2020/6/19

# 杭の特性値$\beta$について

野津

## 1.　はじめに

杭の特性値$\beta$は次式で定義される．

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k_{CH}D}{4EI}} \tag{1}$$

ここに$k_{CH}$は横方向地盤反力係数，$D$は杭の直径または幅，$EI$は杭の曲げ剛性である．

桟橋の設計では深さ$1/\beta$を仮想固定点と考えることが多い．地盤反力によって支えられている実際の杭を，深さ$1/\beta$で固定されている仮想的な杭に置き換えているのであるが，この置き換えはどのような根拠に基づいているのだろうか？本稿ではこのことについて解説している．結論から言えば，実際の杭と仮想的な杭において，杭頭部のたわみ角を 0 に保ったまま杭頭部に同一の水平荷重を作用させたとき，両者に同一の杭頭モーメントが生じるように固定点の深さを設定したものが深さ$1/\beta$の仮想固定点である．

## 2.　水平荷重－杭頭モーメント関係

**図-1** 左は地盤反力によって支えられている長さ∞の杭の杭頭部に水平荷重$H$を作用させた場合のたわみである．**図-1** 右は深さ$1/\beta$で固定されている杭の杭頭部に同じ水平荷重を作用させた場合のたわみである．いずれも杭頭部ではたわみ角を 0 としている．桟橋のようなラーメン構造を考える場合，杭頭部でのたわみ角=0 を保ったまま杭が変形すると考えることは，第 1 次近似としては理にかなっている．鉛直下向きに$x$軸をとり，海底面を$x = 0$とする．

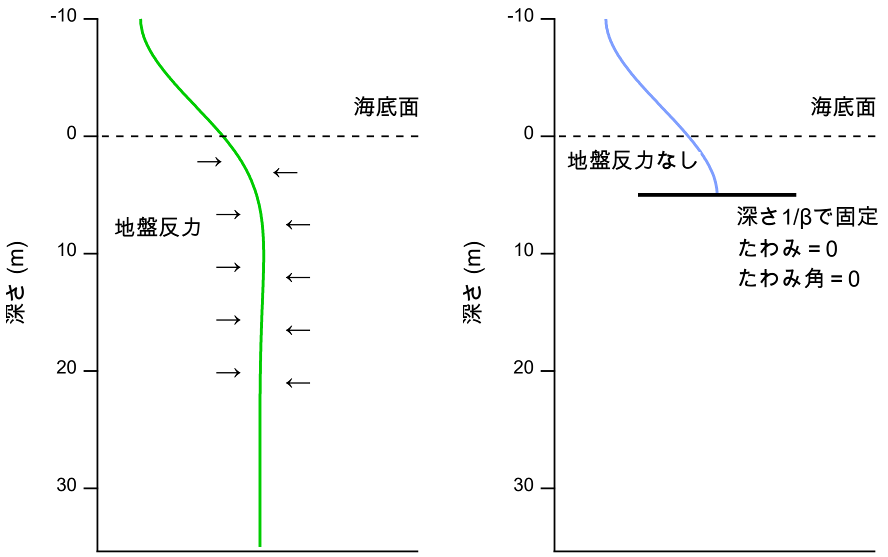



**図-1**　地盤反力によって支えられている長さ∞の杭（左）と深さ$1/\beta$で固定されている杭（右）のたわみ
（図では杭の突出長$h$を 10m，$1/\beta$を 5m としている）

まず，地盤反力によって支えられている杭（**図-1** 左）の地中部（$x > 0$）でのたわみ$w$の支配方程式を考える．Bernoulli-Euler 梁の振動方程式において加速度項を 0 とし

$$q = -k_{CH} D w \tag{2}$$

とおけば

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_{CH} D w = 0 \tag{3}$$

となり，式(1)の$\beta$の定義を用いれば

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\beta^4 w = 0 \tag{4}$$

となる．この一般解は

$$w = C_1 e^{(1+i)\beta x} + C_2 e^{(1-i)\beta x} + C_3 e^{(-1+i)\beta x} + C_4 e^{(-1-i)\beta x} \tag{5}$$

で与えられる．ここで，$x \to \infty$でたわみが$\infty$とならないという条件から$C_1 = C_2 = 0$でなければならないため，一般解は次式で与えられる．

$$w = C_3 e^{(-1+i)\beta x} + C_4 e^{(-1-i)\beta x} \tag{6}$$

$$w' = \beta\left((-1+i) C_3 e^{(-1+i)\beta x} + (-1-i) C_4 e^{(-1-i)\beta x}\right) \tag{7}$$

$$w'' = \beta^2\left((-1+i)^2 C_3 e^{(-1+i)\beta x} + (-1-i)^2 C_4 e^{(-1-i)\beta x}\right) \tag{8}$$

$$w''' = \beta^3\left((-1+i)^3 C_3 e^{(-1+i)\beta x} + (-1-i)^3 C_4 e^{(-1-i)\beta x}\right) \tag{9}$$

一方，突出部（$x < 0$）での杭のたわみの支配方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{10}$$

となり，この一般解は

$$w = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 \tag{11}$$

$$w' = 3A_1 x^2 + 2A_2 x + A_3 \tag{12}$$

$$w'' = 6A_1 x + 2A_2 \tag{13}$$

$$w''' = 6A_1 \tag{14}$$

で与えられる．

式(6)－(9)と式(11)－(14)には合計 6 つの未知数が含まれているが，これらは海底面（$x = 0$）での連続条件と杭頭部（$x = -h$）での境界条件から決まる．まず，海底面（$x = 0$）での連続条件より

$$C_3 + C_4 = A_4 \tag{15}$$

$$\beta\left((-1+i)C_3+(-1-i)C_4\right)=A_3 \tag{16}$$

$$\beta^2((-1+i)^2C_3+(-1-i)^2C_4)=2A_2 \tag{17}$$

$$\beta^3((-1+i)^3C_3+(-1-i)^3C_4)=6A_1 \tag{18}$$

である．また，杭頭部（$x=-h$）での境界条件より

$$3A_1h^2-2A_2h+A_3=0 \tag{19}$$

$$-EI\cdot 6A_1=-H \tag{20}$$

である．これらより

$$A_1=\frac{H}{6EI} \tag{21}$$

$$A_2=\frac{(h\beta-1)H}{4EI\beta} \tag{22}$$

$$A_3=-\frac{hH}{2EI\beta} \tag{23}$$

$$A_4=\frac{(h\beta+1)H}{4EI\beta^3} \tag{24}$$

$$C_3=\frac{(h\beta+1)H}{8EI\beta^3}+i\frac{(h\beta-1)H}{8EI\beta^3} \tag{25}$$

$$C_4=\frac{(h\beta+1)H}{8EI\beta^3}-i\frac{(h\beta-1)H}{8EI\beta^3} \tag{26}$$

が得られ，杭頭モーメントは式(13)より

$$M=\frac{1}{2}\left(h+\frac{1}{\beta}\right)H \tag{27}$$

となる．参考までに，式(25)(26)において$C_3$と$C_4$は互いに共役の関係にあるため，式(6)右辺は互いに共役な複素数の和となっており，たわみは実数となる．

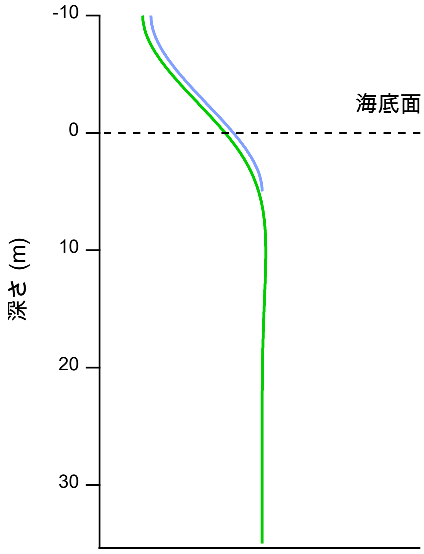
次に，深さ$1/\beta$で固定されている杭（図-1 右）については，対称性により杭頭部でのモーメントと固定点でのモーメントは等しいため，モーメントのつり合いから

$$M=-M+\left(h+\frac{1}{\beta}\right)H \tag{28}$$

すなわち

$$M=\frac{1}{2}\left(h+\frac{1}{\beta}\right)H \tag{29}$$

となる．式(27)と式(29)は同一である．したがって，地盤反力によって支えられている杭（図-1 左）と深さ$1/\beta$で固定されている杭（図-1 右）において，杭頭部のたわみ角を 0 に保ったまま杭頭部に同一の水平荷重を作用させると，杭頭部には同一のモーメントが生じる．




**図−2**　地盤反力によって支えられている長さ∞の杭（緑）と深さ$1/\beta$で固定されている杭（青）の たわみ曲線の比較（図では杭の突出長$h$を 10m，$1/\beta$を 5m としている）

参考までに，地盤反力によって支えられている長さ∞の杭と深さ$1/\beta$で固定されている杭が同一の水平荷重を受けた場合のたわみ曲線の比較を**図−2** に示す．後者は前者の良い近似となっているが，後者の方がわずかに変位が小さくなっている．

## 3.　固有振動数の比較

地盤反力によって支えられている杭と深さ$1/\beta$で固定されている杭で固有振動数にどの程度の違いがあるか調べてみた．その際，桟橋で言えば上部工に相当する部分の質量$M$が支配的であり，杭そのものの質量は無視できると仮定した．このように仮定すると，支配方程式は上述の静的な解析とほぼ同様となる．

まず，地盤反力によって支えられている杭（**図−1** 左）の地中部（$x > 0$）でのたわみ$w$の支配方程式は式(4)と同様に

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\beta^4 w = 0 \tag{30}$$

となり，両辺をフーリエ変換すれば

$$\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} + 4\beta^4 \hat{w} = 0 \tag{31}$$

となる．この一般解は

$$\hat{w} = C_1 e^{(1+i)\beta x} + C_2 e^{(1-i)\beta x} + C_3 e^{(-1+i)\beta x} + C_4 e^{(-1-i)\beta x} \tag{32}$$

で与えられる．ここで，$x \to \infty$でたわみが$\infty$とならないという条件から$C_1 = C_2 = 0$でなければならないため，一般解は次式で与えられる．

$$\hat{w} = C_3 e^{(-1+i)\beta x} + C_4 e^{(-1-i)\beta x} \tag{33}$$

$$\hat{w}' = \beta\left((-1+i)C_3 e^{(-1+i)\beta x} + (-1-i)C_4 e^{(-1-i)\beta x}\right) \tag{34}$$

$$\hat{w}'' = \beta^2\left((-1+i)^2 C_3 e^{(-1+i)\beta x} + (-1-i)^2 C_4 e^{(-1-i)\beta x}\right) \tag{35}$$

$$\hat{w}''' = \beta^3\left((-1+i)^3 C_3 e^{(-1+i)\beta x} + (-1-i)^3 C_4 e^{(-1-i)\beta x}\right) \tag{36}$$

一方，突出部（$x < 0$）での杭のたわみの支配方程式は式(10)と同様に

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{37}$$

となり，両辺をフーリエ変換すれば

$$\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} = 0 \tag{38}$$

となる．この一般解は

$$\hat{w} = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 \tag{39}$$

$$\hat{w}' = 3A_1 x^2 + 2A_2 x + A_3 \tag{40}$$

$$\hat{w}'' = 6A_1 x + 2A_2 \tag{41}$$

$$\hat{w}''' = 6A_1 \tag{42}$$

で与えられる．海底面（$x = 0$）での連続条件と杭頭部（$x = -h$）での境界条件は式(15)－(20)と全く同様に与えられるので（$H$はそのフーリエ変換である$\hat{H}$で置き換える），$A_1$～$A_4$は式(21)～(24)で与えられる（$H$は$\hat{H}$で置き換える）．

ここで，杭頭部の水平荷重$H$が慣性力に起因すると考えると

$$H = -M\ddot{w}|_{x=-h} \tag{43}$$

すなわち

$$\hat{H} = \omega^2 M \hat{w}|_{x=-h} \tag{44}$$

である．式(39)(21)(22)(23)(24)を式(44)に代入すると（$H$は$\hat{H}$で置き換える）

$$\hat{H} = \omega^2 \frac{M}{12EI} \frac{h^3\beta^3 + 3h^2\beta^2 + 3h\beta + 3}{\beta^3} \hat{H} \tag{45}$$

となる．これが非自明解を持つという条件から，固有振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{12EI}{\left[\left(h+\frac{1}{\beta}\right)^3+\frac{2}{\beta^3}\right]M}} \tag{46}$$

となる．

一方，深さ$1/\beta$で固定されている杭（**図-1** 右）については，計算に便利なように杭頭部で$x = 0$とし，杭頭部でたわみ角が 0 となる条件および固定点でたわみとたわみ角が 0 となる条件を考慮すると，たわみ等は次式で与えられる．

$$\hat{w}''' = \frac{\hat{H}}{EI} \tag{47}$$

$$\hat{w}'' = \frac{\hat{H}}{EI}\left(x - \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{\beta}\right)\right) \tag{48}$$

$$\hat{w}' = \frac{\hat{H}}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{\beta}\right)x\right) \tag{49}$$

$$\hat{w} = \frac{\hat{H}}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}\left(h + \frac{1}{\beta}\right)x^2 + \frac{1}{12}\left(h + \frac{1}{\beta}\right)^3\right) \tag{50}$$

ここで，杭頭部の水平荷重$H$が慣性力に起因すると考えると

$$H = -M\ddot{w}|_{x=0} \tag{51}$$

すなわち

$$\hat{H} = \omega^2 M\hat{w}|_{x=0} \tag{52}$$

である．式(50)を式(52)に代入すると

$$\hat{H} = \omega^2 \frac{M}{12EI}\left(h + \frac{1}{\beta}\right)^3 \hat{H} \tag{53}$$

となる．これが非自明解を持つという条件から，固有振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{12EI}{\left(h+\frac{1}{\beta}\right)^3 M}} \tag{54}$$

となる．

式(46)と式(54)を比較すると，深さ$1/\beta$で固定されている杭よりも地盤反力によって支えられている杭の方がわずかに固有振動数が低いと言える．これは**図-2** に示すわずかなたわみ曲線の違いに対応している．