野津

1. はじめに

これまで<u>全無限弾性体における点震源による地震動</u>について説明してきたが、実際の震源は点ではなく、 地震動にはその影響が表れる.本稿では、時間領域および周波数領域において、震源が点ではないこと(fault finiteness)の影響がどのように表れるか説明している.要点は以下の通りである.

- ・破壊伝播の影響により特定の方向で地震動の振幅が大きくなる (directivity).
- ・震源のサイズと時間領域におけるパルス幅との間には関係がある.
- ・震源のサイズとコーナー周波数との間には関係がある.
- ・断層の長さ,幅,ライズタイムに関係する3つのコーナー周波数がある.それに対応して,単純な断層モ デルに基づく理論地震動のスペクトルは高周波側でω⁻³に比例して減衰し,「震源スペクトルが大局的には ω⁻²モデル¹)に従う」という観測事実と矛盾することになる.

震源が点ではないことの影響について数式を使って説明するにはハスケルモデル²⁾³⁾を使うのが便利である⁴⁾. そこで以下の説明にもハスケルモデルを用いる.

2. 震源のサイズと時間領域におけるパルス幅

ハスケルモデル ²⁾³⁾では、図-1 に示すように、長さL、幅Wの矩形断層が一方向に破壊伝播速度 v_r で壊れる と考える、そして破壊後の各点でのすべり速度 $\dot{D}(t)$ は次式で与えられるものとする、

$$\dot{D}(t) = (D_0/\tau_r)B(t) \tag{1}$$

$$B(t) = \begin{cases} 0 & \cdots & t < 0 \\ 1 & \cdots & 0 < t < \tau_r \\ 0 & \cdots & \tau_r < t \end{cases}$$
(2)

ここにtは破壊後の時間, τ_r はライズタイム, D_0 は最終すべり量である. すべりの向きは x_1 方向とする.

以降,観測点**x**での遠地S波項を考える.観測点**x**での遠地S波項は,<u>全無限弾性体における点震源による</u> <u>地震動</u>の式(12)の右辺第5項を面積積分することで与えられる.すなわち

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} \boldsymbol{R}_{\theta\phi}^{FS} \frac{1}{r} \mu \frac{p_0}{\tau_r} \int_0^L \int_0^W B\left(t - \frac{\xi_1}{v_r} - \frac{r'}{\beta}\right) d\xi_2 d\xi_1$$
(3)

ここに(ξ_1,ξ_2)は断層面上の点を表すための座標で、 ξ_1 は x_1 方向、 ξ_2 は $-x_2$ 方向にとっている. ρ は密度、 β はS波速度、 μ はラメ定数(<u>弾性波動論の基礎</u>参照)、 $R_{\theta\phi}^{FS}$ は遠地S波項のラディエーション係数、rは原点から観 測点までの距離、r'は断層面上の各点から観測点までの距離である.式(3)で r^{-1} と $R_{\theta\phi}^{FS}$ を積分の外に出してい るのは、観測点が十分遠方にあり、矩形断層内での変化が少ないと考えているためである.いま観測点方向 の単位ベクトルは

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

で表されるので、ベクトル(ξ1,0,0)および(0,-ξ2,0)の**ŕ**方向の方向余弦を考慮することで、



$$r' \approx r - \xi_1 \sin \theta \cos \phi + \xi_2 \sin \theta \sin \phi \tag{5}$$

と近似することができ,式(3)は

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} \boldsymbol{R}_{\theta\phi}^{FS} \frac{1}{r} \mu \frac{D_0}{\tau_r} \int_0^L \int_0^W B\left(t - \frac{\xi_1}{v_r} - \frac{r - \xi_1 \sin\theta\cos\phi + \xi_2 \sin\theta\sin\phi}{\beta}\right) d\xi_2 d\xi_1 \tag{6}$$

となる. ここで

$$\tau_L = \frac{L}{v_r} \left(1 - \frac{v_r}{\beta} \sin \theta \cos \phi \right) \tag{7}$$

$$\tau_W = \frac{W}{\beta} \sin \theta \sin \phi \tag{8}$$

とおけば

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} \boldsymbol{R}_{\theta\phi}^{FS} \frac{1}{r} \mu \frac{D_0}{\tau_r} \int_0^L \int_0^W B\left(t - \frac{r}{\beta} - \frac{\tau_L}{L} \xi_1 - \frac{\tau_W}{W} \xi_2\right) d\xi_2 d\xi_1$$
(9)

ここで

$$t_1 = \frac{\tau_L}{L} \xi_1 \tag{10}$$

$$t_2 = \frac{\tau_W}{W} \xi_2 \tag{11}$$

のように変数変換を行うと

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} \boldsymbol{R}_{\theta\phi}^{FS} \frac{1}{r} \mu \frac{LWD_0}{\tau_L \tau_W \tau_r} \int_0^{\tau_L} \int_0^{\tau_W} B\left(t - \frac{r}{\beta} - t_1 - t_2\right) dt_2 dt_1$$
(12)

となり, $M_0 = \mu L W D_0$ とおけば

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \frac{M_0}{4\pi\rho\beta^3} \boldsymbol{R}_{\theta\phi}^{FS} \frac{1}{r} \frac{1}{\tau_L \tau_W \tau_r} \int_0^{\tau_L} \int_0^{\tau_W} B\left(t - \frac{r}{\beta} - t_1 - t_2\right) dt_2 dt_1$$
(13)

となる. ここでB(t)と類似の関数として

$$B_{L}(t) = \begin{cases} 0 & \cdots & t < 0 \\ 1 & \cdots & 0 < t < \tau_{L} \\ 0 & \cdots & \tau_{L} < t \end{cases}$$
(14)

$$B_W(t) = \begin{cases} 0 & \cdots & t < 0\\ 1 & \cdots & 0 < t < \tau_W\\ 0 & \cdots & \tau_W < t \end{cases}$$
(15)

を定義すると、式(13)における積分区間を(-∞,∞)とすることができ

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \frac{M_0}{4\pi\rho\beta^3} \boldsymbol{R}_{\theta\phi}^{FS} \frac{1}{r_{\tau_L}\tau_W\tau_r} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B\left(t - \frac{r}{\beta} - t_1 - t_2\right) B_L(t_1) B_W(t_2) dt_2 dt_1$$
(16)

となる. ここで右辺の積分は合積を表しているため

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \frac{M_0}{4\pi\rho\beta^3} \boldsymbol{R}_{\theta\phi}^{FS} \frac{1}{r_{\tau_L}\tau_W\tau_r} B\left(t - \frac{r}{\beta}\right) * B_L(t) * B_W(t)$$
(17)

と書くことができる. $B(t) * B_L(t) * B_W(t)$ は全体として上に凸のパルスを形作ることになるが、B(t)の継続時間は τ_r , $B_L(t)$ の継続時間は τ_L , $B_W(t)$ の継続時間は τ_W であるため、パルス全体の継続時間は $\tau_r + \tau_L + \tau_W$ となる. すなわち、式(7)(8)より、パルス幅は断層の長さ、幅、ライズタイムと関係している.

これ以降,破壊伝播の影響を調べるため、 $\theta = \pi/2$ とし、 τ_L に比べ τ_r と τ_W が十分に小さい場合について、フォワード側($\phi = 0$)、フォワード側とバックワード側の中間($\phi = \pi/2$)、バックワード側($\phi = \pi$)での波

形を比較してみると図-2のようになる ($v_r/\beta = 0.8$ の場合についてプロット).式(17)より,パルスの取り囲む面積は ($R_{\theta\phi}^{FS}$ とrが等しければ)フォワード側とバックワード側で同じであるが,フォワード側では幅が狭く振幅の大きいパルスとなっており,バックワード側では幅が広く振幅の小さいパルスとなっている.パルスの幅は式(7)より

$$\tau_{L} = \begin{cases} \frac{L}{v_{r}} \left(1 - \frac{v_{r}}{\beta}\right) & \cdots & \mathcal{I}_{\tau} \mathcal{V} - \mathcal{V} \| \\ \frac{L}{v_{r}} & \cdots & \mathcal{I}_{\tau} \mathcal{V} - \mathcal{V} \| \mathcal{V} \mathcal{V} \mathcal{V} \mathcal{V} - \mathcal{V} \| \\ \frac{L}{v_{r}} \left(1 + \frac{v_{r}}{\beta}\right) & \cdots & \mathcal{N}_{\tau} \mathcal{V} \mathcal{V} \mathcal{V} - \mathcal{V} \| \end{cases}$$
(18)

であるため、 $v_r/\beta = 0.8$ の場合にはフォワード側ではバックワード側より9倍も振幅が大きいことになる. こ れが directivity である.



図-2 方位別の波形 ($\theta = \pi/2$, τ_L に比べ τ_r と τ_W が十分に小さく $v_r/\beta = 0.8$ の場合)

3. 震源のサイズとコーナー周波数

式(2)のB(t)のフーリエ変換を計算すると

$$\hat{B}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{\tau_{r}} e^{-i\omega t}dt = -\frac{1}{i\omega} \left[e^{-i\omega t}\right]_{0}^{\tau_{r}} = e^{-i\frac{\omega\tau_{r}}{2}} \tau_{r} \frac{\sin\frac{\omega\tau_{r}}{2}}{\frac{\omega\tau_{r}}{2}}$$
(19)

となり, フーリエスペクトルは

$$\left|\hat{B}(\omega)\right| = \tau_r \left|\frac{\sin\frac{\omega\tau_r}{2}}{\frac{\omega\tau_r}{2}}\right| \tag{20}$$

となる. 同様にB_L(t)のフーリエスペクトルは

$$\left|\hat{B}_{L}(\omega)\right| = \tau_{L} \left|\frac{\sin\frac{\omega\tau_{L}}{2}}{\frac{\omega\tau_{L}}{2}}\right|$$
(21)

 $B_W(t)$ のフーリエスペクトルは

$$\left|\hat{B}_{W}(\omega)\right| = \tau_{W} \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau_{W}}{2}}{\frac{\omega \tau_{W}}{2}} \right|$$
(22)

となる.一方,時間領域の合積は周波数領域の積であるため,式(17)左辺のフーリエスペクトルは

$$\left|\widehat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)\right| = \frac{M_0}{4\pi\rho\beta^3} \boldsymbol{R}_{\theta\phi}^{FS} \frac{1}{r} \left|\frac{\sin\frac{\omega\tau_r}{2}}{\frac{\omega\tau_r}{2}}\right| \left|\frac{\sin\frac{\omega\tau_L}{2}}{\frac{\omega\tau_L}{2}}\right| \left|\frac{\sin\frac{\omega\tau_W}{2}}{\frac{\omega\tau_W}{2}}\right|$$
(23)

となる.右辺に表れる関数のうち

は低周波側では一定値1となり、コーナー周波数
$$\omega_{c\tau} = 2/\tau_r$$
を有し、それより高周波側では ω^{-1} に比例して減
衰する関数である. 同様に

 $\frac{\sin\frac{\omega\tau_r}{2}}{\frac{\omega\tau_r}{2}}$

は低周波側では一定値1となり、コーナー周波数 $\omega_{cL} = 2/\tau_L$ を有し、それより高周波側では ω^{-1} に比例して減衰する関数である.また

 $\frac{\frac{\sin \frac{\omega \tau_W}{2}}{\frac{\omega \tau_W}{2}}}{\frac{\omega \tau_W}{2}}$

は低周波側では一定値1となり、コーナー周波数
$$\omega_{cW} = 2/\tau_W$$
を有し、それより高周波側では ω^{-1} に比例して
減衰する関数である.よって式(23)の左辺は断層の長さ、幅、ライズタイムに関係する3つのコーナー周波数
を有し、高周波側で ω^{-3} に比例して減衰する関数である.

これ以降,破壊伝播の影響を調べるため, $\theta = \pi/2$ とし, τ_L に比べ $\tau_r \ge \tau_w$ が十分に小さい場合について,フ オワード側 ($\phi = 0$) とバックワード側 ($\phi = \pi$) でのフーリエスペクトルを比較してみると図-3 のようにな る ($v_r/\beta = 0.8$ の場合についてプロット).低周波側のフラットレベルは ($R_{\theta\phi}^{FS} \ge r$ が等しければ)フォワード 側とバックワード側で等しいが,フォワード側の方がコーナー周波数が高いため,高周波側ではフォワード 側の方がスペクトルレベルが大きくなっている.

4. おわりに

本稿で見たように、ハスケルモデルに基づく理論地震動はω⁻³モデルに従うことになり、「震源スペクトルが大局的には<u>ω⁻²モデル</u>¹に従う」という観測事実とは矛盾するが、それはハスケルモデルのすべりの時空間分布が単純すぎるためであると理解されている.しかし、そうではあるにせよ、ハスケルモデルは、震源のサイズと時間領域におけるパルス幅との関係、震源のサイズとコーナー周波数との関係、破壊伝播の影響などを理解する上で欠かせぬものである.本稿で見たように、理論上、コーナー周波数のうち2つは震源の空間的な広がりに対応するものであり、残りの1つは時間的な広がりに対応するものである.したがって、現実の地震動が<u>ω⁻²モデル</u>に従うとすれば、2つのコーナー周波数のうち少なくとも1つは、震源の空間的な広がりに対応すると考えることが自然である.

$$\frac{\sin \frac{\omega \tau_L}{2}}{\frac{\omega \tau_L}{2}}$$

なお、ハスケルモデル以降、 ω^{-2} モデルに従う理論地震動を生成できるような断層モデルについても研究されており、大別すると、Sato and Hirasawa の円形クラックモデル⁵のように破壊領域の端部で高周波成分が生成されるとするモデルと、 k^{-2} モデル⁶のように破壊領域内部の不均質性により高周波成分が生成されるとするモデルがある。ハスケルモデルにおける断層端部の影響については**付録**に示している。



参考文献

- 1) Aki, K.: Scaling law of seismic spectrum, Journal of Geophysical Research, Vol.72, pp.1217-1231, 1967.
- Haskel, N.A.: Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.54, pp.1811-1841, 1964.
- 3) Haskel, N.A.: Elastic displacements in the near field of a propagating fault, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.59, pp.865-908, 1969.
- 4) 佐藤俊明:理論的地震動評価, 地震動-その合成と波形処理, 第2章, 鹿島出版会, 1994年.
- 5) Sato, T. and T. Hirasawa: Body wave spectra from propagating shear cracks, Journal of Physics of the Earth, Vol.21, pp.415-431, 1973.
- 6) Herrero, A. and P. Bernard: A kinematic self-similar rupture process for earthquake, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.84, pp.1216-1228, 1994.

付録 ハスケルモデルにおける断層端部の影響

 $\tau_L > \tau_W > \tau_r$ かつ $\tau_L > \tau_W + \tau_r$ の場合について式(17)右辺の合積を実行すると次のようになる.

$$B(t) * B_{L}(t) * B_{W}(t) = \begin{cases} 0 & \cdots & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^{2} & \cdots & 0 < t < \tau_{r} \\ \frac{1}{2}\tau_{r}^{2} + (t - \tau_{r})\tau_{r} & \cdots & \tau_{r} < t < \tau_{W} \\ \tau_{r}^{2} + (\tau_{W} - \tau_{r})\tau_{r} - \frac{1}{2}(t - \tau_{W} - \tau_{r})^{2} & \cdots & \tau_{W} < t < \tau_{W} + \tau_{r} \\ \tau_{r}^{2} + (\tau_{W} - \tau_{r})\tau_{r} & \cdots & \tau_{W} + \tau_{r} < t < \tau_{L} \\ \tau_{r}^{2} + (\tau_{W} - \tau_{r})\tau_{r} - \frac{1}{2}(t - \tau_{L})^{2} & \cdots & \tau_{L} < t < \tau_{L} + \tau_{r} \\ \frac{1}{2}\tau_{r}^{2} + (\tau_{L} + \tau_{W} - t)\tau_{r} & \cdots & \tau_{L} + \tau_{r} < t < \tau_{L} + \tau_{W} \\ \frac{1}{2}(\tau_{L} + \tau_{W} + \tau_{r} - t)^{2} & \cdots & \tau_{L} + \tau_{W} < t < \tau_{L} + \tau_{W} + \tau_{r} \\ 0 & \cdots & \tau_{L} + \tau_{W} + \tau_{r} < t \end{cases}$$
(A1)

式(A1)よりハスケルモデルによる変位波形は高々2次の関数の組み合わせであることがわかる. 一例として $\tau_L = 2s$, $\tau_W = 1s$, $\tau_r = 0.5s$ の場合について変位波形をプロットすると図-A1のようになる. 図-A1では図-1の点Aにおけるすべりの開始時刻に生成されるS波の到来時刻をA1,点Aにおけるすべりの停止時刻に生成されるS波の到来時刻をA2等としている. 図-A1に示すように矩形断層の4つのコーナーにおけるすべりの開始と停止に対応する8つの変曲点を変位波形は有している. 一般に

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \cdots & t < 0\\ t^2 e^{-\lambda t} & \cdots & t > 0 \end{cases}$$
(A2)

のようにt = 0において変曲点を有する関数のフーリエ変換は $2/(\lambda + i\omega)^3$ であるため、フーリエスペクトルは ω^{-3} モデルに従う. つまり、ハスケルモデルによる変位波形のフーリエスペクトルが ω^{-3} モデルに従うのは、 矩形断層のコーナーにおけるすべりの開始と停止に対応する変曲点の影響によるものであり、断層端部の影 響が高周波側の挙動を支配していると言える.現実の地震動の高周波成分が断層端部の影響で決まっている かは議論のあるところであるが、少なくとも比較的単純な断層モデルに基づく理論地震動の高周波成分に対 しては断層端部の影響が支配的である.



7