

円孔における応力集中

野津

1. はじめに

半径 a の円孔を有する薄板（図-1）に対して，無限遠方で引張応力が一様に σ_∞ となるように载荷を行った場合，円孔の左右端には大きさ $3\sigma_\infty$ の引張応力が，円孔の上下端には大きさ σ_∞ の圧縮応力が，それぞれ作用する．その大きさは円孔の半径に依存しない．Scholz の教科書¹⁾でも紹介されているこの結果について本稿では説明している．

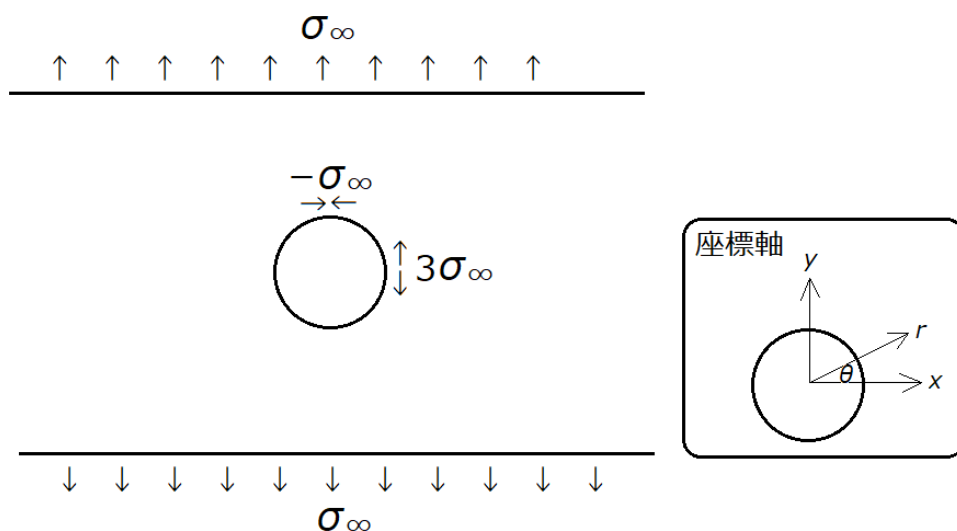


図-1 円孔における応力集中

2. Airy の応力関数

図-1 の枠内に示すように座標軸をとる．また，薄板は平面応力状態にあるものとする．このとき，[弾性波動論の基礎](#)を参照すると，支配方程式は次のようになる．まず力のつり合いを表す式は

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

である．ここに σ_x は x 方向の直応力， σ_y は y 方向の直応力， τ はせん断応力である．応力～ひずみ関係は

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (3)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4)$$

$$\tau = G\gamma \quad (5)$$

である．ここに ε_x は x 方向の直ひずみ， ε_y は y 方向の直ひずみ， γ はせん断ひずみ（工学ひずみ）， E はヤング率， ν はポアソン比， G はせん断弾性係数である．ひずみ変位関係は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7)$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8)$$

である．ここに u は x 方向の変位， v は y 方向の変位である．

一般に 2 次元静弾性問題を解くことは式(1)–(8)と境界条件を満足する変位，ひずみ，応力を求めることである．そのための便利なツールとして Airy の応力関数がある．Airy の応力関数を用いた 2 次元静弾性問題の解法では，

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0 \quad (9)$$

を満たす $\phi(x, y)$ が与えられたとき（この ϕ を Airy の応力関数という），それをもとに以下に述べる手順で変位，ひずみ，応力を算定すれば，それらが式(1)–(8)を満たすことを利用する．式(9)を満たす ϕ は無数に存在し，それに対応して式(1)–(8)を満たす変位，ひずみ，応力も無数に存在するが，それらが境界条件を満たすことが確認できれば，それらが最終的な解となる．

ただし，Airy の応力関数から応力，ひずみを算定する手順は様々な文献に書かれているが，変位を算定する手順は書かれていないことが多い．仮に式(1)–(5)を満たす応力，ひずみを求めることができたとしても，対応する変位の存在を示すことができないければ，2 次元静弾性問題を解いたことにならないのであるが，そのような変位の存在は必ずしも自明でない．そこで，ここでは少々面倒であるが，与えられた ϕ から式(1)–(8)を満たす変位，ひずみ，応力をセットで求める手順を示すことにする．その際， ϕ は弾性体が存在する範囲（この問題の場合 $r > a$ ）だけでなく全平面にわたり存在すると考えておくことにする．

まず，式(9)を満たす ϕ に対しては

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \int_0^y \phi(x, y') dy' + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \int_0^x \phi(x', y) dx' \right) = 0 \quad (10)$$

である．ただし，式(10)には積分が含まれているので，そもそもそのような積分が可能でなければならない．もしも ϕ の特異性が非常に強い場合，そのような積分が不可能となることはあり得るが，ここではそのような積分を不可能とするほど ϕ の特異性は強くないことを前提とする．実際，円孔の応力集中の問題に対応する ϕ （後述）は，原点で $\log r$ 程度の特異性を有するものの，それにより式(10)の積分が不可能となることはない．

式(10)より，左辺の括弧内は x のみの関数 $f(x)$ と y のみの関数 $g(y)$ を用いて

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \int_0^y \phi(x, y') dy' + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \int_0^x \phi(x', y) dx' = f(x) + g(y) \quad (11)$$

と書くことができる．この $f(x)$ と $g(y)$ を用いて u と v を次式で定めれば良い．

$$u = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^x \phi(x', y) dx' - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} - \int_0^y g(y') dy' \right) \quad (12)$$

$$v = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^y \phi(x, y') dy' - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} - \int_0^x f(x') dx' \right) \quad (13)$$

この u と v からひずみの各成分は式(6)–(8)より次式で与えられる.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \quad (14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

$$\gamma = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} \int_0^x \phi(x', y) dx' - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - g(y) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \int_0^y \phi(x, y') dy' - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - f(x) \right) \quad (16)$$

なお, 式(11)(16)より

$$\gamma = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

である. また, 応力の各成分は式(3)–(5)より次式で与えられる.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (18)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (19)$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (20)$$

これらは力のつり合いを表す式(1)(2)を満足することが確認できる. このように, Airy の応力関数をもとに式(1)–(8)を満たす変位, ひずみ, 応力をセットで求めることができる.

3. 極座標における Airy の応力関数

円孔における応力集中のような問題に対しては極座標を用いることが便利である. [円筒座標系における Navier の式](#)を参照すると, 式(9)の極座標表示は次のようになる.

$$\nabla^2(\nabla^2 \phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (21)$$

また, 極座標における応力成分 σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ と通常の直交座標における応力成分の関係は

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau \sin \theta \cos \theta \quad (22)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau \sin \theta \cos \theta \quad (23)$$

$$\tau_{r\theta} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (24)$$

である．式(18)–(20)を式(22)–(24)に代入し，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \quad (26)$$

であることを利用し整理すると

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (27)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (28)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (29)$$

が得られる．

4. 円孔における応力集中

円孔における応力集中の問題において考慮すべき境界条件は，式(22)–(24)より $r \rightarrow \infty$ において

$$\sigma_r \rightarrow \sigma_\infty \sin^2 \theta \quad (30)$$

$$\sigma_\theta \rightarrow \sigma_\infty \cos^2 \theta \quad (31)$$

$$\tau_{r\theta} \rightarrow \sigma_\infty \sin \theta \cos \theta \quad (32)$$

となることと $r = a$ において

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad (33)$$

となることである．このとき，Airy の応力関数として

$$\phi = \sigma_\infty \left[\left(\frac{1}{4} r^2 - \frac{a^2}{2} \log \left(\frac{r}{a} \right) \right) + \left(\frac{1}{4} r^2 + \frac{a^4}{4 r^2} - \frac{a^2}{2} \right) \cos 2\theta \right] \quad (34)$$

を用いれば良いことが知られている．実際，式(34)を式(21)に代入すれば，式(34)の ϕ が Airy の応力関数としての資格を有していることが確認できる．また，式(34)を式(27)–(29)に代入すると

$$\sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_\infty}{2} \left(-1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (35)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (36)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[\left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \right] \quad (37)$$

となるが、これらが上述の境界条件をいずれも満足していることも確認できる．式(36)で $r = a$ かつ $\theta = 0$ とおけば $\sigma_\theta = 3\sigma_\infty$ となる．また，式(36)で $r = a$ かつ $\theta = \pi/2$ とおけば $\sigma_\theta = -\sigma_\infty$ となる．

参考文献

- 1) Sholz, C.H.: The Mechanics of Earthquakes and Faulting, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.