

## Eshelby の式

野津

## 1. はじめに

等質等方な全無限弾性体中の半径 $a$ の円形クラックで $\Delta\sigma$ の一様な応力降下が生じた時のすべり量分布 $\Delta u_1$ , 平均すべり量 $\Delta \bar{u}_1$ , 地震モーメント $M_0$ はそれぞれ式(1)~(3)で与えられる(ただしポアソン比 $\nu = 1/4$ の場合).

$$\Delta u_1 = \frac{24}{7\pi} \frac{\Delta\sigma}{\mu} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \quad (1)$$

$$\Delta \bar{u}_1 = \frac{16}{7\pi} \frac{\Delta\sigma}{\mu} a \quad (2)$$

$$M_0 = \frac{16}{7} \Delta\sigma a^3 \quad (3)$$

ここに $(x_1, x_2)$ はクラックの面内にとった直交座標系(中心が原点),  $\mu$ はラメ定数である. この式の根拠となっているのが Eshelby の楕円体介在物の論文<sup>1)</sup>である. Eshelby の論文は極めて汎用的な論文として書かれており, 内容はかなり複雑であるが, 上記の式(1)~(3)を理解するとの目的をもって Eshelby の論文を読むのであれば, 一部を読むだけで十分である. また, Eshelby の論文の特徴である cutting, straining, welding といった手順も実は省略でき, 等質等方な全無限弾性体にある物体力を作用させるだけで良い. 本稿は, 上記の式(1)~(3)をできるだけ簡単に理解したいと考える人のために, Eshelby の論文のエッセンスを解説する試みである.

## 2. 作用させる物体力

等質等方な全無限弾性体の内部に次式で表される楕円体を考える.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

そして, 空間的に一様な仮想的なひずみ $\varepsilon_{ij}^T$ とそれに対応する応力

$$\sigma_{ij}^T = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^T + 2\mu \varepsilon_{ij}^T \quad (5)$$

を考える( $\lambda$ はラメ定数). これらの応力とひずみを弾性体に作用させるわけではない. 式(5)の応力から計算される楕円体表面のトラクションは $\sigma_{ij}^T n_j$ で与えられるが(ここに $n_i$ は外向き単位法線ベクトル), これに相当する力を物体力として等質な弾性体内部の楕円体表面位置に作用させる. すなわち楕円体表面の微小要素 $\Delta S$ に物体力 $\sigma_{ij}^T n_j \Delta S$ を作用させる. イメージを図-1に示す. このとき, 楕円体内部の Eshelby の論文で inclusion と呼ばれている領域(図-1のハッチング部分)の応力 $\sigma_{ij}^c$ とひずみ $\varepsilon_{ij}^c$ は後述の通り空間的に一様となる. このことが Eshelby の大発見であったと考えられる. なお, 後に $a = b$ とするとともに $c \rightarrow 0$ の極限をとるが, そのとき物体力は $1/c$ に比例するように大きくしていく. このことは, ダブルカップルにおいて腕の長さを小さくするほど荷重は大きくすべきであることに対応する.

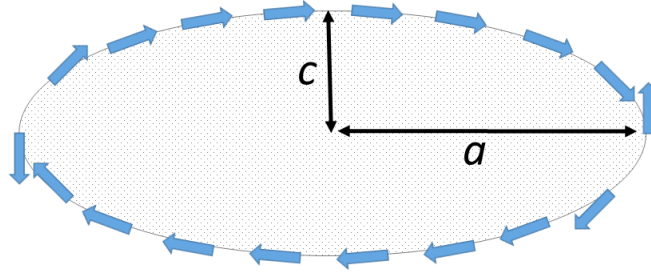


図-1 等質等方な全無限弾性体内部の楕円体表面位置に物体力を作用させる

### 3. 楕円体内部の応力・ひずみ

上述のように物体力を作用させたとき，楕円体内部の任意の点 $\mathbf{r}$ における変位 $u_i^c(\mathbf{r})$ は，静弾性問題のグリーン関数 $G_{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ を用いると次式のように表される（Eshelby の式(2.6)に対応）。

$$u_i^c(\mathbf{r}) = \int_S \sigma_{jk}^T n_k G_{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dS \quad (6)$$

ここに $\mathbf{r}'$ は楕円体表面の一点を表し，積分は楕円体表面上の面積分である．静弾性問題のグリーン関数の具体的な形は

$$G_{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi\mu} \left( \delta_{ij} r_{,kk} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} r_{,ij} \right) \quad (7)$$

で与えられる．ここに $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ である．空間微分は $\mathbf{r}$ に関する微分と考えても $\mathbf{r}'$ に関する微分と考えても良いが，ここでは後々のため $\mathbf{r}'$ に関する微分と考えておく． $\mathbf{r}$ の座標を $(x_1, x_2, x_3)$ ， $\mathbf{r}'$ の座標を $(x'_1, x'_2, x'_3)$ とすると次式が成立する．

$$r_{,i} = \frac{1}{r} (x'_i - x_i) \quad (8)$$

$$r_{,ij} = \frac{1}{r} (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) \quad (9)$$

$$r_{,ii} = \frac{2}{r} \quad (10)$$

式(10)に加えポアソン比とラメ定数の関係を用いると式(7)は

$$G_{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{r_{,ij}}{16\pi\mu(1-\nu)} \quad (11)$$

となる（Eshelby の式(2.5)に対応）．そしてさらに式(9)を用いると式(11)は

$$G_{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{r} \left( (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right) \quad (12)$$

となる（Eshelby の式(2.14)に対応）．これを式(6)に代入すると

$$u_i^c(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_S n_k \frac{1}{r} \left( (3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j \right) dS \quad (13)$$

となる ( $\sigma_{jk}^T$ は空間的に一様なので積分の外に出る). 式(13)に[ガウスの発散定理](#)を適用すると

$$u_i^c(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \left( \frac{1}{r} \left( (3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j \right) \right)_{,k} dv \quad (14)$$

となり, これを整理すると

$$u_i^c(\mathbf{r}) = -\frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} \bar{f}_{ijk} \quad (15)$$

となる. ここに

$$\bar{f}_{ijk} = (3-4\nu)\delta_{ij}r_{,k} - \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i} + 3r_i r_j r_{,k} \quad (16)$$

であるが,  $r_i$ は式(8)に示すように $\mathbf{r}$ から $\mathbf{r}'$ の方向を向く単位ベクトルの成分であり, Eshelby に従いこれを $l_i$ と書けば

$$\bar{f}_{ijk} = (3-4\nu)\delta_{ij}l_k - \delta_{ik}l_j - \delta_{jk}l_i + 3l_i l_j l_k \quad (17)$$

となる. ここで $\sigma_{jk}^T$ の対称性を用いると

$$\begin{aligned} u_i^c(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} \bar{f}_{ijk} + \frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} \bar{f}_{jik} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} \bar{f}_{ijk} + \frac{\sigma_{kj}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} \bar{f}_{ikj} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} \bar{f}_{ijk} + \frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} \bar{f}_{ikj} \right) \\ &= -\frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} \frac{\bar{f}_{ijk} + \bar{f}_{ikj}}{2} \end{aligned}$$

のように変形でき,

$$f_{ijk} = \frac{\bar{f}_{ijk} + \bar{f}_{ikj}}{2} = (1-2\nu)(\delta_{ij}l_k + \delta_{ik}l_j) - \delta_{jk}l_i + 3l_i l_j l_k \quad (18)$$

とおけば (Eshelby の式(2.16)に対応)

$$u_i^c(\mathbf{r}) = -\frac{\sigma_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} f_{ijk} \quad (19)$$

となる. そして式(5)を用い整理すると

$$u_i^c(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon_{ijk}^T}{8\pi(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{r^2} g_{ijk} \quad (20)$$

となる (Eshelby の式(2.15)に対応). ここに

$$g_{ijk} = (1-2\nu)(\delta_{ij}l_k + \delta_{ik}l_j - \delta_{jk}l_i) + 3l_i l_j l_k \quad (21)$$

である (Eshelby の式(2.17)に対応).  $g_{ijk}$  は  $\overrightarrow{\mathbf{r}\mathbf{r}^T}$  の向きだけで決まる.

式(20)の体積積分を行うにあたり点 $\mathbf{r}$ を中心とする立体角 $\omega$ を用いれば, 微小体積は

$$dv = r^2 dr d\omega \quad (22)$$

となるため

$$u_i^c(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon_{ijk}^T}{8\pi(1-\nu)} \int_{4\pi} g_{ijk} \left( \int_0^\rho \frac{1}{r^2} r^2 dr \right) d\omega = -\frac{\varepsilon_{ijk}^T}{8\pi(1-\nu)} \int_{4\pi} \rho g_{ijk} d\omega \quad (23)$$

である (Eshelby の式(3.1)に対応). ここに $\rho$ は点 $\mathbf{r}$ から楕円体表面までの距離であり, 次式の解である.

$$\frac{(x_1+\rho l)^2}{a^2} + \frac{(x_2+\rho m)^2}{b^2} + \frac{(x_3+\rho n)^2}{c^2} = 1 \quad (24)$$

ここでは Eshelby に従い  $(l_1, l_2, l_3) = (l, m, n)$  と書いた. 式(24)を解くと

$$\rho = \frac{-f + \sqrt{f^2 + ge}}{g} \quad (25)$$

が得られる. ここに

$$g = \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \quad (26)$$

$$f = \frac{lx_1}{a^2} + \frac{mx_2}{b^2} + \frac{nx_3}{c^2} \quad (27)$$

$$e = 1 - \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \quad (28)$$

である. 式(25)を式(23)に代入して積分するとき, 式(25)の右辺第2項が $(l_1, l_2, l_3)$ に関して偶関数であることと $g_{ijk}$ が $(l_1, l_2, l_3)$ に関して奇関数であることを考慮すると, 式(25)の右辺第2項は積分から外すことができる. そして

$$\lambda_1 = \frac{l}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{m}{b^2}, \quad \lambda_3 = \frac{n}{c^2} \quad (29)$$

とおけば

$$u_i^C(\mathbf{r}) = \frac{x_m \varepsilon_{jk}^T}{8\pi(1-\nu)} \int_{4\pi} \frac{\lambda_m g_{ijk}}{g} d\omega \quad (30)$$

が得られる (Eshelby の式(3.4)に対応). また対応するひずみとして

$$\varepsilon_{ij}^C(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_{kl}^T}{16\pi(1-\nu)} \int_{4\pi} \frac{\lambda_i g_{jkl} + \lambda_j g_{ikl}}{g} d\omega \quad (31)$$

が得られる (Eshelby の式(3.5)に対応). 式(31)の積分は楕円体の形だけで決まり, 点 $\mathbf{r}$ が楕円体内部のどこにあるかに依らない. よって, 図-1 の物体力を作用させたとき, 楕円体内部のひずみは一様である. また, 楕円体内部の応力

$$\sigma_{ij}^C = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^C + 2\mu \varepsilon_{ij}^C \quad (32)$$

も一様である. これらの性質により, ここから先の計算の見通しが非常に良くなる.  
ここで

$$S_{ijkl} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \int_{4\pi} \frac{\lambda_i g_{jkl} + \lambda_j g_{ikl}}{g} d\omega \quad (33)$$

とおけば

$$\varepsilon_{ij}^C = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^T \quad (34)$$

である (Eshelby の式(3.6)に対応). 定義により

$$S_{ijkl} = S_{jikl} \quad (35)$$

$$S_{ijkl} = S_{ijlk} \quad (36)$$

である. また, 定義に従って計算すると

$$S_{1113} = S_{1131} = S_{2213} = S_{2231} = S_{3313} = S_{3331} = 0 \quad (37)$$

$$S_{1213} = S_{1231} = S_{2113} = S_{2131} = S_{2313} = S_{2331} = S_{3213} = S_{3231} = 0 \quad (38)$$

である.

さて, これまで $\varepsilon_{ij}^T$ の成分については何も決めていなかったが, 次式に示すように $\varepsilon_{13}^T$ と $\varepsilon_{31}^T$ のみ値を持つものとする.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^T & \varepsilon_{12}^T & \varepsilon_{13}^T \\ \varepsilon_{21}^T & \varepsilon_{22}^T & \varepsilon_{23}^T \\ \varepsilon_{31}^T & \varepsilon_{32}^T & \varepsilon_{33}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{13}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

このとき, 式(37)(38)より,  $\varepsilon_{ij}^C$ も次式に示すように $\varepsilon_{13}^C$ と $\varepsilon_{31}^C$ のみ値を持つ.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^C & \varepsilon_{12}^C & \varepsilon_{13}^C \\ \varepsilon_{21}^C & \varepsilon_{22}^C & \varepsilon_{23}^C \\ \varepsilon_{31}^C & \varepsilon_{32}^C & \varepsilon_{33}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2S_{1313}\varepsilon_{13}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 2S_{1313}\varepsilon_{13}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

また、対応する応力の各成分は次の通りとなる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^T & \sigma_{12}^T & \sigma_{13}^T \\ \sigma_{21}^T & \sigma_{22}^T & \sigma_{23}^T \\ \sigma_{31}^T & \sigma_{32}^T & \sigma_{33}^T \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{13}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^C & \sigma_{12}^C & \sigma_{13}^C \\ \sigma_{21}^C & \sigma_{22}^C & \sigma_{23}^C \\ \sigma_{31}^C & \sigma_{32}^C & \sigma_{33}^C \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2S_{1313}\varepsilon_{13}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 2S_{1313}\varepsilon_{13}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

#### 4. 楕円体表面のトラクション

いま楕円体表面位置に物体力を作用させているので、楕円体表面の外側と内側のトラクションには差がある。外側のトラクションを $t_i^{OUT}$ 、内側のトラクションを $t_i^{IN}$ とし、楕円体表面の微小要素 $\Delta S$ に関する力のつり合いを考えれば

$$t_i^{OUT} = t_i^{IN} - \sigma_{ij}^T n_j \quad (43)$$

である。また、内側のトラクションは先に求めた楕円体内部の一樣な応力から

$$t_i^{IN} = \sigma_{ij}^C n_j \quad (44)$$

のように計算される。式(43)(44)より

$$t_i^{OUT} = -(\sigma_{ij}^T - \sigma_{ij}^C) n_j \quad (45)$$

となり、式(41)(42)を用いると

$$\begin{pmatrix} t_1^{OUT} \\ t_2^{OUT} \\ t_3^{OUT} \end{pmatrix} = -2\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma\varepsilon_{13}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma\varepsilon_{13}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (46)$$

となる。ここに

$$\gamma = 1 - 2S_{1313} \quad (47)$$

である (Eshelby の式(5.2)に対応)。

ここで $c \rightarrow 0$ の極限をとると、楕円体の上面と下面において

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rightarrow \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

となるため

$$\begin{pmatrix} t_1^{OUT} \\ t_2^{OUT} \\ t_3^{OUT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp 2\mu\gamma \varepsilon_{13}^T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

となる. そこで

$$\varepsilon_{13}^T = \frac{\Delta\sigma}{2\mu\gamma} \quad (50)$$

とし (Eshelby の式(5.5)に対応), かつ  $a = b$  とし, かつ  $c \rightarrow 0$  とすれば, そのとき楕円体外部の領域 (Eshelby の論文における matrix) には, 当初考えていた境界条件 (半径  $a$  の円形領域における一様な応力降下  $\Delta\sigma$ ) に対応する変位場が実現していることになる.

ここで  $S_{1313}$  と  $\gamma$  の性質についてももう少し調べておくことにする. 定義により

$$S_{1313} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \int_{4\pi} \frac{\lambda_1 g_{313} + \lambda_3 g_{113}}{g} d\omega \quad (51)$$

であり式(21)(29)より

$$S_{1313} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)(I_a + I_c) + 3(a^2 + c^2)I_{ac}] \quad (52)$$

である. ここに

$$I_a = \int_{4\pi} \frac{l^2}{a^2} \frac{d\omega}{g} \quad (53)$$

$$I_c = \int_{4\pi} \frac{n^2}{c^2} \frac{d\omega}{g} \quad (54)$$

$$I_{ac} = \int_{4\pi} \frac{l^2 n^2}{a^2 c^2} \frac{d\omega}{g} \quad (55)$$

である. ここで  $a = b$  のとき付録にある通り

$$I_c = 4\pi - 2I_a \quad (56)$$

$$I_{ac} = \frac{1}{a^2 - c^2} \left( \frac{4}{3}\pi - I_a \right) \quad (57)$$

であるから

$$S_{1313} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \left( \frac{a^2}{a^2-c^2} - \nu \right) 4\pi - \left( \frac{2a^2+c^2}{a^2-c^2} - \nu \right) I_a \right] \quad (58)$$

である。ここでさらに  $c \rightarrow 0$  のとき付録にある通り

$$I_a \rightarrow \frac{\pi^2 c}{a} \quad (59)$$

であるから  $c \rightarrow 0$  のとき

$$S_{1313} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\pi(2-\nu)c}{8(1-\nu)a} \quad (60)$$

$$\gamma \rightarrow \frac{\pi(2-\nu)c}{4(1-\nu)a} \quad (61)$$

である (Eshelby の式(5.3)に対応)。このように  $c \rightarrow 0$  のとき  $\gamma$  は  $c$  に比例して小さくなっていく。したがって、式(50)より  $\varepsilon_{13}^T$  は  $1/c$  に比例するように大きくしていく必要があることがわかる。このことは、[ダブルカップル](#)において腕の長さを小さくするほど荷重は大きくすべきであることに対応する。

## 5. 楕円体表面の変位

上述の物体力の作用の下で楕円体表面上の点における変位は式(30)から求めることができる。式(30)は楕円体内部の変位を表す式であるが、いま連続な弾性体を考えているため、式(30)は楕円体表面上の点に対しても有効である。Eshelby に従い

$$\Pi_{ijkl} = -\frac{1}{16\pi(1-\nu)} \int_{4\pi} \frac{\lambda_i g_{jkl} - \lambda_j g_{ikl}}{g} d\omega \quad (62)$$

とおけば、式(30)(33)(62)より

$$u_i^c = (S_{ijkl} + \Pi_{ijkl}) \varepsilon_{kl}^T x_j \quad (63)$$

である。定義により

$$\Pi_{ijkl} = -\Pi_{jikl} \quad (64)$$

$$\Pi_{ijkl} = \Pi_{ijlk} \quad (65)$$

である。また、定義に従って計算すると

$$\Pi_{1113} = \Pi_{1131} = \Pi_{2213} = \Pi_{2231} = \Pi_{3313} = \Pi_{3331} = 0 \quad (66)$$

$$\Pi_{1213} = \Pi_{1231} = \Pi_{2113} = \Pi_{2131} = \Pi_{2313} = \Pi_{2331} = \Pi_{3213} = \Pi_{3231} = 0 \quad (67)$$

である。また定義により



$$\Pi_{1313} = -\frac{1}{16\pi(1-\nu)} \int_{4\pi} \frac{\lambda_1 g_{313} - \lambda_3 g_{113}}{g} d\omega \quad (68)$$

であり式(21)(29)より

$$\Pi_{1313} = -\frac{1}{16\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)(I_a - I_c) - 3(a^2 - c^2)I_{ac}] \quad (69)$$

である．ここで $a = b$ のとき式(56)(57)より

$$\Pi_{1313} = -\frac{1}{8\pi} (3I_a - 4\pi) \quad (70)$$

であり， $c \rightarrow 0$ のとき式(59)より

$$\Pi_{1313} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3\pi c}{8a} \quad (71)$$

である．

以上により楕円体表面上の点における変位を求める準備が整った．式(63)と式(37)(38)(60)(66)(67)(71)より $c \rightarrow 0$ のとき

$$u_1^c = 2(S_{1313} + \Pi_{1313})\varepsilon_{13}^T x_3 \rightarrow 2\varepsilon_{13}^T x_3 \quad (72)$$

であり，式(4)(50)(61)を代入すれば楕円体の上面と下面において

$$u_1^c \rightarrow \pm \frac{4(1-\nu)\Delta\sigma}{\pi(2-\nu)\mu} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \quad (73)$$

であり，さらに $\nu = 1/4$ とし上下面における変位差をとれば

$$\Delta u_1 = \frac{24\Delta\sigma}{7\pi\mu} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \quad (74)$$

すなわち式(1)が得られる．式(2)(3)は式(1)から直ちに得られる．

念のため他の成分も計算しておく．式(63)と式(37)(38)(66)(67)より

$$u_2^c = 0 \quad (75)$$

である．また式(63)と式(37)(38)(60)(66)(67)(71)より $c \rightarrow 0$ のとき

$$u_3^c = 2(S_{1313} - \Pi_{1313})\varepsilon_{13}^T x_1 \rightarrow \frac{\pi(1-2\nu)c}{4(1-\nu)a} \varepsilon_{13}^T x_1 \quad (76)$$

であり，式(50)(61)を代入すれば

$$u_3^c \rightarrow \frac{(1-2\nu)\Delta\sigma}{2(2-\nu)\mu} x_1 \quad (77)$$

となる。すなわち地震発生前に比べ地震後の断層面は少しだけ傾いていることになる。

#### 参考文献

- 1) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol.241, pp.376-396, 1957.

#### 付録 $I_a, I_c, I_{ac}$ の性質

ここでは以下の3つの性質を示す。

- (1)  $a = b$ のとき  $I_c = 4\pi - 2I_a$
- (2)  $a = b$ のとき  $I_{ac} = (4\pi/3 - I_a)/(a^2 - c^2)$
- (3)  $a = b$ かつ  $c \rightarrow 0$ のとき  $I_a \rightarrow \pi^2 c/a$

- (1)  $a = b$ のとき  $I_c = 4\pi - 2I_a$

本文では  $I_a$  と  $I_c$  を式(53)(54)により定義したが、同様に  $I_b$  を次式により定義する。

$$I_b = \int_{4\pi} \frac{m^2 d\omega}{b^2 g} \quad (A1)$$

式(53)(54)(A1)より

$$I_a + I_b + I_c = \int_{4\pi} \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) \frac{d\omega}{g} = \int_{4\pi} d\omega = 4\pi \quad (A2)$$

である。よって  $a = b$  のとき

$$I_c = 4\pi - 2I_a \quad (A3)$$

である。■

- (2)  $a = b$  のとき  $I_{ac} = (4\pi/3 - I_a)/(a^2 - c^2)$

この証明は少し長い。まず  $I_a$  の積分において [球座標系](#) を導入する。

$$l = \cos \theta \quad (A4)$$

$$m = \sin \theta \cos \phi \quad (A5)$$

$$n = \sin \theta \sin \phi \quad (A6)$$

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (A7)$$

これらを用いると

$$I_a = \int_{4\pi} \frac{l^2}{a^2 + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} \sin \theta}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \phi}{b^2} + \frac{\sin^2 \phi}{c^2} \right)} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{\cos^2 \theta}{a^2 \sin \theta \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right)}}{\left( \frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \sin^2 \phi \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right)} d\theta d\phi \quad (\text{A8})$$

ここで $\phi$ に関する積分を先に行うことにする. 一般に

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{A + \sin^2 \phi} d\phi \quad (\text{A9})$$

のような形の積分は

$$t = \tan \phi \quad (\text{A10})$$

$$d\phi/dt = \cos^2 \phi \quad (\text{A11})$$

$$\sin \phi = t/\sqrt{1+t^2} \quad (\text{A12})$$

$$\cos \phi = 1/\sqrt{1+t^2} \quad (\text{A13})$$

とおけば

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{A + \sin^2 \phi} d\phi = 4 \int_0^\infty \frac{\frac{1}{1+t^2}}{A + \frac{t^2}{1+t^2}} dt = 4 \int_0^\infty \frac{1}{A(A+1)t^2} dt = \frac{4}{\sqrt{A(A+1)}} \left[ \text{Tan}^{-1} \sqrt{\frac{A+1}{A}} t \right]_0^\infty = \frac{2\pi}{\sqrt{A(A+1)}} \quad (\text{A14})$$

のように求まる. これを式(A8)に当てはめれば

$$I_a = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \sqrt{\left( \frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left( \frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right)}} d\theta \quad (\text{A15})$$

となる. ここで

$$u = a^2 \tan^2 \theta \quad (\text{A16})$$

$$d\theta/du = \cos^3 \theta / (2a^2 \sin \theta) \quad (\text{A17})$$

$$\sin \theta = \sqrt{u/(u+a^2)} \quad (\text{A18})$$

$$\cos \theta = \sqrt{a^2/(u+a^2)} \quad (\text{A19})$$

のような変数変換を行えば

$$I_a = \frac{4\pi}{a^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \sqrt{\left( \frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left( \frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right)}} d\theta = \frac{2\pi}{a^4} \int_0^\infty \frac{\cos^5 \theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\left( \frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left( \frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right)}} du = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\Delta} \quad (\text{A20})$$

となる. ここに

$$\Delta = \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)} \quad (\text{A21})$$

である. 次に $I_{ac}$ の積分にも[球座標系](#)を適用すると

$$I_{ac} = \int_{4\pi} \frac{\frac{l^2 n^2}{a^2 c^2}}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \phi \sin \theta}{a^2 c^2}}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \phi}{b^2} + \frac{\sin^2 \phi}{c^2} \right)} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{a^2 c^2 \sin \theta \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right)} \sin^2 \phi}{\frac{\left( \frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}{\left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right)} + \sin^2 \phi} d\theta d\phi \quad (\text{A22})$$

ここで $\phi$ に関する積分を先に行うことにする．一般に

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi}{A + \sin^2 \phi} d\phi \quad (\text{A23})$$

のような形の積分は式(A10)～(A13)の変数変換を行えば

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \phi}{A + \sin^2 \phi} d\phi = 4 \int_0^\infty \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{A + \frac{t^2}{1+t^2}} dt = 4 \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{A}{A+(A+1)t^2} \right) dt \\ &= 4 \left( [\text{Tan}^{-1} t]_0^\infty - \sqrt{\frac{A}{A+1}} \left[ \text{Tan}^{-1} \sqrt{\frac{A+1}{A}} t \right]_0^\infty \right) = 2\pi \left( 1 - \sqrt{\frac{A}{A+1}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

のように求まる．これを式(A22)に当てはめれば

$$I_{ac} = \frac{4\pi}{a^2 c^2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right)} \left( \frac{1}{3} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \sqrt{\frac{\frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{\cot^2 \theta}{a^2} + \frac{1}{c^2}}} d\theta \right) \quad (\text{A25})$$

となる．ここで式(A16)～(A19)の変数変換を行えば

$$I_{ac} = \frac{4\pi}{a^2 c^2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right)} \left( \frac{1}{3} - \frac{a^3 c}{2b} \int_0^\infty \frac{1}{(a^2+u)^2 \sqrt{a^2+u}} \sqrt{\frac{b^2+u}{c^2+u}} du \right) \quad (\text{A26})$$

となる．したがって $a = b$ のとき

$$I_{ac} = \frac{1}{(a^2 - c^2)} \left( \frac{4\pi}{3} - 2\pi a^2 c \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\Delta} \right) \quad (\text{A27})$$

となる．式(A20)と式(A27)を見比べると

$$I_{ac} = \frac{1}{(a^2 - c^2)} \left( \frac{4\pi}{3} - I_a \right) \quad (\text{A28})$$

であることがわかる．■

(3)  $a = b$ かつ $c \rightarrow 0$ のとき $I_a \rightarrow \pi^2 c/a$

式(A20)より $a = b$ かつ $c \rightarrow 0$ のとき

$$I_a \rightarrow 2\pi abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^2\sqrt{u}} \quad (\text{A29})$$

である. ここで

$$\sqrt{u} = v \quad (\text{A30})$$

$$du/dv = 2v \quad (\text{A31})$$

のような変数変換を行えば

$$I_a \rightarrow 4\pi abc \int_0^\infty \frac{dv}{(a^2+v^2)^2} = 2\pi c \left[ \frac{v}{a^2+v^2} + \frac{1}{a} \text{Tan}^{-1} \frac{v}{a} \right]_0^\infty = \frac{\pi^2 c}{a} \quad (\text{A32})$$

となる. ■