

Rayleigh function が  $k = \pm \omega/c_R$  以外に zero を持たない件について

## 1. はじめに

半無限地盤や水平成層地盤における波動場の解析において次式のような関数がしばしば現れる.

$$R(k) = 4k^2\nu\gamma + (\gamma^2 - k^2)^2 \quad (1)$$

ここに  $k$  は波数の水平成分であり,

$$\nu^2 = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 - k^2, \quad \text{Im}(\nu) < 0 \quad (2)$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 - k^2, \quad \text{Im}(\gamma) < 0 \quad (3)$$

である.  $\alpha$  は P 波速度,  $\beta$  は S 波速度である.  $R(k)$  は Rayleigh function と呼ばれる. なお,  $\nu^2$  や  $\gamma^2$  が positive real となる場合は, 上に挙げた  $\text{Im}(\nu) < 0$ ,  $\text{Im}(\gamma) < 0$  といった条件から  $\nu$  と  $\gamma$  を一意に決めることはできないため, その場合は  $\text{Re}(\nu) > 0$ ,  $\text{Re}(\gamma) > 0$  となるように  $\nu$  と  $\gamma$  を決めるものとする.

Rayleigh function が  $k = \pm \omega/c_R$  以外に zero を持たない ( $c_R$  は Rayleigh 波速度) という事実は, 半無限地盤や水平成層地盤における波動場の解析において重要であるが, その証明は既存の教科書では省略されている場合が多い. 例えば Aki and Richards<sup>1)</sup> では p.155 で事実のみが述べられている. しかし, こうした重要な点について, 単に事実として認めて先に進むことに不安を感じる読者も多いと考えられる. そこで, 以下においては筆者の考案した証明を示す. はじめに  $k^2$  が positive real となる解として  $k = \pm \omega/c_R$  のみが存在することを示す. 次に  $k^2$  が negative real となる解は存在しないことを示す. 最後に  $\text{Im}(k^2) \neq 0$  となる解は存在しないことを示す. ただし, 以下の証明はけしてスマートなものとは言えない. 筆者の気付いていない, よりスマートな証明があるかもしれない.

2.  $k^2$  が positive real となる解として  $k = \pm \omega/c_R$  のみが存在することについて

まず,  $0 < k^2 < (\omega/\alpha)^2$  の場合,  $\nu$  は positive real,  $\gamma$  も positive real であるから, 式(1)右辺第1項は positive real となり, 式(1)右辺第2項は0以上の実数であるから,  $R(k) \neq 0$  である.

次に  $k^2 = (\omega/\alpha)^2$  の場合,  $\nu = 0$  であるから, 式(1)右辺第1項は0となり, 式(1)右辺第2項が0とならない限り  $R(k) = 0$  とならない. 式(1)右辺第2項が0となる条件は  $(\omega/\beta)^2 - 2(\omega/\alpha)^2 = 0$  すなわち  $\alpha^2 = 2\beta^2$  であり, この条件はポアソン比=0に対応する. ポアソン比は0でないと考えることにすれば,  $R(k) \neq 0$  である.

さらに  $(\omega/\alpha)^2 < k^2 < (\omega/\beta)^2$  の場合,  $\nu$  は negative imaginary,  $\gamma$  は positive real であるから, 式(1)右辺第1項は negative imaginary となり, 式(1)右辺第2項は real であるから,  $R(k) \neq 0$  である.

以上より,  $k^2$  が positive real となる解は  $k^2 > (\omega/\beta)^2$  の範囲にだけ存在し得ることがわかった. そこで, 以降においては

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 z \quad (4)$$

とおき,  $z > 1$  の範囲で  $z$  を求める.

$R(k) = 0$  となるためには式(1)より

$$4k^2v\gamma = -(\gamma^2 - k^2)^2 \quad (5)$$

であり、両辺を自乗すると

$$\begin{aligned} 16k^4v^2\gamma^2 &= (\gamma^2 - k^2)^4 \\ \Leftrightarrow 16k^4 \left( \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 - k^2 \right) \left( \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 - k^2 \right) &= \left( \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 - 2k^2 \right)^4 \\ \Leftrightarrow 16 \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right) z^3 - 8 \left( 3 - \frac{2}{R^2} \right) z^2 + 8z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる（ここに $R = \alpha/\beta$ はP波速度とS波速度の比である）。すなわち $z$ は以下の3次方程式を満足する必要がある。

$$f(z) \equiv 16 \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right) z^3 - 8 \left( 3 - \frac{2}{R^2} \right) z^2 + 8z - 1 = 0 \quad (6)$$

$z^3$ の項の係数は正であるから $f(z)$ は $z \rightarrow \infty$ で $\infty$ となるような3次関数である。また $f(z)$ の微分は

$$f'(z) = 48 \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right) z^2 - 16 \left( 3 - \frac{2}{R^2} \right) z + 8 \quad (7)$$

であり、 $f'(z) = 0$ の判別式は

$$16^2 \left( 3 \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right)^2 + \frac{1}{R^4} \right) > 0 \quad (8)$$

であるから、 $f(z)$ は変曲点をもつ3次関数であり、変曲点の $z$ 座標は

$$z_i \equiv \frac{3 - \frac{2}{R^2}}{6 \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right)} \quad (9)$$

である。ここで $z_i$ と1の大小関係を検討する。不等式を同値変形していくと

$$\begin{aligned} z_i &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3 - \frac{2}{R^2}}{6 \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right)} &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha^2} &< \frac{3}{\beta^2} \\ \Leftrightarrow 0 &< 3\lambda + 2\mu \end{aligned}$$

であり、この最後の式は必ず成立するので、変曲点は1より左側にあることになる。また $z = 1$ における $f(z)$ の値を計算すると $-1$ となり負である。以上の情報を組み合わせると、式(6)は $z > 1$ の範囲に一つの解を持つことがわかる。これを $z_R$ とする。式(6)は式(5)の必要条件に過ぎないため、式(6)の解が式(5)の解とは限らないが、 $z = z_R$ のとき $k^2$ は positive real,  $v$ は negative imaginary,  $\gamma$ は negative imaginary であるため、式(5)の左辺は負、式(5)の右辺も負であるため、 $z = z_R$ は式(5)の解である。そこで

$$c_R = \beta / \sqrt{z_R} \quad (10)$$

とおけば,  $R(k) = 0$ を満たす $k$ として $k = \pm \omega / c_R$ が求まる.

### 3. $k^2$ が negative real となる解は存在しないことについて

$k^2$ が negative real となる解が存在するか検討するため

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 z \quad (11)$$

とおく. この場合も $R(k) = 0$ となるために $z$ が満たすべき条件は式(6)となる. ところが, 既に調べたように $f(z)$ は変曲点をもつ3次関数であり, 変曲点よりも左側で $f(z)$ が極大となる点の $z$ 座標は

$$z_m \equiv \frac{\left(3 - \frac{2}{R^2}\right) - \sqrt{\left(3 - \frac{2}{R^2}\right)^2 - 6\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)}}{6\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)}$$

であり, これは正である. また,  $z = 0$ における $f(z)$ の値は負である. これらの情報を総合すると, 式(6)は $z < 0$ の範囲で解を持ち得ないことがわかる.

### 4. $\text{Im}(k^2) \neq 0$ となる解は存在しないことについて

$\text{Im}(k^2) \neq 0$ となる解が存在するか検討するため

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 z \quad (12)$$

とおく. ただし今回は $z$ は複素数とする. この場合も $R(k) = 0$ となるために $z$ が満たすべき条件は式(6)となる.

$$16\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)z^3 - 8\left(3 - \frac{2}{R^2}\right)z^2 + 8z - 1 = 0 \quad (6)\text{再掲}$$

式(6)が解 $z_R$ を持つことは既にわかっているため,

$$16\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)z_R^3 - 8\left(3 - \frac{2}{R^2}\right)z_R^2 + 8z_R - 1 = 0 \quad (13)$$

である. 式(6)から式(13)を引くと

$$16\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)(z^3 - z_R^3) - 8\left(3 - \frac{2}{R^2}\right)(z^2 - z_R^2) + 8(z - z_R) = 0 \quad (14)$$

となる.  $z$ が $z_R$ と異なる解であると仮定し, 式(14)の両辺を $8(z - z_R)$ で割ると

$$2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)(z^2 + z z_R + z_R^2) - \left(3 - \frac{2}{R^2}\right)(z + z_R) + 1 = 0 \quad (15)$$

が得られ、これを整理すると

$$2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)z^2 + \left[2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)z_R - \left(3 - \frac{2}{R^2}\right)\right]z + 2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)z_R^2 - \left(3 - \frac{2}{R^2}\right)z_R + 1 = 0 \quad (16)$$

が得られる。これは $z$ に関する2次方程式であり、その判別式は

$$D = \left[2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)z_R - \left(3 - \frac{2}{R^2}\right)\right]^2 - 8\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)\left[2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)z_R^2 - \left(3 - \frac{2}{R^2}\right)z_R + 1\right] \quad (17)$$

で与えられ、これを整理すると

$$D = -12\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 z_R^2 + 4\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)\left(3 - \frac{2}{R^2}\right)z_R + 1 - \frac{4}{R^2} + \frac{4}{R^4} \quad (18)$$

となる。関数 $d(z)$ を

$$d(z) \equiv -12\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 z^2 + 4\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)\left(3 - \frac{2}{R^2}\right)z + 1 - \frac{4}{R^2} + \frac{4}{R^4} \quad (19)$$

で定義すれば、判別式 $D = d(z_R)$ である。

式(19)は上に凸の放物線であり、中心軸は

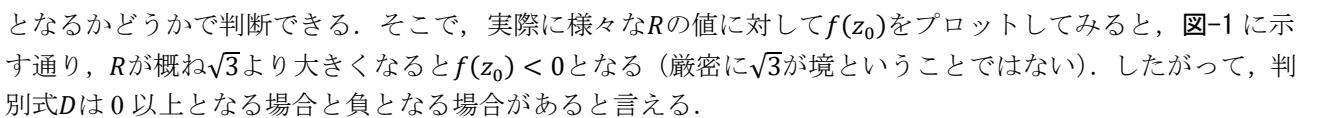
$$\frac{3 - \frac{2}{R^2}}{6\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)} < 1 \quad (20)$$

であり、 $d(z) = 0$ の二つの解のうち大きい方は

$$z_0 \equiv \frac{\left(3 - \frac{2}{R^2}\right) + 2\sqrt{3\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{R^4}}}{6\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)} \quad (21)$$

である。そこで、判別式 $D$ が正となるかどうかは、 $z_R < z_0$ となるかどうかで判断できる。そして、関数 $f(z)$ の性質を考慮すれば、判別式 $D$ が正となるかどうかは

$$f(z_0) > 0 \quad (22)$$

となるかどうかで判断できる。そこで、実際に様々な $R$ の値に対して $f(z_0)$ をプロットしてみると、-1に示す通り、 $R$ が概ね $\sqrt{3}$ より大きくなると $f(z_0) < 0$ となる（厳密に $\sqrt{3}$ が境ということではない）。したがって、判別式 $D$ は0以上となる場合と負となる場合があると言える。

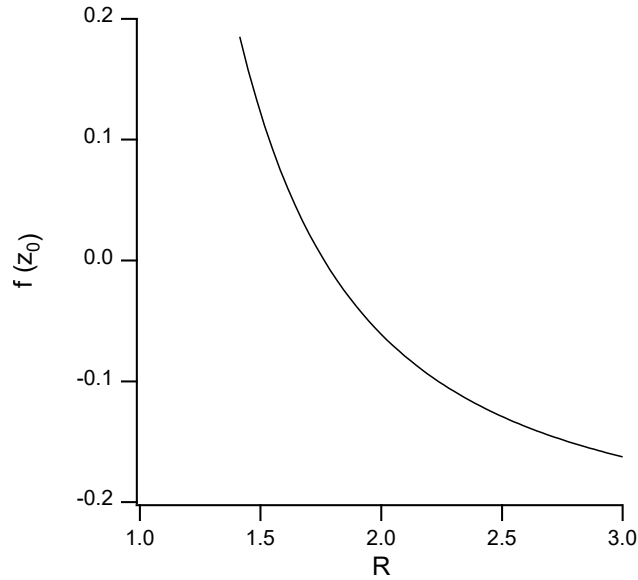


図-1 様々な $R$ の値に対して $f(z_0)$ をプロットした結果

判別式の正負により，複素平面上での $f(z) = 0$ の解の位置は変化する． $R$ の値によって $f(z) = 0$ の解の複素平面上での位置がどのように変化するか調べた結果を図-2～図-4に示す．いずれの図においても左側の図は複素平面上での $|f(z)|$ の値の分布を示しており，暖色系は値が小さいことを示す．右側の図は実軸上での $|f(z)|$ の値を示している．いずれの図においても実軸上の $z > 1$ の範囲に $f(z) = 0$ となる点が見られるが，これが $z_R$ である．また，これとは別に， $R = \sqrt{2}$ の場合，原点と $z_R$ に挟まれるような形で， $f(z) = 0$ となる点の実軸上に二つ並んでいる（図-2）． $R = \sqrt{3}$ の場合，これらの点はほぼ一致するようになり（図-3）， $R$ がさらに大きくなると，これらの点は実軸を挟んで縦に並ぶようになる（図-4）．

このように，式(6)は $z = z_R$ 以外にも解を持つが，式(6)は式(5)の必要条件に過ぎないため，これらが式(5)の解であるとは限らない．実際，上述の $z = z_R$ 以外の解は，式(5)の解ではないことが確認できる．以下，少し手間がかかるが，この点の確認を行う．

まず，判別式が0以上の場合，式(6)に $z = z_R$ 以外の解があるとしても，それは実数以外ではあり得ないことになる．すなわち $R(k) = 0$ に $k = \pm \omega/c_R$ 以外の解があるとしても，それは実数以外ではあり得ないことになるが，そのような解が存在しないことは既に確認している．

次に，判別式が負の場合，式(6)の $z = z_R$ 以外の解は式(16)より

$$z_{\pm} \equiv \frac{-[2(1-\frac{1}{R^2})z_R - (3-\frac{2}{R^2})] \pm i\sqrt{-D}}{4(1-\frac{1}{R^2})} \quad (23)$$

で与えられる．これらが式(5)の解ではないことを言えば良い．それには，式(5)の左辺と右辺の複素平面上での位置を検討すれば良い．

まず $z_+$ については， $k^2$ は複素平面上の第1象限にある．また， $(\omega/\alpha)^2 - k^2$ と $(\omega/\beta)^2 - k^2$ は複素平面上の第3象限か第4象限にあるため，式(2)(3)の定義により $v$ と $\gamma$ は複素平面上の第4象限にある．したがって，式(5)の左辺である $4k^2 v \gamma$ は複素平面上の第1象限，第3象限，第4象限のいずれかに存在する（原点を中心とする回転角を検討するとわかる）．そこで，式(5)の右辺である $-(\gamma^2 - k^2)^2$ が複素平面上の第2象限にあることが言えれば， $z_+$ が式(5)の解でないことが言える．すなわち $1 - 2z_+$ が図-5の範囲にあることが言えれば良い．そのためには，1)  $\text{Re}(1 - 2z_+) > 0$ ，2)  $|\text{Im}(1 - 2z_+)| < \text{Re}(1 - 2z_+)$ の二つが言えれば良い．

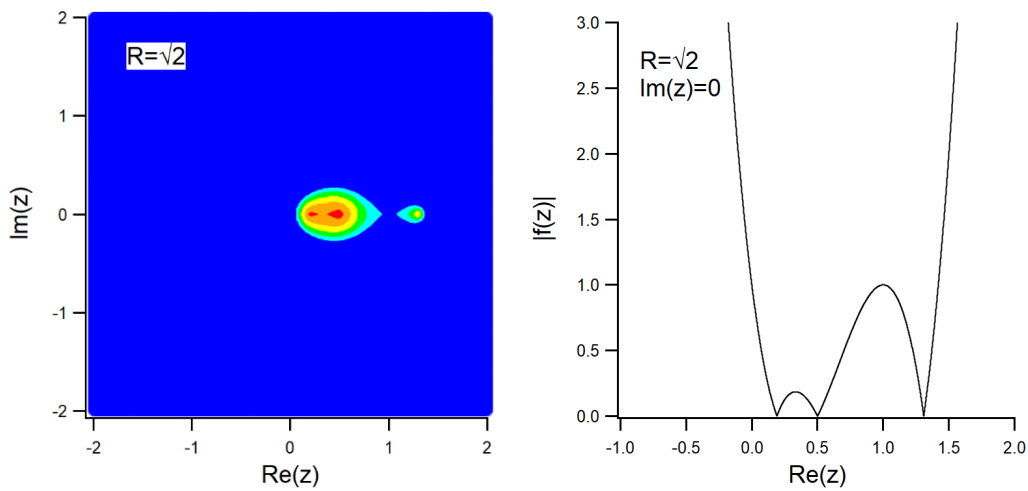


図-2 複素平面上での $|f(z)|$ の値の分布（左）と実軸上での $|f(z)|$ の値.  $R = \sqrt{2}$ の場合. 暖色系は値が小さいことを示す.

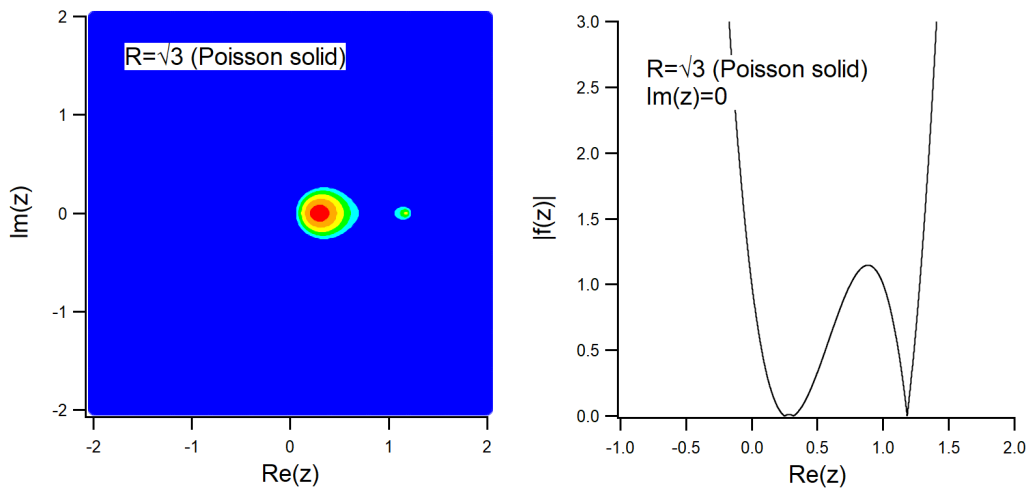


図-3 複素平面上での $|f(z)|$ の値の分布（左）と実軸上での $|f(z)|$ の値.  $R = \sqrt{3}$  (ポアソン固体) の場合. 暖色系は値が小さいことを示す.

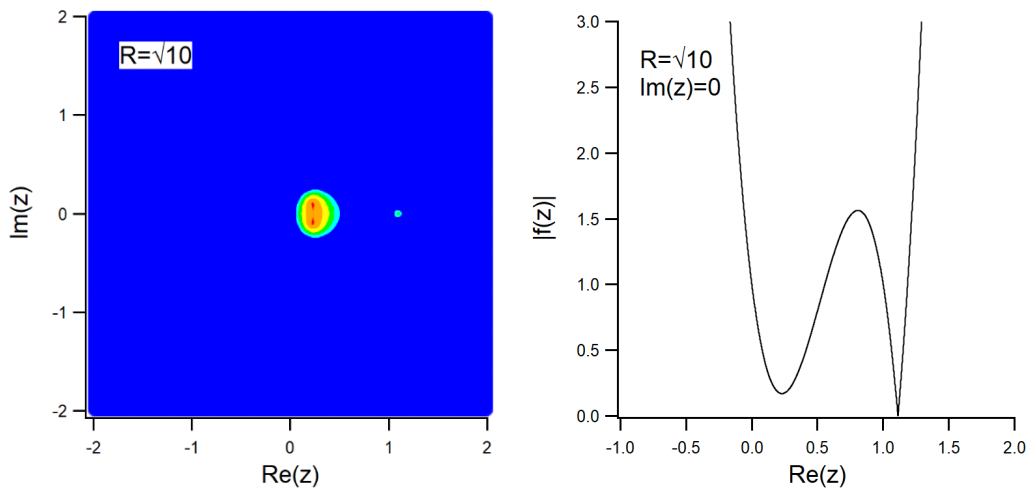


図-4 複素平面上での $|f(z)|$ の値の分布（左）と実軸上での $|f(z)|$ の値.  $R = \sqrt{10}$ の場合. 暖色系は値が小さいことを示す.

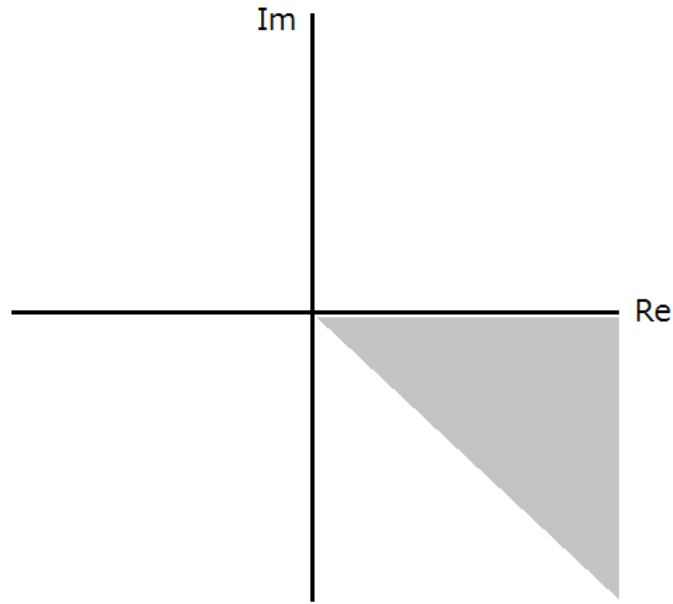


図-5  $1 - 2z_+$ がこの範囲にあることが言えれば良い

1)については,

$$1 - 2z_+ = \frac{[4(1 - \frac{1}{R^2})z_R - 2] - 2i\sqrt{-D}}{4(1 - \frac{1}{R^2})} \quad (24)$$

より

$$\text{Re}(1 - 2z_+) = \frac{4(1 - \frac{1}{R^2})z_R - 2}{4(1 - \frac{1}{R^2})} \quad (25)$$

であるが、分母は正であり、 $1 < z_R$ より

$$\text{分子} > 4\left(1 - \frac{1}{R^2}\right) - 2 = 2\left(1 - \frac{2}{R^2}\right) > 0 \quad (26)$$

であることも言えるので、1)は言える.

2)の条件は式(24)より

$$2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)z_R - 1 > \sqrt{-D} \quad (27)$$

となり、式(18)を用いて整理すると

$$2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)z_R - 1 > \sqrt{12\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 z_R^2 - 4\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)\left(3 - \frac{2}{R^2}\right)z_R - 1 + \frac{4}{R^2} - \frac{4}{R^4}} \quad (28)$$

すなわち

$$8\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 z_R^2 - 8\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 z_R - 2 + \frac{4}{R^2} - \frac{4}{R^4} < 0 \quad (29)$$

となる. 関数 $g(z)$ を

$$g(z) \equiv 8\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 z^2 - 8\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 z - 2 + \frac{4}{R^2} - \frac{4}{R^4} \quad (30)$$

で定義すれば, 条件は $g(z_R) < 0$ となる.

式(30)は下に凸の放物線であり, 中心軸は $1/2 < 1$ であり,  $g(z) = 0$ の二つの解のうち大きい方は

$$z_g \equiv \frac{\left(1 - \frac{1}{R^2}\right) + \sqrt{2 - \frac{4}{R^2} + \frac{3}{R^4}}}{2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)} \quad (31)$$

である. そこで,  $g(z_R) < 0$ となるかどうかは,  $z_R < z_g$ となるかどうかで判断できる. そして, 関数 $f(z)$ の性質を考慮すれば,  $g(z_R) < 0$ となるかどうかは

$$f(z_g) > 0 \quad (32)$$

となるかどうかで判断できる. ここで関数 $f(z)$ は $g(z)$ を用いて

$$f(z) = g(z) \left( \frac{2}{1 - \frac{1}{R^2}} z - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2} \right) + \frac{1 - \frac{2}{R^2} + \frac{2}{R^4}}{\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2} 4z - \frac{3 - \frac{6}{R^2} + \frac{5}{R^4}}{\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2} \quad (33)$$

と表すことができるので, 式(32)の条件は

$$f(z_g) = \frac{1 - \frac{2}{R^2} + \frac{2}{R^4}}{\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2} 4z_g - \frac{3 - \frac{6}{R^2} + \frac{5}{R^4}}{\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2} > 0 \quad (34)$$

となる. 式(31)を用いて整理すると, この条件は

$$\left(1 - \frac{2}{R^2} + \frac{2}{R^4}\right) 2 \left( \left(1 - \frac{1}{R^2}\right) + \sqrt{2 - \frac{4}{R^2} + \frac{3}{R^4}} \right) - \left(3 - \frac{6}{R^2} + \frac{5}{R^4}\right) > 0 \quad (35)$$

となり, さらに

$$h(R) \equiv 7 - \frac{48}{R^2} + \frac{146}{R^4} - \frac{248}{R^6} + \frac{247}{R^8} - \frac{136}{R^{10}} + \frac{32}{R^{12}} > 0 \quad (36)$$



となる.  $R > \sqrt{2}$ の範囲で $h(R)$ をプロットすると図-6 のようになるので, 式(36)の不等式は確かに成立することが確認できる.

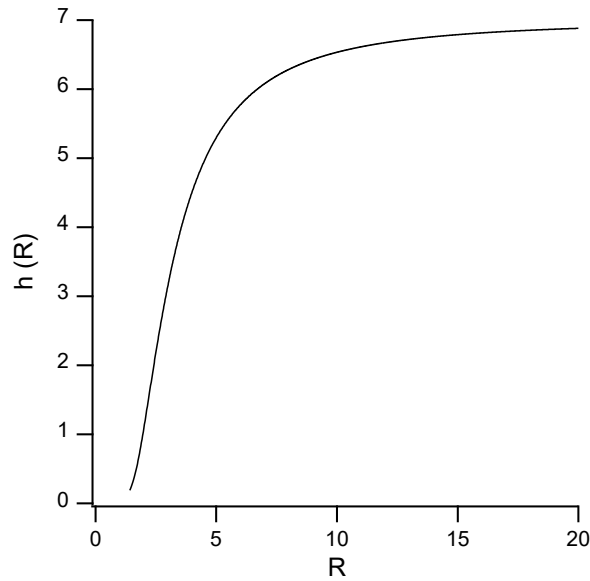


図-6  $R > \sqrt{2}$ の範囲で $h(R)$ をプロットした結果

以上により, 式(6)の解である $z_{\pm}$ のうち $z_{+}$ に対しては, 式(5)の左辺である $4k^2\nu\gamma$ は複素平面上の第1象限, 第3象限, 第4象限のいずれかに存在し, 式(5)の右辺である $-(\gamma^2 - k^2)^2$ は複素平面上の第2象限に存在するため, 式(5)の左辺と右辺が一致せず,  $z_{+}$ は式(5)の解でないことがわかる. もう一方の解である $z_{-}$ に対しても, 複素平面上で実軸に対して対称な位置で同様の議論を展開すれば,  $z_{-}$ が式(5)の解でないこともわかる.

以上により,  $\text{Im}(k^2) \neq 0$ となる $R(k) = 0$ の解は存在しないと言える.

#### 参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.