

1. はじめに

本稿では走向・傾斜・すべり角が与えられたときの P 波, SV 波, SH 波のラディエーション係数について説明している. なお, ここで言うラディエーション係数は[遠地項](#)に対応するものである.

2. 座標系の説明

以下においては慣例に従い x_1 軸を北向きに, x_2 軸を東向きに, x_3 軸を鉛直下向きにとり, 原点に走向 ϕ_s , 傾斜 δ , すべり角 λ の点震源を置く (図-1). そして, (x_1, x_2, x_3) に対応する球座標系 (r, θ, ϕ) を導入する. (x_1, x_2, x_3) と (r, θ, ϕ) との対応関係は以下の通りである.

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

このとき P 波は r 方向, SV 波は θ 方向, SH 波は ϕ 方向にそれぞれ振幅を有することになる. なお Aki and Richards¹⁾では θ の代わりに i_ξ (射出角) を用いている. 対称性により, (走向, 傾斜, すべり角) が $(\phi_s, \delta, \lambda)$ である場合の点 (r, θ, ϕ) における r 方向, θ 方向, ϕ 方向のラディエーション係数と, (走向, 傾斜, すべり角) が $(0, \delta, \lambda)$ である場合の点 $(r, \theta, \phi - \phi_s)$ における r 方向, θ 方向, $\phi - \phi_s$ 方向のラディエーション係数は等しい. そこで, 以下においては後者を求めることにする.

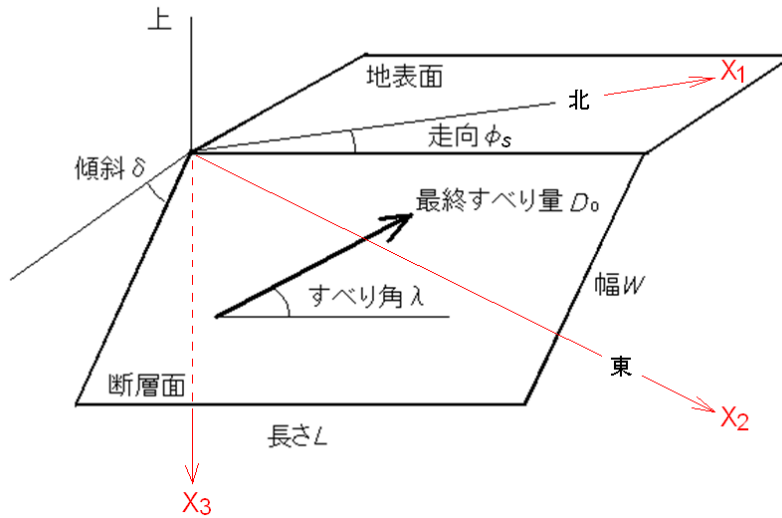


図-1 走向・傾斜・すべり角

3. 変位波形

[表現定理・地震モーメント・ダブルカップル](#)の式(26)(27)より, 点 $\mathbf{x}$ における変位波形の n 成分は

$$u_n(\mathbf{x}, t) = (n_k v_l + n_l v_k) M(t) * \frac{\partial}{\partial \xi_l} G_{nk}(\mathbf{x}, t; \xi) \quad (2)$$

で与えられる．ここに $M(t)$ はモーメント関数， $\mathbf{n}$ は断層面における単位法線ベクトル， $\mathbf{v}$ はすべりの向きを表す単位ベクトル， $G_{nk}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})$ は点 $\boldsymbol{\xi}$ を載荷点とするグリーン関数である（この場合は $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ ）．以降，グリーン関数としては次式に示す等質等方な[全無限弾性体のグリーン関数](#)を用いる．

$$\begin{aligned} G_{nk}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) = & \frac{1}{4\pi\rho} (3r_{,n}r_{,k} - \delta_{nk}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_{,n}r_{,k} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\ & - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_{,n}r_{,k} - \delta_{nk}) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに ρ は密度， α はP波速度， β はS波速度， $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ ， $r_{,k} = \partial r / \partial x_k$ である．式(3)を式(2)に代入して整理すると次式が得られる．

$$u_n(\mathbf{x}, t) = (n_k v_l + n_l v_k) M(t) * \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi\rho} (3r_{,n}r_{,k} - \delta_{nk}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_{,n}r_{,k} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_{,n}r_{,k} - \delta_{nk}) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで，空間座標に関する微分については， x_l に関する微分と ξ_l に関する微分が混在しているので，以下においては x_l に関する微分に統一する．式(4)右辺の $\{ \}$ 内は $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$ だけで決まる量であるため（ $r_{,l} = (x_l - \xi_l)/r$ も $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$ だけで決まる）， x_l を単位のみ大きさだけ増やす場合の $\{ \}$ 内の変化は， ξ_l を単位のみ大きさだけ減らす場合の $\{ \}$ 内の変化に等しい．したがって ξ_l に関する微分は x_l に関する微分に負号を付けたものとなるため，

$$u_n(\mathbf{x}, t) = (n_k v_l + n_l v_k) M(t) * \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi\rho} (3r_{,n}r_{,k} - \delta_{nk}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \\ & - \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_{,n}r_{,k} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_{,n}r_{,k} - \delta_{nk}) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

が得られる．次に合積の計算を行うと

$$u_n(\mathbf{x}, t) = (n_k v_l + n_l v_k) \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi\rho} (3r_{,n}r_{,k} - \delta_{nk}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t - \tau) d\tau \\ & - \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_{,n}r_{,k} \frac{1}{r} M\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_{,n}r_{,k} - \delta_{nk}) \frac{1}{r} M\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

が得られ，さらに x_l に関する微分を実行し整理すると

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi\rho} (30r_{,n}r_{,k}r_{,l}n_l v_k - 6r_{,k}n_n v_k - 6r_{,k}n_k v_n) \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t - \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} (12r_{,n}r_{,k}r_{,l}n_l v_k - 2r_{,k}n_n v_k - 2r_{,k}n_k v_n) \frac{1}{r^2} M\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\ & - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (12r_{,n}r_{,k}r_{,l}n_l v_k - 3r_{,k}n_n v_k - 3r_{,k}n_k v_n) \frac{1}{r^2} M\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3} 2r_{,n}r_{,k}r_{,l}n_l v_k \frac{1}{r} \dot{M}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\ & - \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} (2r_{,n}r_{,k}r_{,l}n_l v_k - r_{,k}n_n v_k - r_{,k}n_k v_n) \frac{1}{r} \dot{M}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる．なお，この過程では

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t-\tau) d\tau = \frac{r}{\beta^2} M\left(t - \frac{r}{\beta}\right) - \frac{r}{\alpha^2} M\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \quad (8)$$

であること，

$$r_{,ij} = \frac{\delta_{ij} r - x_i r_{,j}}{r^2} = \frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} \quad (9)$$

であること，

$$n_k v_k = 0 \quad (10)$$

であること（ $\mathbf{n}$ と $\mathbf{v}$ は直交）などを用いた．ここで

$$P_n = (r_{,k} v_k)(r_{,l} n_l) r_n \quad (11)$$

$$Q_n = (r_{,k} v_k) n_n + (r_{,l} n_l) v_n \quad (12)$$

と定義し，式(7)をさらに整理すると次のようになる．

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi\rho} R_n^N \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t-\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} R_n^{IP} \frac{1}{r^2} M\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} R_n^{IS} \frac{1}{r^2} M\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3} R_n^{FP} \frac{1}{r} \dot{M}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} R_n^{FS} \frac{1}{r} \dot{M}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

ここに右辺第1項～第5項はそれぞれ近地項，中間P波項，中間S波項，遠地P波項，遠地S波項である． $R_n^N \sim R_n^{FS}$ は各項のラディエーション係数であり，次式で与えられる．

$$R_n^N = 30P_n + 6Q_n \quad (14)$$

$$R_n^{IP} = 12P_n - 2Q_n \quad (15)$$

$$R_n^{IS} = -12P_n + 3Q_n \quad (16)$$

$$R_n^{FP} = 2P_n \quad (17)$$

$$R_n^{FS} = -2P_n + Q_n \quad (18)$$

4. 遠地項のラディエーション係数

（走向，傾斜，すべり角）が $(0, \delta, \lambda)$ のとき，ベクトル $\mathbf{n}$ と $\mathbf{v}$ の成分はそれぞれ次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \delta \\ -\cos \delta \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ -\sin \lambda \cos \delta \\ -\sin \lambda \sin \delta \end{pmatrix} \quad (20)$$

一方，点 $(r, \theta, \phi - \phi_s)$ で r 方向， θ 方向， $\phi - \phi_s$ 方向の単位ベクトルは以下の通りである．

r 方向：

$$\mathbf{e}_P = \begin{pmatrix} r_{,1} \\ r_{,2} \\ r_{,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos(\phi - \phi_s) \\ \sin \theta \sin(\phi - \phi_s) \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (21)$$

θ 方向：

$$\mathbf{e}_{SV} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\phi - \phi_s) \\ \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (22)$$

$\phi - \phi_s$ 方向：

$$\mathbf{e}_{SH} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi - \phi_s) \\ \cos(\phi - \phi_s) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

また

$$\begin{aligned} r_{,k} \nu_k &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos(\phi - \phi_s) \\ \sin \theta \sin(\phi - \phi_s) \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ -\sin \lambda \cos \delta \\ -\sin \lambda \sin \delta \end{pmatrix} \\ &= \cos \lambda \sin \theta \cos(\phi - \phi_s) - \sin \lambda \cos \delta \sin \theta \sin(\phi - \phi_s) - \sin \lambda \sin \delta \cos \theta \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} r_{,k} n_k &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos(\phi - \phi_s) \\ \sin \theta \sin(\phi - \phi_s) \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \delta \\ -\cos \delta \end{pmatrix} \\ &= \sin \delta \sin \theta \sin(\phi - \phi_s) - \cos \delta \cos \theta \end{aligned} \quad (25)$$

である．

P波のラディエーション係数 R_P は， R_n^{FP} と $\mathbf{e}_P$ との内積をとれば次のように求まる．

$$\begin{aligned} R_P &= 2(r_{,k} \nu_k)(r_{,l} n_l) \\ &= 2 \cos \lambda \sin \delta \sin^2 \theta \sin(\phi - \phi_s) \cos(\phi - \phi_s) \\ &\quad - 2 \sin \lambda \sin \delta \cos \delta \sin^2 \theta \sin^2(\phi - \phi_s) \\ &\quad - 2 \sin \lambda \sin^2 \delta \sin \theta \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) \\ &\quad - 2 \cos \lambda \cos \delta \sin \theta \cos \theta \cos(\phi - \phi_s) \\ &\quad + 2 \sin \lambda \cos^2 \delta \sin \theta \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) \\ &\quad + 2 \sin \lambda \sin \delta \cos \delta \cos^2 \theta \\ &= \cos \lambda \sin \delta \sin^2 \theta \sin 2(\phi - \phi_s) - \cos \lambda \cos \delta \sin 2\theta \cos(\phi - \phi_s) \\ &\quad + \sin \lambda \sin 2\delta \cos^2 \theta - \sin \lambda \sin 2\delta \sin^2 \theta \sin^2(\phi - \phi_s) \\ &\quad + \sin \lambda \cos 2\delta \sin 2\theta \sin(\phi - \phi_s) \end{aligned} \quad (26)$$

SV 波のラディエーション係数 R_{SV} は、 R_n^{FS} と $\mathbf{e}_{SV}$ との内積をとれば次のように求まる。

$$\begin{aligned}
R_{SV} &= (r_k \nu_k) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \delta \\ -\cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\phi - \phi_s) \\ \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) \\ -\sin \theta \end{pmatrix} + (r_l n_l) \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ -\sin \lambda \cos \delta \\ -\sin \lambda \sin \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\phi - \phi_s) \\ \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\
&= (\cos \lambda \sin \theta \cos(\phi - \phi_s) - \sin \lambda \cos \delta \sin \theta \sin(\phi - \phi_s) - \sin \lambda \sin \delta \cos \theta) \\
&\quad \times (\sin \delta \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) + \cos \delta \sin \theta) \\
&\quad + (\sin \delta \sin \theta \sin(\phi - \phi_s) - \cos \delta \cos \theta) \\
&\quad \times (\cos \lambda \cos \theta \cos(\phi - \phi_s) - \sin \lambda \cos \delta \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) + \sin \lambda \sin \delta \sin \theta) \\
&= \cos \lambda \sin \delta \sin \theta \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) \cos(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \sin \lambda \sin \delta \cos \delta \sin \theta \cos \theta \sin^2(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \sin \lambda \sin^2 \delta \cos^2 \theta \sin(\phi - \phi_s) \\
&\quad + \cos \lambda \cos \delta \sin^2 \theta \cos(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \sin \lambda \cos^2 \delta \sin^2 \theta \sin(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \sin \lambda \sin \delta \cos \delta \sin \theta \cos \theta \\
&\quad + \cos \lambda \sin \delta \sin \theta \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) \cos(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \cos \lambda \cos \delta \cos^2 \theta \cos(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \sin \lambda \sin \delta \cos \delta \sin \theta \cos \theta \sin^2(\phi - \phi_s) \\
&\quad + \sin \lambda \cos^2 \delta \cos^2 \theta \sin(\phi - \phi_s) \\
&\quad + \sin \lambda \sin^2 \delta \sin^2 \theta \sin(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \sin \lambda \sin \delta \cos \delta \sin \theta \cos \theta \\
&= \sin \lambda \cos 2\delta \cos 2\theta \sin(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \cos \lambda \cos \delta \cos 2\theta \cos(\phi - \phi_s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cos \lambda \sin \delta \sin 2\theta \sin 2(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta \sin 2\theta [1 + \sin^2(\phi - \phi_s)]
\end{aligned} \tag{27}$$

SH 波のラディエーション係数 R_{SH} は、 R_n^{FS} と $\mathbf{e}_{SH}$ との内積をとれば次のように求まる。

$$\begin{aligned}
R_{SH} &= (r_k \nu_k) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \delta \\ -\cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\phi - \phi_s) \\ \cos(\phi - \phi_s) \\ 0 \end{pmatrix} + (r_l n_l) \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ -\sin \lambda \cos \delta \\ -\sin \lambda \sin \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\phi - \phi_s) \\ \cos(\phi - \phi_s) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (\cos \lambda \sin \theta \cos(\phi - \phi_s) - \sin \lambda \cos \delta \sin \theta \sin(\phi - \phi_s) - \sin \lambda \sin \delta \cos \theta) \\
&\quad \times \sin \delta \cos(\phi - \phi_s) \\
&\quad + (\sin \delta \sin \theta \sin(\phi - \phi_s) - \cos \delta \cos \theta) \\
&\quad \times (-\cos \lambda \sin(\phi - \phi_s) - \sin \lambda \cos \delta \cos(\phi - \phi_s)) \\
&= \cos \lambda \cos \delta \cos \theta \sin(\phi - \phi_s) \\
&\quad + \cos \lambda \sin \delta \sin \theta \cos 2(\phi - \phi_s) \\
&\quad + \sin \lambda \cos 2\delta \cos \theta \cos(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta \sin \theta \sin 2(\phi - \phi_s)
\end{aligned} \tag{28}$$

参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.