

## 1. はじめに

半無限地盤や水平成層地盤における波動場の解析ではハンケル関数がしばしば現れるが、筆者の経験では、特殊関数について予備知識の無い状態から出発して解析に必要な知識を身につけるまでには、かなりの時間を要してしまいがちである。本稿は、特殊関数に関する予備知識を前提とせず、波動場解析に必要なハンケル関数の知識を最短で身につけることができるよう、関連する知識を整理したものである。ハンケル関数に関して特にわかりにくい点の一つは、そもそもハンケル関数をどのように定義するかという点である。本によって、無限級数で定義している場合と、母関数の積分で定義している場合があるが、波動場解析への応用を考えると、母関数の積分で定義しておくことが効率的である。その際、積分経路のとり方など迷いがちな点もあるため、本稿ではハンケル関数の定義については特に丁寧に説明している。ハンケル関数の定義を説明するにあたり、ガンマ関数とベッセル関数についてあらかじめ説明しておくことは避けられないため、本稿は先ずそれらの説明を行う。なお、本稿ではベッセル関数とハンケル関数は次数が整数のものを対象とする。

## 2. ガンマ関数

正数 $x$ に対しガンマ関数は次式で定義される<sup>1)</sup>。

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (1)$$

正の整数 $n$ に対しては、部分積分を適用すると

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = [-e^{-t} t^n]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = n\Gamma(n) \quad (2)$$

であり、これを繰り返し用いれば、

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n > 0) \quad (3)$$

である。また $0$ 以下の正数 $n$ に対し式(1)をあえて適用すると $\Gamma(n) = \infty$ すなわち

$$1/\Gamma(n) = 0 \quad (n \leq 0) \quad (4)$$

である<sup>2)</sup>。

## 3. ベッセル関数

複素数 $z$ に対しベッセル関数は次式で定義される<sup>1)</sup>。次数 $n$ は本稿では整数とする。

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(n+m+1)} \quad (5)$$

次数が 0 以上のベッセル関数は式(3)より

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!(n+m)!} \quad (6)$$

である。また、次数が負のベッセル関数については、式(4)より

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!\Gamma(-n+m+1)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!\Gamma(-n+m+1)} = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{(n+m)!\Gamma(m+1)} = (-1)^n J_n(z) \quad (7)$$

が成立する。

#### 4. ベッセル関数の母関数による表示

まず、ベッセル関数に関して次式が成立することを示す。次式の右辺はベッセル関数の母関数と呼ばれる。なお以下の証明は筆者は文献 3)で学んだ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \quad (8)$$

まず、式(8)左辺を次数が負の場合と 0 以上の場合に分ける。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(z)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(z)t^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(z)t^n \quad (9)$$

右辺第 1 項に式(7)を適用すると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(z)t^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(z)t^n \quad (10)$$

式(6)を用いると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} t^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} t^n \quad (11)$$

$k = m + n$ とおくと

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+k} t^{m-k} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+k} t^{k-m} \quad (12)$$

右辺第 2 項において  $m$  と  $k$  を交換すると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+k} t^{m-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+k} t^{m-k} \quad (13)$$

ここで添え字  $m$  を横軸に、添え字  $k$  を縦軸にとると (図-1)、図の青丸の箇所は右辺第 1 項、緑の丸の箇所は右辺第 2 項で加算されるため、 $m$  と  $k$  が 0 以上の整数である場合はすべて網羅されるため、

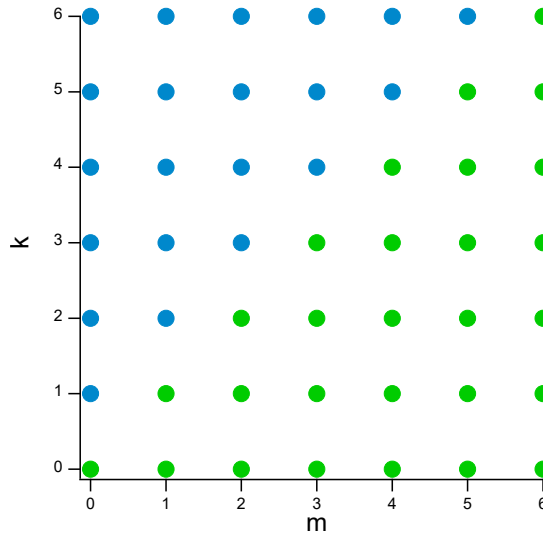


図-1  $m$ と $k$ に関する和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+k} t^{m-k} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{zt}{2}\right)^m\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2t}\right)^k\right) = e^{zt/2} \cdot e^{-z/2t} \quad (14)$$

となるため式(8)が成立する. 式(8)において添え字を $n$ から $m$ に変更し,  $t^{-(n+1)}$ を乗じ, 原点を反時計回りに一周する経路で積分し, 留数定理を適用すると

$$\int_C \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \int_C t^{m-n-1} dt = 2\pi i J_n(z) \quad (15)$$

となる. したがって, ベッセル関数の母関数による表示として

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (16)$$

が得られる.

## 5. ハンケル関数の定義

式(16)は原点を反時計回りに一周する経路での積分であるが, この経路を様々に変化させることでハンケル関数が定義できる<sup>2)</sup>. まず,  $\text{Re}(z) > 0$ の場合は, 文献2)にある通り, 第1種ハンケル関数 $H_n^{(1)}(z)$ と第2種ハンケル関数 $H_n^{(2)}(z)$ を次式により定義できる.

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (17)$$

$$H_n^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{C_2} \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (18)$$

ただし,  $C_1$ と $C_2$ は図-2に示す経路である. 式(18)の負号は, 経路の向きを文献1)の p.183 に合わせているために付いている.

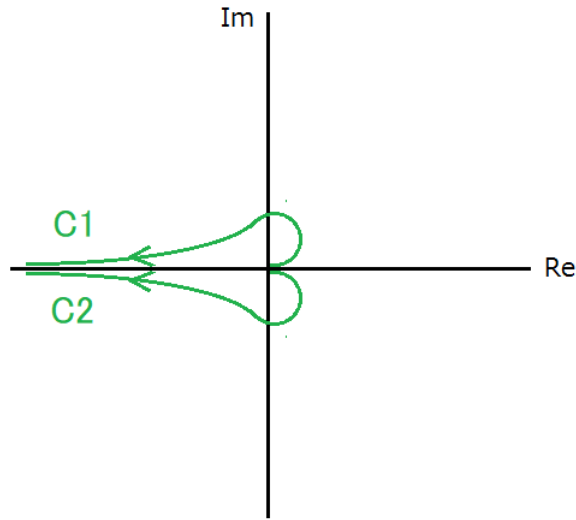


図-2  $\text{Re}(z) > 0$ に対しハンケル関数を定義するための積分経路<sup>12)</sup>

経路 $C_1$ と $C_2$ は, 起点と終点において被積分関数が0に収束するように工夫されている. まず終点については,  $|t| \rightarrow \infty$ のとき被積分関数の分子は

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \rightarrow \exp\left(\frac{zt}{2}\right) \quad (19)$$

となるため, 被積分関数が0に収束するための条件は $|t| \rightarrow \infty$ において

$$\frac{\pi}{2} < \theta_z + \theta_t < \frac{3\pi}{2} \quad (20)$$

となることである. ここに $\theta_z$ は $z$ の位相角,  $\theta_t$ は $t$ の位相角である. 今の場合,  $\text{Re}(z) > 0$ すなわち $-\pi/2 < \theta_z < \pi/2$ であり,  $\theta_t \rightarrow \pi$ であるから, この条件は満たされる. 次に起点については,  $|t| \rightarrow 0$ のとき被積分関数の分子は

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \rightarrow \exp\left(-\frac{z}{2t}\right) \quad (21)$$

となるため, 被積分関数が0に収束するための条件は $|t| \rightarrow 0$ において

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_z - \theta_t < \frac{\pi}{2} \quad (22)$$

となることである. 今の場合,  $\text{Re}(z) > 0$ すなわち $-\pi/2 < \theta_z < \pi/2$ であり,  $\theta_t \rightarrow 0$ であるから, この条件は満たされる. 言い換えれば,  $\text{Re}(z) \leq 0$ となる $z$ に対しては, 経路 $C_1$ と $C_2$ ではハンケル関数を定義できないことになる. 半無限地盤や水平成層地盤における波動場の解析では, 波数 $k$ に関する積分を留数定理を用いて行う

ことが多く、 $\text{Re}(z) \leq 0$ となる $z$ に対してハンケル関数が定義できないことは不都合である。そこで、積分区間の終点において被積分関数が  $0$  に収束するための条件 (式(20)) を見ると、 $|t| \rightarrow \infty$ における $\theta_t$ の値を減らせば、ハンケル関数を定義できる領域が反時計回りに回転することがわかる。また、積分区間の起点において被積分関数が  $0$  に収束するための条件 (式(22)) を見ると、 $|t| \rightarrow 0$ における $\theta_t$ の値を増やせば、ハンケル関数を定義できる領域が反時計回りに回転することがわかる。以上を考慮し、起点と終点の角度を少しずつ変更することで、 $\text{Re}(z) \leq 0$ となる $z$ に対してもハンケル関数を定義することを考える。

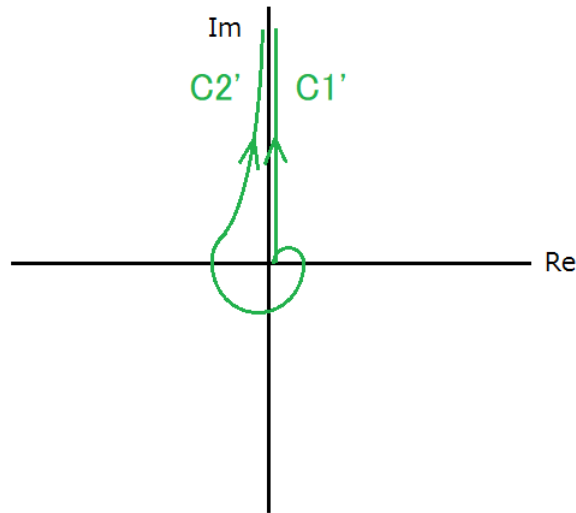


図-3 上半平面の $z$ に対しハンケル関数を定義するための積分経路<sup>1)</sup>

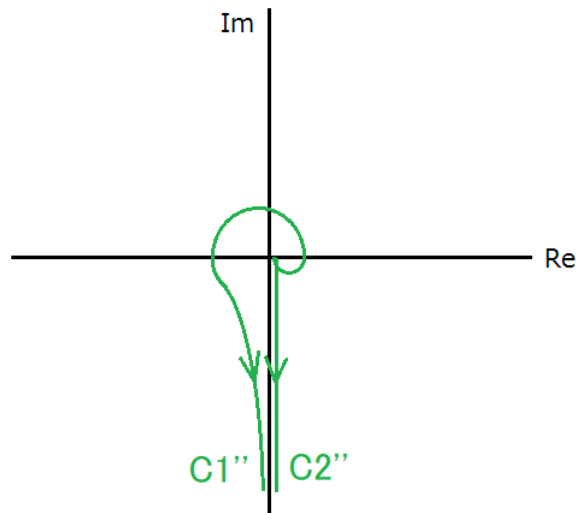


図-4 下半平面の $z$ に対しハンケル関数を定義するための積分経路<sup>1)</sup>

まず、上半平面の $z$ については、積分区間の終点において被積分関数が  $0$  に収束するための条件 (式(20)) より、 $|t| \rightarrow \infty$ において $\theta_t \rightarrow \pi/2$ となることが望ましい。また、積分区間の起点において被積分関数が  $0$  に収束するための条件 (式(22)) より、 $|t| \rightarrow 0$ において $\theta_t \rightarrow \pi/2$ となることが望ましい。これらの条件より、上半平面の $z$ については、図-3 に示す経路 $C_1'$ と $C_2'$ を用い、次式によりハンケル関数を定義する。

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1'} \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (23)$$

$$H_n^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{C_2'} \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (24)$$

このようにハンケル関数を定義すると、 $0 < \theta_z < \pi/2$ の範囲にある $z$ に対しては、異なる経路を用いてハンケル関数が定義できてしまい、それらに間に矛盾が生じないのかという疑問が生じるが、被積分関数が原点以外では正則であること、 $\pi/2 < \theta_z < \pi$ の範囲では無限遠方で被積分関数が $0$ に収束することから、異なる経路による積分の値は一致するため、ハンケル関数は矛盾なく定義できることになる。

同様に、下半平面の $z$ については、積分区間の終点において被積分関数が $0$ に収束するための条件(式(20))より、 $|t| \rightarrow \infty$ において $\theta_t \rightarrow -\pi/2$ となることが望ましい。また、積分区間の起点において被積分関数が $0$ に収束するための条件(式(22))より、 $|t| \rightarrow 0$ において $\theta_t \rightarrow -\pi/2$ となることが望ましい。これらの条件より、下半平面の $z$ については、図-4に示す経路 $C_1''$ と $C_2''$ を用い、次式によりハンケル関数を定義する。

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1''} \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (25)$$

$$H_n^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{C_2''} \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (26)$$

このように、 $\text{Re}(z) > 0$ の場合を基本とし、起点と終点の角度を少しずつ変えながら上半平面と下半平面でハンケル関数を定義しているため、 $\theta_z = \pi$ において二つの定義は互いに矛盾することになる。したがって、ハンケル関数は $\theta_z = \pi$ に分岐を有することになる。

## 6. ハンケル関数の諸性質

ハンケル関数の諸性質のうち、半無限地盤や水平成層地盤における波動場の解析で特に重要となるものとして、次のものがある。

$$(1) J_n(z) = \frac{1}{2} \left( H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z) \right)$$

$$(2) \text{Im}(z) \rightarrow +\infty \text{ のとき } H_n^{(1)}(z) \rightarrow 0, \text{Im}(z) \rightarrow -\infty \text{ のとき } H_n^{(2)}(z) \rightarrow 0$$

$$(3) \text{上半平面の } z \text{ に対し } H_n^{(1)}(z) = (-1)^{n+1} H_n^{(2)}(-z)$$

$$(4) x \text{ が正の実数のとき } H_n^{(1)}(x) \text{ と } H_n^{(2)}(x) \text{ は共役}$$

$$(5) x \text{ が実数で } x \rightarrow +\infty \text{ のとき } H_n^{(1)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, H_n^{(2)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

以下、これらの性質について説明する。

$$(1) J_n(z) = \frac{1}{2} \left( H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z) \right)$$

図-2, 図-3, 図-4より、 $C_1 - C_2$ ,  $C_1' - C_2'$ ,  $C_1'' - C_2''$ などの経路はいずれも原点を反時計回りに一周する経路である。したがって、ハンケル関数の定義(式(17)(18)(23)(24)(25)(26))とベッセル関数の母関数による表示(式(16))より、上式が得られる。

$$(2) \text{Im}(z) \rightarrow +\infty \text{ のとき } H_n^{(1)}(z) \rightarrow 0, \text{Im}(z) \rightarrow -\infty \text{ のとき } H_n^{(2)}(z) \rightarrow 0$$

上半平面の $z$ に対する $H_n^{(1)}(z)$ の定義(式(23))において用いられる経路は $C_1'$ であり、 $C_1'$ 上で $(t - 1/t)$ は常に上半平面にあることを踏まえると、 $\text{Im}(z) \rightarrow +\infty$ のとき $C_1'$ 上のすべての点で被積分関数は $0$ に収束するため、

$H_n^{(1)}(z) \rightarrow 0$ である。同様に、下半平面の $z$ に対する $H_n^{(2)}(z)$ の定義 (式(26)) において用いられる経路は $C_2''$ であり、 $C_2''$ 上で $(t-1/t)$ は常に下半平面にあることを踏まえると、 $\text{Im}(z) \rightarrow -\infty$ のとき $C_2''$ 上のすべての点で被積分関数は0に収束するため、 $H_n^{(2)}(z) \rightarrow 0$ である。

(3) 上半平面の $z$ に対し  $H_n^{(1)}(z) = (-1)^{n+1}H_n^{(2)}(-z)$

$z$ は上半平面なので $-z$ は下半平面である。したがって、式(23)(26)より

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1'} \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (27)$$

$$H_n^{(2)}(-z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{C_2''} \frac{\exp\left[-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (28)$$

である。経路 $C_1'$ と $C_2''$ は原点を挟んで対称である。したがって、式(27)において $t$ から $t' = -t$ への変数変換を行うことにより

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_2''} \frac{\exp\left[-\frac{z}{2}\left(t'-\frac{1}{t'}\right)\right]}{(-t')^{n+1}} (-1) dt' = (-1)^{n+2} \frac{1}{\pi i} \int_{C_2''} \frac{\exp\left[-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt = (-1)^{n+1} H_n^{(2)}(-z) \quad (29)$$

が示される。経路 $C_1''$ と $C_2'$ は原点を挟んで対称でないため、下半平面の $z$ に対しては同じ式は成立しない。なお、ハンケル関数は $\theta_z = \pi$ に分岐を有するが、 $\theta_z = \pi$ でのハンケル関数の値は下半平面での値と連続と考えれば、 $z$ が正の実数である場合も同じ式が適用できる。

(4)  $x$ が正の実数のとき $H_n^{(1)}(x)$ と $H_n^{(2)}(x)$ は共役

これは式(17)(18)の定義から明らかである。

(5)  $x$ が実数で $x \rightarrow +\infty$ のとき $H_n^{(1)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$ ,  $H_n^{(2)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

この性質は最急降下法でも示すことができるが<sup>2)</sup>、ここではBowman<sup>4)</sup>を参考に別な証明を考える。 $x$ が実数であるから式(17)より

$$H_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} \frac{\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (30)$$

である。ここで

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) = i - \eta \quad (0 \leq \eta < \infty) \quad (31)$$

により $t$ から $\eta$ への変数変換を行う。 $\eta$ から $t$ を求める式は

$$t_{\pm} = (i - \eta) \pm \sqrt{(i - \eta)^2 + 1} \quad (32)$$

となる。ここに

$$\text{Re}\left(\sqrt{(i - \eta)^2 + 1}\right) > 0 \quad (33)$$

とする.  $\eta = 0$  のとき  $t_{\pm} = i$  である. また,  $\eta$  がある程度大きくなると,  $\pm\sqrt{(i-\eta)^2+1}$  の複素平面上での位置はおおよそ図-5 の赤丸のような位置となる. したがって,  $\eta$  がある程度大きいとき,  $t_{-}$  は複素平面の第 2 象限のかなり左の方に位置し,  $t_{+}$  は小さな正の実数となる. したがって,  $\eta$  を  $0 \leq \eta < \infty$  の範囲で動かし,  $t_{\pm}$  の両方を考慮することで, 図-2 の積分経路  $C_1$  の全体がカバーできる.

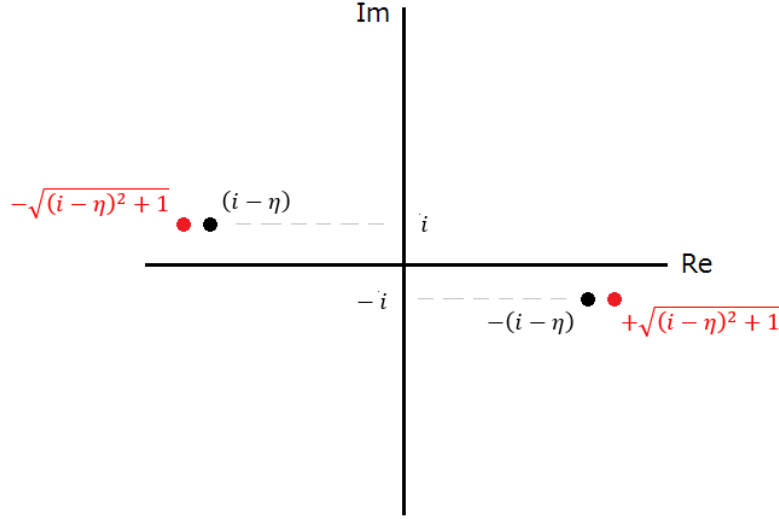


図-5  $\pm\sqrt{(i-\eta)^2+1}$  の複素平面上での位置

式(31)の両辺を  $t$  で微分すると

$$-\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t^2} \right) \quad (34)$$

すなわち

$$\frac{dt}{d\eta} = -\frac{2t^2}{t^2+1} \quad (35)$$

である. これを利用して  $t$  から  $\eta$  への変数変換を行うと

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= -\frac{1}{\pi i} \int_{\infty}^0 \frac{\exp[x(i-\eta)]}{t_+^{n+1}} \left( \frac{2t_+^2}{t_+^2+1} \right) d\eta - \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\exp[x(i-\eta)]}{t_-^{n+1}} \left( \frac{2t_-^2}{t_-^2+1} \right) d\eta \\ &= \frac{2}{\pi i} e^{ix} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\eta}}{t_+^{n-1}(t_+^2+1)} d\eta - \frac{2}{\pi i} e^{ix} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\eta}}{t_-^{n-1}(t_-^2+1)} d\eta \\ &= \frac{2}{\pi i} e^{ix} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\eta}}{\left( (i-\eta) + \sqrt{(i-\eta)^2+1} \right)^{n-1} \left( \left( (i-\eta) + \sqrt{(i-\eta)^2+1} \right)^2 + 1 \right)} d\eta \\ &\quad - \frac{2}{\pi i} e^{ix} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\eta}}{\left( (i-\eta) - \sqrt{(i-\eta)^2+1} \right)^{n-1} \left( \left( (i-\eta) - \sqrt{(i-\eta)^2+1} \right)^2 + 1 \right)} d\eta \\ &= \frac{2}{\pi i} e^{ix} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\eta}}{\left( (i-\eta) + \sqrt{(i-\eta)^2+1} \right)^{n-1} (2\eta^2 - 4i\eta + 2(i-\eta)\sqrt{\eta^2 - 2i\eta})} d\eta \\ &\quad - \frac{2}{\pi i} e^{ix} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\eta}}{\left( (i-\eta) - \sqrt{(i-\eta)^2+1} \right)^{n-1} (2\eta^2 - 4i\eta - 2(i-\eta)\sqrt{\eta^2 - 2i\eta})} d\eta \end{aligned} \quad (36)$$



となる. ここでさらに Bowman<sup>4)</sup>を参考に $\eta$ から $u = x\eta$ への変数変換を行うと次式が得られる.

$$\begin{aligned}
 H_n^{(1)}(x) &= \frac{2}{\pi i} e^{ix} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\left( \left( i\frac{-u}{x} + \sqrt{\left( i\frac{-u}{x} \right)^2 + 1} \right)^{n-1} \left( \frac{2u^2}{x^{3/2}} - \frac{4iu}{x^{1/2}} + 2\left( i\frac{-u}{x} \right) \sqrt{\frac{u^2}{x} - 2iu} \right)} du \\
 &\quad - \frac{2}{\pi i} e^{ix} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\left( \left( i\frac{-u}{x} - \sqrt{\left( i\frac{-u}{x} \right)^2 + 1} \right)^{n-1} \left( \frac{2u^2}{x^{3/2}} - \frac{4iu}{x^{1/2}} - 2\left( i\frac{-u}{x} \right) \sqrt{\frac{u^2}{x} - 2iu} \right)} du
 \end{aligned} \tag{37}$$

ここで $x \rightarrow +\infty$ とすれば

$$H_n^{(1)}(x) \cong \frac{2}{\pi i} e^{ix} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{i^{n-1} \sqrt{-2iu}} du \tag{38}$$

となり, これを整理すると

$$H_n^{(1)}(x) \cong \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} e^{i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \tag{39}$$

が得られる. 最後の積分は $\sqrt{u} = v$ とおけば

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \int_0^\infty \frac{e^{-v^2}}{v} 2v dv = \int_{-\infty}^\infty e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi} \tag{40}$$

となるため,

$$H_n^{(1)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{41}$$

が得られる. また,  $x$ が正の実数のとき $H_n^{(1)}(x)$ と $H_n^{(2)}(x)$ は共役であるため,

$$H_n^{(2)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{42}$$

も言える.

#### 参考文献

- 1) 森口繁一・宇田川銚久・一松信：岩波数学公式, III特殊関数, 岩波書店, 1960年.
- 2) 蓬田清：演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門, 共立出版, 2007年.
- 3) Scientific Doggie 数理の楽しみ, <http://www.wannyan.net/scidog/>.
- 4) Frank Bowman 著, 平野鉄太郎訳：ベッセル関数入門, 日新出版, 1963年.