

半無限地盤に単位インパルス力を与えた場合の Rayleigh 波

野津

1. はじめに

本稿では半無限地盤の表面に鉛直下向きの単位インパルス力を与えた場合の Rayleigh 波を扱っている。まず、自由表面は考えず、地盤の内部に単位インパルス力を与えた場合の波動場を波数積分の形で与える。次に、自由表面のある地盤を考え、微小な深さ Δz の位置に単位インパルス力を与えると考えると、上述の波動場は自由表面への入射波となり、これに反射波を加えたものが全波動場となる。そこで、反射波の方も未定係数を含む波数積分の形で与えておき、その未定係数を、自由表面における境界条件を満足するように定める。最後に、波数積分に留数定理を適用し、遠方における Rayleigh 波を求める。なお、本稿では図-1に示す円筒座標系 (r, θ, z) を用いる。 z 座標は慣例に従い鉛直下向きにとる。また、フーリエ変換は順変換に $e^{-i\omega t}$ を、逆変換に $e^{i\omega t}$ を用いる定義を採用するため、最終的には第2種ハンケル関数が採用される。

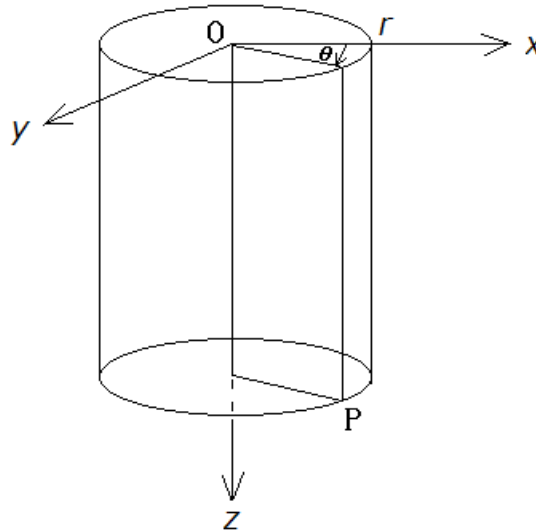


図-1 円筒座標系 (任意の点 P の座標を (r, θ, z) の組み合わせで表示)

2. 自由表面の無い場合の波動場

Lamb¹⁾によれば鉛直下向きの単位インパルス力 $\delta(t)\delta(\mathbf{x})$ が原点において時刻 $t = 0$ に作用したときの波動場(グリーン関数)は

$$\hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) \quad (1)$$

$$\hat{u}_z = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) + k_\beta^2 \frac{e^{-ik\beta R}}{R} \right) \quad (2)$$

で表される。ここに \hat{u}_r は変位のラディアル成分(r 成分)のフーリエ変換、 \hat{u}_z は変位の鉛直成分(z 成分)のフーリエ変換、 ρ は媒質の密度、 $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ は震源距離であり、

$$k_\alpha = \omega/\alpha \quad (3)$$

$$k_\beta = \omega/\beta \quad (4)$$

である (α はP波速度, β はS波速度). 変位は対称性により θ に依存しない. また, 変位のトランスバース成分 (θ 成分) は対称性により0である.

式(1)は次のように導くことができる. [全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(16)より, 変位の x 成分のフーリエ変換 \hat{u}_x と y 成分のフーリエ変換 \hat{u}_y は次式で与えられる.

$$\hat{u}_x = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{R} \right)$$

$$\hat{u}_y = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{R} \right)$$

これらより変位のラディアル成分を求めると

$$\begin{aligned} \hat{u}_r &= \hat{u}_x \cos\theta + \hat{u}_y \sin\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{R} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{R} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{R} \right) \right] \end{aligned}$$

となり式(1)が得られる. 式(2)は[全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(16)より直ちに得られる.

式(1)(2)に含まれる球面波は, 以下のように波数積分の形で表現できる (付録A 参照).

$$\frac{1}{R} e^{-ik_\alpha R} = -i \int_0^\infty \frac{k}{v} J_0(kr) e^{-iv|z|} dk \quad (5)$$

$$\frac{1}{R} e^{-ik_\beta R} = -i \int_0^\infty \frac{k}{\gamma} J_0(kr) e^{-i\gamma|z|} dk \quad (6)$$

ここに k は波数の水平成分, J_0 は第1種0次のベッセル関数, J_1 は第1種1次のベッセル関数である (ベッセル関数の定義は付録C 参照). また

$$v = \sqrt{k_\alpha^2 - k^2}, \quad \text{Im}(v) < 0 \quad (7)$$

$$\gamma = \sqrt{k_\beta^2 - k^2}, \quad \text{Im}(\gamma) < 0 \quad (8)$$

である. v はP波の波数の鉛直成分, γ はS波の波数の鉛直成分である. これらを式(1)(2)に代入すると次式を得る.

$$\hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \text{sgn}(z) \int_0^\infty k^2 (-e^{-iv|z|} + e^{-i\gamma|z|}) J_1(kr) dk \quad (9)$$

$$\hat{u}_z = -\frac{i}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty k \left(\nu e^{-i\nu|z|} + \frac{k^2}{\gamma} e^{-i\gamma|z|} \right) J_0(kr) dk \quad (10)$$

ここに $\text{sgn}(z)$ は符号関数で z が正のとき1, z が負のとき-1の値をとる. 式(9)を求める際には付録Cにあるベッセル関数の公式を用いている.

3. 自由表面がある場合の波動場

次に, 自由表面 ($z = 0$) のある地盤を考え, 鉛直下向きの単位インパルス力を $(r, z) = (0, \Delta z)$ の位置に与えることを考える. ただし Δz は微小な値とする. そして, $0 < z < \Delta z$ における変位と応力のフーリエ変換を次式で与える.

$$\hat{u}_r = \int_0^\infty V_1 J_1(kr) dk \quad (11)$$

$$\hat{u}_z = \int_0^\infty V_2 J_0(kr) dk \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}_{rz} = \int_0^\infty V_3 J_1(kr) dk \quad (13)$$

$$\hat{\sigma}_{zz} = \int_0^\infty V_4 J_0(kr) dk \quad (14)$$

ここに V_1, V_2, V_3, V_4 は motion-stress vector と呼ばれ, 次式で与えられる.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \alpha k & \beta \gamma & \alpha k & \beta \gamma \\ -i\alpha \nu & i\beta k & i\alpha \nu & -i\beta k \\ 2i\alpha \mu k \nu & i\beta \mu (\gamma^2 - k^2) & -2i\alpha \mu k \nu & -i\beta \mu (\gamma^2 - k^2) \\ \alpha \mu (\gamma^2 - k^2) & -2\beta \mu k \gamma & \alpha \mu (\gamma^2 - k^2) & -2\beta \mu k \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\nu z} & 0 \\ e^{i\gamma z} & 0 \\ e^{-i\nu z} & 0 \\ e^{-i\gamma z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_u \\ SV_u \\ P_d \\ SV_d \end{pmatrix} \quad (15)$$

P_u, SV_u, P_d, SV_d はそれぞれ上昇する P 波, 上昇する SV 波, 下降する P 波, 下降する SV 波の振幅である. ただし, P_u, SV_u は鉛直上方に向かって振幅が指数関数的に減少する波を, P_d, SV_d は鉛直下方に向かって振幅が指数関数的に減少する波を, それぞれ表す場合がある. 本稿ではそれらも含め上昇波・下降波と呼んでいる. μ はラメ定数である. Motion-stress vector の各成分が式(15)で与えられるとき, 式(11)(12)(13)(14)の変位と応力が円筒座標系における Navier の式および応力～変位関係式を満足することは, 式(11)(12)(13)(14)をこれらの関係式に代入することにより確認できる. そこで, 後は境界条件と放射条件を満足するように P_u, SV_u, P_d, SV_d を決定すれば, 単位インパルス力による波動場が求まることになる.

まず, $0 < z < \Delta z$ における上昇波とは震源からの直達波であるから, 式(9)(10)と式(11)(12)(15)の比較により

$$\begin{pmatrix} P_u \\ SV_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{4\pi\rho\omega\alpha} \\ -\frac{k^2}{4\pi\rho\omega\beta\gamma} \end{pmatrix} \quad (16)$$

である. ここで Δz は微小であることから

$$e^{i\nu\Delta z} \approx e^{i\gamma\Delta z} \approx 1 \quad (17)$$

としている. 下降波の振幅は, 自由表面で $\hat{\sigma}_{rz} = \hat{\sigma}_{zz} = 0$ となるべきことから

$$\begin{pmatrix} P_d \\ SV_d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2i\alpha\mu k\nu & -i\beta\mu(\gamma^2 - k^2) \\ \alpha\mu(\gamma^2 - k^2) & -2\beta\mu k\nu \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2i\alpha\mu k\nu & i\beta\mu(\gamma^2 - k^2) \\ \alpha\mu(\gamma^2 - k^2) & -2\beta\mu k\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_u \\ SV_u \end{pmatrix} \quad (18)$$

であり, これを整理すると

$$\begin{pmatrix} P_d \\ SV_d \end{pmatrix} = - \frac{k}{4\pi\rho\alpha\beta\omega\gamma R(k)} \begin{pmatrix} \beta\gamma(-4k^2\nu\gamma + (\gamma^2 - k^2)^2) + 4\beta k^2\nu(\gamma^2 - k^2) \\ -4\alpha k\nu\gamma(\gamma^2 - k^2) + \alpha k(-4k^2\nu\gamma + (\gamma^2 - k^2)^2) \end{pmatrix} \quad (19)$$

となる. ここに

$$R(k) \equiv 4k^2\nu\gamma + (\gamma^2 - k^2)^2 \quad (20)$$

は [Rayleigh function](#) である. これらを用いると, $z = 0$ での変位のフーリエ変換は次式となる.

$$\hat{u}_r = \int_0^\infty \frac{1}{\omega} (\alpha k P_d + \beta\gamma SV_d) J_1(kr) dk = \frac{1}{2\pi\rho\beta^2} \int_0^\infty \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2\nu\gamma)}{R(k)} J_1(kr) dk \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_z &= \int_0^\infty \frac{1}{\omega} (-i\alpha\nu P_u + i\beta k SV_u) J_0(kr) dk + \int_0^\infty \frac{1}{\omega} (i\alpha\nu P_d - i\beta k SV_d) J_0(kr) dk \\ &= -\frac{i}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \frac{k(k^2 + \nu\gamma)}{\gamma} J_0(kr) dk + \frac{i}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \frac{k(-2\nu\gamma k\beta^4 + (k^2 + \nu\gamma)R(k))}{\gamma R(k)} J_0(kr) dk \\ &= -\frac{i}{2\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \frac{k\nu k\beta^4}{R(k)} J_0(kr) dk \end{aligned} \quad (22)$$

式(21)において直達波の寄与 (P_u と SV_u の項) を加算していないのは, 鉛直方向にインパルス力を作用させても, 対称性により変位の r 成分は直達波によっては生じないためである. 一方, 式(22)では直達波の寄与を考慮しているが, 結果的に下降波の一部と打ち消し合う.

4. 留数定理の適用

式(21)(22)に留数定理を適用し, 遠方での $z = 0$ での変位のフーリエ変換を計算する.

まず, 変位の r 成分のフーリエ変換を計算する. [ハンケル関数の性質](#)より

$$J_1(kr) = \frac{1}{2} (H_1^{(1)}(kr) + H_1^{(2)}(kr)) \quad (23)$$

であるから, 式(21)より

$$\hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \left(\int_0^\infty \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2\nu\gamma)}{R(k)} H_1^{(1)}(kr) dk + \int_0^\infty \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2\nu\gamma)}{R(k)} H_1^{(2)}(kr) dk \right) \quad (24)$$

である. ところで, [ハンケル関数は \$\arg z = \pi\$ に分岐を有する](#)が, 本稿を通じ, $\arg z = \pi$ でのハンケル関数の値は下半平面での値と連続と考える (上半平面での値とは不連続). この場合, [次式](#)が得られる.

$$H_1^{(1)}(z) = H_1^{(2)}(-z) \quad (z > 0) \quad (25)$$

これを式(24)に代入すると

$$\hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \left(\int_0^\infty \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2v\gamma)}{R(k)} H_1^{(2)}(-kr) dk + \int_0^\infty \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2v\gamma)}{R(k)} H_1^{(2)}(kr) dk \right) \quad (26)$$

である。第1項において $k \rightarrow k' \equiv -k$ の変数変換を行うと

$$\hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2v\gamma)}{R(k)} H_1^{(2)}(k'r) dk' + \int_0^\infty \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2v\gamma)}{R(k)} H_1^{(2)}(kr) dk \right) \quad (27)$$

となり（ここではあえて被積分関数の一部に k を残している）、表記を k' から k に戻すと

$$\hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2v\gamma)}{R(k)} H_1^{(2)}(kr) dk + \int_0^\infty \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2v\gamma)}{R(k)} H_1^{(2)}(kr) dk \right) \quad (28)$$

となる。ここで第1項の被積分関数のハンケル関数以外の部分は k^2 の関数であるため、表記を k' から k に戻す際にこの部分の表記を改める必要はない。式(28)より

$$\hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{k^2(k^2 - \gamma^2 + 2v\gamma)}{R(k)} H_1^{(2)}(kr) dk \quad (29)$$

である。ここで、 $\arg z = \pi$ でのハンケル関数の値は下半平面での値と連続と考えており、かつ、ハンケル関数の性質より $\text{Im}(z) \rightarrow -\infty$ のとき $H_1^{(2)}(z) \rightarrow 0$ であるため、実軸上での積分を下半平面を時計回りに回る積分に変更することができ、式(29)に留数定理を適用できる。被積分関数に含まれる $1/R(k)$ は $k = \pm \omega/c_R$ に特異点を有する。ここに c_R は Rayleigh 波速度である。これらの特異点はもともと実軸上にあるが、媒質が微小な減衰を有すると考えると、 c_R は微小な正の虚部を含むことになり、 $+\omega/c_R$ は複素平面上の第4象限、 $-\omega/c_R$ は複素平面上の第2象限に移動する。したがって、 $k = k_R \equiv \omega/c_R$ での留数を考慮する。 $R(k)$ を k で微分すると

$$R'(k) = -\frac{4k^3}{v\gamma} (v - \gamma)^2 + 8k\gamma(v - \gamma) \quad (30)$$

であり、これを用いると、 $R(k)$ は $k = k_R$ の近傍で

$$R(k) \cong R'(k_R)(k - k_R) \quad (31)$$

と表すことができる。したがって、留数定理により

$$\hat{u}_r = -\frac{i}{2\rho\beta^2} \frac{k_R^2(k_R^2 - \gamma_R^2 + 2v_R\gamma_R)}{R'(k_R)} H_1^{(2)}(k_R r) \quad (32)$$

である。ここで v_R と γ_R は $k = k_R$ に対応する v と γ である。 v_R と γ_R はいずれも negative imaginary であるから

$$k_R^2 - \gamma_R^2 + 2v_R\gamma_R = k_R^2 + |\gamma_R|^2 - 2|v_R||\gamma_R| = (|\gamma_R| - |v_R|)^2 + k_R^2 - |v_R|^2 \quad (33)$$

であり、かつ、式(7)より $|v_R| < k_R$ であるため、式(33)右辺は正である。また、一般に

$$k^2(k^2 - \gamma^2 + 2v\gamma)^2 = -v\gamma k_\beta^4 + (k^2 + v\gamma)R(k) \quad (34)$$

のような恒等式が成立するため,

$$k_R^2(k_R^2 - \gamma_R^2 + 2v_R\gamma_R)^2 = -v_R\gamma_R k_\beta^4 \quad (35)$$

である. したがって

$$k_R^2 - \gamma_R^2 + 2v_R\gamma_R = \frac{\sqrt{|v_R||\gamma_R|}k_\beta^2}{k_R} \quad (36)$$

である. これを式(32)に代入すると

$$\hat{u}_r = -\frac{i}{2\rho\beta^2} \frac{\sqrt{|v_R||\gamma_R|}k_R k_\beta^2}{R'(k_R)} H_1^{(2)}(k_R r) \quad (37)$$

となる.

次に, 変位の z 成分のフーリエ変換を計算する. [ハンケル関数の性質](#)より

$$J_0(kr) = \frac{1}{2} \left(H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(2)}(kr) \right) \quad (38)$$

であるから, 式(22)より

$$\hat{u}_z = -\frac{i}{4\pi\rho\omega^2} \left(\int_0^\infty \frac{kvk_\beta^4}{R(k)} H_0^{(1)}(kr) dk + \int_0^\infty \frac{kvk_\beta^4}{R(k)} H_0^{(2)}(kr) dk \right) \quad (39)$$

である. 本稿では $\arg z = \pi$ でのハンケル関数の値は下半平面での値と連続と考えているため, $H_0^{(1)}(z)$ については[次式](#)が得られる.

$$H_0^{(1)}(z) = -H_0^{(2)}(-z) \quad (z > 0) \quad (40)$$

これを式(39)に代入すると

$$\hat{u}_z = -\frac{i}{4\pi\rho\omega^2} \left(-\int_0^\infty \frac{kvk_\beta^4}{R(k)} H_0^{(2)}(-kr) dk + \int_0^\infty \frac{kvk_\beta^4}{R(k)} H_0^{(2)}(kr) dk \right) \quad (41)$$

である. 第1項において $k \rightarrow k' \equiv -k$ の変数変換を行うと

$$\hat{u}_z = -\frac{i}{4\pi\rho\omega^2} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{k'vk_\beta^4}{R(k)} H_0^{(2)}(k'r) dk' + \int_0^\infty \frac{kvk_\beta^4}{R(k)} H_0^{(2)}(kr) dk \right) \quad (42)$$

となり (ここではあえて被積分関数の一部に k を残している), 表記を k' から k に戻すと

$$\hat{u}_z = -\frac{i}{4\pi\rho\omega^2} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{kvk\beta^4}{R(k)} H_0^{(2)}(kr) dk + \int_0^{\infty} \frac{kvk\beta^4}{R(k)} H_0^{(2)}(kr) dk \right) \quad (43)$$

となる．ここで第1項の被積分関数のハンケル関数と k 以外の部分は k^2 の関数であるため，表記を k' から k に戻す際にこの部分の表記を改める必要はない．式(43)より

$$\hat{u}_z = -\frac{i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kvk\beta^4}{R(k)} H_0^{(2)}(kr) dk \quad (44)$$

である．ここで， $\arg z = \pi$ でのハンケル関数の値は下半平面での値と連続と考えており，かつ，ハンケル関数の性質より $\text{Im}(z) \rightarrow -\infty$ のとき $H_0^{(2)}(z) \rightarrow 0$ であるため，実軸上での積分を下半平面を時計回りに回る積分に変更することができ，式(44)に留数定理を適用できる．被積分関数に含まれる $1/R(k)$ は $k = \pm\omega/c_R$ に特異点を有する．ここに c_R は Rayleigh 波速度である．これらの特異点はずっと実軸上にあるが，媒質が微小な減衰を有すると考えると， c_R は微小な正の虚部を含むことになり， $+\omega/c_R$ は複素平面上の第4象限， $-\omega/c_R$ は複素平面上の第2象限に移動する．したがって， $k = k_R \equiv \omega/c_R$ での留数を考慮する． \hat{u}_r の場合と同様， $R(k)$ は $k = k_R$ の近傍で式(31)で近似できるので，留数定理により

$$\hat{u}_z = \frac{i}{2\rho\beta^2} \frac{|v_R|k_Rk\beta^2}{R'(k_R)} H_0^{(2)}(k_R r) \quad (45)$$

である．ここで v_R と γ_R は $k = k_R$ に対応する v と γ である．

式(37)(45)において $r \rightarrow \infty$ とすると，[ハンケル関数の性質](#) より

$$\hat{u}_r = -\frac{i}{2\rho\beta^2} \frac{\sqrt{|v_R||\gamma_R|}k_Rk\beta^2}{R'(k_R)} \sqrt{\frac{2}{\pi k_R r}} e^{-i(k_R r - \frac{3\pi}{4})} \quad (46)$$

$$\hat{u}_z = \frac{i}{2\rho\beta^2} \frac{|v_R|k_Rk\beta^2}{R'(k_R)} \sqrt{\frac{2}{\pi k_R r}} e^{-i(k_R r - \frac{\pi}{4})} \quad (47)$$

である．

式(46)(47)から，半無限地盤における Rayleigh 波のいくつかの重要な性質が読み取れる．まず，Rayleigh 波の振幅は遠方で $r^{-0.5}$ に比例して減衰することが確認できる．振幅が $r^{-0.5}$ に比例するということは，[単位体積あたりのエネルギー](#) は r^{-1} に比例するということでもある．これは，Rayleigh 波の波面が描く弧の長さが r に比例することと対応しており，エネルギーの釣合が保たれている．また， \hat{u}_r と \hat{u}_z の比をとると

$$\hat{u}_r/\hat{u}_z = -i\sqrt{|\gamma_R|/|v_R|} \quad (48)$$

となり，これは negative imaginary である．したがって，半無限地盤における Rayleigh 波の粒子軌跡は retrograde であることがわかる．

参考文献

- 1) Lamb, H.: On the propagation of tremors at the surface of an elastic solid, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol.203, pp.1-42, 1904.

付録 A ゾンマーフェルト積分

一般に式(A1)で表されるような球面波は波数積分の形で表現できる．ここではこのことについて説明する．

$$\hat{\phi} = \frac{1}{R} e^{-i\omega R/\alpha} \quad (\text{A1})$$

まず，式(A1)は式(A2)に示す波動方程式の解である（付録 B 参照）．

$$\omega^2 \hat{\phi} + \alpha^2 \nabla^2 \hat{\phi} = -4\pi\alpha^2 \delta(\mathbf{x}) \quad (\text{A2})$$

そこで，両辺に空間座標に関する 3 重フーリエ変換

$$\tilde{f}(k_1, k_2, k_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x_1, x_2, x_3) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (\text{A3})$$

を適用する．ここに

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \quad (\text{A4})$$

である．その結果，次式が得られる．

$$\tilde{\phi} = \frac{4\pi\alpha^2}{\alpha^2 k^2 - \omega^2} \quad (\text{A5})$$

ここに $\tilde{\phi}$ は $\hat{\phi}$ の空間座標に関する 3 重フーリエ変換であり

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \quad (\text{A6})$$

である．式(A5)をフーリエ逆変換すると $\hat{\phi}$ に戻るはずであるから

$$\hat{\phi} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - (\omega/\alpha)^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (\text{A7})$$

ここで k_3 に関する積分を実行する．複素平面上に積分経路をとり，留数定理を適用する．被積分関数の分母がゼロとなるのは

$$k_3^2 = (\omega/\alpha)^2 - k_1^2 - k_2^2 \quad (\text{A8})$$

のときであるが，媒質が微小な減衰を有すると考えると， α は [微小な正の虚部](#) を含むことになり， $(\omega/\alpha)^2$ は複素平面上の第 4 象限， $(\omega/\alpha)^2 - k_1^2 - k_2^2$ は複素平面上の第 3 象限または第 4 象限に位置することになる．よって特異点は複素平面上の第 2 象限と第 4 象限に一つずつ存在する（第 4 象限の特異点を ν とする）． $x_3 > 0$ のときは [図-A1](#) に示すように複素平面の下半分に積分経路をとると円周上の積分が消え，留数としては第 4 象限のものが選択され，積分値は

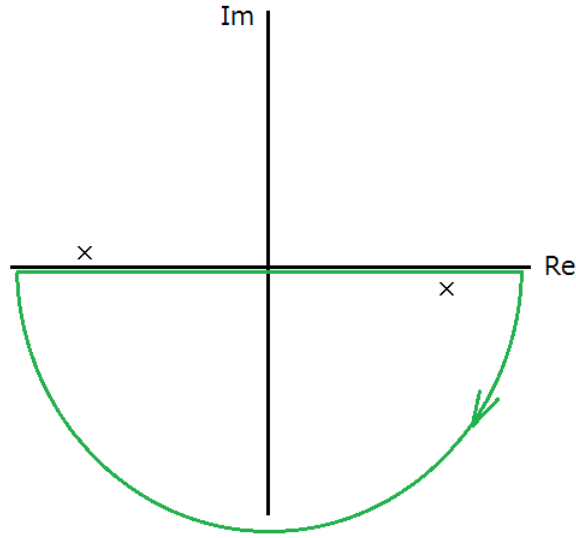


図-A1 $x_3 > 0$ のときの積分経路

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \exp(-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 - ivx_3) dk_1 dk_2 \quad (\text{A9})$$

となる. $x_3 < 0$ のときは複素平面の上半分に積分経路をとると円周上の積分が消え, 留数としては第2象限のものが選択され, 積分値は

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \exp(-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 + ivx_3) dk_1 dk_2 \quad (\text{A10})$$

となる. これらをまとめると積分値は

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \exp(-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 - iv|x_3|) dk_1 dk_2 \quad (\text{A11})$$

となる. ここで

$$k_1 = k_r \cos \theta', \quad k_2 = k_r \sin \theta' \quad (\text{A12})$$

とおき変数変換を行うと

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk_r \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{k_r}{v} \exp(-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 - iv|x_3|) \quad (\text{A13})$$

となる. ここでさらに

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (\text{A14})$$

とおくと

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_r \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{k_r}{v} \exp[-ik_r r \cos(\theta - \theta') - iv|x_3|] \quad (\text{A15})$$

となる。ここでベッセル関数の公式

$$2\pi J_0(k_r r) = \int_0^{2\pi} \exp(-ik_r r \cos \theta') d\theta' \quad (\text{A16})$$

を用いると（公式の証明は付録 C 参照）

$$\hat{\phi} = -i \int_0^\infty \frac{k_r}{v} J_0(k_r r) e^{-iv|x_3|} dk_r \quad (\text{A17})$$

となる。これで式(A1)の球面波が波数積分の形で表現できたことになる。

付録 B $\hat{\phi} = (1/R)e^{-i\omega R/\alpha}$ が波動方程式の解であることについて

式(B1)の球面波は式(B2)に示す波動方程式の解である.

$$\hat{\phi} = \frac{1}{R}e^{-i\omega R/\alpha} \quad (\text{B1})$$

$$\omega^2 \hat{\phi} + \alpha^2 \nabla^2 \hat{\phi} = -4\pi\alpha^2 \delta(\mathbf{x}) \quad (\text{B2})$$

これは次のように示すことができる.

まず, 式(B2)に空間座標に関する 3 重フーリエ変換

$$\tilde{f}(k_1, k_2, k_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x_1, x_2, x_3) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 dx_2 dx_3$$

を適用する. ここに

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$$

である. その結果次式が得られる.

$$\omega^2 \tilde{\phi} - k^2 \alpha^2 \tilde{\phi} = -4\pi\alpha^2 \quad (\text{B3})$$

ここに $\tilde{\phi}$ は $\hat{\phi}$ に対して空間座標に関する 3 重フーリエ変換を適用したものである. また

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

である. 式(B3)を変形すると

$$\tilde{\phi} = \frac{4\pi}{k^2 - k_\alpha^2} \quad (\text{B4})$$

が得られる.

式(B4)をフーリエ逆変換すると $\hat{\phi}$ が得られるはずであるが, [全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(15)より $1/(k^2 - k_\alpha^2)$ のフーリエ逆変換は $(1/4\pi R)e^{-ik_\alpha R}$ であるから (ここに $R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ である)

$$\hat{\phi} = \frac{1}{R}e^{-i\omega R/\alpha}$$

が得られる. ■

付録 C ベッセル関数の公式

本稿で用いたベッセル関数の公式は以下の通りである.

$$\frac{d}{dz}J_0(z) = -J_1(z) \quad (C1)$$

$$\frac{d}{dz}J_1(z) = J_0(z) - \frac{1}{z}J_1(z) \quad (C2)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}J_1(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}J_1(z) + \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)J_1(z) = 0 \quad (C3)$$

$$2\pi J_0(z) = \int_0^{2\pi} \exp(-iz \cos \theta) d\theta \quad (C4)$$

式(C1)と式(C2)はベッセル関数の定義式

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!n!} \quad (C5)$$

$$J_1(z) = \left(\frac{z}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} \quad (C6)$$

から導くことができる. 実際, 式(C5)の両辺を z で微分すると初項の微分はゼロとなるので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}J_0(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1} \frac{1}{2}}{n!n!} \\ &= -\left(\frac{z}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-2}}{(n-1)!n!} \\ &= -\left(\frac{z}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!(m+1)!} \\ &= -J_1(z) \end{aligned}$$

となり式(C1)が得られる. また式(C6)の両辺を z で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}J_1(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} \end{aligned}$$

となる. ここで右辺第3項は $-J_1(z)/z$ である. 右辺第1項から $n=0$ の項を除き第2項とまとめると

$$\begin{aligned} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} - \frac{1}{z}J_1(z) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!n!} - \frac{1}{z}J_1(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!n!} - \frac{1}{z}J_1(z) \end{aligned}$$

$$= J_0(z) - \frac{1}{z} J_1(z)$$

となり式(C2)が得られる。式(C3)は式(C1)と式(C2)から得られる。
式(C4)については、次に示す Wallis の式¹⁾を用いる。

$$I_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \, d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (C7)$$

この式自体は次の通り数学的帰納法により証明することができる。まず $n = 0$ の場合は両辺とも 1 となるので式(C7)は成立する。次に $n = k$ の場合に式(C7)が成立すると仮定する。すなわち

$$I_k = \frac{(2k)!}{2^{2k} k! k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (C8)$$

であると仮定する。このとき

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2k+2} \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot \cos^{2k+1} \theta \, d\theta \end{aligned}$$

部分積分を適用すると

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \frac{1}{2\pi} [\sin \theta \cdot \cos^{2k+1} \theta]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} (2k+1) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot \cos^{2k} \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} (2k+1) \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) \cdot \cos^{2k} \theta \, d\theta \\ &= (2k+1) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2k} \theta \, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2k+2} \theta \, d\theta \right] \\ &= (2k+1)(I_k - I_{k+1}) \end{aligned}$$

よって

$$I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k$$

これに式(C8)を代入すると

$$I_{k+1} = \frac{[2(k+1)]!}{2^{2(k+1)} (k+1)! (k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

が得られる。すなわち $n = k + 1$ の場合に式(C7)が成立する。以上により数学的帰納法により式(C7)が証明できた。

次に、指数関数をテイラー展開した式

$$e^{-iz \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iz \cos \theta)^n$$

の両辺を θ で積分すると

$$\int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta$$

右辺の和は、 n が偶数の場合についてのみ加えればよいので、

$$\int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta$$

ここで式(C7)を利用すると

$$\int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \theta} d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} = 2\pi J_0(z)$$

となるので式(C4)が成立する.

参考文献

- 1) Abramowitz, M. and I.A. Stegun (ed.): Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover, New York, p.258, 1965.