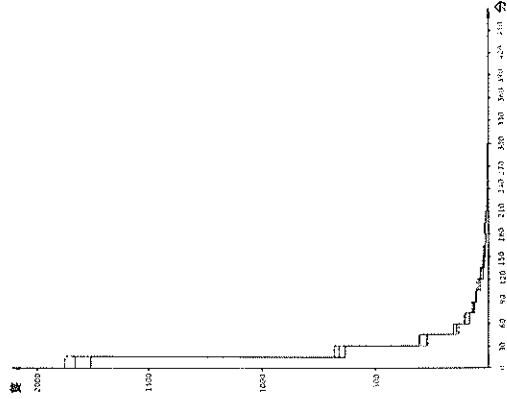


図 4-2 (その5) サービス時間分布

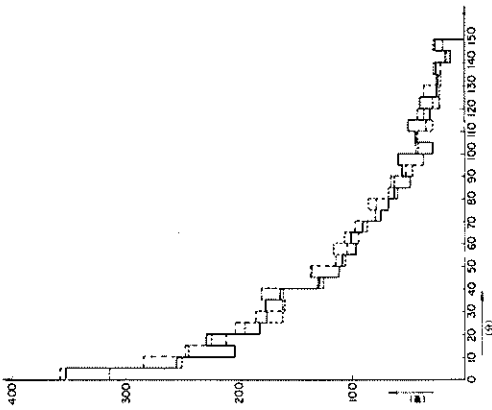


図 4-2 (その1) 到着時間間隔分布

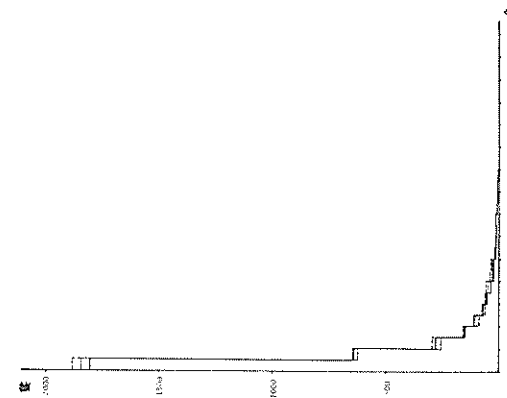


図 4-2 (その4) サービス時間分布

アウトプットの平均サービス率を用いて普通のM/M/Sモデルで計算した $L_q^i, L_q^o$ , およびシミュレーションの直接の結果 $L_q^i$ を表4.7に示した。理論解 $E_q^i$ およびアウトプットよりの理論解 $E_q^o$ に対する誤差を同時に示した。この表で $R(p)$ は $p$ の $E_q^o$ に対する誤差 $R'(p)$ は $p$ の $E_q^o$ に対する誤差を示している。シミュレーションアウトプ

表4.6 タイプ1のモデルのインプットデータ

S	$\lambda$	$\mu_i$			
		4	3	1	0.5

ットより計算した誤差は、表4.8の第1行目に示す乱数の初期値の初期値のものに対して示した。異なった乱数の初期値

表4.7 タイプ1のモデルによる検討

$E_q^i$	$E_q^o$	$R(E_q^o)$	$L_q^i$	$R(L_q^i)$	$L_q^o$	$R(L_q^o)$	$L_q^s$	$R(L_q^s)$	$R'(L_q^s)$
0.99368	1.32511	33.35%	1.05143	5.8%	1.24518	25.3%	1.18654	19.4%	10.5%

表4.8 タイプ1のモデルの使用乱数初期値

$N_0$	到着時間間隔			積荷量分布		
	1	2	3	1	2	3
1	6595045	7379501	2903953	322450	6532536	5436873
2	8253907	4317753	5447309	3757365	5539713	6108613
3	1289065	8117254	2385133	417976	4570371	1287065

をもつもの2ケースについて $L_q^o$ のみ比較を行なったが、これによると、誤差は非常に小さくなる。したがって、シミュレーションで正確な解を求めようとするれば、数ケースを実行しその平均を採用するという一般的な方法がこの場合もよい結果を与えることが立証されたといえる。他の2ケースに対する $L_q^i, R(L_q^i)$ はそれぞれ1.00423(1.1%), 1.03061(3.7%)であり、平均すれば1.07379(8.1%)となる。よって十分な精度でシミュレーション結果が得られたものと考え、一方 $\bar{m}, \sqrt{\Sigma(m_i - \bar{m})^2} / \bar{m}$ を計算するとそれぞれ0.3542, 0.2798となり、このインプットデータに対しては平均サービス率を用い普通のM/M/Sモデルで取扱ってもよいと考えられる。

#### 4.3.3 各客に対してサービス率が異なる場合

前節で示したように、このモデルに対してはM/M/2の場合が解析されている。したがって、シミュレーションモデルの検討のためにも窓口2つ客の種類が2種の場合を扱う事とする。表4.9にシミュレーション実行ケースを示した。このケースに対し3.3で述べた待ち行列理論を用い $E_q^i, L_q^i$ をそれぞれ計算しシミュレーションアウトプットとの比較を行なった。こ

表4.9 タイプ2のモデルのインプットデータ

S	$\lambda$		$\mu$	
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\mu_1$	$\mu_2$
2	1.9	0.1	3	1

表4.10 タイプ2のモデルによる検討

$N_0$	シミュレーションアウトプット			$L_q^o$	$R(L_q^o)$	$E_q^i$	$L_q^i$	$R(L_q^i)$
	$\lambda$	$\lambda_i$	$\mu_i$					
1	2.0178	1.9176	2.9316	0.1226	-2.39%	0.1256	0.0931	-25.88%
		0.1008	1.0501					
2	2.0058	1.9086	2.9328	0.1455	-15.84%	0.1256	0.0931	-25.88%
		0.0972	0.9612					
3	2.0208	1.9146	2.9202	0.1324	5.41%	0.1256	0.0931	-25.88%
		0.1062	1.0134					

の結果を表4.10に示した。当然のことながら、平均サービス率を用いて普通のM/M/2タイプの待ち行列理論で計算した平均待ち行列長よりもシミュレーション結果の方がよい精度を示している。シミュレーションの3ケ

ースに対して平均をとると $L_q^s = 0.1335, R(L_q^s) = 6.29\%$ となりより近い値を得ることができる。



4.4 乱数の検定

本シミュレーションモデルで使用する乱数は擬似一様乱数であるが、乱数の検定を行なう方法としてはつぎの2つの方法が考えられる。

① インพุットデータとして与えた、到着時間間隔とサービス時間の分布が、シミュレーション実行時に同様の分布として使われているかを検討する。

② 使用した乱数自体が一様でありランダムとなっているかを検討する。

①に対しては、4.3で述べたので、ここでは、②に対する検定を行なっておく。<sup>6)7)</sup>

本シミュレーションで使用した擬似乱数は乗積合同法 (Multiplicative Congruential Method) による擬似乱数で次式により定義される。

$$\begin{aligned} x_i &= a x_{i-1} \pmod{m} & \text{.....} & \text{⑩} \\ x_0 &= b \end{aligned}$$

この式は  $ax_{i-1}$  を  $m$  で割ったときの剰余として  $x_i$  が求められる事を意味している。  
ここで、 $a = 8\ell \pm 3$  ..... ⑪  
 $b = m$  と素である奇数

にとれば、周期  $m/4$  なる長周期の擬似乱数が得られる事が明らかとなっているから、本シミュレーションでは  $a$  を一定 (2899) とし、初期値  $b$  によって乱数を変える事とした。

さて、乱数の検定には①度数検定 (Frequency Test), ②継次検定 (Serial Test), ③ポーカー検定 (Poker Test), ④ギャップ検定 (Gap Test) 等があるが、<sup>7)</sup> 本シミュレーションでは①と④を行なっておく、④としては連の検定を行ない① Up and Down Runs Test, ⑩ Above and Below Runs Test を行なった。以下においては、これらの一様乱数の検定方法の概略を述べしておく事とする。

4.4.1 度数検定

いま区間  $(0, 1)$  が  $\ell$  個の部分区間に分割されているものとし、検定すべき  $N$  個の擬似乱数のうち  $i$  番目の部分区間におちる擬似乱数の個数を  $f_i$ 、さらに  $f_i$  に対する一様分布における期待値を  $F_i$  とすれば、

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i} \text{.....} \text{⑫}$$

は  $N$  個の擬似乱数が一様乱数であるという帰無仮説のもとに自由度  $\ell - 1$  の  $\chi^2$  分布に従うことが知られている。 $\chi^2$  分布は自由度が決まれば確定するから、適当に  $\varepsilon$  を与えて  $P\{\chi^2 > \chi_{\ell-1}^2(\varepsilon)\} = \varepsilon$  ..... ⑬

なる  $\chi_{\ell-1}^2(\varepsilon)$  が定められる。一方、式⑫により検定すべき擬似乱数に対し  $\chi^2$  が求まり、 $\chi_{\ell-1}^2(\varepsilon) \leq \chi^2$  ならば、その擬似乱数が一様乱数であるという帰無仮説は棄却される。

4.4.2 連の検定その1 (Up and Down Runs Test)

連を以下のように、増加傾向の連と減少傾向の連とに分ける。

+++ | - | ++ | ---- | ++ | --

ここに+とは乱数の列において直前の値より増加する場合、-とは減少する場合を示す。+の連の個数を  $u_s$ 、-の連の個数を  $d_s$  とすると、このような連の個数  $s$  は次式で与えられる  $s = u_s + d_s$  ..... ⑭  
このとき全乱数の個数を  $n$  とすれば、 $s$  は平均値と分散が次式で示されることがわかっている。

$$E(s) = \frac{2n-1}{3}, \quad V(s) = \frac{16n-29}{90} \text{.....} \text{⑮}$$

そして十分大きな  $n$  に対して  $s$  の分布は、上記の値を平均と分散とする正規分布に従う。これによって連の検定が行なえる。

4.4.3 連の検定その2 (Above and Below Runs Test)

検定すべき擬似乱数列において、その平均値 0.5 より大きいものを  $A$ 、小さいものを  $B$  であらわせば、擬似乱数は  $AB$  の系列になる。例えば、

AA | BBB | A | BBBB | AA | B | A ..... ⑯

において連の数  $r = 7$  である。 $n_A n_B$  をこの乱数列の  $A$   $B$  の個数とすると、 $r$  は  $n_A n_B > 20$  の場合には平均値と分散が

$$\begin{aligned} \mu_r &= \frac{2n_A n_B}{n_A + n_B} + 1 \\ \sigma_r^2 &= \frac{2n_A n_B (2n_A n_B - n_A - n_B)}{(n_A + n_B)^2 (n_A + n_B - 1)} \text{.....} \text{⑰} \end{aligned}$$

の正規分布に従うことが知られている。これを用いて連の検定が行なえる。

表 4.2 には本シミュレーションで利用した乱数の初期値と検定結果を与えておく。定数  $a$  は 2899 と一定値に定めたが前述のように他の値に対しても同様に検定すべきである。検定は 1,000 個の乱数 10 組を 1 セットとして 7 セットを実施した。ここで、○印は危険率 10% で検定した結果、一様乱数とみなしがたいものを示した。

#### 4.5 解析手順

本資料で提出したシミュレーションモデルを用いて、滞船現象を解析し、港湾計画の基礎資料として役立てるためには解析の手順を明らかにしておく必要がある。一般に、シミュレーションモデルを用いて解析を行なう事の利点にはつぎのようなものがある。

① 現象を擬似的に表現しているため、モデルの内容を把握する事が容易で、現実の現象とモデルを対比させて考える事ができる。

② シミュレーションモデルの構造に変化が起らないような現象に対しては、モデルのインプットデータを変更する事によって同一のモデルを容易に利用できる。つまり、モデルの構造的な変化ではない、到着率や到着時間間隔分布、サービス率やサービス時間分布等の変化に対しては、同じモデルでインプットデータのみ変化させればよい。また荷役用ポンプの設置状況や能力の変更もインプットデータの変更として取扱える。

③ オペレーションの変化を容易にシミュレーションモデルに組み込む事ができ、有効性を判断する基礎資料にする事ができる。

このようなシミュレーションモデルの利点を利用すれば、シミュレーションモデルは単に現象解析に利用できるのみならず、改良手段の有効性の検討や、計画代替案に対する優劣の判定に利用できるものと考えられる。しかしながら、このように異なった用途に利用する場合には当然、異なった利用手順が存在すると考えられる。そこで、以下においては、①現象解析、②改良手段の検討、③計画案の評価の3つに区分して、シミュレーションを行なう場合の手順を考察する事とする。

##### 4.5.1 現象解析のためのシミュレーション

現象解析とは、現在の特定の港湾における滞船現象を解析する事であり、本資料のメインテーマである。現象解析を行なうためには、まず、モデルのインプットデータとなる現況の調査を行なう必要がある。現況調査の必要な項目を、石油製品積出しバースの特性を解析する場合について述べるとつぎのとおりである。

- ① 製品の種類の調査
- ② 各製品ごとの到着時間間隔分布調査
- ③ バース数調査
- ④ 各バースにおける積出可能油種の調査（荷役施設配置調査）
- ⑤ 各バースにおける油種別荷役能力調査
- ⑥ オペレーション調査

ここで、①の製品の種類とは、同一の荷役施設で荷役可能な製品を同一種類の製品と呼び、②では、その種類ごとに到着時間間隔分布と積荷量分布を求める事をいっている。しかし、資料151でも述べたように、各製品

の種類をあまりこまかく分類すると、これらインプットデータの安定したものが、得られない場合が生じる。この場合には、ある程度同一種類とみなせる製品をまとめて1つの分類種目とする必要が生じる。しかし、このような手段をとれば、各製品の種類と荷役施設が1対1に対応しなくなる。つまり、まとめた製品の種類ごとの荷役能力の想定が必要となるが、これは以下のようにして解決されるものと考ええる。1分類種目中の各製品の量の割合を求め、各製品の荷役能力に各製品の量の割合の重みをつけて平均すれば、1分類種目の平均的な荷役能力が算定できる。したがって、⑤の各バースの荷役能力調査を行なう際には、製品の種類ごとに行なう必要がある。また、荷役能力は、荷役施設のオペレーションの方法によっても異なって来るため、⑥のオペレーション調査は重要である。以上の様にモデルのインプットに対する調査が終ると、つぎにシミュレーションを実行し解析を進める事になるが、以下において、この際の手順を示すこととする。

- ① 乱数の初期値を与える。
- ② 終了隻数、または終了時刻を指定する。
- ③ アウトプットの安定度を検討する。
- ④ 安定な解が得られる終了隻数（または終了時刻）を決定する。
- ⑤ インプットとアウトプットを照合する。
- ⑥ 乱数の初期値を変更し、シミュレーションを数回実行する。
- ⑦ アウトプットを解析する。

乱数の初期値としては表4.2の値を用いる事ができる。終了隻数（または終了時刻）を決定する為には、最初に長期（例えば終了隻数が各バースで20,000隻程度）のシミュレーションのケースを実行し、統計量の時系列より安定する終了隻数を決定すればよい。最後に数ケースのシミュレーション結果を平均してアウトプットを解析する。

##### 4.5.2 改良手段の検討のためのシミュレーション

現状のインプットに対してシステムの一部を改良する事によって滞船時間や滞船隻数の減少をはかれる場合がある。改良手段として用いることのできるものを簡単に行ない得る順に列挙すればつぎのようになる。

- ① オペレーションの変更
- ② 荷役施設（ポンプ）の能力向上
- ③ 荷役施設の新設
- ④ バース数の増加

オペレーションの変更は最も費用も少なく簡単に行なう事ができるが、現場での改良方法の検討が十分行なわれている今日ではあまり期待できない。しかし、現場での改良は、現場の立場からの改良しか志向しないため上

位レベルでの改良は行ない得るものとする。②③の両者はどちらが費用的に安く上るか比較検討してみる必要がある。能力の設定の仕方によってアウトプットがかなり変わる事を考えると、かなり有効な手段である。

#### 4.5.3 計画に対する検討の為のシミュレーション

計画案評価のため直接シミュレーションを利用しようとするれば、代替案に対する費用の見積りが必要な事は言うまでもなく、滞船に対する損失、オペレーション費用など推計の困難なものを含んでおり、実際の利用に際して十分な解析が必要であるが、計画の評価に滞船状況を解析する事が必要である場合には、その解析のために以下のような手順が必要となる。

- ① インプットデータの推計
- ② 代替案の設定
- ③ オペレーションの設定

この問題については、本資料では十分な考察を行っていないため以後の研究にゆずる事とする。

#### 4.6 適用例

現象解析システムに対する事例として、ある港湾における滞船現象を求めた。資料151で発表したインプットデータを用いたが、LPGアスファルトに対するインプットデータは不十分であるとして除外し、船種を①重油、②揮発油、③燃料油の3種とした。LPGアスファルトと他の油種との競合バースは2バースであり、全バースは19バースであること、またこの2バースは他の3種とも競合状態にあるため、この誤差は少ないと考えられる。1バースの平均長は38.4mであり、図2.1から2バースを占有する船舶が存在する事が明らかであるが、バース占有長に対する考察は今回は除外して、19バースの定長バースとして取扱った。また、平均水深は8mであり図2.1から吃水に対しては安全と考えられるが、実際の水深には20mのバースも有るから、今後の考察が必要である。今回は、1特性のみの導入を行なったシミュレーションであるため、有効バースは19バースとして取扱う事とする。

また、船種は上記の3種としたから、前節で述べたように、各分類種目ごとの平均荷役能力の想定が必要となったが、前述のごとく各製品量を求め、各バースの重み付きの平均を分類種目の荷役能力とした。更に、石油製品積出機橋では、機橋上の積出パイプと、荷役ポンプが1対1に対応していないため、ポンプが数バースに競合している場合が生じていた。この場合には、競合するバース数で上述のようにして求めた分類種目の荷役能力を割り、実情に近いバースの分類種目ごとの積出能力を算定した。以上の操作により求めたシミュレーションモデルのインプットデータを表4.11に示した。乱数の初

期値に変更を加えて終了隻数5,000隻のケースを3ケースランさせた。シミュレーション結果は表4.12に示した。

表 4.11 事例のインプットデータ  
( $f_{ij}$  と  $p_{ij}$ )

バース 番 号	$f_{ij}$			$p_{ij}$		
	重油	揮発油	燃料油	重油	揮発油	燃料油
1	0	1	1	0	79.2	151.8
2	0	1	1	0	79.2	151.8
3	0	1	1	0	31.3	127.3
4	0	1	1	0	31.3	127.3
5	1	1	1	25	121.2	151.8
6	1	1	1	25	121.2	151.8
7	1	1	1	210	242.4	303.6
8	1	1	1	210	207.2	254.5
9	1	1	1	285	242.4	303.6
10	1	0	0	285	0	0
11	1	0	0	285	0	0
12	1	0	0	285	0	0
13	1	0	0	285	0	0
14	1	1	1	285	42.5	24.5
15	1	1	1	285	42.5	24.5
16	1	0	0	285	0	0
17	1	0	0	285	0	0
18	1	0	0	300	0	0
19	1	0	0	300	0	0

表 4.12 平均待ち時間 ( $w_a$ )

	重油	揮発油	燃料油
1	0	0	0.073
2	0	0.166	0.070
3	0	0.257	0.160

## 5. 結果の考察と問題点

### 5.1 概説

本資料では、港湾の機能的な関連を追求する港湾計画システムの一連の研究の一環として、石油製品積出バースの特性を解析するシミュレーションモデルとして、製品の種類の相違に着目したモデルを紹介し、その利用の仕方を述べた。第2章においては、港湾活動の機能的な関連を把握するために、船舶特性・埠頭特性が重要な意味を持つ事を示し、滞船現象の解析のためには、これら

特性の相互の関連を追求する事が重要である事を述べた。また、第3章では、この特性を取り入れた待ち行列理論における従来の研究に対する考察を行ない、シミュレーションモデルの必要性について述べた。第4章では、シミュレーションモデルの作成と利用方法を示し、実例を掲げて解析を行なった。この実例をとおして、滞船現象の解析のためには、船舶・埠頭のそれぞれ1つずつの特性の導入では不十分であり、他の特性を導入する必要性が明らかとなった。したがって、本章では、本シミュレーションモデルにおける不十分な点を指摘し、合理的な機能関連を捉える1ステップとして、今後の研究方向を示す事とする。

## 5.2 シミュレーションモデルの問題点

本シミュレーションモデルで、石油製品積出バースの滞船現象を解析する時、不十分な点を示すとつぎのとおりである。

① 船舶特性・埠頭特性それぞれ1つの特性として、製品の種類を導入したが、第2章で述べたように、その他の特性として船席の問題、実吃水の問題、オペレーションの問題等があり、第4章の実例によって明らかなようにこれらの取扱い方が滞船現象に強く関連してくる。

② 時間的な変化に対する考慮が払われていない。つまり、資料151で述べたとおり、インプットとなるタンカーの到着時間間隔は1日のパターンをもっており、このパターンの違いが滞船現象に大きく影響すると考えられるが、これに対する考察は行なっていない。

③ 定常解に対する取扱いしかなされておらず、滞船現象の過渡的な現象の把握ができない。このため、計画設計に利用する時に安全率に対する検討を行なう事ができない、等である。以上の検討から、今後の研究方向としてはつぎのものを考えている。

① 船席に対する取扱いを組み込みシミュレーションモデルを整備する方向。

② 一般的に拡張して、滞船現象に影響を与える要因の分析を行なう方向。

③ パターンに着目した滞船現象を捉えるモデルを開発する方向。

④ 計画システムの整備を行なう方向。  
等である。

## 5.3 おわりに

本論文作成にあたり本間鶴千代氏の待ち行列理論およびHarold Gumbel氏の論文より引用を行なった、ここに感謝の意を表す。

(1973年4月4日受付)

## 参 考 文 献

- 1) 笹嶋・工藤・中井；石油製品積出しバースの特性，港研資料151(1972)
- 2) 本間鶴千代；待ち行列の理論，理工学社，1966年3月
- 3) Harold Gumbel；Waiting Lines With Heterogeneous Servers, JORSA, vol.8, No.4, PP.504-511, 1960
- 4) 運輸省港湾局；埠頭標準能力調査報告書(内覧編)，S423
- 5) 片山・降旗・本・早藤；船舶諸元の相互関係，港研資料101(1970)
- 6) B.W.Lindgren；Statistical Theory, The Macmillan Company, 1962, PP.325-332
- 7) 三根久；オペレーションズ・リサーチ(下巻)，朝倉書店，S44.11, PP69-83
- 8) 津田孝夫；モンテカルロ法とシミュレーション，培風館，S44.6
- 9) 久保・工藤；着岸船舶の実吃水についての調査，港研資料144(1972)
- 10) 日本港湾協会；港湾構造物設計基準，S45.4

港湾技研資料 No.162

1973・6

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発行所 運輸省港湾技術研究所  
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所 日青工業株式会社