

## Equipartition について

野津

Wapenaar 他<sup>1)2)</sup>による[地震波干渉法の定式化](#)の前提条件は次の通りであった。

(1) 弾性体中の 2 点  $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$  から十分に離れた領域では媒質は一様であること。この仮定の下で,  $\partial D$  を十分に大きな球面として設定する。

(2)  $\partial D$  の内部には震源がないこと。

(3)  $\partial D$  の外部からノイズ波が等方的に入射していること, 異なる方位からのノイズ波は互いに無相関であること。

(4)  $\partial D$  の外部から入射するノイズ波のうち, P 波と S 波は互いに無相関であること, また, S 波は P 波に対して  $\sqrt{2}(\alpha/\beta)^{1.5}$  倍の振幅を有していること。ここに  $\alpha$  と  $\beta$  は  $\partial D$  上の P 波速度と S 波速度である。

(5) 媒質が非減衰であること。

これらのうち 4 番目の条件は, 外部から入射するノイズ波において, 単位体積あたりの S 波のエネルギー (互いに直交する 2 成分の合計) は P 波のエネルギーに対して  $2(\alpha/\beta)^3$  倍であると言い換えることもできる。この条件は, 地震波干渉法関連の論文において equipartition と呼ばれることが多い(例えば<sup>3)</sup>。

Equipartition が成立するか否かについては, これまで理論・観測の両面から検討がなされてきているが, その中でも特にわかりやすいのは, [グリーン関数の相反性](#) を用いた Aki<sup>4)</sup> による研究である。Aki<sup>4)</sup> は等質等方な全無限弾性体中に局在する任意形状の散乱体を考え, この散乱体による P 波から S 波への変換率と S 波から P 波への変換率の比が, P 波速度と S 波速度の比によって簡単に表されることを示した。このことから, このような散乱体によって弾性波が繰り返し散乱されるうちに, S 波と P 波のエネルギー比は一定の割合に収束していくものと推察される。ただし, Aki の研究<sup>4)</sup> では入射波と散乱波のなす角度が 90 度の場合を対象としており, その他の場合にも容易に拡張できるとしているが, 具体的な拡張方法は述べられていない。また, 入射波と散乱波の振幅の比, もしくは振幅の自乗の比が示されているが, エネルギーの変換率には言及されていない。そのため, この成果が equipartition とどのように結びつくのかわかりにくい面もある。そこで, 以下においては, これらの点について多少の補足を行うことを試みる。

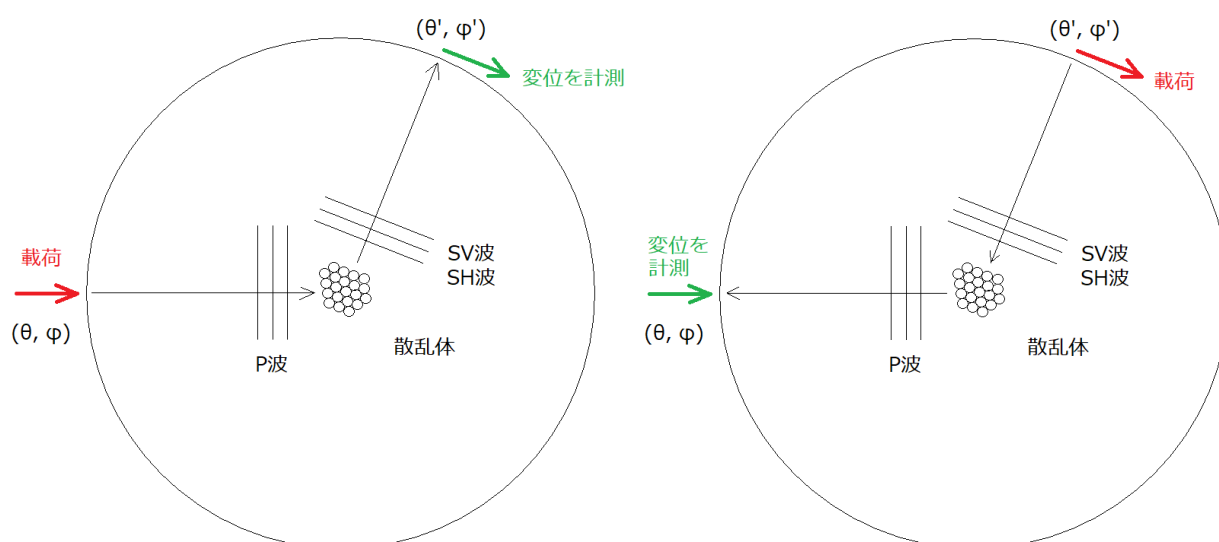


図-1 全無限弾性体中に局在する任意形状の散乱体による散乱

Aki<sup>4)</sup>と同様、等質等方な全無限弾性体中に局在する任意形状の散乱体による散乱を考える(図-1).ただし、入射波と散乱波のなす角度が 90 度以外の場合も考える. 散乱体を中心とする半径 $r$ の十分大きな球面を考える. また、散乱体を中心とする[球座標系](#)を考え、球面上の任意の点の座標を $(\theta, \varphi)$ で表す. また S 波のうち $\theta$ 方向成分を SV 波、 $\varphi$ 方向成分を SH 波と称する.  $(\theta, \varphi)$ 方向から P 波が入射した場合の $(\theta', \varphi')$ 方向の SV 波への変換率(振幅比)を $\gamma_{P_{SV}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ 、 $(\theta, \varphi)$ 方向から SV 波が入射した場合の $(\theta', \varphi')$ 方向の P 波への変換率(振幅比)を $\gamma_{SV_{P}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ とする. SH 波についても同様に定義する.

いま、図-1 左のように $(\theta, \varphi)$ の位置に動径方向に単位インパルス力を用させた場合には、散乱体には P 波のみが入射し、その振幅は $\rho\alpha^2r$ に反比例する([全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(5)参照). したがって $(\theta', \varphi')$ の位置において観測される散乱 SV 波の振幅 $u_{P_{SV}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ は

$$u_{P_{SV}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') \propto \frac{1}{\rho\alpha^2r} \gamma_{P_{SV}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') \quad (1)$$

となる. 一方、図-1 右のように $(\theta', \varphi')$ の位置に $\theta$ 方向に単位インパルス力を用させた場合には、散乱体には SV 波のみが入射し、その振幅は $\rho\beta^2r$ に反比例する([全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(5)参照). したがって $(\theta, \varphi)$ の位置において観測される散乱 P 波の振幅 $u_{SV_{P}}(\theta', \varphi', \theta, \varphi)$ は

$$u_{SV_{P}}(\theta', \varphi', \theta, \varphi) \propto \frac{1}{\rho\beta^2r} \gamma_{SV_{P}}(\theta', \varphi', \theta, \varphi) \quad (2)$$

となる. ここで[グリーン関数の相反性](#)により式(1)と式(2)の左辺は等しいから

$$\gamma_{P_{SV}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \gamma_{SV_{P}}(\theta', \varphi', \theta, \varphi) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \quad (3)$$

となる. SH 波についても同様に次式が得られる.

$$\gamma_{P_{SH}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \gamma_{SH_{P}}(\theta', \varphi', \theta, \varphi) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \quad (4)$$

以上は散乱前後の振幅比の関係であるが、次にエネルギーの変換率の関係を導く.  $(\theta, \varphi)$ 方向から P 波が入射した場合の $(\theta', \varphi')$ 方向の SV 波へのエネルギーの変換率を $\Gamma_{P_{SV}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ 、 $(\theta, \varphi)$ 方向から SV 波が入射した場合の $(\theta', \varphi')$ 方向の P 波へのエネルギーの変換率を $\Gamma_{SV_{P}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ とする. SH 波についても同様に定義する. 例えば P 波が SV 波に変わる場合を考えてみると、図-2 に示すように、微小時間 $\Delta t$ の間には、幅 $\alpha\Delta t$ の範囲に入る P 波のエネルギーが失われ、幅 $\beta\Delta t$ の範囲に入る SV 波のエネルギーが新たに生じることになるから、エネルギーの変換率は単純に振幅の自乗の比とはならず

$$\Gamma_{P_{SV}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \left(\gamma_{P_{SV}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')\right)^2 \frac{\beta}{\alpha} \quad (5)$$

となる. 同様に SV 波が P 波に変わる場合のエネルギーの変換率は

$$\Gamma_{SV_{P}}(\theta', \varphi', \theta, \varphi) = \left(\gamma_{SV_{P}}(\theta', \varphi', \theta, \varphi)\right)^2 \frac{\alpha}{\beta} \quad (6)$$

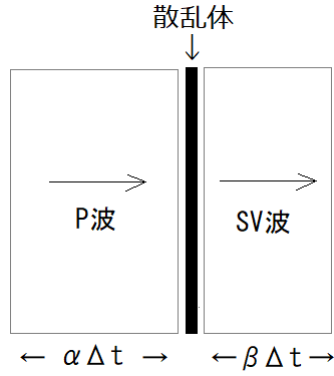


図-2 P波がSV波に変わる場合のエネルギーの変換率の考え方

となる. 式(3)(5)(6)より

$$\Gamma_{P_{SV}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \Gamma_{SV_{P}}(\theta', \varphi', \theta, \varphi) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \quad (7)$$

となる. SH波についても同様に次式が得られる.

$$\Gamma_{P_{SH}}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \Gamma_{SH_{P}}(\theta', \varphi', \theta, \varphi) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \quad (8)$$

最後に式(7)(8)において散乱方向に関する総和をとり入射方向に関する平均を計算すると,

$$\bar{\Gamma}_{P_{SV}} = \bar{\Gamma}_{SV_{P}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \quad (9)$$

$$\bar{\Gamma}_{P_{SH}} = \bar{\Gamma}_{SH_{P}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \quad (10)$$

が得られる. ここで, 散乱方向に関する総和をとる操作と入射方向に関する平均をとる操作の両方を行うことが一つのポイントである. 前者は式(7)(8)左辺では $(\theta', \varphi')$ に関する積分, 式(7)(8)右辺では $(\theta, \varphi)$ に関する積分, 後者はその逆であるが, 前者の操作と後者の操作を併せて行うことで $(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ に関する積分が行われることになり, 式(9)(10)が得られる. すなわち, 散乱体に対して等方的に弾性波が入射する限り, SV波またはSH波からP波へのエネルギーの変換よりもP波からSV波またはSH波へのエネルギーの変換の方が $(\alpha/\beta)^2$ 倍だけ効率よく生じる.

以上のことから, 弾性体中に局在する散乱体によって弾性波が繰り返し散乱される場合, S波とP波のエネルギー比は一定の割合に収束していくものと推察される. 図-3に示すように, 単位体積あたりのP波のエネルギーを $E_P$ , 単位体積あたりのS波のエネルギーを $E_S$  (うちSV波が $(1/2)E_S$ , SH波が $(1/2)E_S$ ) とすると, 散乱によってP波からS波に変換されるエネルギーは $E_P \alpha (\bar{\Gamma}_{P_{SV}} + \bar{\Gamma}_{P_{SH}})$ に比例し, 散乱によってS波からP波に変換されるエネルギーは $(1/2)E_S \beta (\bar{\Gamma}_{SV_{P}} + \bar{\Gamma}_{SH_{P}})$ に比例する. ここで式中の $\alpha$ と $\beta$ は, S波よりP波の方が, 仮に単位体積あたりのエネルギーが同じであっても速度が大きい分だけ散乱体に当たりやすいことを考慮するために必要となる. 平衡状態ではP波からS波に変換されるエネルギーとS波からP波に変換されるエネルギーは等しいはずであるから

$$(1/2)E_S \beta (\bar{\Gamma}_{SV_{P}} + \bar{\Gamma}_{SH_{P}}) = E_P \alpha (\bar{\Gamma}_{P_{SV}} + \bar{\Gamma}_{P_{SH}}) \quad (11)$$

であり，これと式(9)(10)より

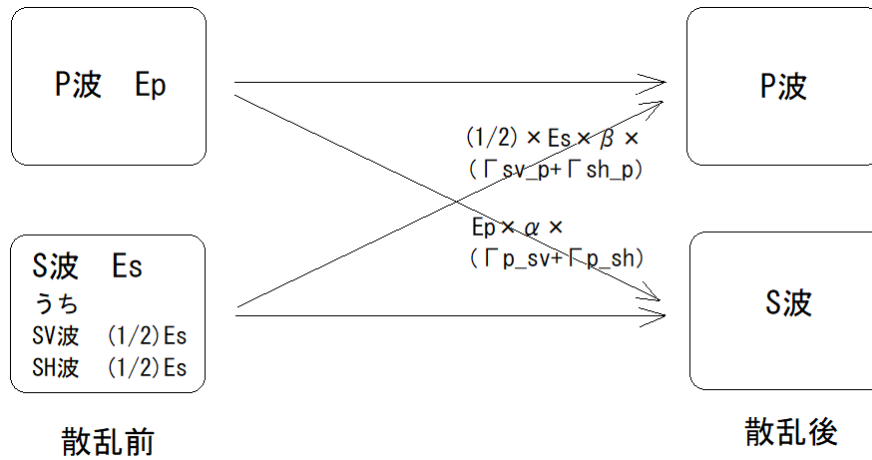


図-3 散乱によって変換されるエネルギー

$$E_S/E_P = 2(\alpha/\beta)^3 \tag{12}$$

が得られる．すなわち平衡状態では S 波と P 波のエネルギー比は  $2(\alpha/\beta)^3$  である．以上により Aki の研究 4) と equipartition との関係が明確になったと考えられる．

Aki の研究 4) は，弾性体中に局在する散乱体を仮定しており，これだけですべてを説明しきったことにはならないが，equipartition が成立することの説明として説得力のあるものの一つである．

#### 謝辞

東北大学理学研究科の中原恒博士より Aki の研究 4) の重要性を教えてくださいました．

#### 参考文献

- 1) Wapenaar, K. and J. Fokkema: Green's function representation for seismic interferometry, Geophysics, Vol.71, No.4, pp.SI33-SI46, 2006.
- 2) Wapenaar, K., E. Slob, R. Snieder and A. Curtis: Tutorial on seismic interferometry: Part 2 – Underlying theory and new advances, Geophysics, Vol.75, No.5, pp.75A211-75A227, 2010.
- 3) Sanchez-Sesma, F.J., M. Rodriguez, U. Iturraran-Viveros, F. Luzon, M. Campillo, L. Margerin, A. Garcia-Jerez, M. Suarez, M.A. Santoyo, A. Rodriguez-Castellanos: A theory for microtremor H/V spectral ratio: Application for a layered medium, Geophysical Journal International, Vol.186, Issue 1, pp.221-225, 2011.
- 4) Aki, K.: Scattering conversions P to S versus S to P, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.82, pp.1969-1972, 1992.