

1. はじめに

ハスケルモデル¹⁾に基づく理論地震動は ω^{-3} モデルに従うのに対し、Sato and Hirasawa の円形クラックモデル³⁾に基づく理論地震動は ω^{-2} モデル⁴⁾に従うことが知られている。本稿では Sato and Hirasawa の円形クラックモデルから計算される変位波形、加速度フーリエスペクトルの高周波側の特性、コーナー周波数などについて説明している。特に、原論文では詳しく述べられていない変位波形を求めるための積分について詳しく解説している。なお、破壊領域が矩形であるハスケルモデルが ω^{-3} モデルに従う理論地震動を生成するのにに対し、破壊領域が円形である Sato and Hirasawa のモデルが ω^{-2} モデルに従う理論地震動を生成することから、破壊領域を円形としたことが ω^{-2} モデルに従う理論地震動の生成に結びついていると考えられがちであるが、実はそうではない。この点については付録で説明する。

2. すべりの時空間分布

図-1 に示すように半径 L の円形断層を考え、断層面内に x_1 軸と x_2 軸を、断層面に垂直に x_3 軸をとる。すべりの向きは x_1 方向とする。Sato and Hirasawa の円形クラックモデルでは、原点から同心円状に速度 v でクラックが拡大すると考えている。そして、時々刻々のすべり分布 $D(\rho, t)$ は、半径 vt の円形クラックで一様な応力降下 $\Delta\sigma$ が生じた場合のすべり分布の解析解⁵⁾ (ただしポアソン比 $\nu = 1/4$ の場合) に従うと仮定している。

$$D(\rho, t) = K\sqrt{(vt)^2 - \rho^2} \quad (0 < t < L/v, 0 < \rho < vt) \quad (1)$$

$$K = \frac{24 \Delta\sigma}{7\pi \mu} \quad (2)$$

ここに ρ は円の中心からの距離、 μ はラメ定数である。クラックの拡大は半径が L となった時点で急激に停止するとしており、それ以降はすべりは増えない。

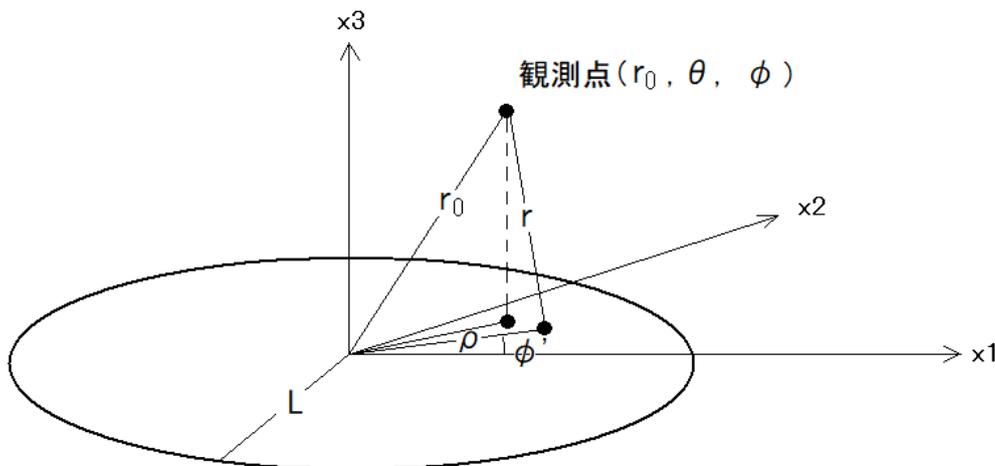


図-1 対象とする円形断層と観測点

3. 変位波形

観測点の座標は球座標 (r_0, θ, ϕ) で表す。 (x_1, x_2, x_3) と (r_0, θ, ϕ) との対応関係は以下の通りである。

$$\begin{aligned} x_1 &= r_0 \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= r_0 \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= r_0 \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

断層面上の任意の点から観測点までの距離を r とすると、[全無限弾性体における点震源による地震動](#)の式(12) (または文献 4)の式(4.32) より、変位波形 (遠地項) は次式で与えられる。

$$u_r = \frac{(\beta/\alpha)^3}{4\pi\beta r_0} \sin 2\theta \cos \phi I_\alpha \quad (4)$$

$$u_\theta = \frac{1}{4\pi\beta r_0} \cos 2\theta \cos \phi I_\beta \quad (5)$$

$$u_\phi = \frac{-1}{4\pi\beta r_0} \cos 2\theta \sin \phi I_\beta \quad (6)$$

ここに α はP波速度、 β はS波速度であり、

$$I_c = \iint \dot{D}(\rho, t - r/c) dS \quad (7)$$

である。式(7)において c は α と β のいずれかである。

式(1)より

$$\dot{D}(\rho, t) = K \frac{v^2 t}{\sqrt{(vt)^2 - \rho^2}} \quad (0 < t < L/v, 0 < \rho < vt) \quad (8)$$

である。いま、観測点方向の単位ベクトルは

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

で表されるので、ベクトル $(\rho \cos \phi', \rho \sin \phi', 0)$ の \hat{r} 方向の方向余弦を考慮することで r は

$$r \approx r_0 - \rho \sin \theta \cos(\phi - \phi') \quad (10)$$

と近似することができ、

$$t - \frac{r}{c} \approx t - \frac{r_0}{c} + \frac{\rho}{c} \sin \theta \cos(\phi - \phi') \quad (11)$$

である。ここで

$$\tau = t - \frac{r_0}{c} \quad (12)$$

$$k = \frac{v}{c} \sin \theta \quad (13)$$

とおくと

$$t - \frac{r}{c} \approx \tau + \frac{\rho}{v} k \cos(\phi - \phi') \quad (14)$$

であり, さらに

$$x = \frac{v}{L} \tau \quad (15)$$

とおくと

$$t - \frac{r}{c} \approx \frac{1}{v} [Lx + \rho k \cos(\phi - \phi')] \quad (16)$$

である. これと式(8)より

$$\dot{D}(\rho, t - r/c) = K \frac{v[Lx + \rho k \cos(\phi - \phi')]}{\sqrt{[Lx + \rho k \cos(\phi - \phi')]^2 - \rho^2}} \quad (0 < \rho < Lx + \rho k \cos(\phi - \phi') < L) \quad (17)$$

である (括弧内は積分すべき範囲を示している). さらに

$$y = \frac{\rho}{L} \quad (18)$$

とおけば

$$\dot{D}(\rho, t - r/c) = Kv \frac{x + ky \cos(\phi - \phi')}{\sqrt{[x + ky \cos(\phi - \phi')]^2 - y^2}} \quad (0 < y < x + ky \cos(\phi - \phi') < 1) \quad (19)$$

である (括弧内は積分すべき範囲を示している). これと式(7)より

$$I_c = \iint Kv \frac{x + ky \cos(\phi - \phi')}{\sqrt{[x + ky \cos(\phi - \phi')]^2 - y^2}} \rho d\rho d\phi' = \iint Kv \frac{x + ky \cos(\phi - \phi')}{\sqrt{[x + ky \cos(\phi - \phi')]^2 - y^2}} L^2 y dy d\phi' \quad (20)$$

である. ここで

$$\xi = y \cos(\phi' - \phi) \quad (21)$$

$$\eta = y \sin(\phi' - \phi) \quad (22)$$

により変数変換を行うと

$$I_c = KvL^2 \iint \frac{x+k\xi}{\sqrt{(x+k\xi)^2 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi d\eta \quad (23)$$

である。ここで積分を行うべき範囲は

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} < x + k\xi \quad (24)$$

$$x + k\xi < 1 \quad (25)$$

のいずれもが成り立つ範囲である。式(24)は

$$\left(\xi - \frac{kx}{1-k^2}\right)^2 + \frac{\eta^2}{1-k^2} = \left(\frac{x}{1-k^2}\right)^2 \quad (26)$$

で表される楕円の内部を表す。この楕円の右端の ξ 座標は $x/(1-k)$ であるため、 $0 < x < 1-k$ の場合は式(25)の条件は不要となり、積分範囲は図-2左に示すように楕円の内部全域となる。一方、 $1-k < x < 1+k$ の場合は式(25)の条件が効いてきて、積分範囲は図-2右に示すように楕円の一部が欠けた形となる。 $1+k < x$ の場合は積分すべき範囲がない。すなわち変位波形はゼロである。

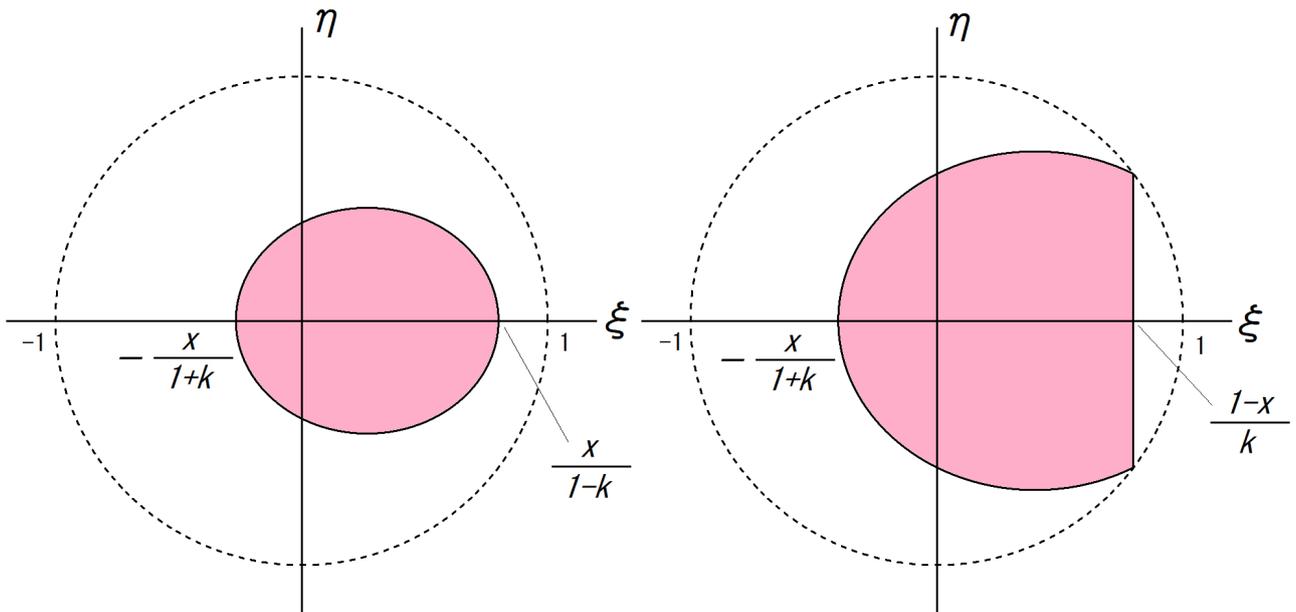


図-2 積分すべき範囲。左は $0 < x < 1-k$ の場合。右は $1-k < x < 1+k$ の場合。

先に ξ で積分しようとする場合分けが生じるので、先に η で積分する。積分区間の下端 η_1 と上端 η_2 はそれぞれ

$$\eta_1 = -\sqrt{(x+k\xi)^2 - \xi^2} \quad (27)$$

$$\eta_2 = +\sqrt{(x+k\xi)^2 - \xi^2} \quad (28)$$

である。いま図-3に示すように半径 $\sqrt{(x+k\xi)^2 - \xi^2}$ の円を考え、点 $(\eta_2, 0)$ を通る傾き $(-t)$ の直線と円との交点から降ろした垂線の足を $(\eta, 0)$ とすることにより t と η を対応付け、 η から t への変数変換を行う。 η と t の対応関係は

$$\eta = \frac{t^2-1}{t^2+1} \eta_2 \quad (29)$$

であるから

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{4t}{(t^2+1)^2} \eta_2 \quad (30)$$

である。また、 η が η_1 から η_2 まで変化するとき t は0から ∞ まで変化する。よって式(23)より

$$\begin{aligned} I_c &= KvL^2 \int d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{x+k\xi}{\sqrt{(x+k\xi)^2 - \xi^2 - \eta^2}} d\eta = KvL^2 \int d\xi \int_0^\infty \frac{x+k\xi}{\sqrt{(x+k\xi)^2 - \xi^2 - \eta^2}} \frac{d\eta}{dt} dt \\ &= 2KvL^2 \int (x+k\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} dt = 2KvL^2 \int (x+k\xi) d\xi [\text{Tan}^{-1} t]_0^\infty \\ &= \pi KvL^2 \int (x+k\xi) d\xi \end{aligned} \quad (31)$$

である。

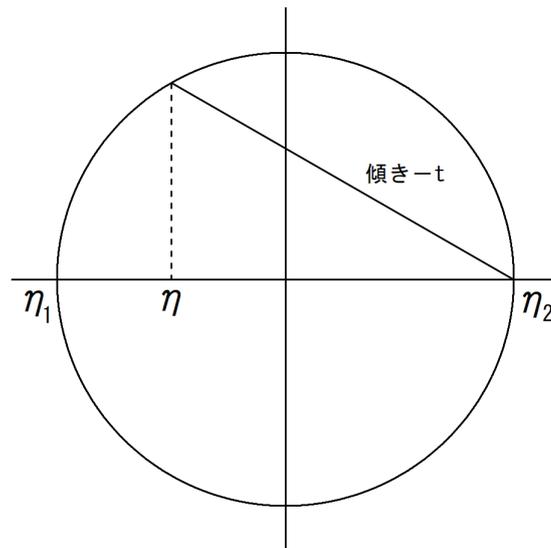


図-3 η から t への変数変換

最後に ξ に関する積分を行うと、 $0 < x < 1 - k$ の場合は

$$I_c = \pi KvL^2 \int_{-x/(1+k)}^{x/(1-k)} (x+k\xi) d\xi = 2KvL^2 \frac{\pi}{(1-k^2)^2} x^2 \quad (32)$$

であり、 $1 - k < x < 1 + k$ の場合は

$$I_c = \pi K v L^2 \int_{-x/(1+k)}^{(1-x)/k} (x + k\xi) d\xi = 2KvL^2 \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k(1+k)^2} x^2 \right] \quad (33)$$

である。 $v/\beta = 0.8$ の場合について方位別の変位波形 (S 波) のプロットを図-4 に示す。ここでは $I_\beta/(KvL^2)$ を x に対してプロットしている。図の ∇ はクラック端部のうち観測点に最も近い箇所からの stopping phase の到来時刻を、図の \blacktriangledown はクラック端部のうち観測点から最も遠い箇所からの stopping phase の到来時刻をそれぞれ示す。 $\theta = 30^\circ$, 60° , 90° では ∇ と \blacktriangledown の時刻に変位波形の一階微分が不連続となっており、この震源モデルでは変位波形の高周波成分に対して stopping phase が支配的であることがわかる。なお、 $\theta = 0^\circ$ では ∇ と \blacktriangledown の時刻が一致しており、変位波形が不連続となっている。

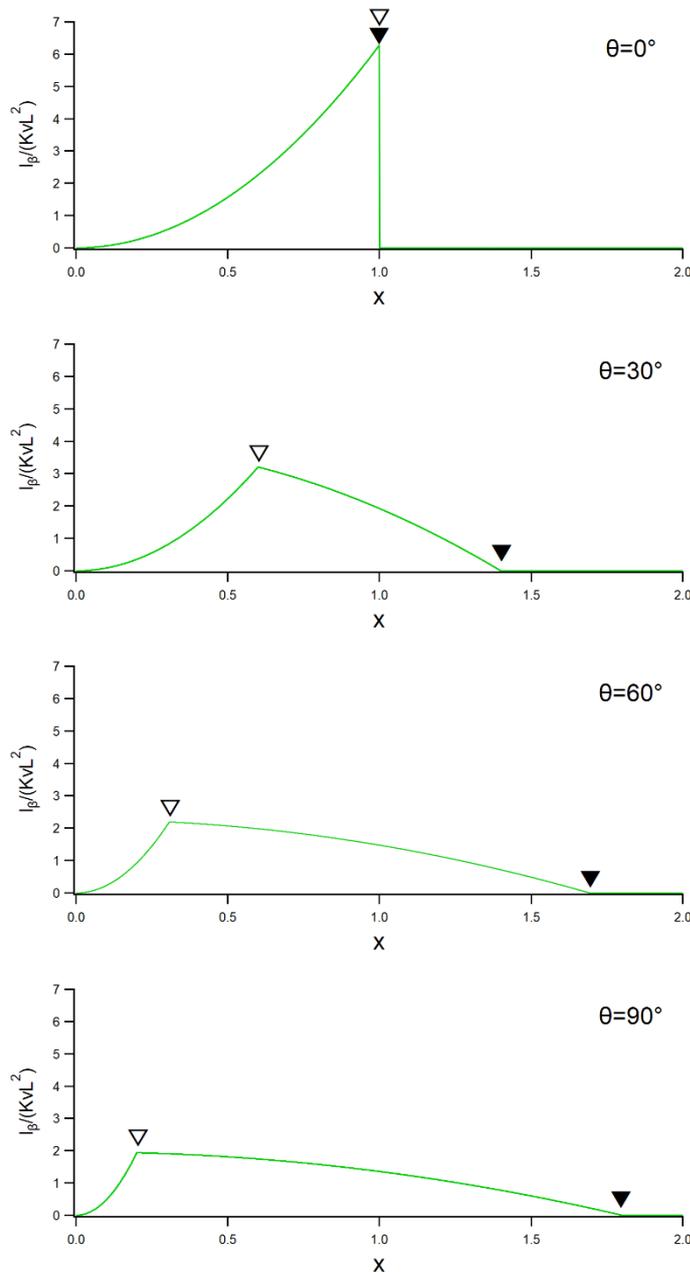


図-4 方位別の変位波形 (S 波) のプロット

4. 加速度フーリエスペクトルの高周波側の特性とコーナー周波数

以下, Papageorgiou and Aki⁶⁾を参考に加速度フーリエスペクトルの高周波側の特性を調べる. 式(5)(6)(32)(33)より変位波形は

$$u(t) = \frac{R^{FS}}{2\beta r_0} K v L^2 \begin{cases} \frac{1}{(1-k^2)^2} \left(\frac{v}{L}t\right)^2 & \cdots 0 < t < t_1 \\ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k(1+k)^2} \left(\frac{v}{L}t\right)^2 \right] & \cdots t_1 < t < t_2 \end{cases} \quad (34)$$

である. ここではラディエーション係数を R^{FS} と書いた. また, S波初動時刻を時間軸の原点とした. また

$$t_1 = (1-k)\frac{L}{v} \quad (35)$$

$$t_2 = (1+k)\frac{L}{v} \quad (36)$$

である. 式(34)より速度波形は

$$\dot{u}(t) = \frac{R^{FS}}{\beta r_0} K v^3 \begin{cases} \frac{1}{(1-k^2)^2} t & \cdots 0 < t < t_1 \\ -\frac{1}{4} \frac{1}{k(1+k)^2} t & \cdots t_1 < t < t_2 \end{cases} \quad (37)$$

である ($t = t_1$ と $t = t_2$ で不連続). 加速度波形は

$$\ddot{u}(t) = \frac{R^{FS}}{4\beta r_0} K v^3 \left[-\frac{L}{vk(1-k)} \delta(t-t_1) + \frac{L}{vk(1+k)} \delta(t-t_2) + \frac{4}{(1-k^2)^2} B_1(t) - \frac{1}{k(1+k)^2} B_2(t-t_1) \right] \quad (38)$$

である. ここに

$$B_1(t) = \begin{cases} 0 & \cdots t < 0 \\ 1 & \cdots 0 < t < t_1 \\ 0 & \cdots t_1 < t \end{cases} \quad (39)$$

$$B_2(t) = \begin{cases} 0 & \cdots t < 0 \\ 1 & \cdots 0 < t < t_2 - t_1 \\ 0 & \cdots t_2 - t_1 < t \end{cases} \quad (40)$$

である. $B_1(t)$ と $B_2(t)$ のフーリエ変換は高周波側で ω^{-1} に比例して減衰するため, 十分に高周波側では加速度波形のフーリエ変換に対して $B_1(t)$ と $B_2(t)$ は寄与しない. したがって加速度波形のフーリエ変換は

$$A(\omega) \approx \frac{R^{FS}}{4\beta r_0} K v^2 L \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{1-k} e^{-i\omega t_1} + \frac{1}{1+k} e^{-i\omega t_2} \right) \quad (41)$$

となり, 加速度フーリエスペクトルは

$$|A(\omega)| \approx \frac{R^{FS}}{4\beta r_0} K v^2 L \frac{\sqrt{2}\sqrt{(1+k^2)-(1+k)(1-k)\cos\omega(t_2-t_1)}}{k(1+k)(1-k)} \quad (42)$$

となる。したがって加速度フーリエスペクトルの高周波側のフラットレベル A_0 は

$$A_0 = \frac{R^{FS}}{4\beta r_0} K v^2 L \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}}{k(1+k)(1-k)} \quad (43)$$

となる。一方、変位フーリエスペクトルの低周波側のフラットレベル U_0 は

$$U_0 = \frac{R^{FS}}{4\pi\beta r_0} \frac{M_0}{\mu} \quad (44)$$

で与えられる。したがって A_0 と U_0 の比は次式で与えられる。

$$\frac{A_0}{U_0} = \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{v}{L}\right)^2 \frac{\sqrt{1+k^2}}{k(1+k)(1-k)} \quad (45)$$

一方、 ω^{-2} モデルではコーナー周波数 f_c と A_0/U_0 は次式により関連づけられる。

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{A_0}{U_0}} \quad (46)$$

したがって、結局、Sato and Hirasawa の円形クラックモデルでは f_c は次式で与えられる。

$$f_c = \frac{\sqrt{3}}{2^{5/4}\pi} \frac{v}{L} \frac{(1+k^2)^{1/4}}{\sqrt{k(1+k)(1-k)}} \quad (47)$$

一例として $L = 4.5 \text{ km}$, $v = 2.8 \text{ km/s}$, $\beta = 3.2 \text{ km/s}$ の場合について f_c を θ の関数として求め図-5に示す。同図によれば、 $\theta = 90^\circ$ のとき、forward directivityの影響で f_c は $\theta = 30^\circ$ のときよりも大きいことがわかる。図-5には同時に Brune⁷⁾⁸⁾の次式で求めた f_c （方位に依存しない）を示している。

$$f_c = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \frac{\beta}{L} \quad (48)$$

Brune の式は必ずしも弾性波動論的な位置づけが明確なわけではないのであるが、結果的に、 $\theta > 10^\circ$ の範囲では、Brune の式で求めた f_c は Sato and Hirasawa の円形クラックモデルによる f_c とあまり異なる結果となっている。

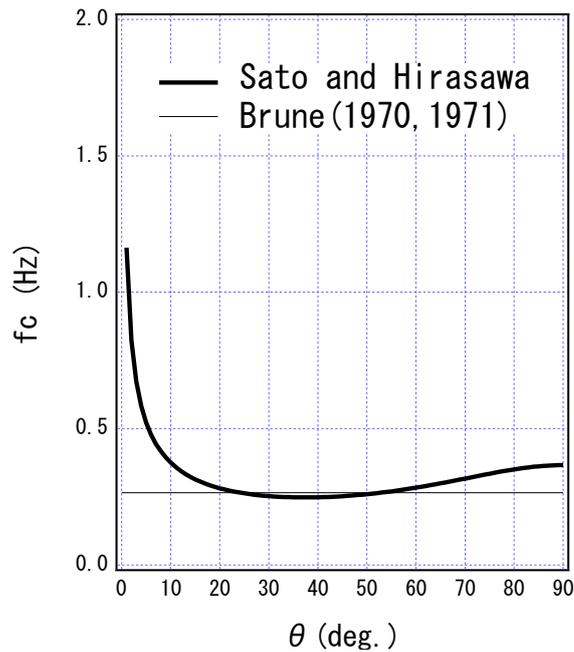


図-5 Sato and Hirasawa のコーナー周波数と Brune のコーナー周波数の比較

参考文献

- 1) Haskell, N.A.: Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.54, pp.1811-1841, 1964.
- 2) Haskell, N.A.: Elastic displacements in the near field of a propagating fault, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.59, pp.865-908, 1969.
- 3) Sato, T. and T. Hirasawa: Body wave spectra from propagating shear cracks, Journal of Physics of the Earth, Vol.21, pp.415-431, 1973.
- 4) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.
- 5) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol.241, pp.376-396, 1957.
- 6) Papageorgiou, A.S. and K. Aki: A specific barrier model for the quantitative description of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. I. description of the model, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.73, pp.693-722, 1983.
- 7) Brune, J.: Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes, Journal of Geophysical Research, Vol.75, pp.4997-5009, 1970.
- 8) Brune, J.: Correction, Journal of Geophysical Research, Vol.76, p.5002, 1971.

付録 ライズタイムが一様な円形クラックによるフーリエスペクトルの特性

破壊領域が矩形であるハスケルモデルが ω^{-3} モデルに従う理論地震動を生成するのに対し、破壊領域が円形である Sato and Hirasawa のモデルが ω^{-2} モデルに従う理論地震動を生成することから、破壊領域を円形としたことが ω^{-2} モデルに従う理論地震動の生成に結びついていると考えられがちであるが、実はそうではない。実際、円形クラックでもライズタイムが一様であれば ω^{-3} モデルに従う理論地震動を生成する。このことについて以下に述べる。

Sato and Hirasawa の円形クラックモデルと同様に、半径 L の円の中心から破壊フロントが一定速度 v で同心円状に拡大し、円周に達して停止するものとする。ただし、破壊フロント通過後のすべり速度時間関数は空間的に一様であるとする。このとき、式(5)(6)(7)(10)より、変位波形（遠地 S 波項）は次式で与えられる。

$$u(t) = \frac{R^{FS}}{4\pi\beta r_0} \iint \dot{D}\left(\rho, t - \frac{r_0}{\beta} + \frac{\rho \sin\theta \cos(\phi' - \phi)}{\beta}\right) dS \quad (A1)$$

よって変位波形のフーリエ変換は次式で与えられる。

$$U(\omega) = \frac{R^{FS}}{4\pi\beta r_0} e^{-i\omega r_0/\beta} \int_0^L V(\rho, \omega) \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega\rho/\beta) \sin\theta \cos(\phi' - \phi)} d\phi' \right) \rho d\rho \quad (A2)$$

ここに $V(\rho, \omega)$ は $\dot{D}(\rho, t)$ のフーリエ変換である。括弧内の積分はベッセル関数を用いて次のように変形できる。

$$U(\omega) = \frac{R^{FS}}{2\beta r_0} e^{-i\omega r_0/\beta} \int_0^L V(\rho, \omega) J_0((\omega\rho/\beta) \sin\theta) \rho d\rho \quad (A3)$$

ここですべり速度時間関数が空間的に一様であるとの条件を用いると

$$U(\omega) = \frac{R^{FS}}{2\beta r_0} e^{-i\omega r_0/\beta} V(0, \omega) \int_0^L e^{-i\omega\rho/v} J_0((\omega\rho/\beta) \sin\theta) \rho d\rho \quad (A4)$$

である。ここで ρ から $x = \omega\rho$ への変数変換を行うと次式を得る。

$$U(\omega) = \frac{R^{FS}}{2\beta r_0} e^{-i\omega r_0/\beta} V(0, \omega) \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\omega L} x e^{-ix/v} J_0((x/\beta) \sin\theta) dx \quad (A5)$$

式(A5)に含まれる定積分を求めることは容易でない。しかし、ベッセル関数に関する公式

$$\int_0^{\infty} x e^{-iax} J_0(bx) dx = -\frac{a}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \quad (a > b > 0) \quad (A6)$$

を用いれば、 ω が十分に大きいとき、式(A5)に含まれる定積分は収束することがわかり、 ω が十分に大きい場合のスペクトルの近似式として次式を得る。

$$|U(\omega)| \approx \frac{R^{FS}}{2\beta r_0} \cdot |V(0, \omega)| \frac{1}{\omega^2} \frac{v^2}{(1 - k^2)^{3/2}} \quad (A7)$$

ここに本文と同様

$$k = \frac{v}{\beta} \sin \theta \quad (\text{A8})$$

である。式(A7)から、スペクトルは高周波側で ω^{-3} の傾きを示すことがわかる。コーナー周波数は、1つは明らかにすべり速度時間関数に関するものである。残りの2つを知るために、式(A5)からすべり速度時間関数の寄与を取り除いたスペクトルについて、低周波側と高周波側の漸近線の交点を求めると

$$\omega_c \approx \frac{v}{L} \frac{\sqrt{2}}{(1-k^2)^{3/4}} \quad (\text{A9})$$

と求まるが、これは空間的な要因で定まるものである。なお、式(A6)の公式は、森口他¹⁾の公式

$$\int_0^{\infty} e^{iax} J_0(bx) dx = \frac{i}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (a > b > 0) \quad (\text{A10})$$

において両辺の共役複素数を取り a で微分すれば得られる。

Savage²⁾は同じ問題について式(A5)の積分を数値的に実行することにより数値解を得ており、高周波側でのスペクトルの傾きは $\omega^{-5/2}$ であるとしている。これは上記の結果と異なるが、解析的に得られた上記の結果がより信頼性があると考えて良いだろう。

以上のことから、[矩形断層の場合](#)のみならず円形クラックの場合も、空間に関する2つのコーナー周波数と時間に関する1つのコーナー周波数が存在すると言える。破壊領域を円形とするだけでは、 ω^{-2} モデルに従う理論地震動を生成することはできない。

Sato and Hirasawa の円形クラックモデルでは、クラック上のある点を破壊フロントが通過してから破壊フロントがクラック端部に到達するまでの時間をその点でのライズタイムとしている。その結果、クラック端部付近ではライズタイムは著しく小さな値を示し、クラック内の当該部分については時間に関するコーナー周波数が高周波側に移動し、第3のコーナー周波数が事実上存在しない状況となっている。このことが、Sato and Hirasawa の円形クラックモデルが ω^{-2} モデルに従う理論地震動を生成できる理由である。

参考文献

- 1) 森口繁一・宇田川銈久・一松信：岩波数学公式Ⅲ，p.202，1960.
- 2) Savage, J.C.: Relation between P- and S-wave corner frequencies in the seismic spectrum, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.64, pp.1621-1627, 1974.