

港 湾 技 研 資 料

TECHNICAL NOTE OF
PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

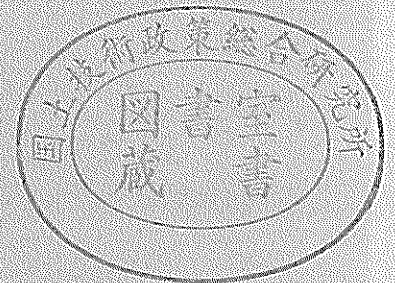
No. 33 November 1967

衝 撃 荷 重 の 測 定 に つ い て

—減衰振動系の衝撃応答特性— ……合 田 良 実

1 9 6 7 年 1 1 月

運 輸 省 港 湾 技 術 研 究 所



衝撃荷重の測定について

—減衰振動系の衝撃応答特性—

合 田 良 実

衝撃荷重の測定について

—減衰振動系の衝撃応答特性—

目 次

要 旨	5
1. ま え が き	5
2. 測定系の一般的性質	6
2.1. 測定系の構成	6
2.2. 1自由度振動系による測定系のモデル化	6
2.3. 周期的外力に対する応答特性	9
3. 衝撃応答の計算	10
3.1. Laplace 変換による解法	10
3.2. 力積比例領域における解	12
4. 各種衝撃パルスに対する応答特性および衝撃応答の一般的性質	13
5. 2段振動系の衝撃応答特性	15
6. 衝撃荷重の測定における二、三の問題点	17
6.1. 固有振動数および減衰定数の選択	17
6.2. 取付部材の剛性の影響	18
7. あ と が き	19
参 考 文 献	20
主 要 記 号 表	20
付 録： 各種衝撃パルスに対する応答関数， 応答波形および応答スペクトル	21
(1) 矩 形 パ ル ス	22
(2) 前傾三角パルス	24
(3) 対称三角パルス	26
(4) 後傾三角パルス	28
(5) 正 弦 波 パ ル ス	30
(6) 逆余弦パルス	32
(7) 減衰正弦波 ($\lambda=2$)	34
(8) 減衰正弦波 ($\lambda=0.1$)	36
(9) 矩形パルス —2段振動系—	38
(10) 正弦波パルス —2段振動系—	40

Shock Response Characteristics of Damped Linear Oscillators with Application for the Shock Measurement

by Yoshimi GODA*

Synopsis

The effect of impulsive loads on structures is different from that of statical loads. The measurement of and the stress analysis associated with impulsive loads must be carried out with due consideration for shock response characteristics. The responses of a single-degree-of-freedom oscillating system with linear damping to pulse excitations are calculated in this note as a model of a measurement system or a structure subject to impulsive loads. The number of pulse excitation functions treated are eight: rectangular, triangular (vertical rise, symmetric, and vertical fall), sine, versed cosine, and two exponential-sine pulses. The responses of a two-step oscillator, which represents the combination of an undamped pick-up and a galvanometer with good damping, to rectangular and sine pulse excitations are calculated also. All the results are presented in ten diagrams of shock response spectra, which show the variation of displacement ratio against the frequency ratio with the damping ratio as a parameter.

The shock response is characterized with the absence of resonant oscillation; the maximum displacement of oscillator under an impulsive load is less than twice the statical displacement under the statical load having a magnitude of the peak value of the impulsive load. If the duration time of shock is shorter than about three-tenth of the natural period of oscillating system, the response is the free oscillation with an amplitude proportional to the impact of shock, without being affected by the shape of shock pulse.

The damping ratio of pick-up is required to be as large as possible for better reproduction of shock profile. When the damping ratio of pick-up is small, the use of a low-pass filter or a galvanometer with the natural frequency being about one-half of the pick-up is recommended for the suppression of free oscillations of pick-up induced by the shock. The problem of mounting vibration is discussed also with recommendations of large weight for mounting as well as of high natural frequency.

* Chief of Wave Laboratory, Hydraulics Division

衝撃荷重の測定について

—減衰振動系の衝撃応答特性—

合 田 良 実*

要 旨

衝撃荷重の測定,あるいは衝撃荷重の作用を受ける構造物の応力解析などでは,衝撃に対する応答を考えなければならない。このための検討資料として,1自由度減衰振動系を取り上げ,これに矩形,三角形(前傾,対称,後傾),正弦波形,逆余弦波形,減衰正弦波形などの衝撃パルスが作用したときの応答波形を求め,これを各種の振動数比,減衰定数に対して計算して,この結果を10枚の衝撃応答スペクトル図としてとりまとめた。

衝撃応答の一つの特徴は,定常強制振動のような共振を生じないことで,衝撃荷重による最大変位はその荷重が静的に作用したときの2倍以下である。また衝撃荷重の作用時間が振動系の固有周期の約0.3倍以下であれば,応答波形は衝撃荷重の力積に比例した振幅の自由振動となり,衝撃波形そのものには関係しなくなる。さらに,衝撃荷重の測定においては,ピックアップの減衰定数ができるだけ大きい方が望ましく,場合によってはピックアップの $\frac{1}{3}$ 程度の低い振動数のガルバノメーターを用いた方がよいこと,などの結果が示された。また,ピックアップの取付部材は,それ自身の固有振動数を高めるばかりでなくその重量も大きく設計しなければ,衝撃荷重の測定値に悪影響があることも示されている。

1. ま え が き

構造物にとって衝撃荷重^{注)}はやっかいな相手である。静荷重のように一定の力が継続して働くのではなく,短かい時間に急速に変化する力が働くので,その力の効果がどの程度であるか判断に迷うことも多い。また,衝撃荷重の大きさそのものが,はっきりしないことも珍しくない。港湾の分野においても,防波堤に働く衝撃砕波圧や,船舶の接岸力など衝撃荷重の問題は少なくない。

実験においてこうした衝撃荷重を測定するには,応答性の良い計器を使わなければならない。これには,測定系の固有振動数が十分高く,かつその減衰定数が適当であることが必要である。しかし,固有振動数が何サイクル以上であれば十分なのか,また減衰定数がどの程度であれば適当なのかを解説した文献はあまり見当らず,実験のたびに計器の選定に悩むことも少なくない。そこで,衝撃荷重に対する測定系の応答の問題を解説する意味で,本資料をとりまとめた。

衝撃荷重に対する応答の問題は,過渡領域における振

動として考えなければならず,一般の強制振動のような定常状態の解とは別個の取扱いが必要である。減衰力が働かない1自由度振動系については,文献1)に各種の波形の衝撃荷重に対する応答がまとめられており,衝撃応答に関する良い参考書となっている。しかし,衝撃荷重の測定の問題では,ガルバノメーターのように減衰を効かせた振動系も考えなければならず,非減衰振動系の応答だけでは不十分なことも多い。そこで,本資料では減衰力の働く1自由度振動系について衝撃応答の計算を行なうことにした。波形モデルとして取り上げたのは,矩形,三角形,正弦波形,減衰正弦波形など8種類で,衝撃波形の種類としてはまず十分と思われる。

この資料では特に測定系の応答について解説したが,ここに示した計算結果はそのまま衝撃荷重に対する構造物(1自由度系で近似)の応答特性として利用することができる。衝撃荷重の大きさ,あるいはその力積が分かっている場合は,衝撃応答係数を用いて衝撃の有効値あるいは等価換算荷重を求め得ることをつけ加えておきたい。

* 水工部波浪研究室長

注) 本資料では,「衝撃荷重」を衝撃的に作用する力および圧力の総称として使用する。

2. 測定系の一般的性質

2.1. 測定系の構成

衝撃荷重の測定では、一般の動的測定と同様にピックアップ、増幅器、および記録器を組み合わせて使用するのが普通である。

ピックアップは、対象とする荷重によって圧力計、張力計、圧縮力計などと呼び分けられる。しかし、本質的にはいずれも作用外力を受感部の変位に変え、これをさらに電圧等の電気的量に変換するもので、荷重変換器と総称されることもある。変換の方法としては、ストレインゲージを利用するものが最も多いが、問題の性質によっては磁歪効果²⁾、ピエゾ効果などを応用したピックアップも使用する。また、衝撃荷重を受ける部材にストレインゲージを貼布する場合は、部材そのものが衝撃荷重に対するピックアップとも考えられる。

なお力の測定原理としては、作用外力に比例した既知の力を与えて受感部の変位を常に0に保つ平衡型の荷重計³⁾もあるが、衝撃荷重のように荷重変化が速いものに対しては追従がむづかしく、実用的でない。

ピックアップからの電気的出力は、そのままでは記録器を作動させるのに小さ過ぎることが多く、増幅器を通じて十分な出力に増幅するのが普通である。ストレインゲージ型のピックアップの場合は、各種の動歪増幅器が市販されているので、適宜使用することができるが、その他の型のピックアップに対しては、専用の増幅器を製作しなければならない。

記録器としては、ペン書オシログラフ、電磁オシログラフ(現像式および直記式)、オシロスコープ、磁気テープ等が使用される。後の2種類は機械的な振動素子を持たないので、その周波数特性は電気的な問題であり、10,000c/s程度までの現象を忠実に記録させることも可能である。しかし、ペン書および電磁オシログラフの両者は機械的振動子であるガルバノメーターを使用しているので、ある程度以上速い現象には追従することができず、記録にあたっては適当な固有振動数のガルバノメーターを使用しなければならない。通常のペン書オシログラフでは、固有振動数が20~100c/s、電磁オシログラフでは50~2,000c/s程度のガルバノメーターが使われる。使用に際しては、指定の制動抵抗を入れて減衰を効かせ、周波数特性を良くするのが標準である。

衝撃荷重の測定にあたっては、以上のピックアップ、増幅器、および記録器の周波数特性のマッチしたものを

組み合わせなければならない。衝撃荷重の特性に応じ、どのような組み合わせを用いるのが適当であるかを検討するのが、本資料の主たる目的である。

2.2. 1自由度振動系によるピックアップのモデル化

荷重測定用のピックアップでは、外力を受けて変位するバネの部分を持つのが普通である。図-1のリング、図-2のビームがこれで、この部分にストレインゲージを貼りつけたりしてその変位を検出する。ピックアップの設計では、このバネの変位量 x と発生応力 P が比例する部分を使うようにしている。この比例係数 $k=P/x$ がバネ定数で、kg/cmなどの単位を持つ。外力が静荷重のときは、外力と内部応力 P とが釣合を保ち、そのときの変位から外力の大きさが直ちに測定される。しかし、外力が時間的に変化する場合は、ピックアップのバネ系の慣性力のために、変位量 x は必ずしもそのときの外力に比例しない。このために、測定系の動的応答特性が問題にされるのである。

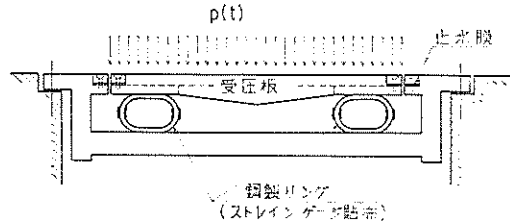


図-1 リング式全波圧計(光易⁴⁾による)
Fig. 1 Total Wave Pressure Transducer of Ring Type (after Mitsuyasu)

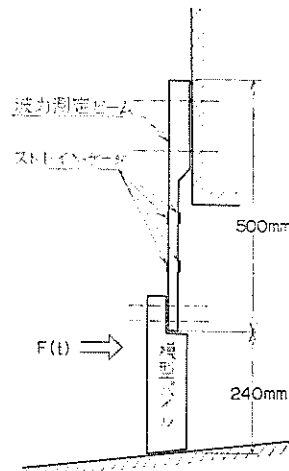


図-2 ビーム式波力計(合田ほか⁵⁾による)
Fig. 2 Wave Force Transducer of Beam Type (after Goda et. al.)

上述のように、ピックアップで直接検出されているものは変位量であり、これが電気的変換によって記録紙上の変位などとして測定の対象となる。実際の操作としては、静荷重による検定を行なって最終出力（たとえば記録紙上の変位）に対する検定直線を求め、これを使って測定記録を力に換算する。従って、以下においては力そのものではなく、ピックアップのバネ系の変位量あるいはガルバノメーターの変位角等の変位について考える。

図-1, 2 などの例でも、バネの部分および力をここまで伝達する受圧板などは可動部分であり、この質量を m とすればバネの運動により $m\ddot{x}$ の慣性力が逆にバネに作用する。またバネの内部摩擦などによる減衰力も作用する（この減衰力は変位速度に比例すると見なせることが多い）。従って、時間的に変化する力がバネ系に働くときの応答は、次の運動方程式の解として求められる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 m は可動部分の質量、 c は減衰力の比例係数、 k はバネ定数で、 $\text{kg}\cdot\text{cm}\cdot\text{sec}$ 系ではそれぞれ $\text{kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}$, $\text{kg}\cdot\text{sec}/\text{cm}$, kg/cm の単位を持つ。また $F(t)$ は外力である。ここで特に注意したいのは、 m が質量であることで、可動部分の重量（これが実際に測定する量である）が W であれば

$$m = W/g \quad (g = 980\text{cm}/\text{sec}^2) \dots\dots\dots(2)$$

で与えられる。また、図-2のようにピックアップが模型構造物をぶら下げているときは、これも可動部分であるからその重量が加算される。さらに図-1の波圧計の例では、受圧板が一部水没した状態で測定するから、水の附加質量も考えなければならない。（一般に波圧計の固有振動数が水中で減少するのは、受圧板前面の水の附加質量が加えられて、上式の m が増すためである。）

なお、減衰力係数 c はその絶対値よりも臨界減衰係数との相対値が重要なので、直接測定する必要はない。バネ定数 k は、静荷重による変位量を直接測定するか、あるいは部材のたわみ計算などから算定する。すなわち、荷重 F が作用したときの作用点の変位が δ_0 と計算されれば、等価バネ定数は

$$k = F/\delta_0 \dots\dots\dots(3)$$

で見積られる。もっとも、このバネ定数は系の固有振動数を推定するために必要なので、振動テストで固有振動数が求められたときは、後述の式 (5.2) で逆算できる。

ガルバノメーターの場合には、変位量 x の代りに回転

角 θ について次の運動方程式を解けばよい⁶⁾。

$$I\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + C\theta = P(t) \dots\dots\dots(4)$$

ただし、 I は振動子の慣性モーメント、 K は制動係数、 C は弾性係数、であり、 $P(t)$ はガルバノメーターに作用する電磁力である。式 (4) は式 (1) と同形の振動方程式であるから、以下式 (1) について検討を進める。

式 (1) の各項は力を表わしているが、振動の問題ではこれを次のように加速度表示に書き換えるのが普通である。

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \omega_n^2\xi(t) \dots\dots\dots(5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \quad \omega_n = \sqrt{k/m} &: \text{固有角振動数} \\ T_n = 2\pi/\omega_n &: \text{固有周期} \\ \beta = c/(2\sqrt{km}) &: \text{減衰定数} \end{aligned} \right\} (5.2)$$

$$\xi(t) = F(t)/k \dots\dots\dots(5.3)$$

この $\xi(t)$ は、外力を変位量に換算したものである。もし $F(t)$ が極めてゆっくり変化する力であれば、 $x(t) = \xi(t)$ となる。 $\xi(t)$ は x と同一の定数 k で力に換算されているから、 $\xi(t)$ に対して $x(t)$ がどのように追随するかを調べれば、これがそのまま外力に対するピックアップの応答を示すことになる。この意味で、以下 $\xi(t)$ を入力関数、 $x(t)$ を応答関数と呼んでおく。

まず式 (5) で外力が 0 の場合、すなわち $\xi(t) = 0$ の場合には、バネ系は次式の減衰自由振動を行なう^{注)}。

$$x = e^{-\beta\omega_n t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \dots\dots\dots(6.1)$$

注)

式 (5.1) で $\xi(t) = 0$ の場合の解として $x = e^{\mu t}$ の形のものを仮定して、式 (5.1) に代入すると、

$$e^{\mu t} [\mu^2 + 2\beta\omega_n\mu + \omega_n^2] = 0 \quad (i)$$

これから μ の値として、次の 2 根が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 = -\beta\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\beta^2} \\ \mu_2 = -\beta\omega_n - i\omega_n\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \right\} (ii)$$

式 (5.1) は x の線型 2 階微分方程式であるから、上記の μ の 2 根に対応する 2 つの一般解を持つ。従って、複素数の任意定数を C, D として、一般解は

$$x = Ce^{\mu_1 t} + De^{\mu_2 t} = e^{-\beta\omega_n t} [Ce^{i\omega_n\sqrt{1-\beta^2} t} + De^{-i\omega_n\sqrt{1-\beta^2} t}] \quad (iii)$$

今 $1-\beta^2 > 0$ の場合のみを考え、上式は

$$x = e^{-\beta\omega_n t} [(C+D) \cos \omega_n\sqrt{1-\beta^2} t + i(C-D) \sin \omega_n\sqrt{1-\beta^2} t] \quad (iv)$$

従って、 $A = -i(C-D)$, $B = C+D$ とおくことによって、式 (6) の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに, } \omega &= \omega_n \sqrt{1-\beta^2} && : \text{減衰角振動数} \\ T &= 2\pi/\omega = T_n/\sqrt{1-\beta^2} && : \text{減衰振動周期} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.2)$$

ただし、式(6)は $\beta < 1$ の時で、 $\beta \geq 1$ では振動することなしに減衰して釣合の位置に近づくが、實際上このような過減衰の状態は稀である。従って、本資料では $\beta < 1$ の場合のみを取り扱うことにする。なお、式中の A, B は初期条件によって定まる値である。

ここで、式(6.1)の x が極大または極小となる時刻を求めため式を変形して、

$$\left. \begin{aligned} x &= A_0 e^{-\beta \omega_n t} \sin(\omega t + \varepsilon_0) \\ \text{ただし, } A_0 &= \sqrt{A^2 + B^2}, \varepsilon_0 = \tan^{-1}(B/A) \end{aligned} \right\} (7)$$

と表わし、この微係数をとると、

$$\dot{x} = A_0 e^{-\beta \omega_n t} [-\beta \omega_n \sin(\omega t + \varepsilon_0) + \omega \cos(\omega t + \varepsilon_0)]$$

$\dot{x} = 0$ となるのは、上式の [] 内が 0 となる時、すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \tan(\omega t + \varepsilon_0) &= \sqrt{1-\beta^2}/\beta \\ \text{または} \\ t &= T \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(\sqrt{1-\beta^2}/\beta) - \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \right] \end{aligned} \right\} (8)$$

($n=0, 1, 2, 3, \dots$)

のときである。従って、極大と極小は半周期間隔で現われる。今、隣り合う 2 つの極大値の比を求めると、

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{-\beta \omega_n T} = e^{-2\pi\beta/\sqrt{1-\beta^2}} \dots\dots\dots(9)$$

となり、一定の比率となる。すなわち、式(6.1)の減衰自由振動は、その振幅が一定の減衰比で減少する特徴がある。

一般に減衰自由振動は、ピックアップを鋭く叩いた後などに生ずるので、これを利用して測定系の固有振動数および減衰定数を求めることができる。ピックアップに衝撃を与えると、たとえば 図-3 のような記録が得られる。最初の部分は高周波振動が見られることがあるのでこれを除き、振動波形が滑らかになったところで、順にその全振幅を読み、 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ とする。これを片対数方眼紙にプロットして直線に乗れば、式(6)の減衰自由振動をしているのであるから、次式で対数減衰率 δ を求める。

$$\delta = \log_e \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{N} \log_e \frac{x_0}{x_N} = \frac{2.303}{N} \log_{10} \frac{x_0}{x_N} \dots(10)$$

式(9)と(10)を比べてみれば明らかなように、この対数減衰率 δ と減衰定数 β との間には次のような関係がある。

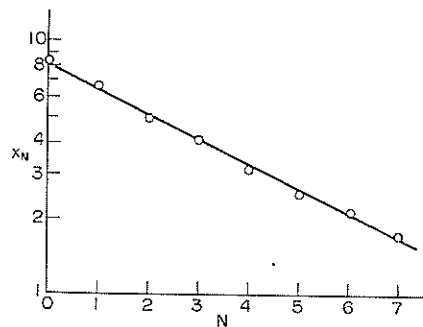
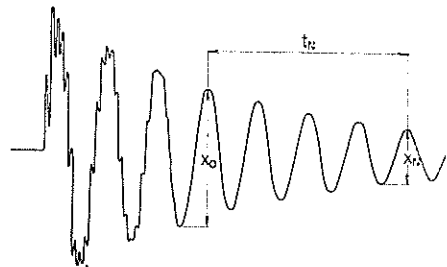


図-3 振動テストの記録および解析例
Fig. 3 Example of Vibration Test and Its Analysis

注)

式(5.1)の解は、常微分方程式の教科書に述べられているように、 $\xi(t)=0$ のときの一般解、式(6)と、式(5.1)を満足する一つの特解との和として与えられる。そこで特解として

$$x = C_1 \sin \frac{\pi}{\tau} t + C_2 \cos \frac{\pi}{\tau} t \dots\dots\dots(v)$$

を仮定してこれを原式に代入すると、 C_1 および C_2 に関する次のような連立方程式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 C_1 - 2\beta \frac{\pi \omega_n}{\tau} C_2 + \omega_n^2 C_1 &= \omega_n^2 \xi_p \\ -\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 C_2 + 2\beta \frac{\pi \omega_n}{\tau} C_1 + \omega_n^2 C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(vi)$$

従って、これを解くと、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2\right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2} \xi_p \\ C_2 &= \frac{2\beta \frac{\pi}{\omega_n \tau}}{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2\right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2} \xi_p \end{aligned} \right\} (vii)$$

が得られるから、これを式(v)に代入して整理すれば、式(15)の結果が得られる。

$$\delta = 2\pi\beta/\sqrt{1-\beta^2} \dots\dots\dots(11)$$

これから減衰定数が次式で求められる。

$$\beta = \frac{\delta/2\pi}{\sqrt{1+(\delta/2\pi)^2}} \approx \frac{\delta}{2\pi} \left(1 - \frac{\delta^2}{8\pi^2}\right) \dots\dots\dots(12)$$

一方、固有周期（非減衰） T_n は、 N 振動の時間 τ 隔 t_N から、

$$T_n = \frac{t_N}{N} \sqrt{1-\beta^2} \dots\dots\dots(13)$$

で計算できる。固有振動数 f_n はこの逆数 $1/T_n$ である。

2.3 周期的外力に対する応答特性

次に外力が周期的に変化する場合として、

$$\xi(t) = \xi_p \sin \frac{\pi}{\tau} t, \quad t \geq 0 \dots\dots\dots(14)$$

の正弦力を考える。ただし τ は外力の半周期である。このときの式(5)の解は、次のように自由振動と強制振動の和として与えられる^註。

$$x = e^{-\beta\omega t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) + \frac{\xi_p}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{T_n}{2\tau}\right)^2\right]^2 + \beta^2 \left(\frac{T_n}{\tau}\right)^2}} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t - \gamma\right) \dots\dots\dots(15.1)$$

ここに、

$$\gamma = \tan^{-1} \left[\frac{\beta T_n / \tau}{1 - (T_n / 2\tau)^2} \right] \dots\dots\dots(15.2)$$

式(14)の外力が長時間続く場合は、式(15.1)の第1項の自由振動は時間とともに減衰してしまい、第2項の強制振動のみが残ることになる。この強制振動は、外力と位相角 γ だけ遅れ、その振幅は

$$\frac{x_{\max}}{\xi_p} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{T_n}{2\tau}\right)^2\right]^2 + \beta^2 \left(\frac{T_n}{\tau}\right)^2}} \dots\dots\dots(16)$$

の比率で外力と異なる。この比率は τ/T_n と β との関数で、図-4のような値をとる。もし減衰力が0のときは $\tau/T_n = 0.5$ で共振を起して x_{\max} は無限大となる。このため、一般にこの種の図は共振曲線と呼ばれている。

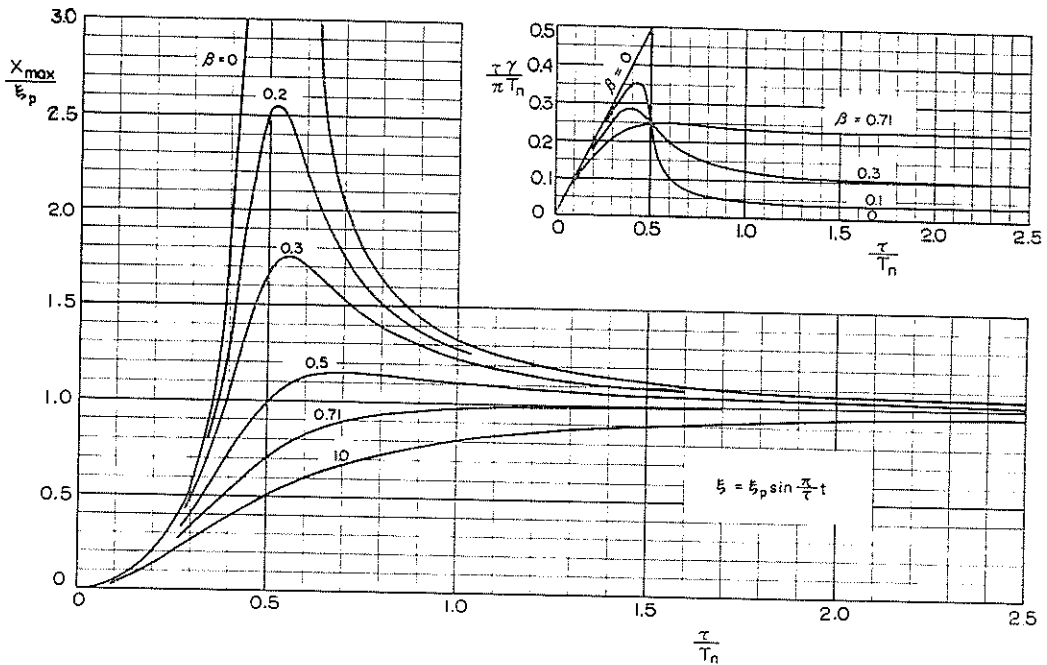


図-4 正弦力に対する共振曲線
Fig. 4 Resonance Curves of Linear Oscillator

計測器が忠実に外力を記録するためには、式(16)の比率が1に等しく、かつ時間の遅れ $\gamma\tau/\pi$ が外力の周期に無関係で一定となることが望まれる。特に位相については、位相角 γ よりも時間遅れ $\gamma\tau/\pi$ が問題である。もし

これが一定であれば、外力が異なる周期の正弦波の和として表わされるときでも、各正弦波に対する応答波形の時間遅れが同一となり、合成波形も外力と相似な波形を示すことになる。このような観点から、計測器において

は減衰定数を $\beta \approx 0.7$ にして感度一様範囲をできるだけ広げ、かつ時間の遅れが一定になるように設計するのが普通である。

次に外力が作用した直後のことを調べるには、式(15)の積分定数 A, B を初期条件を満足するように定めればよい。最も一般的な初期条件は、外力が作用するまで受感部が静止している、すなわち $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ であるから、この条件を満足する A, B の値を求めてその結果を整理すると、

$$x = \frac{\xi_p}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{T_n}{2\tau}\right)^2\right]^2 + \beta^2 \left(\frac{T_n}{\tau}\right)^2}} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{\tau}t - \gamma\right) - \frac{T_n}{2\tau\sqrt{1 - \beta^2}} e^{-\beta\omega_n t} \sin(\omega t - \delta) \right\} \quad (17.1)$$

ここに、

$$\delta = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \left(\frac{T_n}{2\tau}\right)^2 - 2\beta^2} \right] \quad (17.2)$$

となる。この結果から、第1動の最大振幅 x_1 と ξ_p と

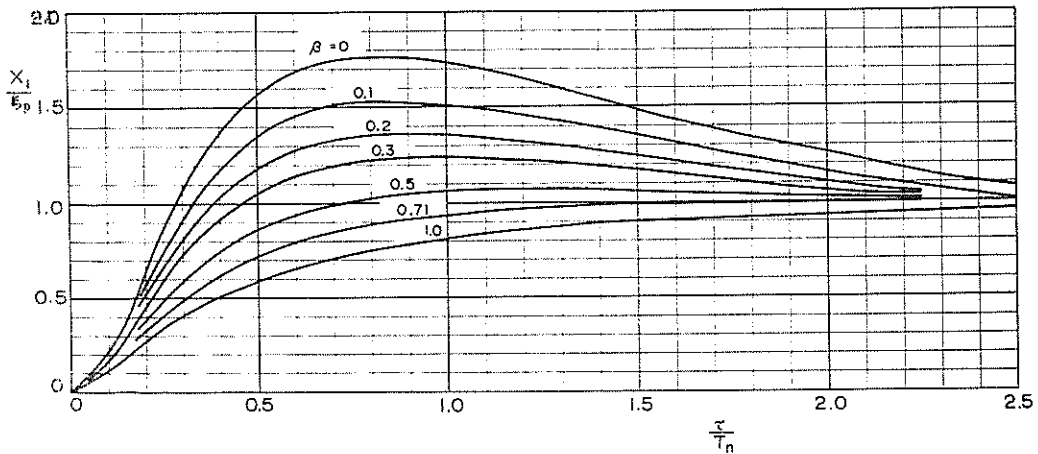


図-5 正弦力による第1動の最大振幅
Fig. 5 Amplitude of First Movement of Linear Oscillator under Sine Force Excitation

の比率を計算したのが図-5である。図-4の共振曲線とはかなり傾向が異なり、 $\tau = T/2$ での共振現象は生じていない。このように、外力が作用した直後の振動は一つの過渡現象であるため、定常状態における様子とはかなり異なるものである。もっとも、式(17)を第2, 第3動と計算してみれば明らかなように、自由振動項が次第に減衰し、図-4の結果に近づいていく。付図-A. 8は外力が減衰正弦関数の場合で、式(14)の場合とはやや異なるが、 $\tau = 0.5T_n$ のときに振幅が次第に増幅される ($\beta = 0$) 様子がうかがえる。

3. 衝撃応答の計算

3.1. Laplace 変換による解法

次に、外力が0から τ の時間だけ作用し、その後は $F(t) = 0$ となる衝撃荷重の場合を考える。この場合の式(5.1)の解 $x(t)$ を求めるには、いろいろの方法がある。

たとえば、図-6の正弦波パルスについては、入力関数 $\xi(t)$ が $t=0$ から始まる正弦振動と、 $t=\tau$ から始まる同振幅の正弦振動の和として表わすことができる。従っ

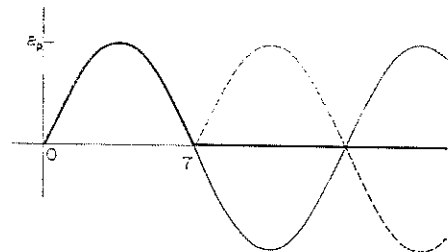


図-6 正弦波パルスの組み立て
Fig. 6 Construction of Half-cycle Sine Pulse

て、正弦波パルスに対する応答関数 $x(t)$ は、それぞれの正弦振動に対する解の重ね合せとして表わされる。すなわち、式(17)の結果を用い、

$$\left. \begin{aligned}
 0 \leq t < \tau \\
 x = x_1(t) \quad \dots\dots \text{式(17)と同じ} \\
 t \geq \tau \\
 x = x_1(t) + x_1(t-\tau) \\
 = \frac{-\xi_p T_n / 2\tau \sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{T_n}{2\tau}\right)^2\right]^2 + \beta^2 \left(\frac{T_n}{\tau}\right)^2}} \\
 \times \{e^{-\beta\omega_n t} \sin(\omega t - \delta) + e^{-\beta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau) - \delta]\} \\
 \dots\dots\dots(18)
 \end{aligned} \right\}$$

このように、入力関数を τ だけ位相を遅らせた連続関数の重ね合せとして表わし、それぞれの応答関数を位相を考えて重ね合わせるやり方は、衝撃応答の計算における常用手段で、式(5.1)の振動方程式が線型であることを利用した解法である。定常振動に対して初期条件を満足する解が求められているときは、このような解の重ね合せから衝撃パルスに対する応答を求めることができる。

また、入力関数 $\xi(t)$ が複雑で単純な関数で表わせないときは、入力関数を多数の矩形パルスに分割して考える Duhamel の積分や、位相平面を使う図式解法などがある。

しかし、入力関数が解析関数で表示でき、しかも初期条件が $x(0)=\dot{x}(0)=0$ の静止条件のときは、次例に示す Laplace 変換⁹⁾を用いるのが便利である。これは微分方程式の未知関数 $x(t)$ に対して次のような積分 $X(s)$ [これを $x(t)$ の Laplace 変換という]を考え、微分方程式をこの $X(s)$ に対して書き換えてその解を求め、逆変換によって $x(t)$ を求める方法である。

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここで s は複素数である。式(19)の積分およびその逆変換は、通常関数に対してあらかじめ求められて Laplace 変換表⁹⁾として記載されているので、実際に積分を行なう必要はない。

式(5.1)の振動方程式に対して Laplace 変換を行なうと、

$$\begin{aligned}
 [s^2 X(s) - x(0)s - \dot{x}(0)] + 2\beta\omega_n [sX(s) - x(0)] \\
 + \omega_n^2 X(s) = \omega_n^2 G(s) \quad \dots\dots\dots(20)
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $G(s)$ は $\xi(t)$ の Laplace 変換である。式(20)を見れば明らかなように、これは $X(s)$ に対する1次式であるから、 $x(t)$ の Laplace 変換 $X(s)$ は直ちに書き下されて、

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\beta\omega_n s + \omega_n^2} \\
 &\times [\omega_n^2 G(s) + (s + 2\beta\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)] \quad \dots(21)
 \end{aligned}$$

と求められる。このように Laplace 変換による解法では、初期条件 $x(0), \dot{x}(0)$ が自動的に解の中に繰り入れられる特徴がある。衝撃応答の問題では、衝撃の作用前は静止しているのが一般的な初期条件であるから、上式では、 $G(s)$ の項のみを考えればよい。後は、Laplace 変換表に記載されている関数の和の形に式(21)の右辺を変形(通分などの代数計算である)しておいて、それぞれの逆変換を加え合わせればよい。

この例として矩形パルスに対する応答関数の計算を示そう。この場合の入力関数 $\xi(t)$ は次式で表わされる。

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_p & 0 \leq t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots(22)$$

この入力関数は、図-7のように $t=0$ から始まる ξ_p の矩形ステップと、 $t=\tau$ から始まる $-\xi_p$ の矩形ステップの組み合わせとして考えることができる。

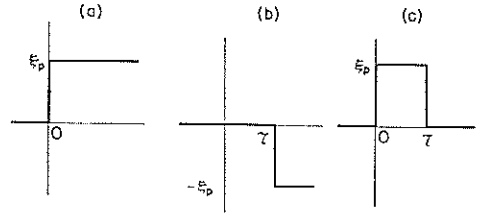


図-7 矩形パルスの組み立て
Fig. 7 Construction of Rectangular Pulse

まず図-7(a)の矩形ステップに対する Laplace 変換は次式で与えられるから、

$$G(s) = \xi_p \frac{1}{s} \quad \dots\dots\dots(23)$$

式(21)により $x(t)$ の Laplace 変換 $X(s)$ が次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{\omega_n^2 \xi_p}{(s^2 + 2\beta\omega_n s + \omega_n^2)s} \\
 &= \xi_p \left[\frac{1}{s} - \frac{s + 2\beta\omega_n}{s^2 + 2\beta\omega_n s + \omega_n^2} \right] \quad \dots\dots\dots(24)
 \end{aligned}$$

この逆変換は、文献 9) などの変換表から

$$x(t) = \xi_p - \xi_p e^{-\beta\omega_n t} \left[\cos \omega t + \frac{\beta\omega_n}{\omega} \sin \omega t \right]$$

またはこれを書き改めて、

$t \geq 0$

$$x(t) = \xi_p \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta\omega_n t} \cos(\omega t - \varepsilon) \right] \quad \dots\dots\dots(25.1)$$

ここに,

$$\varepsilon = \tan^{-1}(\beta/\sqrt{1-\beta^2}) \quad \dots\dots\dots(25.2)$$

と求められる。

この解は、図-7(a)のような瞬間的な立ち上りの衝撃荷重に対する応答を示すもので、これをいろいろの減衰定数について計算したのが図-8である。図に示されるように応答波形は $0.5T$ 程度の立ち上り時間を要し、立ち上りの後、ある程度の振動を示す。特に減衰が働かない場合 ($\beta=0$) には、応答波形の最大値は衝撃荷重の2倍に達し、その後0と2の間で振動を繰り返す。減衰が強まると応答波形の最大値と衝撃荷重の値との比は1に近づき、振動も小さくなる。この応答波形の極大、極小値およびその時刻は、次式で与えられる。

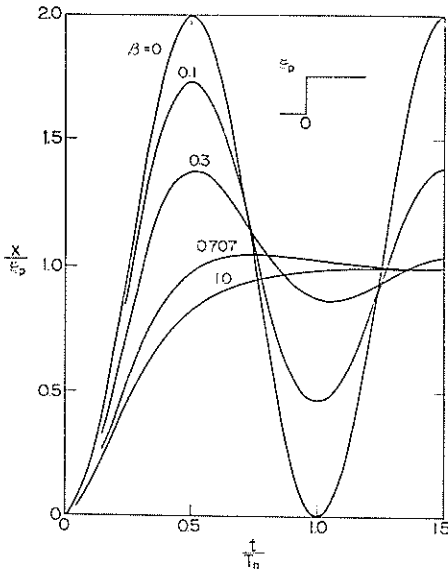


図-8 矩形ステップに対する立ち上り応答波形
Fig. 8 Time Response Curves to Rectangular Step Excitation

$$x_{\max} = \xi_p [1 + e^{-(2n+1)\pi\beta/\sqrt{1-\beta^2}}] \quad \dots\dots\dots(26.1)$$

$$x_{\min} = \xi_p [1 - e^{-2n\pi\beta/\sqrt{1-\beta^2}}] \quad \dots\dots\dots(26.2)$$

ここに,

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots$$

式(22)の矩形パルスに対する応答関数は、 $0 \leq t < \tau$ に

ついては式(25)と同一で良く、 $t \geq \tau$ については図-7の組み合わせから直ちに次のように書き表される。

$t > \tau$

$$x(t) = \frac{\xi_p}{\sqrt{1-\beta^2}} [e^{-\beta\omega_n(t-\tau)} \cos[\omega(t-\tau) - \varepsilon] - e^{-\beta\omega_n t} \cos(\omega t - \varepsilon)] \quad \dots\dots(27)$$

以上は正弦波パルスおよび矩形パルスに対する衝撃応答の計算例であるが、この他の波形の衝撃荷重についても同様な計算を行えば、それぞれの応答関数が求められる。

3.2 力積比例領域における解

次に、剛体との衝突による衝撃のように、極めて短時間に非常に大きな力が作用するけれども、その力積は一定(運動量法則による)である場合を考える。特に、式(5)で表わされる振動系の固有周期 T_n に比べて作用時間 τ が遙かに短い場合を想定する。

式(5.1)を $t=0$ から τ まで積分し、 $x(0)=\dot{x}(0)=0$ の初期条件を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(\tau) + 2\beta\omega_n x(\tau) + \omega_n^2 \int_0^\tau x dt &= \omega_n^2 I_\xi \\ \text{ただし、} \\ I_\xi &= \int_0^\tau \xi(t) dt = \frac{1}{k} \int_0^\tau F(t) dt \end{aligned} \right\} (28)$$

今、 $t=0 \sim \tau$ における平均速度および平均変位量を考えて、これを $\bar{\dot{x}}$ および \bar{x} で表わすと、上式左辺の第2、第3項は、

$$x(\tau) \approx \tau \bar{\dot{x}} \quad \text{および} \quad \int_0^\tau x dt \approx \tau \bar{x}$$

と表わすことができる。さらに、ここで $\tau \rightarrow 0$ の極限を考えると、 $\bar{\dot{x}}$ および \bar{x} は有限量であるから、左辺第2、第3項は0となり、結局 $t=0_+$ における値として、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(0_+) &= \omega_n^2 I_\xi \\ x(0_+) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

が導かれる。

従って、作用時間の極めて短い衝撃荷重が作用したときの振動系の運動は、式(29)の初期条件で動き始める式(6.1)の自由振動として考えればよい。積分常数 A 、 B は、式(29)の条件から

$$A = (\omega_n^2/\omega) I_\xi, \quad B = 0$$

と求まり、応答関数は次のように表わされる。

$$x = \frac{\omega_n^2}{\omega} I_{\xi} e^{-\beta \omega_n t} \sin \omega t \dots \dots \dots (30)$$

これは式(7)で $\varepsilon_0=0$ の場合に等しいから、その最大値は式(8)の t の値 ($n=0$) を代入して、次のように求められる。

$$x_{\max} = 2\pi K(\beta) I_{\xi} / T_n \dots \dots \dots (31.1)$$

ここに、

$$K(\beta) = \exp[-\beta \tan^{-1}(\sqrt{1-\beta^2}/\beta)] \dots \dots (31.2)$$

この $K(\beta)$ の値は、 β の増加とともに $K(0)=1.0$ から $K(1)=1/e \approx 0.368$ と次第に減少する。

式(31.1)から明らかなように、衝撃の作用時間が極めて短い場合の最大変位は衝撃荷重の力積に比例し、衝撃荷重の波形には無関係である。この意味で、このような場合を力積比例または力積応答現象と呼ぶことがある。

力積 I_{ξ} は、衝撃荷重の最大値 ξ_p と作用時間との積で表わすことができる。すなわち、

$$I_{\xi} = \alpha \xi_p \tau \dots \dots \dots (32)$$

ここで α は衝撃荷重の波形によって定まり、矩形パルスならば 1.0、正弦波パルスならば $2/\pi \approx 0.637$ 、三角パルスならば 0.5 である。この関係を式(31.1)に代入すると、最大変位 x_{\max} は、

$$x_{\max} = 2\pi \alpha K(\beta) \xi_p \tau / T_n \dots \dots \dots (33)$$

とも書き表わされる。すなわち x_{\max}/ξ_p の比は、 τ/T_n の値に比例する。矩形パルスについて式(33)による近似値と、式(27)を数値計算してその最大値を読み取った値を比べてみると、 $\beta=0$ の場合で次表のようになる。

τ/T_n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x_{\max}/ξ_p [式(27)]	0.62	1.18	1.62	1.90	2.00
x_{\max}/ξ_p [式(33)]	0.63	1.26	1.88	2.51	3.14

この表でも明らかなように、式(33)は大き目の値を与え、 $\tau/T_n=0.3$ での誤差はの場合+16%である。三角パルスの場合は、同じく $\tau/T_n=0.3$ で +10% で、衝撃波形によって式(33)の近似精度には若干の差がある。

なお、衝撃荷重の測定では測定記録からその力積を求めることも多い。力積比例領域で測定を行なう場合に、力積の測定値 I_x と I_{ξ} との関係調べてみると次のようになる。応答波形の力積として、その立ち上がりから最初に零線を切る時 ($t=\pi/\omega$) までの積分を取ることになると、式(30)から

$$I_x = \int_0^{\pi/\omega} x dt = I_{\xi} [1 + \exp(-\pi\beta/\sqrt{1-\beta^2})] \dots \dots \dots (34)$$

となり [] 内の係数だけ割増しされた値として算定されることとなる。減衰の働かない振動系 ($\beta=0$) ではこの係数が 2.0 であり、応答波形から求めた力積は真の値の 2 倍となる。従って、衝撃荷重の測定ではこうした点にも注意する必要がある。なお上式の [] 内の係数は、式(26)の矩形ステップに対する最大変位 x_{\max} の割増係数 ($n=1$) と同一である。

4. 各種の衝撃パルスに対する応答特性および衝撃応答の一般的性質

衝撃荷重に対する応答の問題を検討するためには、前章で検討した矩形パルス、正弦波パルスばかりでなく、種々の波形の衝撃パルスに対する応答を計算する必要がある。そこで、図-9に示す8種類について応答関数を求め、応答波形および応答スペクトルを計算した。この結果は一括して付録に示すとおりである。

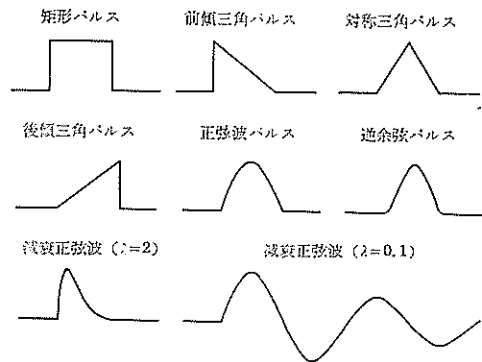


図-9 計算を行なった衝撃パルスの波形
Fig. 9 Impulsive Pulses Employed for Calculation

実際の衝撃荷重は、必ずしも図-9のパルス波形にあてはまるような波形のものとは限らない。むしろ一般的には、衝撃ごとに相当変動した波形を示すことが多いであろう。しかし、衝撃荷重をモデル化して考察する場合には、図-9の8種類でまず十分と思われる。たとえば、爆圧の問題では減衰正弦波 ($\lambda=1$, および 2) がモデル衝撃波として用いられ^{10,11)}、また砕波が直柱に衝突するときの衝撃波力は、前傾三角パルス (円柱) および後傾三角パルス (三角柱) に近い変化をすることが示されている⁵⁾。さらに、栈橋下面に働く揚圧力は矩形パルス型の荷重変化をするのではないかと考えられている¹²⁾。

付録に示した衝撃応答スペクトル（付図-B1~8）は、応答波形の最大値 x_{\max} 、最小値 x_{\min} 、および力積 I_x を、減衰定数 β をパラメータとして τ/T_n に対してプロットしたものである。すなわち、

- (a) x_{\max}/ξ_p ……応答波形における最大値と衝撃パルスの最大値との比を示す。 x_{\max} の出現時刻は、 τ/T_n の値やパルス波形によって異なり、衝撃パルスの作用時間中にくることもあり、その後になることもある。
- (b) x_{\min}/ξ_p ……応答波形における逆向きの最大変位と衝撃パルスの最大値との比を示す。これは衝撃パルスが終了してから最初に逆向きに変位するときに現われるもので、残留振動の大きさの目安を与える。
- (c) I_x/I_s ……応答波形が最初に零線を切るまでの時間積分値と衝撃パルス第1波の時間積分値との比を示す。これは力積に関する衝撃応答を示している。

これらの応答スペクトルおよび応答波形（付図-A.1~8）の特徴を、以下各衝撃パルス別に述べよう。

1) 矩形パルス……応答波形の最大値 x_{\max} は、 $\tau > 0.5T_n$ であれば矩形ステップに対する式(26)と等しくなり、 τ がそれ以上長くなっても変わらない。応答波形は一般に強い固有振動（最大振幅 $2\xi_p$ ）を伴ない、減衰が十分効いていない限り、応答波形から原波形である矩形パルスを推定することが難しい。ただし、 $\beta=0$ で $\tau = nT_n$ のときは、残留振動を伴わない。

2) 前傾三角パルス……衝撃の作用時間が T_n に比べて相対的に長くなるにつれ、 x_{\max} は式(26)の値に漸近する。衝撃作用後は、強い残留振動を伴うが、減衰力が働いていれば τ/T_n が大きくなるにつれて、残留振動が減少する。なお、減衰が小さい場合、応答波形の時間積分値 I_x が I_s よりも小さくなることもある。これは、衝撃の作用時間中に応答波形の谷が負の値となるため特に $\beta=0$ の場合は、 τ/T_n の増加につれて I_x/I_s の値が次第に減少する（ $\beta=0$ では応答波形の第1波が必ず負となる）。もっとも、応答波形の中分線を引いて固有振動の影響を取り除けば、こうした問題は生じない。

3) 対称三角パルス……応答波形の最大値 x_{\max} は、 $\tau/T_n \approx 0.9$ で極大値（ $\beta=0$ の場合で $x_{\max}/\xi_p = 1.51$ ）を示し、 τ/T_n の増加とともに若干の波打ちを示しながら $x_{\max}/\xi_p = 1$ に近づく。 τ/T_n が十分大きければ、応答波形は衝撃波形とほぼ同一である。

4) 後傾三角パルス…… x_{\max} の最大値は $1.26\xi_p$ で

他の衝撃パルスの場合よりも小さい。また、 $\tau/T_n \approx 1.2$ では、 $x_{\max}/\xi_p = 0.87$ ($\beta=0$) に減少し、次に $\tau/T_n \approx 1.7$ で $x_{\max}/\xi_p = 1.10$ に増加し、こうした波打ちを繰り返しながら τ/T_n の増加とともに $x_{\max}/\xi_p = 1$ に近づく。残留振動は、衝撃パルスの終了が急激であるためにかかなり大きい。なお、 I_x/I_s は収束が悪く、 $\beta=0$ の場合 $\tau/T_n = 3.0$ でも 1.10 の値である。従って、衝撃波形が明らかにこの型の場合は、力積の算出法について検討しなければならない。

5) 正弦波パルス…… x_{\max}/ξ_p は $\tau/T_n \approx 0.8$ で最大となり 1.76 の値に達する。残留振動はあまり大きくなく、 $\beta=0$ では $\tau/T_n = n + 1/2$ のときに残留振動が 0 となる特徴がある。また τ/T_n が十分大きければ応答波形は入力波形とほとんど同一である。

6) 逆余弦パルス……全般的には正弦波パルスと同様の傾向を示すが、 x_{\max}/ξ_p の最大値 (1.70) の発生位置がやや異なり $\tau/T_n = 1.0$ である。また、残留振動が消滅するのは $\beta=0$ で $\tau = (n+1)T_n$ のときである。衝撃パルスの立ち上りの勾配が 0 であるので、 τ/T_n がある程度大きくなれば応答性が非常に向上する。

7) 減衰正弦波 ($\lambda=2$)……これは衝撃波形がかかなり前傾している ($t_0 = 0.166\tau$ のときに $\xi = \xi_p$ となる) ので x_{\max}/ξ_p が最大値 1.85 を示すのは $\tau/T_n \approx 2.5$ のときである。もし有効作用時間として $\tau' = 2t_0 \approx 0.33\tau$ をとれば、 x_{\max}/ξ_p の最大値は $\tau'/T_n \approx 0.8$ で生ずることになり、正弦波パルスと大差なくなる。なお、残留振動および力積の特性は、前傾三角パルスに対するものに近い。

8) 減衰正弦波 ($\lambda=0.1$)……第1動に対する応答波形の最大値 x_1 は、定常振動に対する図-5の値とほぼ同一である。しかし、応答波形全体としての最大値 x_{\max} はそれが何波目に現われるかによって異なるため、図-5の共振曲線とも一致せず、曲線形も滑らかにはならない。また、付図-B.8(c)の力積比は、他の図とは異なって $\tau/T_n \leq 0.5$ で減少する形になっている。これは、衝撃荷重の力積 I_s として第1波の山に対する値を用いているためで、 τ/T_n の小さい力積比例領域では I_x が $t=0 \sim \infty$ における衝撃荷重の全力積 (I_s よりも小さい) に比例することによるものである。

以上の諸特性をとりまとめ、衝撃応答特性全般として整理すると次のようになる。

A. 減衰力が働かない場合 ($\beta=0$)

(i) $\tau/T_n = 0.3$ 程度までは実用的には力積比例領域と考えてよく、この範囲では応答波形は衝撃荷重の波形

にほとんど無関係となる。

(ii) $\tau/T_n < 0.5$ では、衝撃の作用後に最大変位が現われ、以後その振幅の残留振動が継続する。

(iii) 衝撃波形の立ち上りが瞬間的の場合は、 τ/T_n が大きくなるにつれて応答波形の最大値が $2\xi_p$ に漸近し、特に矩形パルスの場合には $\tau/T_n \geq 0.5$ で $x_{\max} = 2\xi_p$ となる。

(iv) 衝撃荷重が瞬間的に立ち上り、あるいは終了するときは、 τ/T_n の値がいくら大きくとも一般に強い残留振動を伴う。

(v) 衝撃荷重の立ち上り時間が有限の場合は、 τ/T_n が大きくなるにつれて x_{\max}/ξ_p の値が1に収斂する。この場合、 $\tau/T_n = 0.8 \sim 2.5$ で x_{\max}/ξ_p は極大値 1.25 ~ 1.85 (ただし $\lambda = 0.1$ の減衰正弦波を除く) を示す。

(vi) 衝撃荷重の減少時間が有限であれば、残留振動の振幅は τ/T_n の増大とともに減少する。

(vii) 応答波形は、一般に入力波形に振動系の固有振動を重ねた形であり、この固有振動が目立たなくなるのは、 τ_1/T_n がほぼ3以上のときである。ただし、 τ_1 は衝撃荷重の立ち上り時間である。従って、立ち上り時間が0の矩形パルスや前傾三角パルスでは、振幅 ξ_p の強い固有振動を伴うことになる。

(viii) 応答波形から算出した力積は、 τ/T_n がほぼ2以上であれば、前傾三角パルスなどの特殊な場合を除き、衝撃荷重の力積にほぼ等しいと考えてよい。しかし τ/T_n の値が小さければ、1.0~2.0倍の値になり、一般に過大な値を与える。

B. 減衰の効果

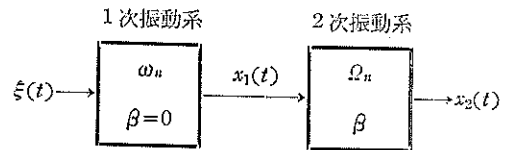
(i) 振動系に減衰力が働く場合には、振動系の固有振動が減衰によって抑えられ、応答波形は衝撃荷重の波形にかなり近くなる。すなわち、波形の応答性が向上する。

(ii) 減衰定数はなるべく大きい方が良好な結果が得られる。 $\beta \approx 0.7$ であれば、 $\tau/T_n > 2$ のときに、ほとんどの衝撃波形に対しても $x_{\max}/\xi_p = 0.90 \sim 1.04$ の一様性を保つことができ、応答波形の歪みも小さくなる。ただし、 $\Delta t = 0.3T_n$ 程度の遅れを伴う。また力積についても、 $\lambda = 0.1$ の減衰正弦波を除けば、 $\tau/T_n \rightarrow 0$ の極限まで $I_x/I_x = 1.00 \sim 1.04$ の比率が維持される。

5. 2段振動系の衝撃応答特性

上述のように、振動系の応答特性を向上させるには、減衰定数 β をできるだけ大きくすることが望ましい。し

かし、荷重測定用のピックアップは、計器内部の減衰定数が非常に小さいのが普通である。従って、電気的なフィルター (Low Pass Filter) または適当な振動数の記録器ガルバノメーターと組み合わせ、ピックアップの固有振動の影響を抑えるようにしなければならない。このような組み合わせのモデルとして、次のような構成を考える。



第1次振動系は減衰定数が0で固有角振動数が ω_n であり、入力関数 $\xi(t)$ を1次応答関数 $x_1(t)$ に変換する。第2次振動系 (フィルターあるいはガルバノメーター) は、非減衰固有角振動数が Ω_n 、減衰定数が β で、 $x_1(t)$ を第2次応答関数 $x_2(t)$ に変換する。ただし、機械的な2重バネ系とは異なり、第2次振動系の挙動が第1次振動系に影響を及ぼすことはないと考えられる。

このような2段振動系の振動特性を調べるため、まず式(14)の正弦力による強制振動を考えると、その振幅が式(16)の結果から次のように求められる。

$$\frac{(x_1)_{\max}}{\xi_p} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2} \dots \dots \dots (35.1)$$

$$\frac{(x_2)_{\max}}{\xi_p} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2\right] \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n}\right)^2}} \dots \dots \dots (35.2)$$

また位相の遅れは、第1次応答関数については $\tau > 0.5 T_n$ の範囲で $\gamma = 0$ であり、第2次応答関数については式(15.2)で ω_n を Ω_n におきかえたものに等しい。

今、第2段の減衰定数が $\beta = 1/\sqrt{2}$ の場合について、式(35.2)で最終応答波形の共振曲線を計算すると図-10のようになる。第2段の固有振動数が第1段と等しい場合 ($\Omega_n = \omega_n$) には、第1段からの応答波形が若干減衰した形で出てくるだけである。しかし、第2段の固有振動数を低くめて $\Omega_n = 0.5\omega_n$ としてやると、 $(x_2)_{\max} \approx \xi_p$ の範囲が広がって、 $\tau/T_n = 1.0$ 程度まで感度一様範囲として使用可能になる。ここで T_n は第1段の固有周期であり、第2段の固有周期 T_n' を考えれば、 $\tau/T_n' = 0.5$ まで使用可能なことを意味する。図-4と比べてみれば分かるように、これは第2段振動系を単独で使用するよりも良い結果である。すなわち、減衰力の効果による第2段

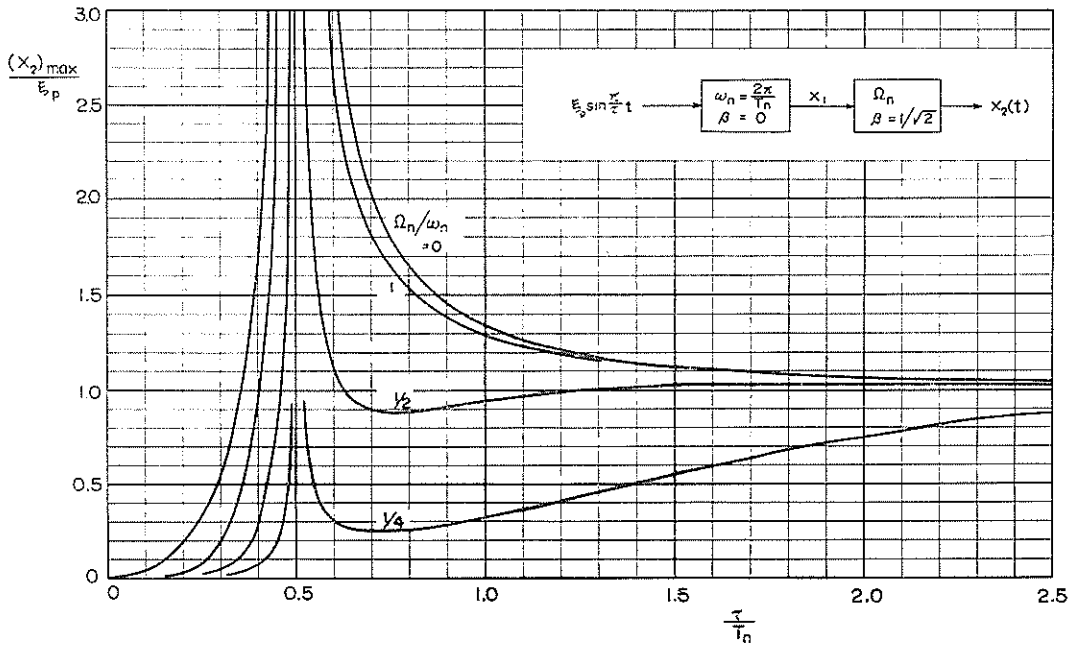


図-10 正弦力に対する2段階振動系の共振曲線
Fig. 10 Resonance Curves of Two-Step Oscillator

応答波形の振幅の減少を、第1段の共振点近傍の増幅作用で補償しているのである。専用の増幅器を内蔵したペン書オシログラフの中には、このような現象を利用して100c/s以上まで直線性を持たせたものもある¹³⁾。もっとも、第2段の固有振動数をあまり下げ過ぎると、第2段の減衰が強過ぎるため結果が思わしくない。 $\Omega_n = 0.5\omega_n$ 程度が適当である。また、第1段の $\tau/T_n = 0.5$ における共振現象は、第2段でいくら減衰を効かせても抑えきれない。

次に、衝撃応答特性として矩形および正弦波パルスに対する2段階振動系の応答を計算してみよう。この計算は、まず第1次応答関数 $x_1(t)$ が入力関数 $\xi(t)$ およびこれによって励起された振動数 ω_n の正弦または余弦振動の和として表わされるので、第2段の応答としては、 $\xi(t)$ が直接第2段へ入ったときの応答関数と、 $t=0$ から始まる第1段の正弦あるいは余弦振動に対する応答関数を加え合せれば求められる。従って、新しく計算を行なうことなしに、 $x_2(t)$ が式(A.9.3)、(A.10.3)のように書き下される。この式を用い、第2段の減衰定数が $\beta = 1/\sqrt{2}$ のときの2段階振動系の応答波形および応答スペクトルを求めたのが付図A.9, 10, B.9, 10である。

この結果を調べてみると、矩形パルスおよび正弦波パ

ルスに対する2段階振動系の特性として次のような点が認められる。

(i) 第2段の固有振動数が第1段の固有振動数の2倍以上($\Omega_n > 2\omega_n$)あれば、 $T_n/4$ 程度の遅れは伴なうけれども、第1段の応答波形がほとんどそのままの形で出てくる。すなわち、 $\Omega_n > 2\omega_n$ であれば、第2段の振動系の影響を無視することができる。

(ii) 第2段の固有振動数が第1段の固有振動数の約 $1/2$ 以下であれば、この系の応答特性は第2段の振動系の特性にほぼ支配される。しかし、第1段の振動の影響は残っており、第2段を単独に使った場合よりも残留振動が大きく、応答波形の歪みも強い。

(iii) 第2段の固有振動数を第1段の固有振動数の約 $1/2$ に選べば、特に正弦波パルスに対して良好な応答特性が得られ、 $\tau/T_n \geq 0.4$ の範囲で $(x_2)_{\max} \approx \xi_p$ の応答変位が確保できる。ただし矩形パルスについては、 τ/T_n' が大きくなっても $(x_2)_{\max} \approx 1.2\xi_p$ と20%増しの応答変位を示す。もっとも、これは応答波形上の固有振動を視察によって平滑化して補正することが可能である。

以上のような定常振動および衝撃応答特性を考えると、測定系としてピックアップの固有振動の影響を軽減するには、固有振動数がピックアップの $1/2$ 程度のガルバ

ノメーターを使うのが適当であり、これによって $\tau/T_n \approx 0.5$ までの衝撃および振動現象をほぼ忠実に記録させることが可能になる。

なお、電気的フィルターを使用する場合、その特性がこの資料で扱っている機械的減衰振動系で近似できるものについては、上記の結論がそのまま適用される。しかし、フィルター回路が一般的に式(5)でその特性を表示できることはむしろ少ないと思われるので、フィルター回路の特性としてどのようなものを選ぶかについては、パルス波に対する過渡応答を十分計算した上で検討することが必要である。

6. 衝撃荷重の測定における二、三の問題点

6.1. 固有振動数および減衰定数の選択

衝撃荷重の測定でまず悩まされるのは、ピックアップ、記録素子等の固有振動数および増幅器の感度一様周波数範囲の選択である。理想的には、固有振動数は高いほど良い。しかし、製作上の制約や感度などの問題のため、利用できる測定機器および測定系の固有振動数には限度があるのが普通である。従って問題は、利用できる機器を使ってどの程度まで短い作用時間の衝撃荷重を測定できるか、ということになることが多い。

衝撃荷重は、本質的に変動性の強いものが多い。斜面上の直立壁に働く衝撃砕波圧などはその代表的な例で、砕波高がほとんど変らなくとも砕波圧は大きく変動する。筆者の実験例でも、波高約10cmの砕波237例について、衝撃砕波圧のピーク値が60~1,340gr/cm²、その作用時間が0.001~0.020secの範囲に分布した¹⁴⁾。衝撃荷重の作用時間が理論解析などによって推定がつく場合は、付図-B.1~10の衝撃応答スペクトルなどを参照して、 $x_{\max}/\xi_p \approx 1.0$ となる範囲で T_n を選定するのが望ましい。もっとも、矩形パルスや前傾三角パルスのように衝撃荷重の立ち上がり時間が0の場合は、測定系の固有振動数をいくら高くしても、減衰が効いていなければ $x_{\max} \approx 2\xi_p$ となってしまう。従って、まずピックアップ部分の減衰定数をできるだけ $\beta = 0.7$ に近づけることが望ましい。これが難かしければ、前章で述べたような第2段の振動系で減衰を効かせる方式を考慮しなければならぬ。

実際問題としては、衝撃荷重の波形も作用時間も不明なことが多いので、この場合の取り扱いについて述べて

べよう。

1° まず、できるだけ固有振動数が高く、感度一様範囲の広い機器を組み合わせ測定系を構成する。この際、フィルターは使わず、記録素子の固有振動数はピックアップの推定固有振動数の2倍以上あるものを使用する。増幅器等も同様である。この状態でピックアップに軽い衝撃を与え、2.2の方式でその固有振動数および減衰定数を測定しておく。

2° 上記の状態では測定を行ない、記録波形にピックアップの固有振動が現われていなければ、その記録は衝撃荷重の波形を再現していると見てよい。

3° 記録波形にピックアップの固有振動が強く現われているときは、衝撃荷重の立ち上がりが非常に速いか、あるいは衝撃荷重の作用時間がピックアップの固有周期と同程度以下であることを示している。このような場合は、固有振動の中分線を引いてみる。中分線が零線に戻るまである波形を描けば前者であり、中分線が直ちに零線附近に戻るときは後者である。

4° 前項によって衝撃荷重の立ち上がり時間が非常に短かいと分った場合には、フィルターを挿入するか、あるいは固有振動数がピックアップの約 $\frac{1}{2}$ で減衰定数が $\beta \approx 0.7$ のガルバノメーターを使用して再測定を行なうのがよい。

5° 第3項によって衝撃荷重の作用時間がピックアップと同程度以下と推定されたときは、まずフィルターあるいは減衰の効いたガルバノメーター（固有振動数が約 $\frac{1}{2}$ ）を用いて、再測定を行ない、記録波形からその力積を求めておく。付図-B.9, 10などから明らかのように、この方式を用いればほぼ正確な力積が求められる。

6° 前項の場合、記録波形から衝撃荷重の波形を再現することは非常にむずかしい。原理的には、応答関数 $x(t)$ を式(5.1)の左辺に代入して演算を行なえば、右辺の入力関数 $\xi(t)$ が求められる筈である。しかし、記録波形について2階微分係数を求めるのは精度が不十分な場合が多く、あまり実用的ではない。もし、ピックアップの固有振動数を広範囲に変化させる(式(2)の重量 W および式(3)のパネ係数 k を変える)ことができるならば、このような各種のピックアップを用いて測定を行なってみる。そして、衝撃荷重の測定値を測定系の固有振動数に対してプロットし、この関係を付図-B.1~8の衝撃応答スペクトルと比べてみれば、衝撃荷重の波形を推定することができる。この方法は、直柱に働く衝撃砕波力の測定に用いられたことがある¹⁵⁾。

6.2. 取付部材の剛性の影響

実際の測定においては、荷重を受けるピックアップは取付部材に固定されていなければならない。この固定が不完全、あるいは取付部材の剛性が不足していると、衝撃荷重の一部が取付部材の振動に吸収されたり、また取付部材の振動が逆にピックアップの応答に悪影響を及ぼしたりする。従って、衝撃荷重の測定においてはピックアップや記録系統ばかりでなく、取付部材の機械系統についても慎重に検討しておかなければならない。また、応力度測定などでストレインゲージを模型構造物に直接貼り付ける場合でも、模型構造物あるいは模型部材の取付・支持方法について十分注意しなければならない。

ピックアップの取付状況は、模式的に考えると 図-11 の2通りである。(a)は荷重計などを用いて衝撃荷重の全力を測定する場合で、衝撃荷重は一度ピックアップ $[m_1 + k_1]$ で受けとめられてから取付部 $[m_2 + k_2]$ に伝達される。従って、これは自由度が2の2重バネ系を構成している。これに対して 図-11の(b)は、砕波圧のような圧力を測定するためピックアップを取付版の一部にねじ込むような場合で、衝撃圧はピックアップと取付版の両者に

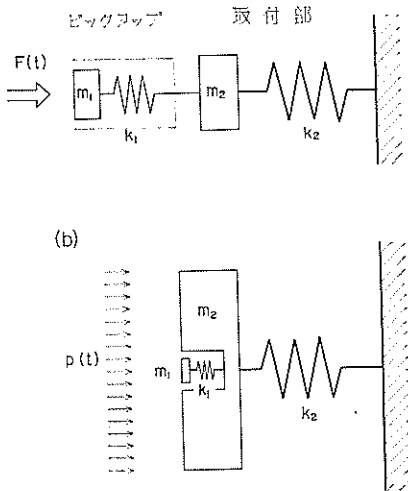


図-11 ピックアップ取付状況の模式図
Fig. 11 Sketch of Pick-up Mounting

同時に作用する。この場合、ピックアップの受圧面積は取付版の受圧面積に比べて遙かに小さいことが多く、ピックアップのバネ振動が取付版の挙動に影響を及ぼすことはない。しかし取付版の振動はピックアップの応答を歪める可能性がある。

まず(a)の場合を考えてみよう。Timoshenko の教科

書¹⁵⁾にはこれとよく似た2自由度バネ系の解が示されているので、その結果を参照しながら解を求めると次のようになる。すなわち、バネ k_1 の伸びを x_1 、バネ k_2 の伸びを x_2 とすると、外力として正弦力が作用するときの運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k_1 x_1 &= F_0 \sin \frac{\pi}{\tau} t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 &= k_1 x_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

これを加速度の単位に書き換えると、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + (\omega_1^2 - \omega_3^2)x_1 - \omega_2^2 x_2 &= \omega_1^2 \xi_p \sin \frac{\pi}{\tau} t \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_3^2 x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

ただし、 $\xi_p = F_0/k$ 、 $\omega_3 = \sqrt{k_1/m_2}$ である。式(37)は2階連立微分方程式であるから、その解は式(5.1)と同じように一般解と特別解の重ね合せである。しかし、強制振動項としては特別解のみを求めれば十分であるから、これを次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C \sin \frac{\pi}{\tau} t \\ x_2 &= D \sin \frac{\pi}{\tau} t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

式(38)を式(37)に代入すると、

$$\left[-\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + \omega_1^2 + \omega_3^2 \right] C - \omega_2^2 D = \omega_1^2 \xi_p$$

$$-\omega_3^2 C + \left[-\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + \omega_2^2 \right] D = 0$$

この C と D に関する連立方程式を解けば

$$C = \frac{\omega_1^2 \left[\omega_2^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \right] \xi_p}{\left[\omega_1^2 + \omega_3^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \right] \left[\omega_2^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \right] - \omega_3^2 \omega_2^2}$$

$$= \frac{\xi_p}{\left[1 + \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{\omega_1 \tau}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi}{\omega_2 \tau}\right)^2} \right]}$$

$$D = \frac{\omega_1^2 \omega_3^2 \xi_p}{\left[\omega_1^2 + \omega_3^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \right] \left[\omega_2^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \right] - \omega_3^2 \omega_2^2} \dots\dots\dots (39)$$

今求めようとしているのはピックアップのバネの変位 x_1 であるから、式(39)の結果を式(38)に代入して書き直すと、 $(\omega_3/\omega_1)^2 = m_1/m_2$ の関係を用いて、

$$x_1 = \frac{\xi_p}{1 - \left(\frac{\pi}{\omega_1 \tau}\right)^2 - \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{\pi}{\omega_2 \tau}\right)^2} \sin \frac{\pi}{\tau} t$$

$$\dots\dots\dots (40)$$

と求められる。1自由度系の場合、減衰力が働かなければ式(15)からバネの変位 x_1 が、

$$x_1 = \frac{\xi p}{1 - \left(\frac{\pi}{\omega_1 \tau}\right)^2} \sin \frac{\pi}{\tau} t \dots\dots\dots(41)$$

と表わされるから、式(40)をこれと比べてみれば、取付部材の剛度の影響がその分母の第3項の形で表わされることが分る。従って、取付部材の振動がピックアップの測定値に影響を及ぼさないようにするには、

$$\frac{m_1}{m_2} \frac{\left(\frac{\pi}{\omega_2 \tau}\right)^2}{1 - \left(\frac{\pi}{\omega_2 \tau}\right)^2} \ll 1 \dots\dots\dots(42)$$

が必要である。具体的には、取付部材の有効重量をピックアップ部分の重量(式1に用いる W)の10倍以上にし、しかも取付部材の固有振動数をピックアップの固有振動数よりも高くすることが望ましい。

次に図-11(b)の場合を考えよう。(a)の場合と同様バネ k_1 と k_2 の伸びをそれぞれ x_1, x_2 とし、さらにその受圧面積を S_1, S_2 で表わす。この系に正弦圧力が作用する場合の運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k_1 x_1 &= S_1 p_0 \sin \frac{\pi}{\tau} t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 &= S_2 p_0 \sin \frac{\pi}{\tau} t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

と表わされる。ここで次の単位面積質量 q_1, q_2 を導入すると、

$$q_1 = m_1/S_1, \quad q_2 = m_2/S_2 \dots\dots\dots(44)$$

式(43)は次のように書き改められる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_1 &= \frac{1}{q_1} p_0 \sin \frac{\pi}{\tau} t \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \frac{1}{q_2} p_0 \sin \frac{\pi}{\tau} t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

この第2式の解の強制振動項は、直ちに求められて

$$x_2 = \frac{p_0/q_2}{\omega_2^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} \sin \frac{\pi}{\tau} t \dots\dots\dots(46)$$

であるから、これを式(45)の第1式に代入すると、

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{p_0}{q_1} \left[1 + \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}{\omega_2^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} \right] \sin \frac{\pi}{\tau} t \dots\dots\dots(47)$$

が得られる。この右辺 [] 内の第2項が取付版の振動の影響を表わしている。従ってこの影響を抑えるために

は、

$$\frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{\omega_2 \tau}\right)^2}{1 - \left(\frac{\pi}{\omega_2 \tau}\right)^2} \ll 1 \dots\dots\dots(48)$$

とすることが必要である。この結果は(a)の場合の式(42)と全く同形である。従って、衝撃圧力測定の場合にも、取付版の単位面積質量を波圧計受圧部の単位面積質量よりも十分大きくし、かつ取付版の固有振動数を十分高めておくことが望ましい。

以上は簡単のために定常強制振動について取付部材の振動を調べたのであるが、本来は衝撃パルスについてこのような検討を行なうことが望ましい。そこで、衝撃パルスとして図-7(a)の矩形ステップが(b)の系に作用する場合を考えると、ピックアップおよび取付版の運動が次式で表わされる。

$$t \geq 0 \quad \left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_1 &= p_0/q_1 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= p_0/q_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

この第2式の解は、式(20)の結果を参照して

$$x_2 = \frac{1}{\omega_2^2 q_2} p_0 (1 - \cos \omega_2 t) \dots\dots\dots(50)$$

であるから、これを式(49)の第1式に代入すれば、

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{1}{q_1} p_0 \left[1 - \frac{q_1}{q_2} \cos \omega_2 t \right] \dots\dots\dots(51)$$

の運動方程式が x_1 について得られる。従って、この場合には取付版の振動数よりもその重量を十分大きくして、 q_1/q_2 の値をできるだけ小さくすることが重要である。

結局、衝撃荷重の測定においては、取付部材の固有振動数を十分高めるばかりでなく、その重量も十分大きく設計することが大切である。なお、圧力計などの場合、取付版をハンマーで叩いてその振動の影響を調べることが行なわれたりするが、この方法はハンマーの衝撃が測定対象の衝撃圧力に十分匹敵する大きさのものかどうかをチェックしておく必要がある。最も望ましい方法は、圧力計にキャップをかぶせた状態で取付版に衝撃圧を作用させ、取付版の振動がどのように圧力計に記録されるかを検討する方法であろう。

7. あとがき

以上に述べたように衝撃荷重の測定は動的測定の中でも極めて困難なものであり、正しい測定を行なうには振

動現象および衝撃応答に関する十分な理解が必要である。本資料は問題の一部を扱ったものに過ぎないが、実験計画の立案や、測定結果の解釈において何らかの参考になれば幸いである。また、衝撃荷重の作用を受ける構造物の応力解析においてもある程度参考になるのではないと思われる。ただ、筆者の経験からして主として衝撃圧力の測定および荷重計による衝撃力の測定を対象に考えて問題を取り上げたため、衝撃荷重の問題によっては本資料の取り上げかたでは不十分なことも少なくないものと思われる。本資料を一つの踏み台として、各問題に応じた解析を進められることを願う次第である。

なお、ここに示した計算結果の大半は、当所設計基準部計算室のTOSBAC 3400を用いて求めたものである。また、本資料をここまでとりまとめるについては、水工部 伊藤喜行防波堤研究室長の示唆に負う所が大きい。ここに記して感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) Ayre, R.S.: Transient Response to Step and Pulse Functions, *Shock and Vibration Handbook, Vol. 1, McGraw-Hill*, 1961, 8-1~54.
- 2) 安積健次郎ほか: 試作磁歪式計器 8 種について, 運輸技術研究所報告, 第 4 巻 11 号, 1954 年 11 月, pp. 1-10.
- 3) 近藤正夫: 力の測定に関する基礎的事項, 運輸技術研究所報告, 第 2 巻 1 号, 1952 年 1 月, 30pp.
- 4) Mitsuyasu, H.: Experimental Study on Wave Force against a Wall, *Report of Transportation Tech. Res. Inst., No. 47*, Feb. 1962, 39pp.
- 5) 合田・原中・北畑: 直柱に働く衝撃碎波力の研究, 港湾技術研究所報告, 第 5 巻 6 号, 1966 年 4 月, 30pp.
- 6) 山内二郎: 電気計測便覧, オーム社, 1956, p. 610.
- 7) たとえば前出文献 1)
- 8) Detcher, G.: 実用ラプラス変換(武田訳), 森北出版, 1959, 200pp.
- 9) たとえば前出文献 8) および森口・宇田川・一松: 数学公式 II, 岩波書店, 1957, 340pp. など。
- 10) 坂静雄: 衝撃波圧力を受ける梁の設計, 建築学会大会論文集, 1939 年 4 月, pp. 68-71.

- 11) 武藤清: 爆風に依る構造物の弾性振動に就て, 建築学会大会論文集, 1940 年 4 月, pp. 347-355.
- 12) 合田良実: 衝撃波力に関する試論, 土木学会第 22 回年次学術講演会講演概要 II-101, 1967 年 5 月.
- 13) Conrad, R.W.: Shock and Vibration Instrumentation, *Shock and Vibration Handbook, Vol. 1, McGraw-Hill*, 1961, p. 19-37.
- 14) 合田良実・原中祐人: 衝撃碎波圧に関する一実験, 港湾技研資料 No. 32, 1967 年 6 月.
- 15) Timoshenko, S.: 工業振動学(谷下・渡辺訳), 商工出版社, 1956 年, pp. 186-187.
- 16) 坪井忠二: 振動論, 河出書房, 1942 年.
(特に引用はしなかったが振動現象を詳しく解説した優れた教科書である。ただ絶版なので入手するのがむずかしい。)

主 要 記 号 表

A, B, C, D :	積分常数
c	減衰力の比例係数
$F(t)$	振動系に働く外力
I_s, I_x	$\xi(t)$ および $x(t)$ の時間積分値 (外力および応答力の力積)
k	バネ定数 (式. 3)
m	振動系可動部分の質量 (式. 2)
T	減衰振動周期
T_n	固有周期 (非減衰時)
t	時間
W	振動系可動部分の重量
$x(t)$	振動系の変位量 (応答関数)
β	減衰定数 (式. 5. 2)
γ	位相角
δ	位相角または対数減衰率 (式. 10)
ϵ	位相角
λ	減衰正弦波の減衰定数
$\xi(t)$	外力換算変位量 (式. 5. 3, 入力関数)
ξ_b	外力の最大値による静的変位量
τ	衝撃荷重の作用時間または外力の半周期
ω	減衰角振動数 (式. 6. 2)
ω_n	固有角振動数 (式. 5. 2)
Ω_n	第 2 段振動系の固有角振動数

注) ここに示したものは、本資料の全体を通じて用いられている主要な記号のみである。

(昭和 42 年 7 月 3 日受付)

付録：各種衝撃パルスに対する応答関数, 応答波形および応答スペクトル

(1) 矩形パルス (Rectangular Pulse)

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_p & 0 \leq t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases} \dots\dots\dots (A.1.1)$$

$$x(t) = \begin{cases} \xi_p \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta\omega_n t} \cos(\omega t - \varepsilon) \right] & 0 \leq t < \tau \\ \frac{\xi_p}{\sqrt{1-\beta^2}} \{ e^{-\beta\omega_n(t-\tau)} \cos[\omega(t-\tau) - \varepsilon] - e^{-\beta\omega_n t} \cos(\omega t - \varepsilon) \} & t \geq \tau \end{cases} \dots\dots\dots (A.1.2)$$

ただし $\varepsilon = \tan^{-1}[\beta/\sqrt{1-\beta^2}] \dots\dots\dots (A.1.3)$

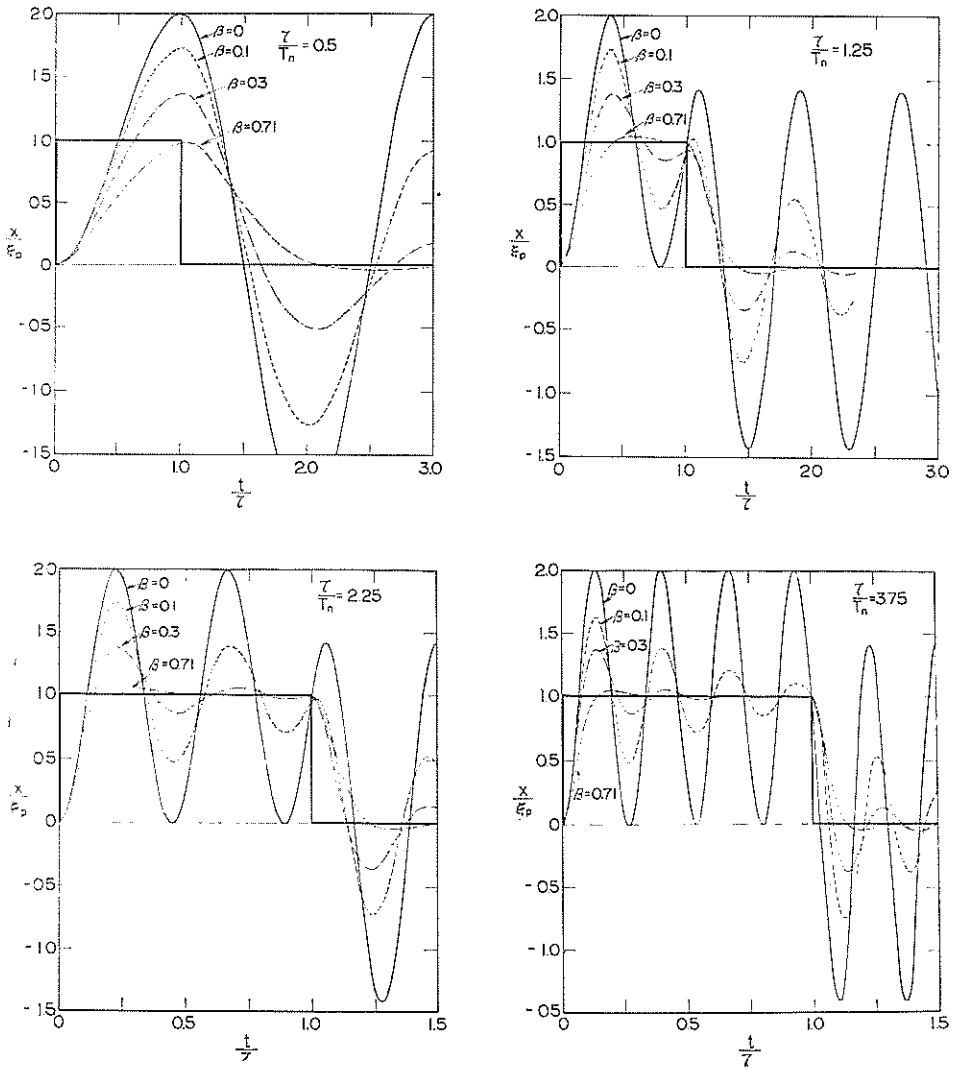


図-A.1 矩形パルスに対する応答波形
Fig. A.1 Time Response Curves to Rectangular Pulse

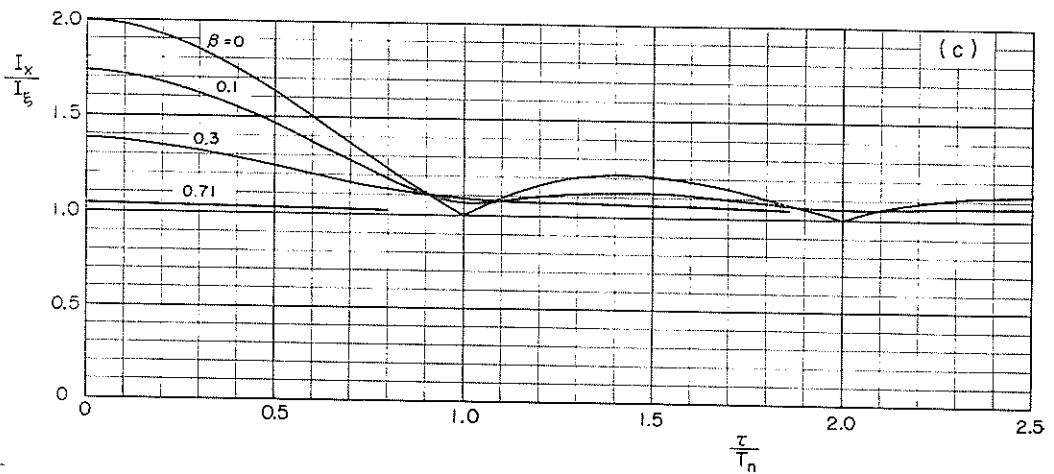
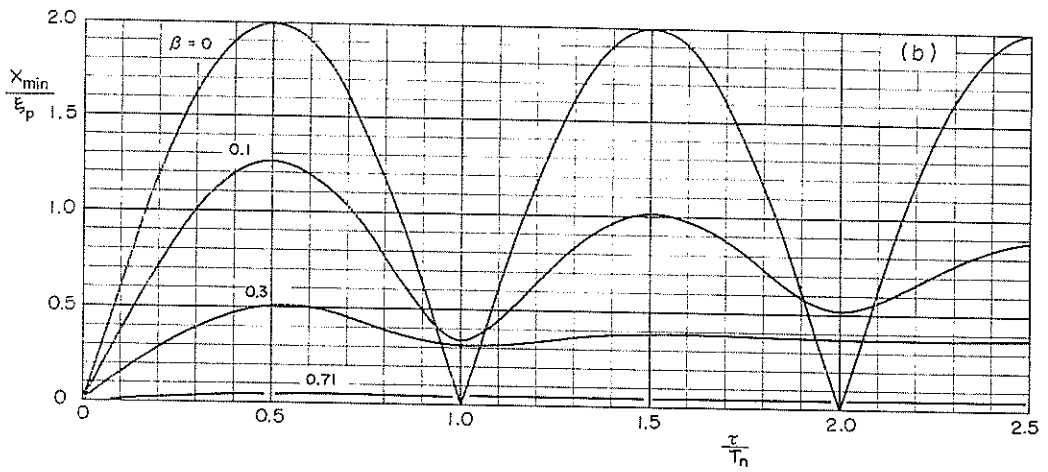
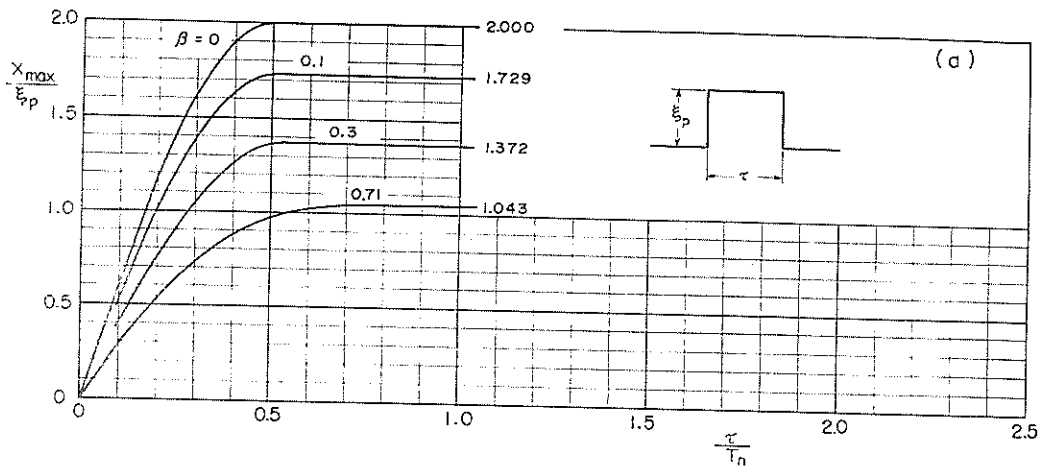


図-B. 1 矩形パルスに対する応答スペクトル
Fig. B. 1 Response Spectra to Rectangular Pulse

(2) 前傾三角パルス (Triangular Pulse with Vertical Rise)

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_p \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & 0 \leq t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A. 2. 1)$$

$$x(t) = \begin{cases} \xi_p \left(1 - \frac{t}{\tau} + \frac{2\beta}{\omega\tau}\right) + \frac{\xi_p}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta\omega_n t} \left[\frac{1}{\omega_n\tau} \sin(\omega t - \zeta) - \cos(\omega t - \varepsilon) \right] & 0 \leq t < \tau \\ \frac{\xi_p}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ e^{-\beta\omega_n t} \left[\frac{1}{\omega_n\tau} \sin(\omega t - \zeta) - \cos(\omega t - \varepsilon) \right] - \frac{1}{\omega_n\tau} e^{-\beta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau) - \zeta] \right\} & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A. 2. 2)$$

ただし $\zeta = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}{1-2\beta^2} \right]$ $0 \leq \zeta \leq \pi$ $\dots\dots\dots (A. 2. 3)$

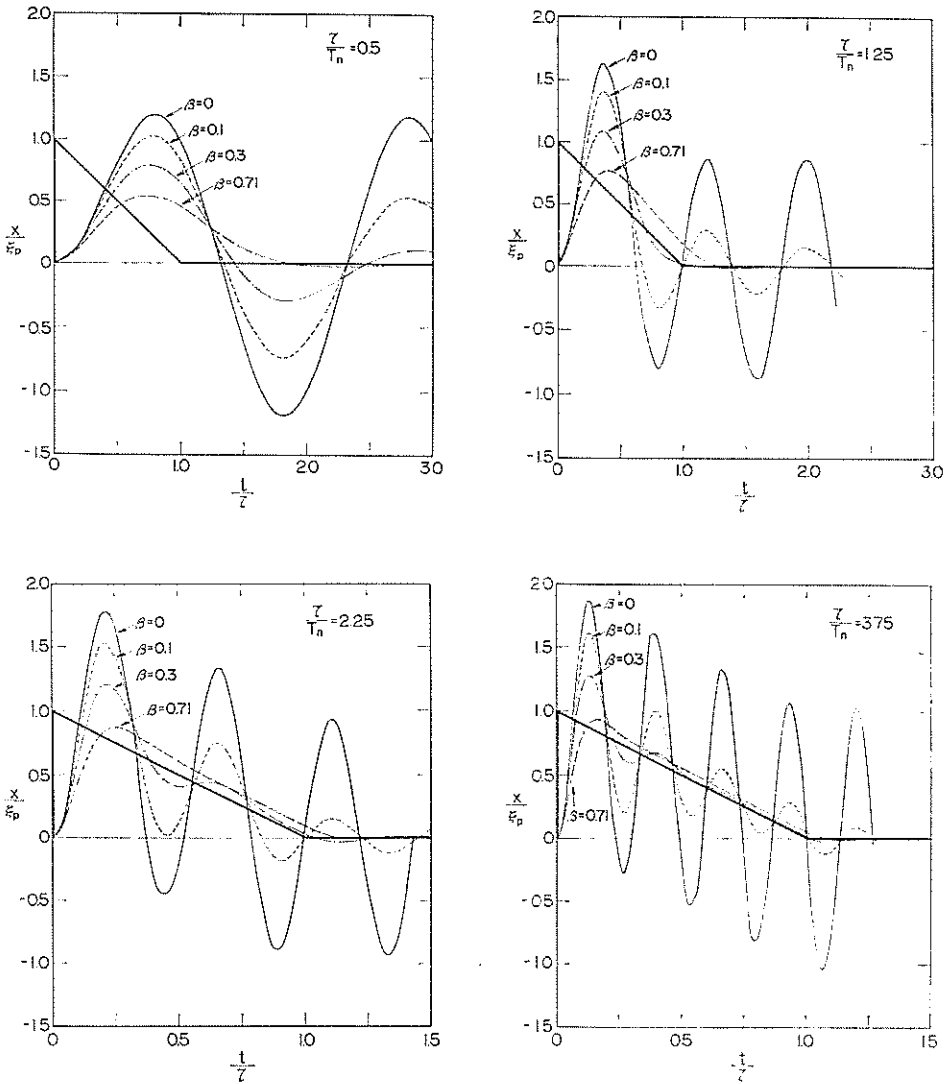


図-A. 2 前傾三角パルスに対する応答波形
Fig. A. 2 Time Response Curves to Triangular Pulse with Vertical Rise

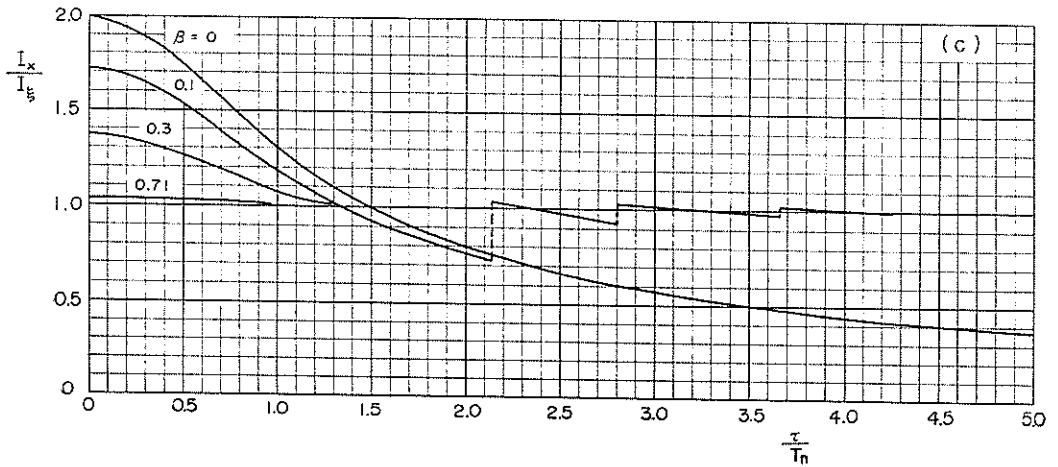
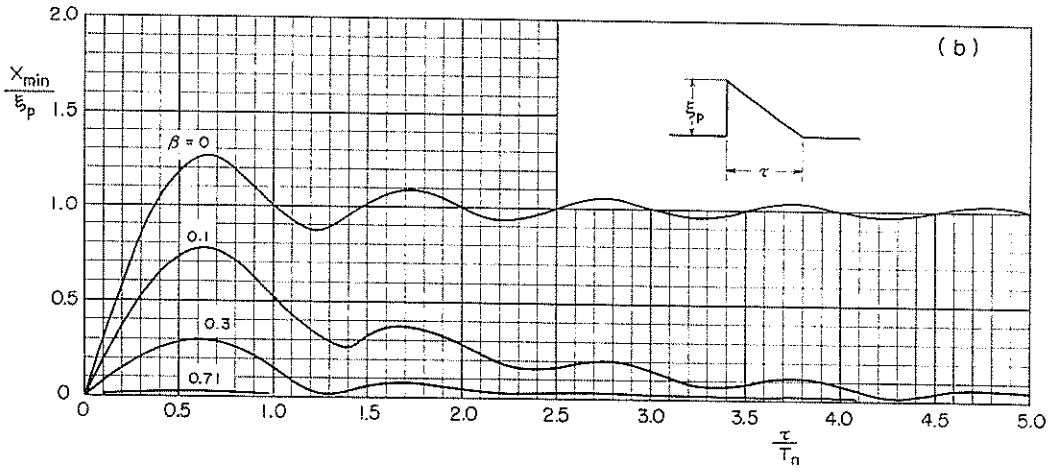
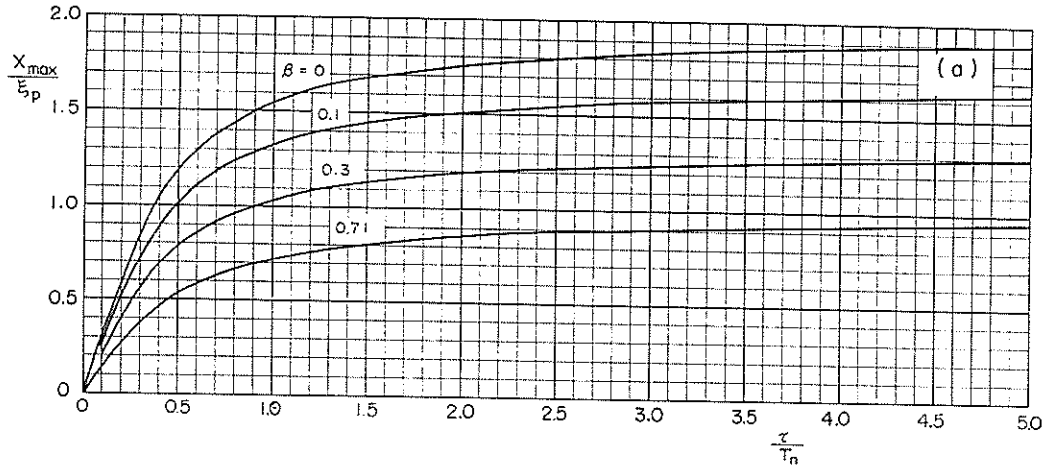


図-B. 2 前傾三角パルスに対する応答スペクトル
 Fig. B. 2 Response Spectra to Triangular Pulse with Vertical Rise

(3) 対称三角パルス (Symmetric Triangular Pulse)

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= 2\xi_p \frac{t}{\tau} & 0 \leq t < \tau/2 \\ &= 2\xi_p \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & \tau/2 \leq t < \tau \\ &= 0 & t \geq \tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 2\xi_p \left(\frac{t}{\tau} - \frac{2\beta}{\omega\tau} \right) - \frac{2}{\omega\tau} \xi_p e^{-\beta\omega_n t} \sin(\omega t - \zeta) & 0 \leq t < \tau/2 \\ &= 2\xi_p \left(1 - \frac{t}{\tau} + \frac{2\beta}{\omega\tau} \right) - \frac{2}{\omega\tau} \xi_p \{ e^{-\beta\omega_n t} \sin(\omega t - \zeta) - 2e^{-\beta\omega_n(t-\tau/2)} \sin[\omega(t-\tau/2) - \zeta] \} & \tau/2 \leq t < \tau \\ &= -\frac{2}{\omega\tau} \xi_p \{ e^{-\beta\omega_n t} \sin(\omega t - \zeta) - 2e^{-\beta\omega(t-\tau/2)} \sin[\omega(t-\tau/2) - \zeta] + e^{-\beta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau) - \zeta] \} & t \geq \tau \end{aligned} \right\} (A.3.2)$$

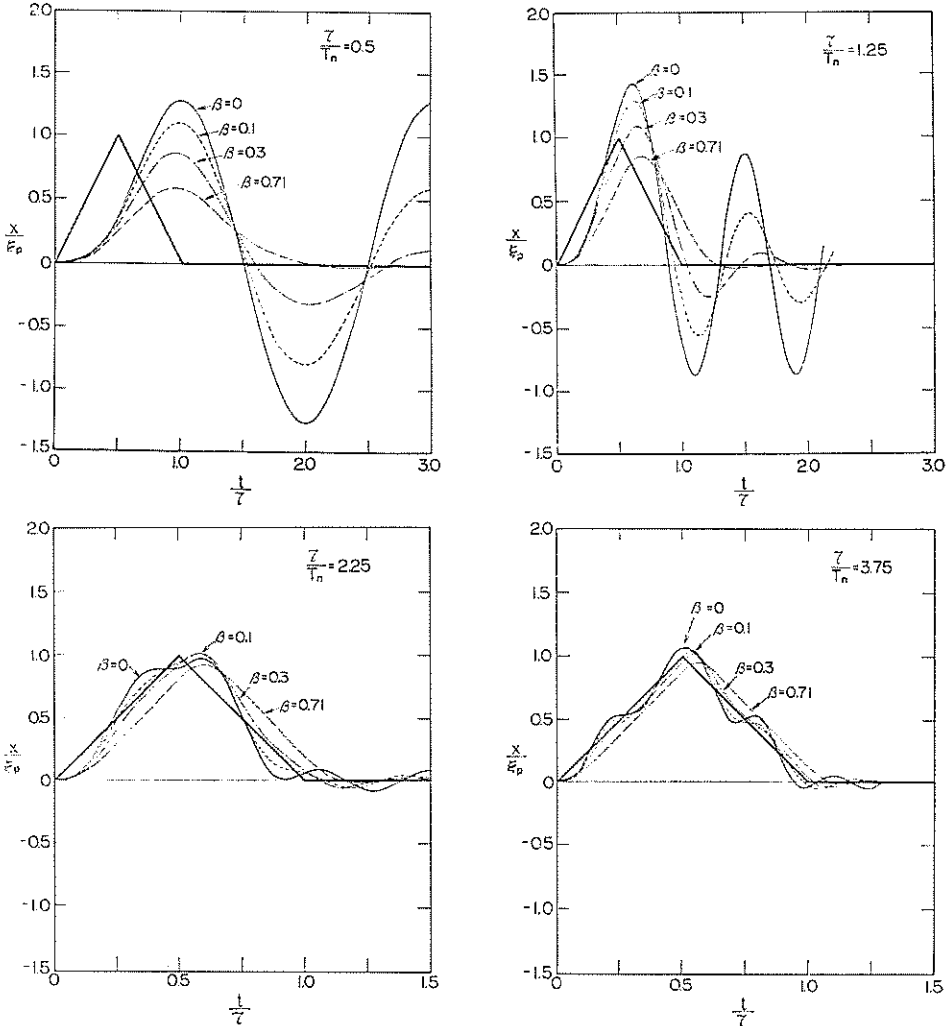


図-A.3 対称三角パルスに対する応答波形
Fig. A.3 Time Response Curves to Symmetric Triangular Pulse

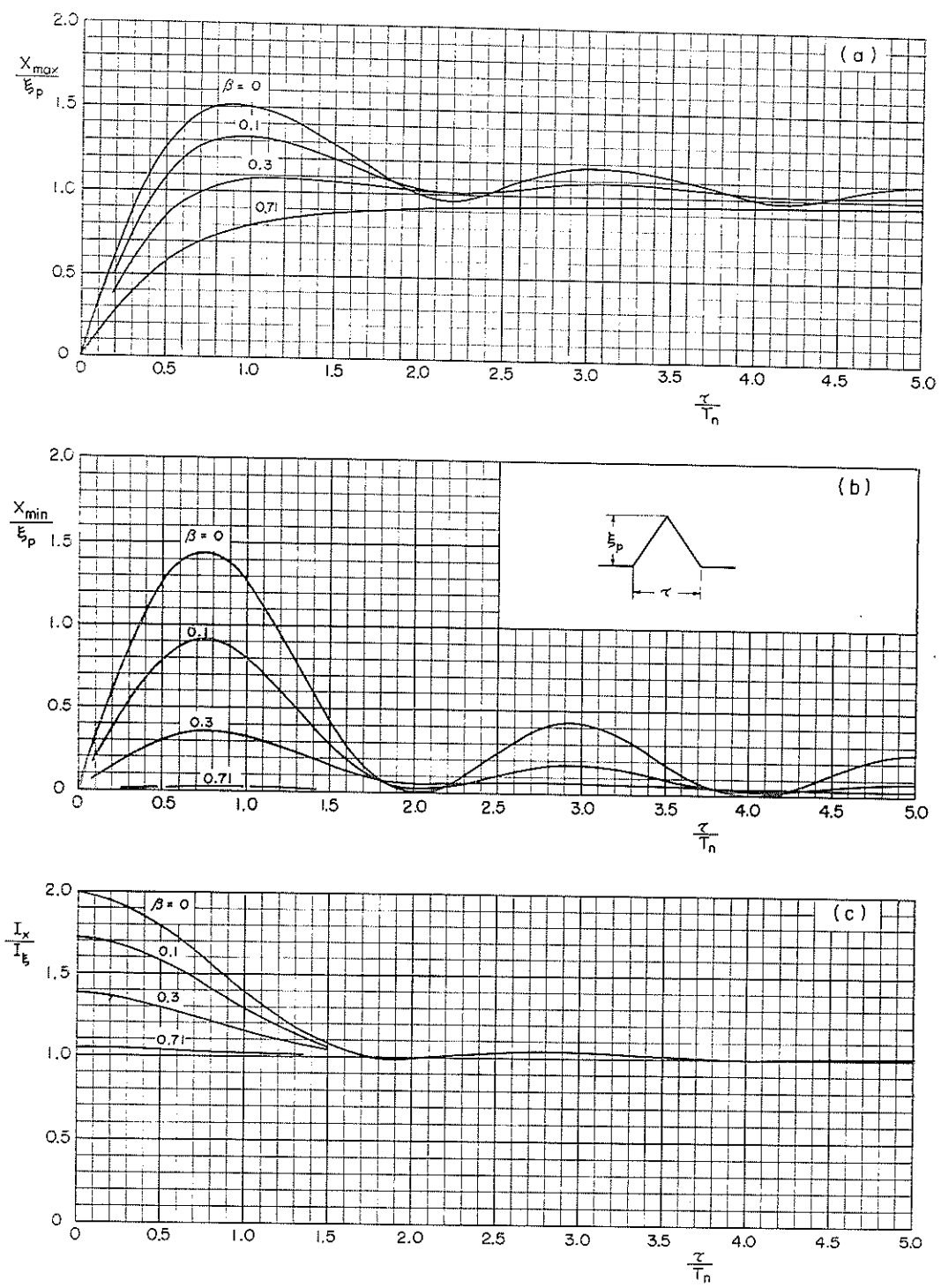


図-B. 3 対称三角パルスに対する応答スペクトル
 Fig. B. 3 Response Spectra to Symmetric Triangular Pulse

〈4〉 後傾三角パルス (Triangular Pulse with Vertical Decay)

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_p \frac{t}{\tau} & 0 \leq t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A. 4. 1)$$

$$x(t) = \begin{cases} \xi_p \left(\frac{t}{\tau} - \frac{2\beta}{\omega\tau} \right) - \frac{\xi_p}{\omega\tau} e^{-\beta\omega_n t} \sin(\omega t - \zeta) & 0 \leq t < \tau \\ -\frac{\xi_p}{\omega\tau} \{ e^{-\beta\omega_n t} \sin(\omega t - \zeta) - e^{-\beta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau) - \zeta] \} + \frac{\xi_p}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta\omega_n(t-\tau)} \cos[\omega(t-\tau) - \varepsilon] & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A. 4. 2)$$

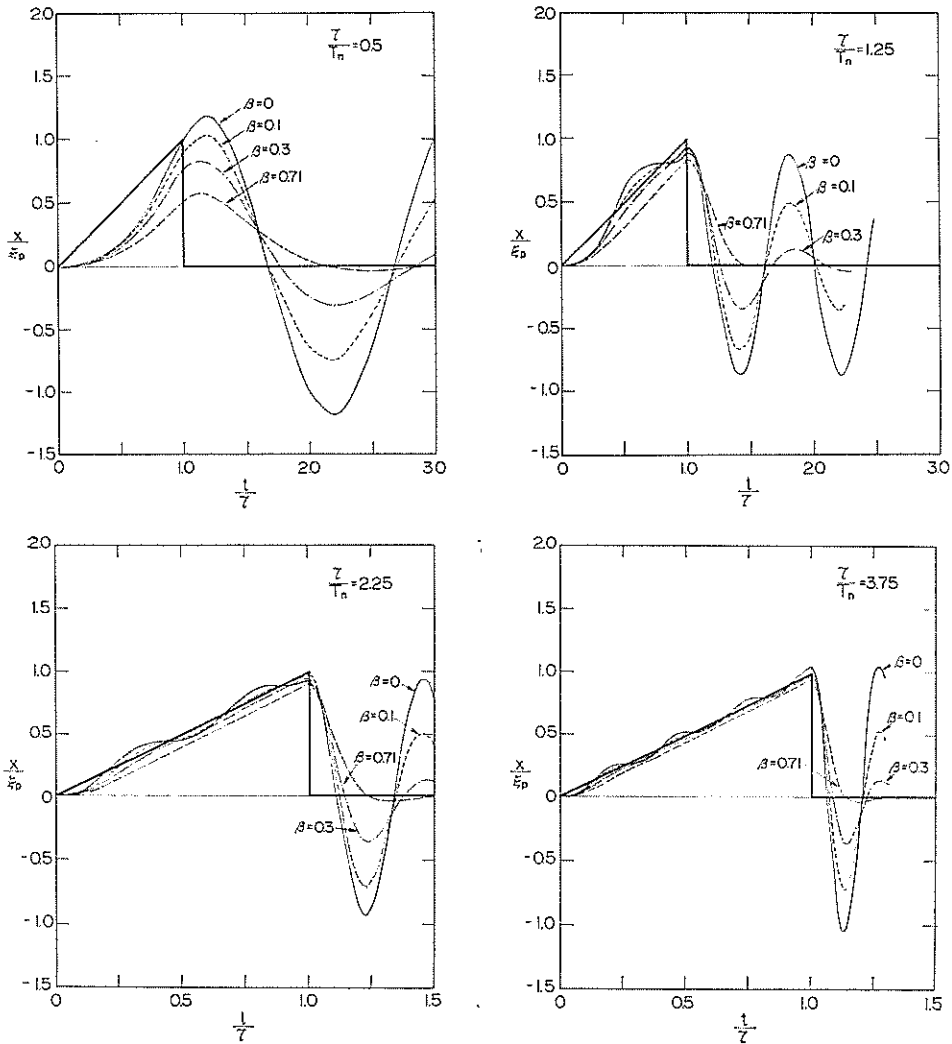


図-A. 4 後傾三角パルスに対する応答波形
Fig. A. 4 Time Response Curves to Triangular Pulse with Vertical Decay

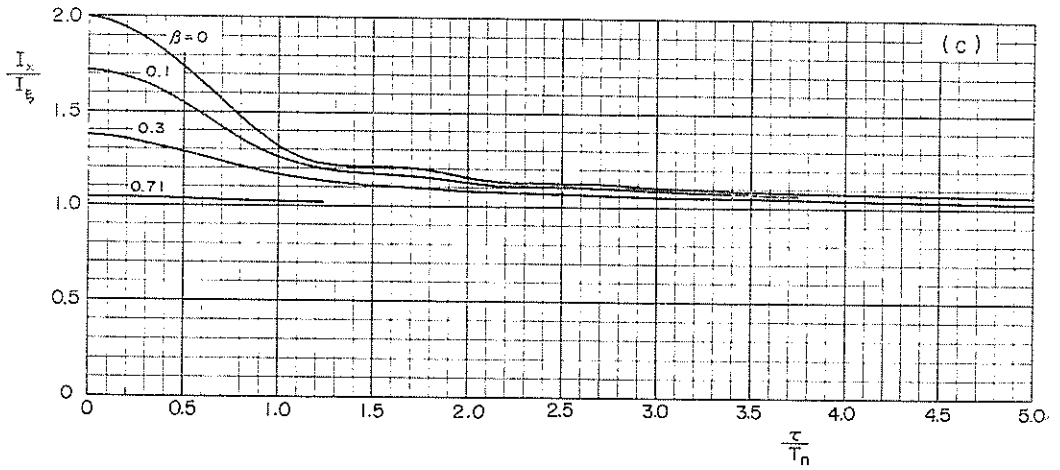
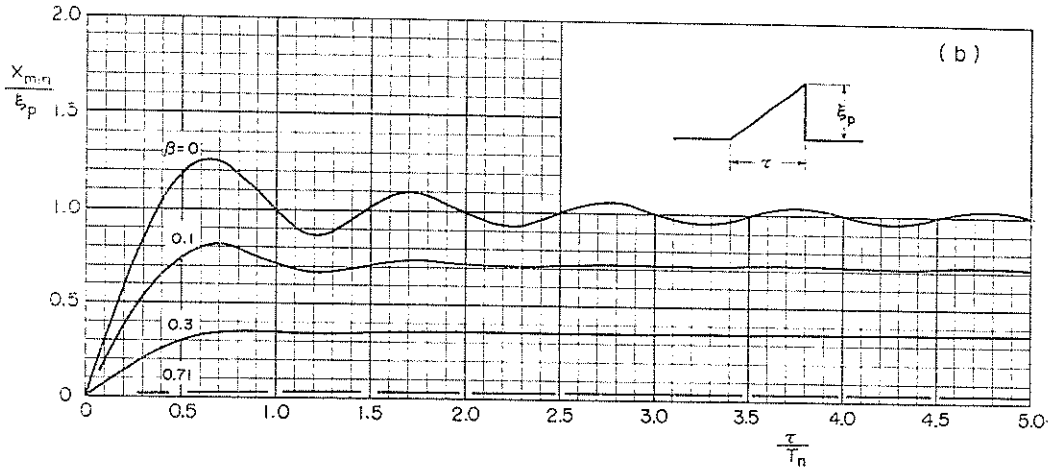
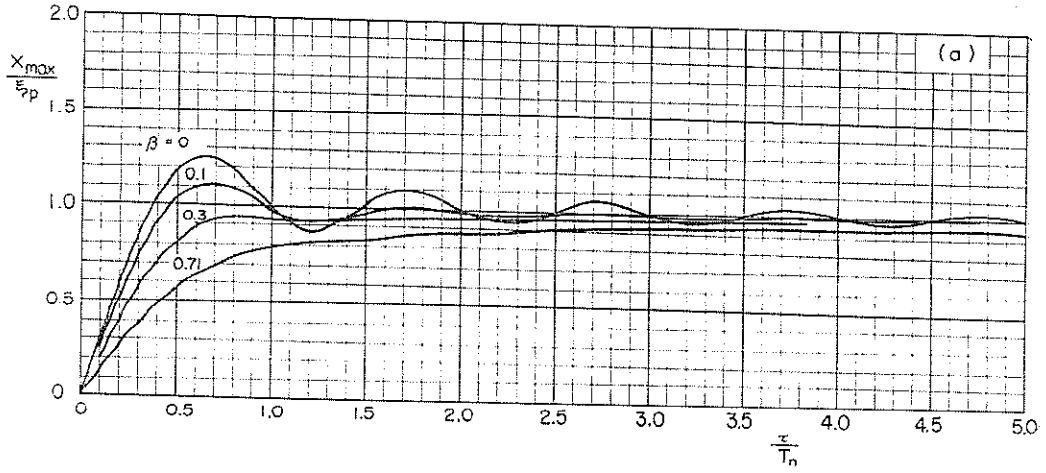


図-B. 4 後傾三角パルスに対する応答スペクトル
 Fig. B. 4 Response Spectra to Triangular Pulse with Vertical Decay

(5) 正弦波パルス (Half-cycle Sine Pulse)

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \xi_p \sin \frac{\pi}{\tau} t & 0 \leq t < \tau \\ &= 0 & t \geq \tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A. 5. 1)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{\xi_p}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2\right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{\tau} t - \gamma\right) - \frac{\pi}{\omega_n \tau} e^{-\beta \omega_n t} \sin(\omega t - \delta) \right] & 0 \leq t < \tau \\ &= -\frac{\pi \xi_p}{\omega_n \tau \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2\right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2}} \left\{ e^{-\beta \omega_n t} \sin(\omega t - \delta) + e^{-\beta \omega_n (t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau) - \delta] \right\} & t \geq \tau \end{aligned} \right\} (A. 5. 2)$$

ただし $\gamma = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)}{1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2} \right]$ $0 \leq \gamma \leq \pi$ (A. 5. 3)

$\delta = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2 - 2\beta^2} \right]$ $0 \leq \delta \leq \pi$ (A. 5. 4)

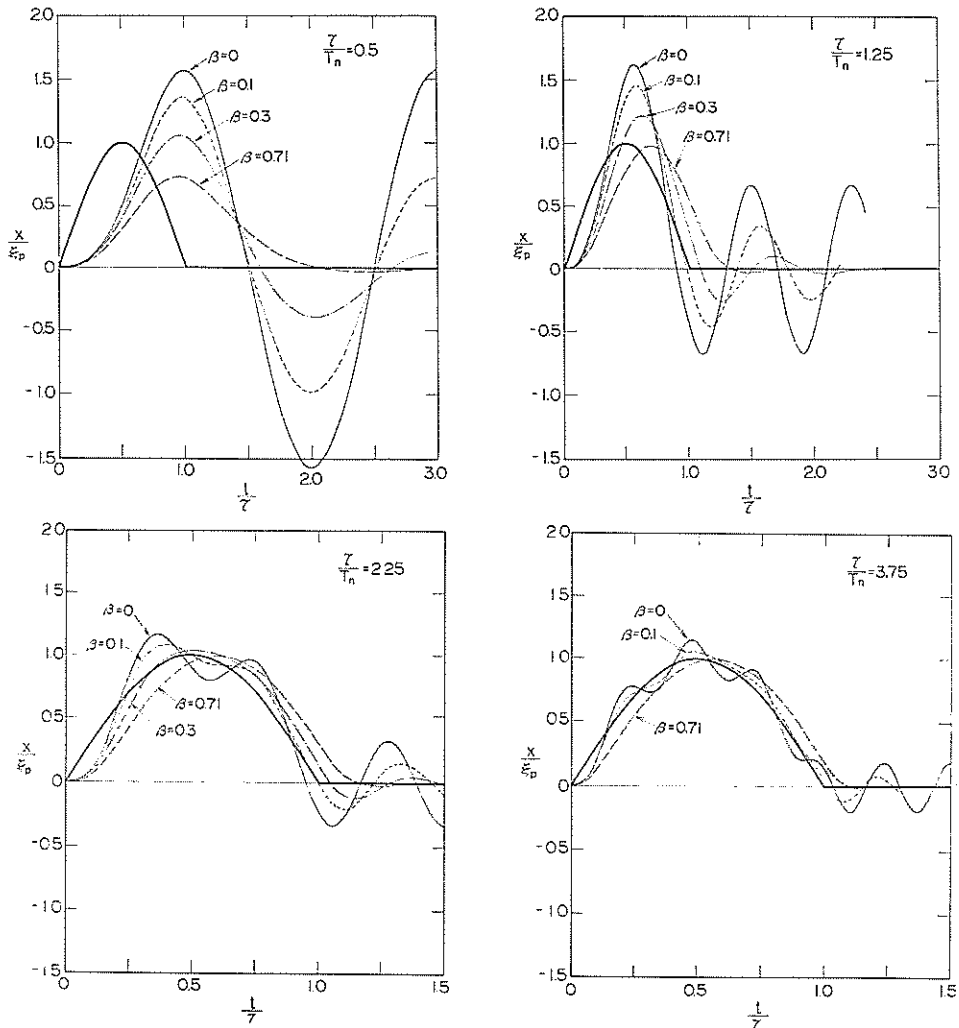


図-A. 5 正弦波パルスに対する応答波形
Fig. A. 5 Time Response Curves to Half-cycle Sine Pulse

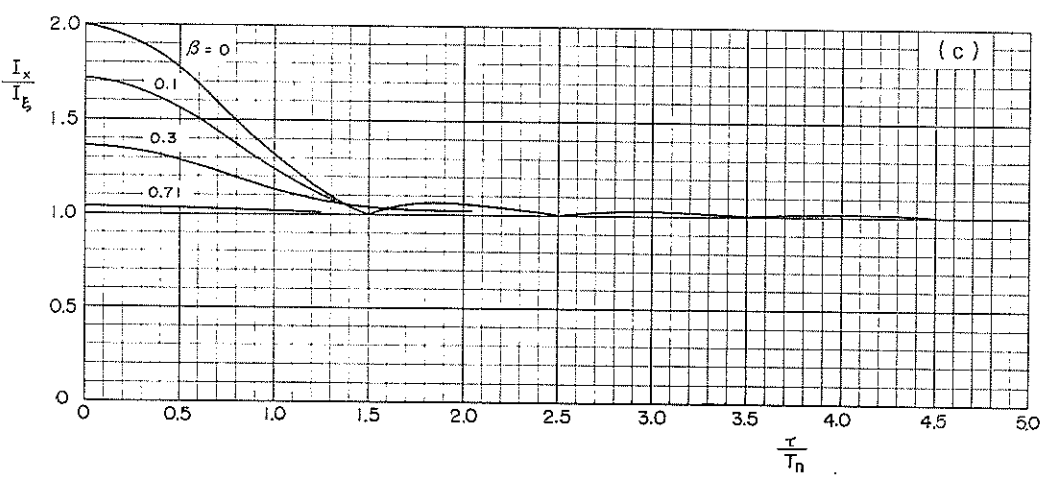
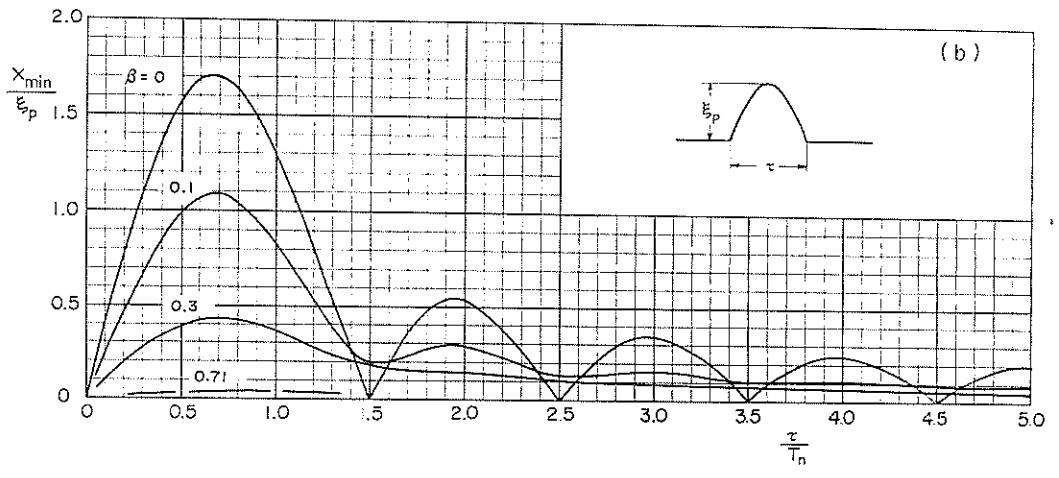
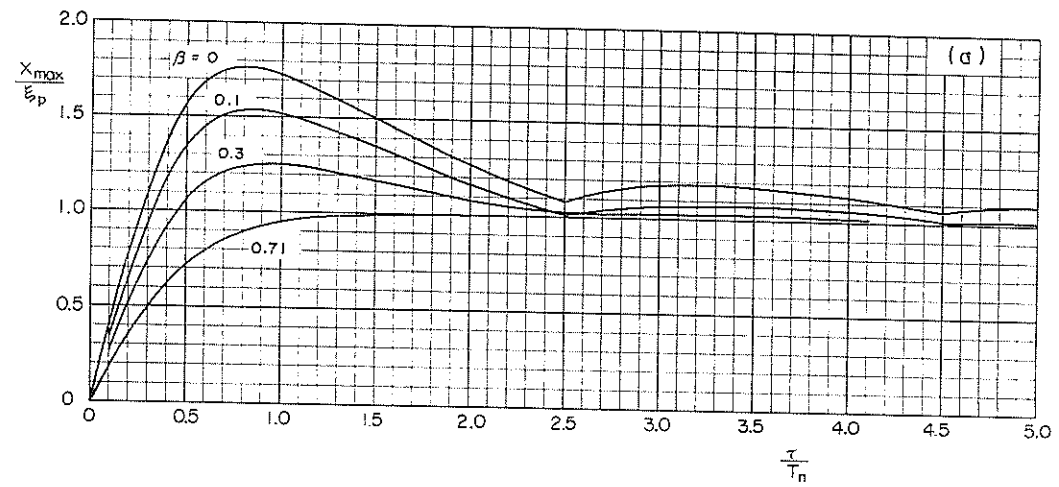


図-B. 5 正弦波パルスに対する応答スペクトル
 Fig. B. 5 Response Spectra to Half-cycle Sine Pulse

(6) 逆余弦パルス (Versed-Cosine Pulse)

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi_p \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\tau} t\right) & 0 \leq t < \tau \\ = 0 & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A. 6. 1)$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi_p \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta \omega_n t} \cos(\omega t - \varepsilon) \right] \\ - \frac{\xi_p}{2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\pi}{\omega_n \tau}\right)^2\right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{2\pi}{\omega_n \tau}\right)^2}} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t - \gamma'\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta \omega_n t} \cos(\omega t - \delta') \right] & 0 \leq t < \tau \\ = \frac{\xi_p}{2\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \left[e^{-\beta \omega_n(t-\tau)} \cos[\omega(t-\tau) - \varepsilon] - e^{-\beta \omega_n t} \cos(\omega t - \varepsilon) \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\pi}{\omega_n \tau}\right)^2\right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{2\pi}{\omega_n \tau}\right)^2}} \left[e^{-\beta \omega_n(t-\tau)} \cos[\omega(t-\tau) - \delta'] - e^{-\beta \omega_n t} \cos(\omega t - \delta') \right] \right\} & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A. 6. 2)$$

ただし $\gamma' = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta \left(\frac{2\pi}{\omega_n \tau}\right)}{1 - \left(\frac{2\pi}{\omega_n \tau}\right)^2} \right] \quad 0 \leq \gamma' \leq \pi \quad \dots\dots\dots (A. 6. 3)$

$\delta' = \tan^{-1} \left[\frac{1 + \left(\frac{2\pi}{\omega_n \tau}\right)^2}{1 - \left(\frac{2\pi}{\omega_n \tau}\right)^2} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \quad 0 \leq \delta' \leq \pi \quad \dots\dots\dots (A. 6. 4)$

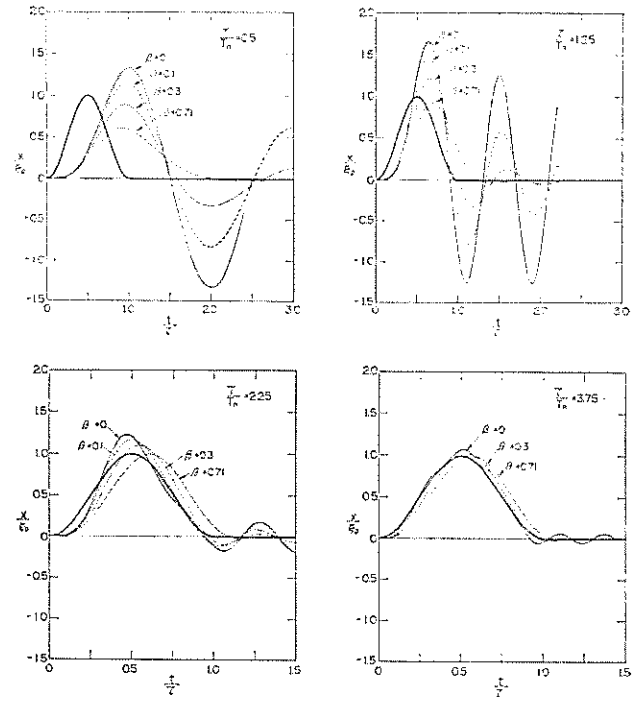


図-A. 6 逆余弦パルスに対する応答波形
Fig. A. 6 Time Response Curves to Versed-Cosine Pulse

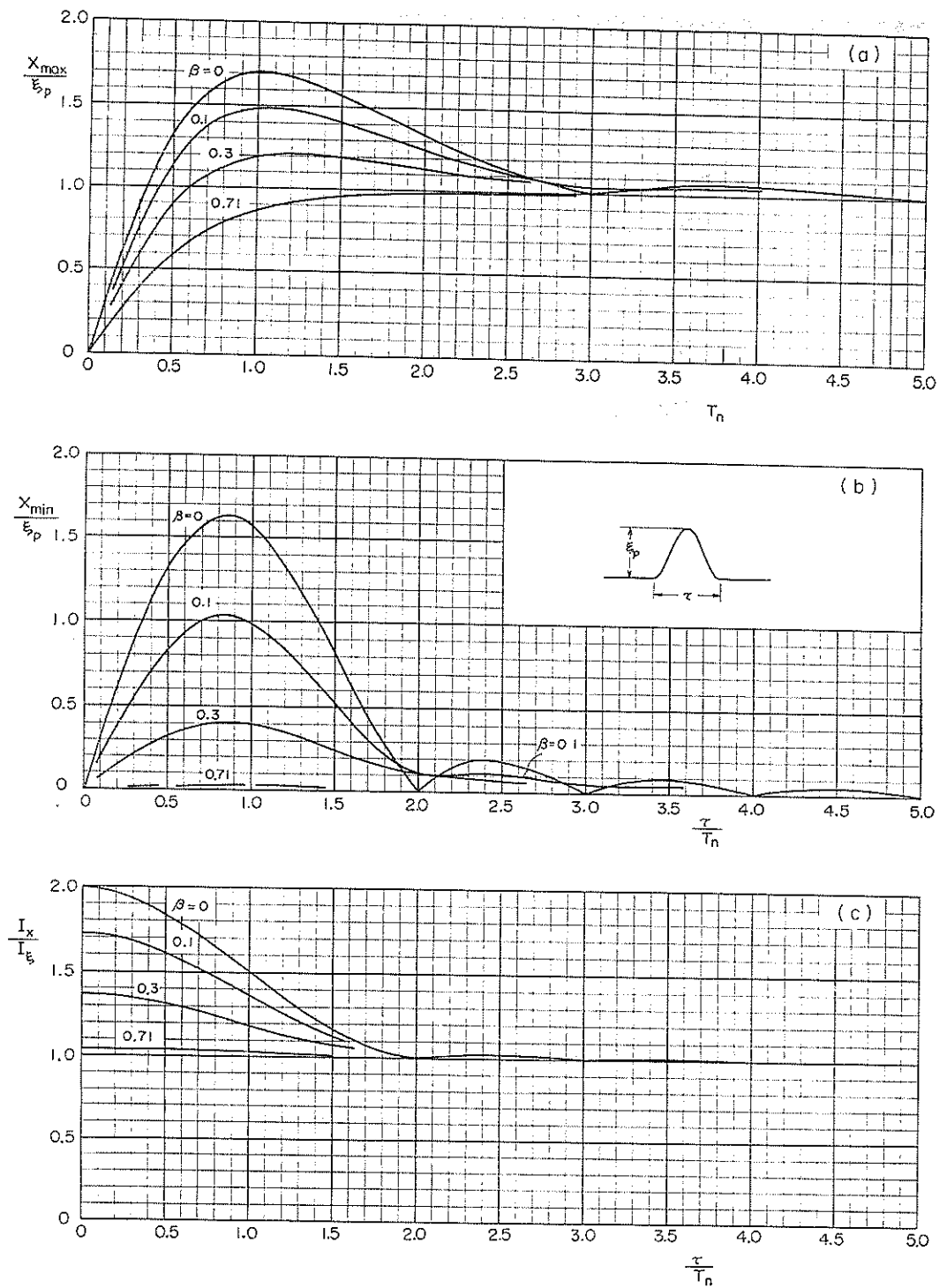


図-B. 6 逆余弦パルスに対する応答スペクトル
 Fig. B. 6 Response Spectra to Versed-Cosine Pulse

(7) 減衰正弦波 [$\lambda=2$] (Exponential Sine Function Excitation)

$$\xi(t) = \xi_p K_\lambda e^{-\lambda \frac{\pi}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t \quad [\text{ただし, } K_\lambda = \sqrt{1+\lambda^2} \exp(\lambda \cot^{-1} \lambda)] \quad t \geq 0 \dots\dots\dots (\text{A. 7. 1})$$

$$x(t) = \frac{\xi_p K_\lambda}{\sqrt{\left[1 - (1+\lambda^2) \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2\right]^2 + 4 \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right) \left(\beta - \lambda \frac{\pi}{\omega_n \tau}\right) \left[\beta(1+\lambda^2) \frac{\pi}{\omega_n \tau} - \lambda\right]}} \times \left\{ e^{-\lambda \frac{\pi}{\tau} t} \sin \left(\frac{\pi}{\tau} t - \gamma''\right) - \frac{\pi}{\omega_n \tau} e^{-\beta \omega_n t} \sin(\omega t - \delta'') \right\} \quad t \geq 0 \dots\dots\dots (\text{A. 7. 2})$$

ただし

$$\gamma'' = \tan^{-1} \left[\frac{2 \frac{\pi}{\omega_n \tau} \left(\beta - \lambda \frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)}{1 - (1+\lambda^2) \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2 - 2 \lambda \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right) \left(\beta - \lambda \frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)} \right] \quad 0 \leq \gamma'' \leq \pi \dots\dots\dots (\text{A. 7. 3})$$

$$\delta'' = \tan^{-1} \left[\frac{2 \left(\beta - \lambda \frac{\pi}{\omega_n \tau}\right) \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (1+\lambda^2) \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2 - 2 \beta \left(\beta - \lambda \frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)} \right] \quad 0 \leq \delta'' \leq \pi \dots\dots\dots (\text{A. 7. 4})$$

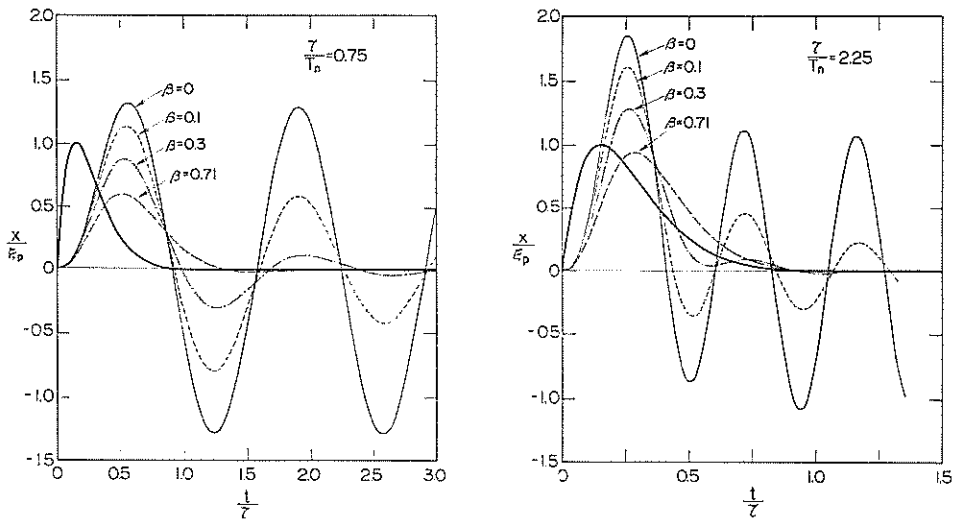


図-A. 7 減衰正弦波 ($\lambda=2$) に対する応答波形
Fig. A. 7 Time Response Curves to Exponential Sine Function Excitation ($\lambda=2$)

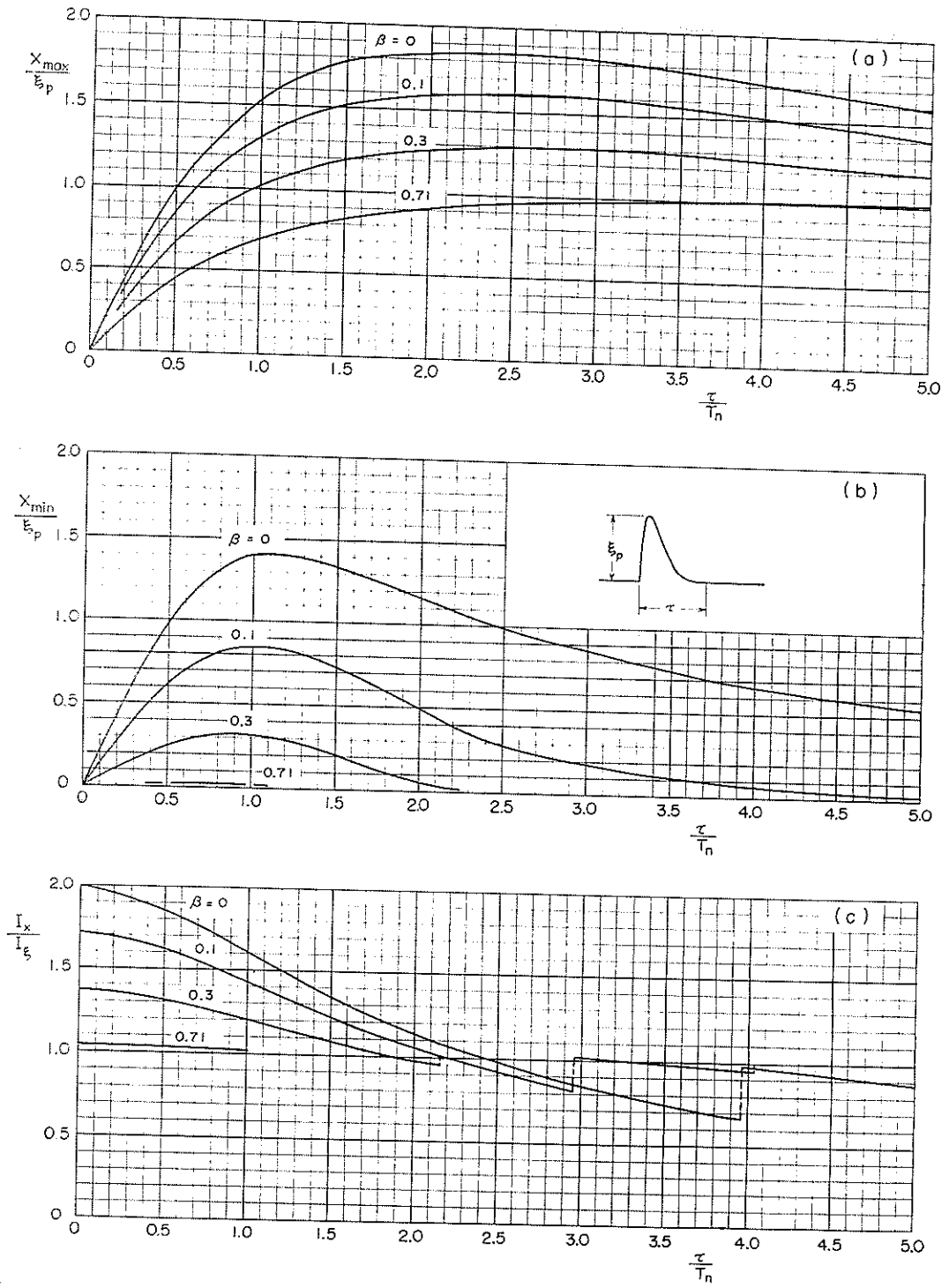


図-B. 7 減衰正弦波 ($\lambda=2$) に対する応答スペクトル
 Fig. B. 7 Response Spectra to Exponential Sine Function Excitation ($\lambda=2$)

(8) 減衰正弦波 [$\lambda=0.1$] (Exponential Sine Function Excitation)

入力関数 $\xi(t)$ および応答関数 $x(t)$ は式 (A.7.1) および (A.7.2) と同一である。

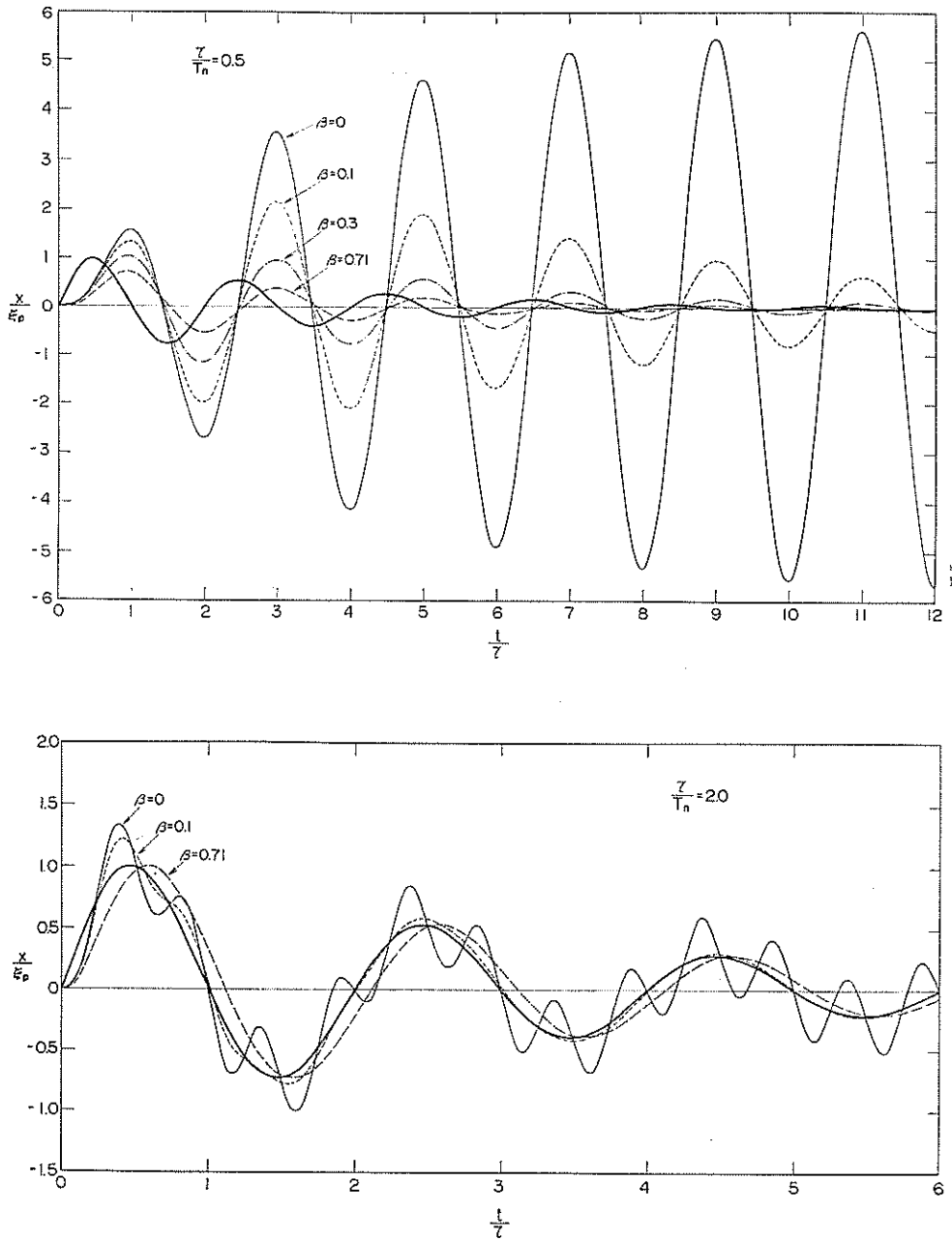


図-A. 8 減衰正弦波 ($\lambda=0.1$) に対する応答波形
Fig. A. 8 Time Response Curves to Exponential Sine Function Excitation ($\lambda=0.1$)

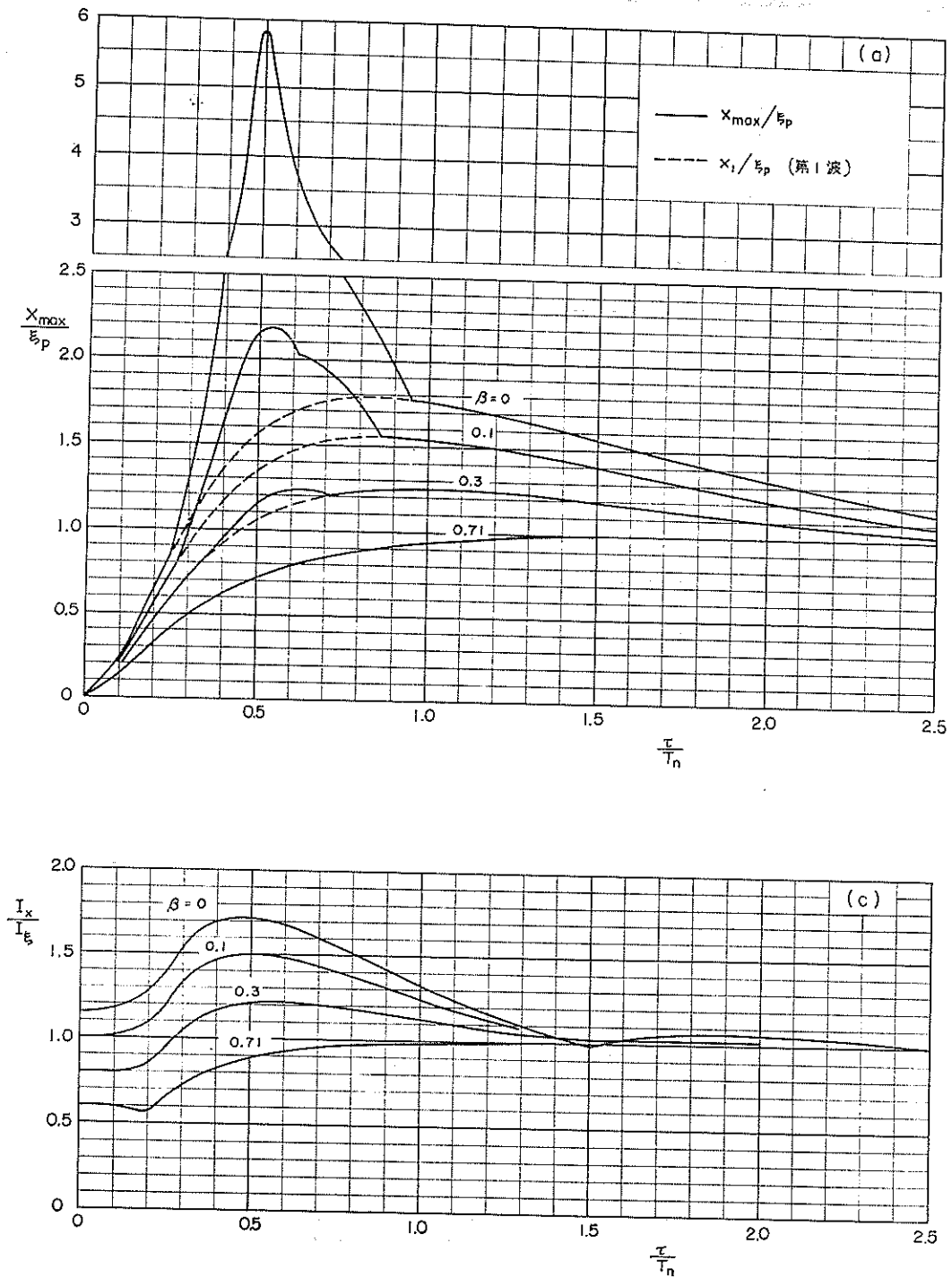


図-B. 8 減衰正弦波 ($\lambda=0.1$) に対する応答スペクトル
 Fig. B. 8 Response Spectra to Exponential Sine Function Excitation ($\lambda=0.1$)

(9) 矩形パルス—2 段振動系— (Rectangular Pulse : Two-Step Oscillator)

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \xi_p & 0 \leq t < \tau \\ &= 0 & t \geq \tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A. 9. 1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \xi_p [1 - \cos \omega_n t] & 0 \leq t < \tau \\ &= \xi_p [\cos \omega_n (t - \tau) - \cos \omega_n t] & t \geq \tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A. 9. 2)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= \xi_p \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta \omega_n t} \cos (\Omega t - \varepsilon) \right] \\ &\quad - \frac{\xi_p}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n} \right)^2}} \left[\cos (\omega_n t - \gamma_1) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta \omega_n t} \cos (\Omega t - \delta_1) \right] & 0 \leq t < \tau \\ &= \frac{\xi_p}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ e^{-\beta \omega_n (t-\tau)} \cos [\Omega (t-\tau) - \varepsilon] - e^{-\beta \omega_n t} \cos (\Omega t - \varepsilon) \right\} \\ &\quad - \frac{\xi_p}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n} \right)^2}} \left\{ \cos \omega_n (t - \gamma_1) - \cos [\omega_n (t - \tau) - \gamma_1] - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta \omega_n t} \cos \Omega (t - \delta_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta \omega_n (t-\tau)} \cos [\Omega (t-\tau) - \delta_1] \right\} & t \geq \tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A. 9. 3)$$

ただし

$$\gamma_1 = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta \omega_n / \Omega_n}{1 - (\omega_n / \Omega_n)^2} \right] \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \pi \quad \dots\dots\dots (A. 9. 4)$$

$$\delta_1 = \tan^{-1} \left[\frac{1 + (\omega_n / \Omega_n)^2}{1 - (\omega_n / \Omega_n)^2} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \quad 0 \leq \delta_1 \leq \pi \quad \dots\dots\dots (A. 9. 5)$$

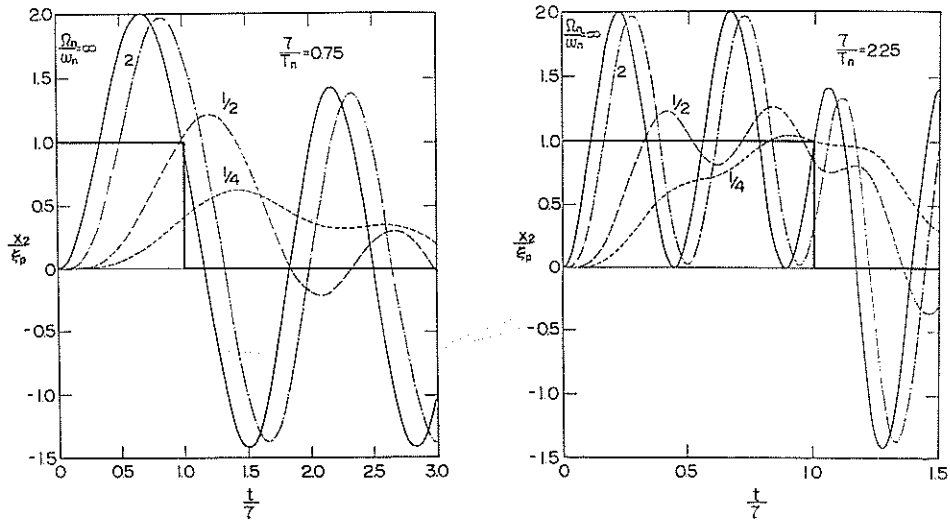


図-A. 9 矩形パルスに対する2 段振動系の応答波形
Fig. A. 9 Time Response Curves of Two-Step Oscillator to Rectangular Pulse

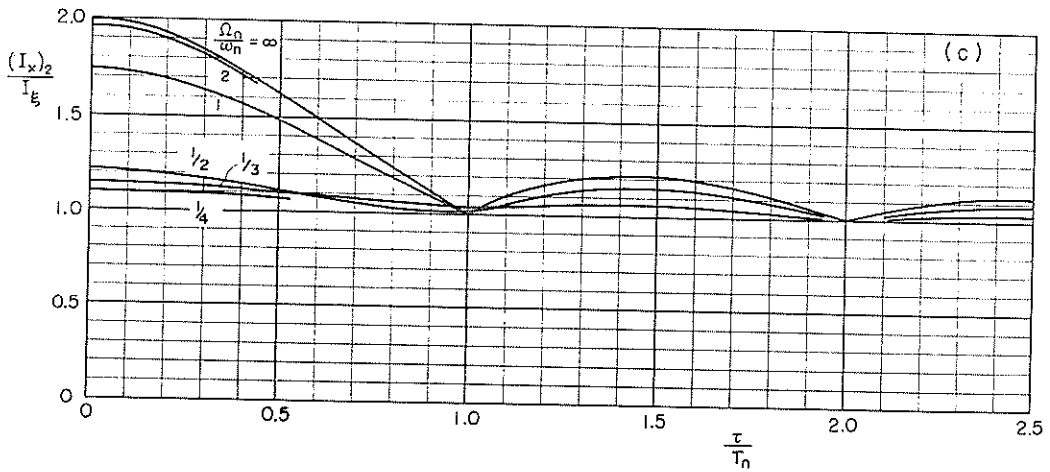
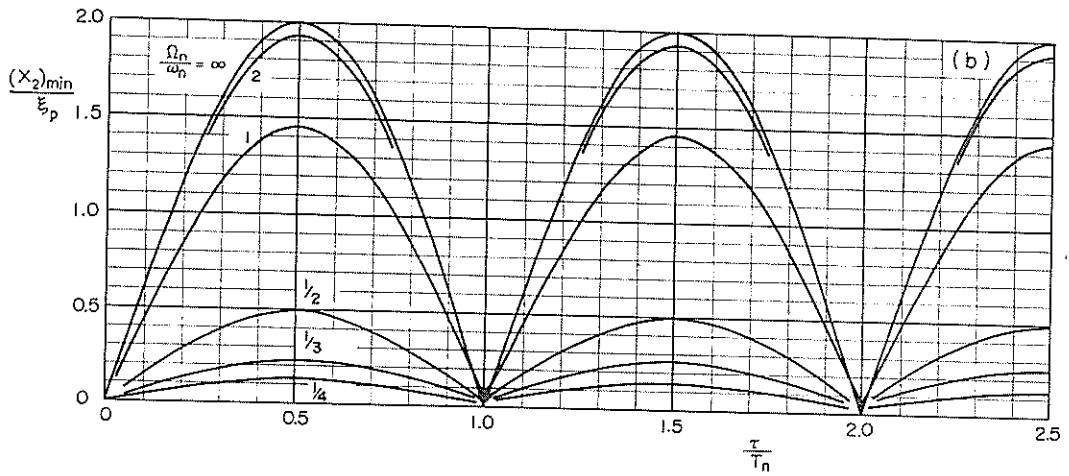
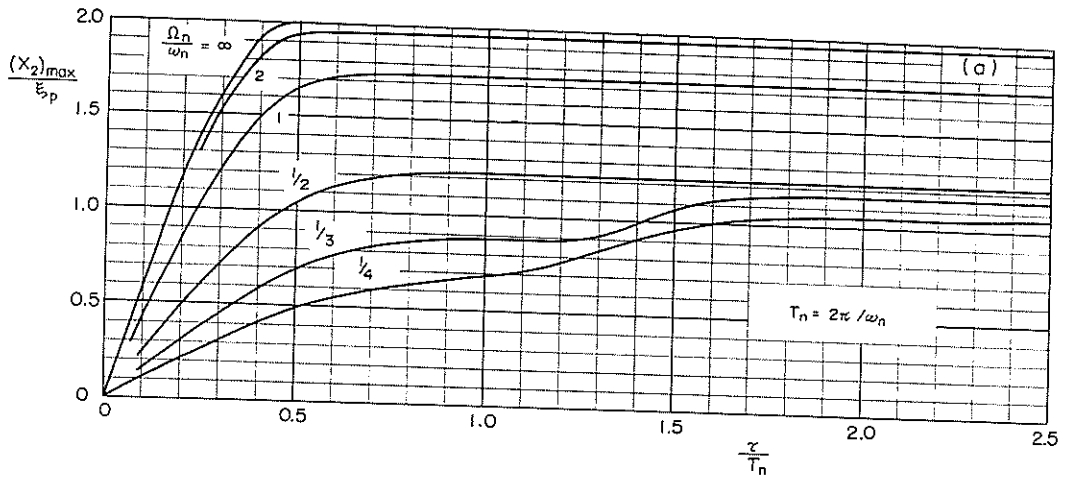


図-B. 9 矩形パルスに対する2段振動系の応答スペクトル
 Fig. B. 9 Response Spectra of Two-Step Oscillator to Rectangular Pulse

(10) 正弦波パルス—2 段振動系— (Half-cycle Sine Pulse : Two-Step Oscillator)

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_p \sin \frac{\pi}{\tau} t & 0 \leq t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A. 10. 1)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} -\frac{\xi_p}{1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2} \left[\sin \frac{\pi}{\tau} t - \frac{\pi}{\omega_n \tau} \sin \omega_n t \right] & 0 \leq t < \tau \\ -\frac{\pi \xi_p}{\omega_n \tau \left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2 \right]} \left[\sin \omega_n (t - \tau) - \sin \omega_n t \right] & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A. 10. 2)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{\xi_p}{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2 \right] \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\Omega_n \tau}\right)^2 \right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\pi}{\Omega_n \tau}\right)^2}} \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{\tau} t - \gamma_2 \right) - \frac{\pi}{\Omega_n \tau} e^{-\beta \Omega_n t} \sin (\Omega t - \delta_2) \right\} \\ - \frac{\left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right) \xi_p}{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2 \right] \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n}\right)^2 \right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n}\right)^2}} \left\{ \sin (\omega_n t - \gamma_3) - \frac{\omega_n}{\Omega_n} e^{-\beta \Omega_n t} \sin (\Omega t - \delta_3) \right\} & 0 \leq t < \tau \\ - \frac{\left(\frac{\pi}{\Omega_n \tau}\right) \xi_p}{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2 \right] \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\Omega_n \tau}\right)^2 \right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\pi}{\Omega_n \tau}\right)^2}} \left\{ e^{-\beta \Omega_n (t - \tau)} \sin [\Omega (t - \tau) - \delta_2] + e^{-\beta \Omega_n t} \sin (\Omega t - \delta_2) \right\} \\ - \frac{\left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right) \xi_p}{\left[1 - \left(\frac{\pi}{\omega_n \tau}\right)^2 \right] \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n}\right)^2 \right]^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\omega_n}{\Omega_n}\right)^2}} \left\{ \sin (\omega_n t - \gamma_3) - \sin [\omega_n (t - \tau) - \gamma_3] - \frac{\omega_n}{\Omega_n} e^{-\beta \Omega_n t} \sin (\Omega t - \delta_3) \right. \\ \left. + \frac{\omega_n}{\Omega_n} e^{-\beta \Omega_n (t - \tau)} \sin [\Omega (t - \tau) - \delta_3] \right\} & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A. 10. 3)$$

ただし

$$\gamma_2 = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta(\pi/\Omega_n \tau)}{1 - (\pi/\Omega_n \tau)^2} \right]$$

$$\gamma_3 = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta(\omega_n/\Omega_n)}{1 - (\omega_n/\Omega_n)^2} \right]$$

$$\delta_2 = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (\pi/\Omega_n \tau)^2 - 2\beta^2} \right]$$

$$\delta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{2\beta\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (\omega_n/\Omega_n)^2 - 2\beta^2} \right]$$

$$0 \leq \gamma_2 \leq \pi \quad \dots\dots\dots (A. 10. 4)$$

$$0 \leq \gamma_3 \leq \pi \quad \dots\dots\dots (A. 10. 5)$$

$$0 \leq \delta_2 \leq \pi \quad \dots\dots\dots (A. 10. 6)$$

$$0 \leq \delta_3 \leq \pi \quad \dots\dots\dots (A. 10. 7)$$

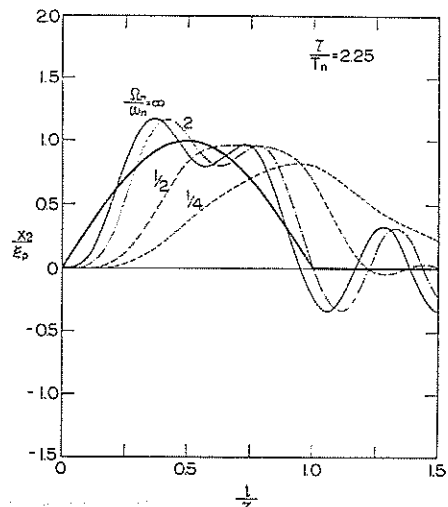
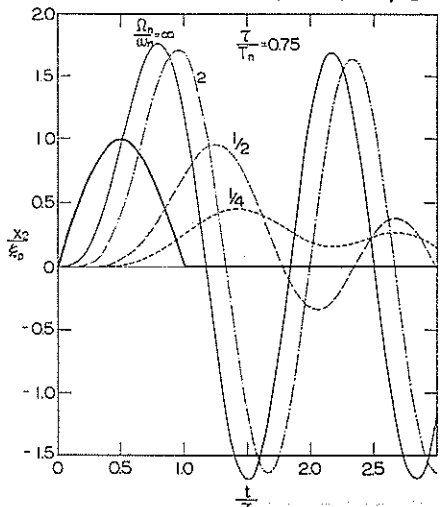


図-A. 10 正弦波パルスに対する2段振動系の応答波形
Fig. A. 10 Time Response Curves of Two-Step Oscillator to Half-cycle Sine Pulse

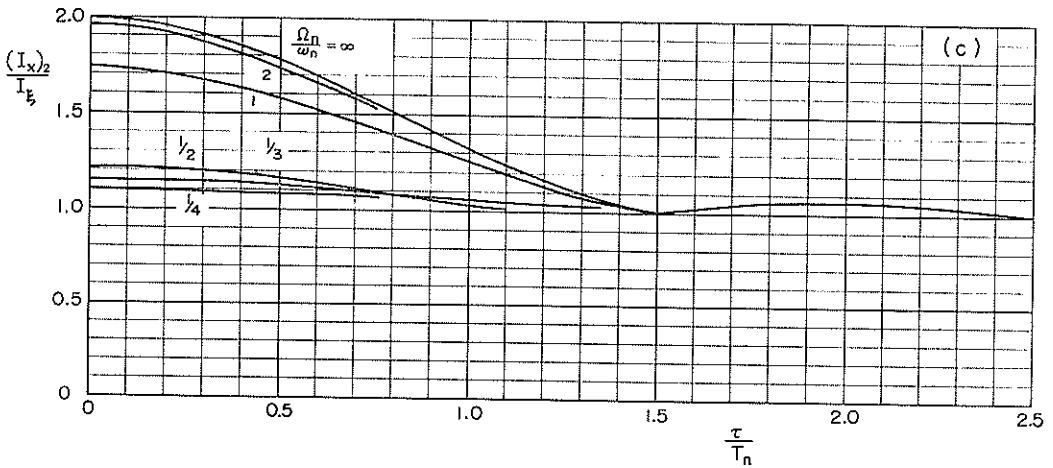
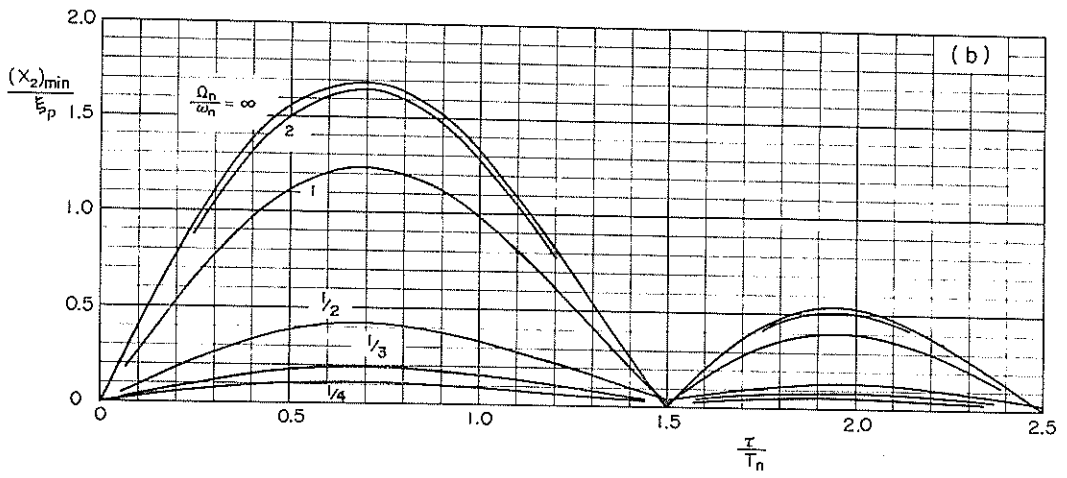
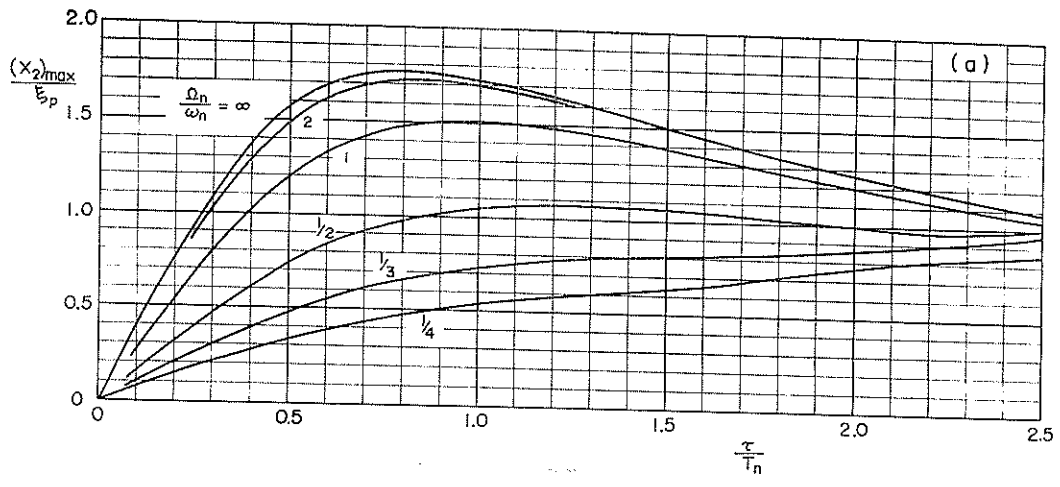


図-B. 10 正弦波パルスに対する2段振動系の応答スペクトル
 Fig. B. 10 Response Spectra of Two-Step Oscillator to Half-cycle Sine Pulse

港湾技研資料 No. 33

1967年11月

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発行所 運輸省港湾技術研究所
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所 株式会社 第一印刷所
東京都中央区湊町2-16