

Timoshenko 梁の振動方程式

野津

1. はじめに

本稿では Timoshenko 梁の振動方程式の導き方について説明している。Timoshenko 梁の振動方程式に登場するせん断変形の係数 κ については、同一の断面に対しても様々な値が提案されている。この状況を日置・村田は「混乱している」と評している。この状況の背景として、 κ の意義に関する既存の教科書等での説明がいまひとつ不明確であり、誰もが共有できる共通の議論の土台を構成していないことがあるのではないかと推察される。 κ の意義を明確化するためには、その前提として、断面の回転角 ψ の意義を明確化する必要がある。本稿では、 ψ と κ の意義についてできるだけ明快な説明を与えるよう努めるとともに、筆者の視点から見て最も合理的な κ の設定方法を示す。

2. 座標軸の設定

いま図-1(a)に示すように長さ方向に一様な梁を考える（あるいは一様とみなせる区間に着目していると考えても良い）。また断面内においてヤング率 E 、せん断弾性係数 G 、密度 ρ は一様であると考ええる。

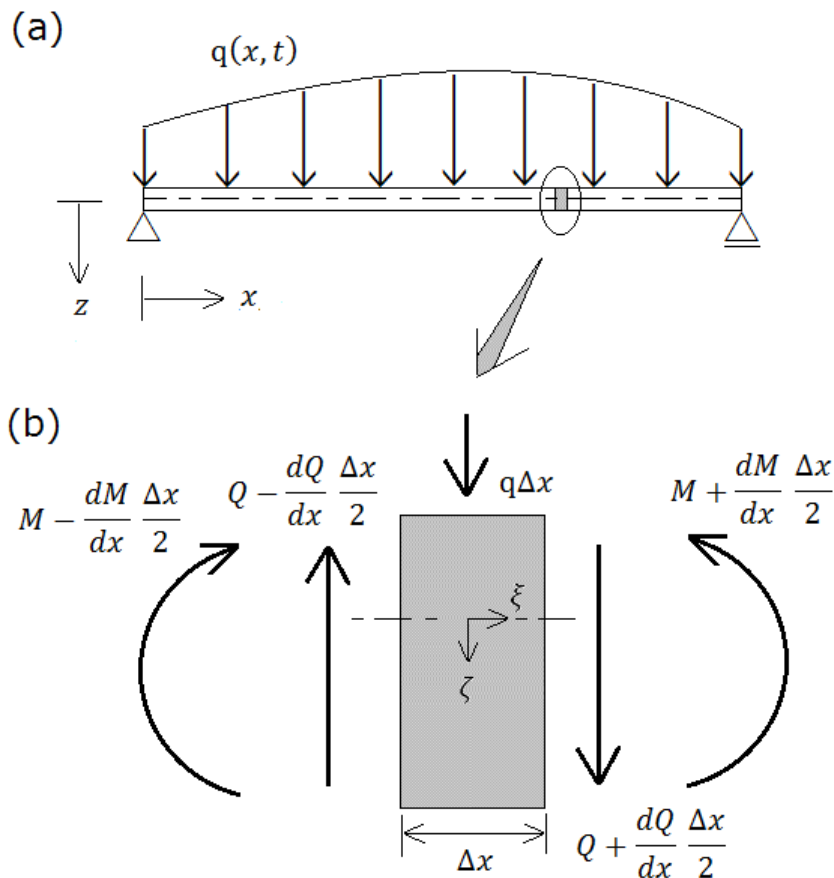


図-1 長さ方向に一様な梁(a)とその微小区間(b)

図-1 (a) の一点鎖線は材軸を表している。これは単に高さ方向（せい方向）の中心線を示したものではない。断面内に互いに直交するようにy軸とz軸をとるとき、断面一次モーメント

$$S_z = \int_A y dA \quad (1)$$

$$S_y = \int_A z dA \quad (2)$$

が共にゼロとなるようにy軸とz軸の原点を選ぶことができるが、このときのy軸とz軸の原点を図心と呼ぶ。図心を長さ方向に連ねた線を材軸と呼ぶ。以下においては図心をy軸とz軸の原点とする。荷重の作用方向はz方向とし、z方向のたわみを考える。

図-1 (b) は図-1 (a) のはりから微小区間を取り出したものである。M(x)はモーメント、Q(x)はせん断力である。微小区間の長さΔxは微小であるが、微小区間の高さは必ずしも微小ではない。

なお、本稿全体を通じ、Cowper²⁾と同様に $\sigma_y \approx 0$ 、 $\sigma_z \approx 0$ と考えることに加え、 $\tau_{yz} \approx 0$ と考える。またポアソン比は0とする。これにより、x方向の直応力はy方向とz方向の直ひずみに影響を及ぼさないことになるため、y-z平面内では剛体的な並進運動と回転運動のみが生じることになる。

3. 平面保持の仮定

Timoshenko 梁では、[Bernoulli-Euler 梁](#)と同様、平面保持の仮定を設けると説明されることが多い。この説明は実は問題を孕んでいるのであるが、今は一般的な方法に従って説明を進めていくことにする。平面保持の仮定とは、図-2 に示すように、変形前に同一平面上にあった点（例えば図のA,B,C）は変形後も同一平面上にあるという仮定である。変位のx成分u(x,y,z)は図の角度ψを用いてzの1次関数として表されると仮定する。

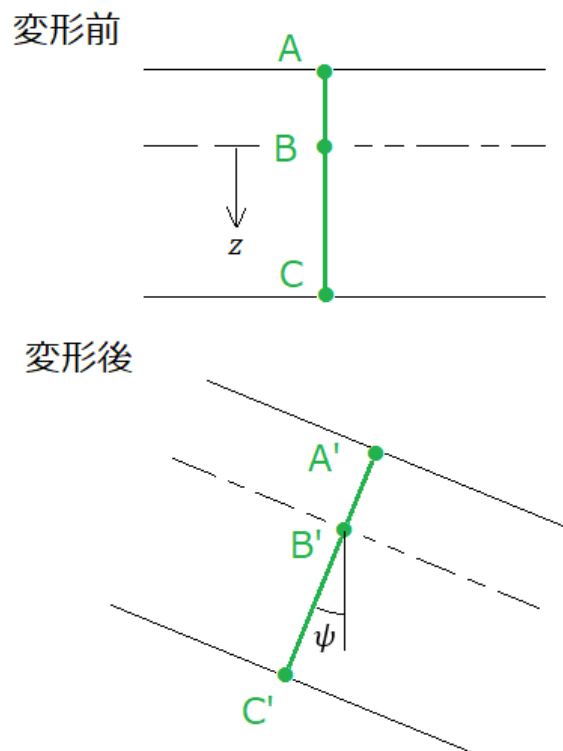


図-2 平面保持の仮定

$$u(x, y, z) = u(x, 0) - \psi(x)z \quad (3)$$

また、変位の z 成分 $w(x, y, z)$ は x だけの関数であると仮定する。

$$w(x, y, z) = w(x) \quad (4)$$

$w(x)$ をたわみ、 $\partial w / \partial x(x)$ をたわみ角と呼ぶ。式(3)(4)よりせん断ひずみは

$$\gamma(x, y, z) = -\psi(x) + \frac{\partial w}{\partial x}(x) \quad (5)$$

となる。[Bernoulli-Euler 梁](#)ではせん断ひずみは生じないとし、式(5)右辺はゼロであるとしていたが、Timoshenko 梁ではせん断ひずみは生じると考える。以上が一般的な説明方法に従った場合の Timoshenko 梁における断面内の変位分布である。

4. Timoshenko 梁に内在する矛盾

上述の平面保持の仮定は、[Bernoulli-Euler 梁](#)でも用いられている仮定であるが、Timoshenko 梁のようにせん断変形を許容する場合には自己矛盾に陥ってしまう。以下、このことについて述べる。

構造力学で良く知られている手順に従い、断面内のせん断応力分布を求める。

まず、式(3)より x 方向の直ひずみと直応力はそれぞれ

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon(x, 0) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x)z \quad (6)$$

$$\sigma(x, z) = E \left(\varepsilon(x, 0) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x)z \right) \quad (7)$$

となる ($\sigma_y \approx 0$, $\sigma_z \approx 0$ と考えているので σ は ε だけで決まる)。梁は $-h_2 \leq z \leq h_1$ の範囲に存在するものとし、梁の幅(紙面直交方向に梁の占める範囲、中空の部分は除く)を $B(z)$ とすれば、式(7)より軸力 $N(x)$ は

$$N(x) = \int_{-h_2}^{h_1} \sigma(x, z)B(z)dz = E\varepsilon(x, 0) \int_{-h_2}^{h_1} B(z)dz - E \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) \int_{-h_2}^{h_1} B(z)zdz = EA\varepsilon(x, 0) \quad (8)$$

となる。ここに

$$A = \int_{-h_2}^{h_1} B(z)dz \quad (9)$$

は断面の面積である。また断面一次モーメントがゼロとなる性質を利用している。同様にモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = \int_{-h_2}^{h_1} \sigma(x, z)B(z)zdz = E\varepsilon(x, 0) \int_{-h_2}^{h_1} B(z)zdz - E \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) \int_{-h_2}^{h_1} B(z)z^2dz = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) \quad (10)$$

となる。ここに

$$I = \int_{-h_2}^{h_1} B(z)z^2 dz \quad (11)$$

は断面二次モーメントである．式(7)(8)(10)より

$$\sigma(x, z) = \frac{1}{A}N(x) + \frac{z}{I}M(x) \quad (12)$$

が得られる．

次に，図-1(b)に示すはりの微小区間において， $-h_2 \leq \zeta \leq z$ の部分に関する x 方向の並進運動の運動方程式をたてると（ ζ 軸の原点は材軸）

$$\int_{-h_2}^z \rho \ddot{u}(x, \zeta) B(\zeta) d\zeta = \tau(x, z)B(z) + \int_{-h_2}^z \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, \zeta) B(\zeta) d\zeta \quad (13)$$

すなわち

$$\tau(x, z)B(z) = \int_{-h_2}^z \rho \ddot{u}(x, \zeta) B(\zeta) d\zeta - \int_{-h_2}^z \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, \zeta) B(\zeta) d\zeta \quad (14)$$

となる（ $\gamma(x, z)$ は y に依らないとしているので（式(5)）， $\tau(x, z)$ も y に依らないことになる）．この右辺に式(3)(12)を代入すると

$$\tau(x, z)B(z) = \rho \ddot{u}(x, 0) \int_{-h_2}^z B(\zeta) d\zeta - \rho \ddot{\psi}(x) \int_{-h_2}^z B(\zeta) \zeta d\zeta - \frac{1}{A} \frac{\partial N}{\partial x}(x) \int_{-h_2}^z B(\zeta) d\zeta - \frac{1}{I} \frac{\partial M}{\partial x}(x) \int_{-h_2}^z B(\zeta) \zeta d\zeta \quad (15)$$

となり，

$$A(z) = \int_{-h_2}^z B(\zeta) d\zeta \quad (16)$$

$$S(z) = \int_{-h_2}^z B(\zeta) \zeta d\zeta \quad (17)$$

とおけば

$$\tau(x, z)B(z) = A(z) \left(\rho \ddot{u}(x, 0) - \frac{1}{A} \frac{\partial N}{\partial x}(x) \right) - S(z) \left(\rho \ddot{\psi}(x) + \frac{1}{I} \frac{\partial M}{\partial x}(x) \right) \quad (18)$$

となる．

一方，梁の微小部分に関する運動方程式の x 成分

$$\rho \ddot{u} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (19)$$

の両辺に z を乗じて断面内で積分すると

$$\rho \int_A \ddot{u} z dA = \frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma z dA + \int_A \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} z dA + \int_A \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} z dA \quad (20)$$

となり，右辺第3項に部分積分を適用すると

$$\rho \int_A \ddot{u} z dA = \frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma z dA + \int_A \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} z) dA + \int_A \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} z) dA - \int_A \tau_{xz} dA \quad (21)$$

すなわち

$$\rho \int_A \ddot{u} z dA = \frac{\partial M}{\partial x} (x) + \int_A \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} z) dA + \int_A \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} z) dA - Q(x) \quad (22)$$

となる．ここで右辺第3項と第4項に[ガウスの発散定理](#)を適用すると

$$\rho \int_A \ddot{u} z dA = \frac{\partial M}{\partial x} (x) + \oint (\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) z ds - Q(x) \quad (23)$$

となる．ここに右辺第2項は梁の表面に沿った線積分を表しており， n_y と n_z は単位法線ベクトルの成分である．右辺第2項の被積分関数に[コーシーの式](#)を適用すると

$$\rho \int_A \ddot{u} z dA = \frac{\partial M}{\partial x} (x) + \oint t_x z ds - Q(x) \quad (24)$$

となる．ここに t_x は梁の表面におけるトラクションの x 成分を表すが，荷重の作用方向は z 方向であることから $t_x = 0$ である．よって

$$Q(x) = \frac{\partial M}{\partial x} (x) - \rho \int_A \ddot{u} z dA \quad (25)$$

となり，式(3)より

$$Q(x) = \frac{\partial M}{\partial x} (x) + \rho I \ddot{\psi}(x) \quad (26)$$

となる．これは図-1(b)に示す微小区間(上端から下端まで)の回転に関する運動方程式である．また，図-1(b)に示す微小区間(上端から下端まで)の x 方向の並進運動の運動方程式は

$$\int_{-h_2}^{h_1} \rho \ddot{u}(x, \zeta) B(\zeta) d\zeta = \frac{\partial N}{\partial x} (x) \quad (27)$$

となり，左辺に式(3)を代入すると

$$\rho A \ddot{u}(x, 0) - \frac{\partial N}{\partial x}(x) = 0 \quad (28)$$

となる。式(26)(28)を式(18)に代入すれば

$$\tau(x, z) = -\frac{Q(x)S(z)}{IB(z)} \quad (29)$$

となる。式(29)は構造力学でしばしば用いられる式であるが、動的な問題に対しても適用可能であることがわかる。なお、弾性体の性質より、この τ は τ_{xz} でもあり τ_{zx} でもある。

いま典型的な断面として高さ $2h$ で幅 B の矩形断面を考えてみると

$$S(z) = \frac{B}{2}(z^2 - h^2) \quad (30)$$

$$I = \frac{2}{3}Bh^3 \quad (31)$$

であるから、せん断応力分布は

$$\tau(x, z) = \frac{3}{4} \frac{Q(x)}{Bh^3} (h^2 - z^2) \quad (32)$$

せん断ひずみ分布は

$$\gamma(x, z) = \frac{3}{4} \frac{Q(x)}{GBh^3} (h^2 - z^2) \quad (33)$$

となる。また

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, z) = \gamma(x, z) - \frac{\partial w}{\partial x}(x) \quad (34)$$

より変位分布は

$$u(x, z) = \frac{3}{4} \frac{Q(x)}{GBh^3} \left(h^2 z - \frac{z^3}{3} \right) - \frac{\partial w}{\partial x}(x) z + u(x, 0) \quad (35)$$

となる。もともと $u(x, z)$ は z の1次関数としていたにも関わらず(式(3))、式(35)では $u(x, z)$ は z の3次関数となった。これは明らかに矛盾である。

$\partial w / \partial x = 0$ の場合について式(35)の変位分布をプロットすると図-3の緑の線のようになる。梁の上端と下端で反りが生じており、変位分布が梁の上面と下面に直交していることが特徴である。もともと梁の上面と下面では境界条件から $\tau_{xz} = 0$ となるので、変位分布が梁の上面と下面に直交することは必然であり、 $u(x, z)$ を z の1次関数と考えることにはそもそも無理があったと言える。

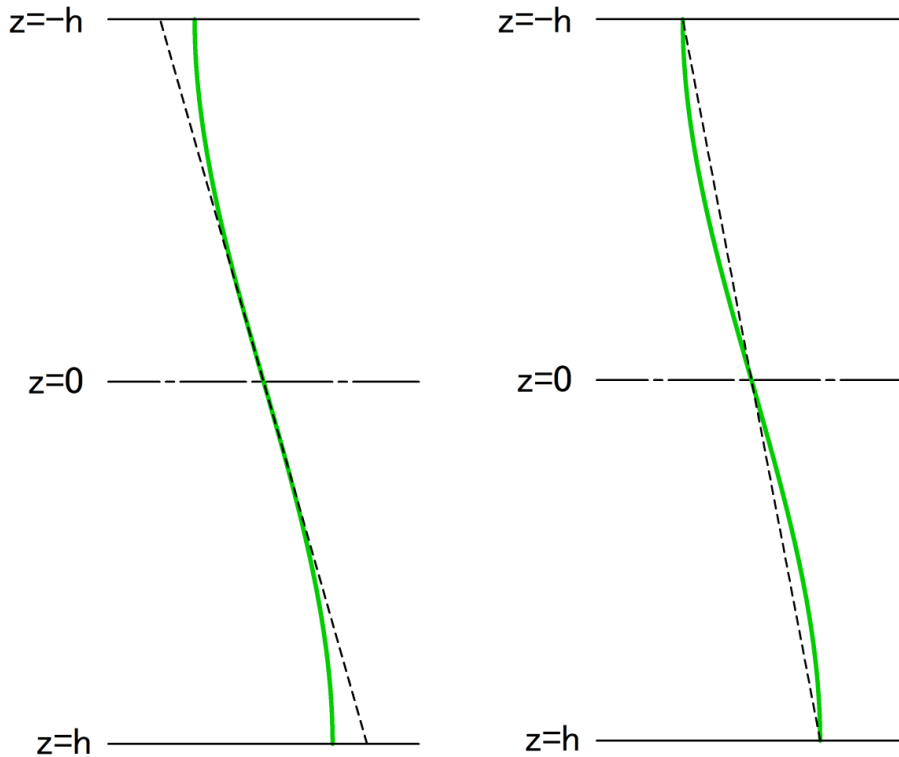


図-3 3次関数で表される変位分布（緑）とそれを近似する直線（黒の破線）
 (左) 材軸での接線をとった場合. (右) 梁の上端と下端を直線で結んだ場合.

このように Timoshenko 梁は本質的に矛盾を内包していると言える. その点, 古典的な Bernoulli-Euler 梁は巧妙に矛盾を回避していると言える. Bernoulli-Euler 梁ではせん断弾性係数を無限大としているので, 式(33)で計算されるせん断ひずみがゼロとなり, 最初の仮定と矛盾しない.

5. 平面保持の仮定の再吟味

Bernoulli-Euler 梁の方程式の解は, せん断弾性係数が無限大であるなどの適当な条件の下では, 弾性波動論的の支配方程式である [Navier の式](#)の解となり得るが, Timoshenko 梁は矛盾を内包しているので, Timoshenko 梁の方程式の解が Navier の式の正解となることは期待できない. そこで, Timoshenko 梁においては, 方程式の解と実際の現象との乖離を最小化することが目標となる. しかし, そうは言っても, どのような視点に立って乖離を最小化すれば良いだろうか? この点に関して, ここでは真の変位をテイラー展開し高次の項を無視することを考える.

式(35)では $u(x, z)$ は z の3次関数となった. 単純な条件の下でも3次関数となったので, 実際にはより高次の関数となる可能性もある. しかし, 矩形断面・円形断面・パイプのように z 方向に連続的に変化する断面においては, $u(x, z)$ はある程度なめらかな関数であると期待できる. その場合, $u(x, z)$ を近似する方法としてテイラー展開を利用することは理にかなっているであろう. そこで, ここでは, u が y に依存する可能性も考慮し, $u(x, y, z)$ を $y = z = 0$ の周りでテイラー展開した上で, 梁の存在する範囲では3次の項までで近似できると考える. これを「近似1」とする. そして, 3次関数に基づいて次の3つの量を計算しておく.

- (a) 回転に関する運動方程式の角加速度項
- (b) モーメント
- (c) せん断力

何故なら, これらの量が Timoshenko 梁の振動方程式の構築に用いられるからである.

次に、得られた 3 次関数をさらに式(3)の 1 次関数で近似する。これを「近似 2」とする。その際、(a) – (c) のいずれについても、近似前と近似後で値が変化しないことが望ましい。例えば図-3 左に示すように材軸での接線をとると直感的にも角加速度項を過大評価しそうである。逆に、図-3 右に示すように梁の上端と下端を直線で結ぶと角加速度項を過小評価しそうである。実際には、それらの中間的な傾きを有する直線を選ぶ。その具体的方法については後述する。その上で、せん断変形の係数 κ を後述の通り適切に設定すれば、(a) – (c) のいずれについても近似前の 3 次関数と近似後の 1 次関数から同一の値が得られる。結果として、近似前の 3 次関数と近似後の 1 次関数から全く同一の振動方程式が得られる。すなわち近似 2 の結果として振動方程式に新たな誤差は加わず、想定される誤差は近似 1 において 4 次以上の項を無視することによる誤差だけとなる。

このように、Timoshenko 梁では平面保持の仮定を用いてはいるものの、以下に述べる手順で κ を設定する限り、変位分布を 3 次関数で近似した場合と同等の精度が得られる。以下、近似の方法と κ の設定方法について詳述する。

6. 近似 1 (3 次関数による近似)

真の変位分布 $u(x, y, z)$ を $y = z = 0$ の周りでテイラー展開し 4 次以上の項を捨てる。

$$u = C_1 y^3 + C_2 y^2 z + C_3 y z^2 + C_4 z^3 + C_5 y^2 + C_6 y z + C_7 z^2 + C_8 y + C_9 z + C_{10} \quad (36)$$

ここに $C_1 \sim C_{10}$ は x に依存する係数である。これらの係数は断面の形状に応じて一定の関係を満たす(後述)。

式(36)に基づき上述の (a) – (c) を計算する。まず、図-1(b)に示す微小区間の回転に関する運動方程式

$$Q(x) = \frac{\partial M}{\partial x}(x) - \rho \int_A \ddot{u} z dA \quad (25) \text{再掲}$$

の角加速度項すなわち右辺第 2 項は式(36)より

$$\begin{aligned} -\rho \int_A \ddot{u} z dA &= -\rho \ddot{C}_1 \int_A y^3 z dA - \rho \ddot{C}_2 \int_A y^2 z^2 dA - \rho \ddot{C}_3 \int_A y z^3 dA - \rho \ddot{C}_4 \int_A z^4 dA \\ &\quad - \rho \ddot{C}_5 \int_A y^2 z dA - \rho \ddot{C}_6 \int_A y z^2 dA - \rho \ddot{C}_7 \int_A z^3 dA - \rho \ddot{C}_8 \int_A y z dA - \rho I \ddot{C}_9 \end{aligned} \quad (37)$$

となる。次に、式(36)より x 方向の直ひずみは

$$\varepsilon = \frac{\partial C_1}{\partial x} y^3 + \frac{\partial C_2}{\partial x} y^2 z + \frac{\partial C_3}{\partial x} y z^2 + \frac{\partial C_4}{\partial x} z^3 + \frac{\partial C_5}{\partial x} y^2 + \frac{\partial C_6}{\partial x} y z + \frac{\partial C_7}{\partial x} z^2 + \frac{\partial C_8}{\partial x} y + \frac{\partial C_9}{\partial x} z + \frac{\partial C_{10}}{\partial x} \quad (38)$$

x 方向の直応力は

$$\sigma = E \frac{\partial C_1}{\partial x} y^3 + E \frac{\partial C_2}{\partial x} y^2 z + E \frac{\partial C_3}{\partial x} y z^2 + E \frac{\partial C_4}{\partial x} z^3 + E \frac{\partial C_5}{\partial x} y^2 + E \frac{\partial C_6}{\partial x} y z + E \frac{\partial C_7}{\partial x} z^2 + E \frac{\partial C_8}{\partial x} y + E \frac{\partial C_9}{\partial x} z + E \frac{\partial C_{10}}{\partial x} \quad (39)$$

であるから ($\sigma_y \approx 0$, $\sigma_z \approx 0$ と考えているので σ は ε だけで決まる), モーメントは

$$\begin{aligned}
M(x) = & E \frac{\partial C_1}{\partial x} \int_A y^3 z \, dA + E \frac{\partial C_2}{\partial x} \int_A y^2 z^2 \, dA + E \frac{\partial C_3}{\partial x} \int_A y z^3 \, dA + E \frac{\partial C_4}{\partial x} \int_A z^4 \, dA \\
& + E \frac{\partial C_5}{\partial x} \int_A y^2 z \, dA + E \frac{\partial C_6}{\partial x} \int_A y z^2 \, dA + E \frac{\partial C_7}{\partial x} \int_A z^3 \, dA + E \frac{\partial C_8}{\partial x} \int_A y z \, dA + EI \frac{\partial C_9}{\partial x}
\end{aligned} \quad (40)$$

となる.

一方, $y-z$ 平面内では剛体的な並進運動と回転運動のみが生じているので, $y-z$ 平面内での回転角を ϕ とすれば, 変位の z 成分は $w + \phi y$ で与えられる. ここに w は図心における変位である. したがって, 式(36)よりせん断ひずみは

$$\gamma = C_2 y^2 + 2C_3 y z + 3C_4 z^2 + C_6 y + 2C_7 z + C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} y \quad (41)$$

せん断応力は

$$\tau = GC_2 y^2 + 2GC_3 y z + 3GC_4 z^2 + GC_6 y + 2GC_7 z + GC_9 + G \frac{\partial w}{\partial x} + G \frac{\partial \phi}{\partial x} y \quad (42)$$

であり, せん断力は

$$Q(x) = \int_A \tau \, dA = GC_2 \int_A y^2 \, dA + 2GC_3 \int_A y z \, dA + 3GIC_4 + GA \left(C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (43)$$

となる.

7. 近似 2 (1 次関数による近似)

以上により (a) 回転に関する運動方程式の角加速度項, (b) モーメント, (c) せん断力の三者が 3 次関数に基づいて算定されたことになる. 一方, 式(3)の 1 次関数に基づく場合, これらは次のように算定される. 回転に関する運動方程式の角加速度項は, 式(37)で $C_9 = -\psi$ とし他の係数を 0 とおけば

$$-\rho \int_A \ddot{u} z \, dA = \rho I \ddot{\psi} \quad (44)$$

となる. モーメントは, 式(40)で $C_9 = -\psi$ とし他の係数を 0 とおけば

$$M(x) = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (45)$$

となる. せん断力は, 式(43)で $C_9 = -\psi$ とし他の係数を 0 とおけば

$$Q(x) = GA \left(-\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (46)$$

となる。以下、これらの算定結果が3次式の場合と1次式の場合で変化しないように直線の傾き ψ を設定することを考える。

まず、回転に関する運動方程式の角加速度項の値が近似の前後で変化しないためには、式(37)と式(44)の比較から、直線の傾きを

$$\begin{aligned} \psi = & -\frac{1}{I}C_1 \int_A y^3 z \, dA - \frac{1}{I}C_2 \int_A y^2 z^2 \, dA - \frac{1}{I}C_3 \int_A y z^3 \, dA - \frac{1}{I}C_4 \int_A z^4 \, dA \\ & - \frac{1}{I}C_5 \int_A y^2 z \, dA - \frac{1}{I}C_6 \int_A y z^2 \, dA - \frac{1}{I}C_7 \int_A z^3 \, dA - \frac{1}{I}C_8 \int_A y z \, dA - C_9 \end{aligned} \quad (47)$$

とすれば良いことがわかる。次に、モーメントの値が近似の前後で変化しないためには、式(40)と式(45)の比較から、やはり直線の傾きを式(47)のように設定すればよいことがわかる。すなわち、角加速度項の条件とモーメントの条件は同時に満たすことができる。なお、変位分布が4次以上の関数であっても、角加速度の条件を満たす ψ とモーメントの条件を満たす ψ は等しいことが Cowper²⁾の定式化からわかる。

最後にせん断力については、式(47)の傾きを採用すると、3次関数から計算されるせん断力と1次関数から計算されるせん断力との間に齟齬が生じる。そこで、1次関数から計算されるせん断力にせん断変形の係数 κ を乗じることでそれらを一致させる。

$$Q(x) = \kappa GA \left(-\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (48)$$

せん断力が一致するための条件は式(43)(48)より

$$\kappa GA \left(-\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = GC_2 \int_A y^2 \, dA + 2GC_3 \int_A y z \, dA + 3GIC_4 + GA \left(C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (49)$$

である。これよりせん断変形の係数 κ の算定式として次式が得られる。

$$\kappa = \frac{I}{A} \frac{C_2 \int_A y^2 \, dA + 2C_3 \int_A y z \, dA + 3IC_4 + A \left(C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} \right)}{C_1 \int_A y^3 z \, dA + C_2 \int_A y^2 z^2 \, dA + C_3 \int_A y z^3 \, dA + C_4 \int_A z^4 \, dA + C_5 \int_A y^2 z \, dA + C_6 \int_A y z^2 \, dA + C_7 \int_A z^3 \, dA + C_8 \int_A y z \, dA + I \left(C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} \right)} \quad (50)$$

矩形断面・円形断面・パイプのように y 軸と z 軸に関して対称な断面に対しては式(50)に含まれる多くの積分は消えてしまい、 κ の算定式は次式となる。

$$\kappa = \frac{I}{A} \frac{C_2 \int_A y^2 \, dA + 3IC_4 + A \left(C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} \right)}{C_2 \int_A y^2 z^2 \, dA + C_4 \int_A z^4 \, dA + I \left(C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} \right)} \quad (51)$$

8. 並進運動に関する運動方程式

図-1 (b)に示す微小区間の並進運動に関する運動方程式は

$$\int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \rho \ddot{w}(\xi) B(\zeta) d\xi d\zeta = \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + q \Delta x \quad (52)$$

となり、これを整理すると

$$\rho A \ddot{w}(x) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x) + q(x) \quad (53)$$

となる.

9. 振動方程式

式(25)(44)(45)(48)(53)より $q = 0$ の場合の Timoshenko 梁の振動方程式は次式となる (文献³⁾の式(139)).

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}(x) + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4}(x) = 0 \quad (54)$$

10. 種々の断面に対する κ の値

10.1 矩形断面

高さ $2h$, 幅 B の矩形断面に対しては, $z = \pm h$ で $\tau = 0$ すなわち $\gamma = 0$ となることから, 式(41)より y によらず

$$C_2 y^2 + \left(+2C_3 h + C_6 + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) y + 3C_4 h^2 + 2C_7 h + C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (55)$$

$$C_2 y^2 + \left(-2C_3 h + C_6 + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) y + 3C_4 h^2 - 2C_7 h + C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (56)$$

であり

$$C_2 = 0 \quad (57)$$

$$C_4 = -\frac{1}{3h^2} \left(C_9 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (58)$$

となる. また, 高さ $2h$, 幅 B の矩形断面に対しては

$$A = 2Bh \quad (59)$$

$$I = \frac{2}{3} Bh^3 \quad (60)$$

$$\int_A z^4 dA = \frac{2}{5} Bh^5 \quad (61)$$

である. 式(57)(58)(59)(60)(61)を式(51)に代入すれば

$$\kappa = \frac{5}{6} \quad (62)$$

となる.

10.2 円形断面

半径 a の円形断面に対しては、極座標

$$y = r \cos \theta \quad (63)$$

$$z = r \sin \theta \quad (64)$$

を導入すれば、 $C_1 \sim C_{10}$ を決める境界条件は $r = a$ で θ によらず $\tau_{xr} = 0$ すなわち $\gamma_{xr} = 0$ となることである。式(36)に式(63)(64)を代入して整理すれば

$$u = (C_1 \cos^3 \theta + C_2 \cos^2 \theta \sin \theta + C_3 \cos \theta \sin^2 \theta + C_4 \sin^3 \theta)r^3 + (C_5 \cos^2 \theta + C_6 \cos \theta \sin \theta + C_7 \sin^2 \theta)r^2 + (C_8 \cos \theta + C_9 \sin \theta)r + C_{10} \quad (65)$$

となる。一方、 $y - z$ 平面内では剛体的な並進運動と回転運動のみが生じるとしているので、 $y - z$ 平面内の回転角を ϕ とすれば、変位の y 成分は $v - \phi z$ で、変位の z 成分は $w + \phi y$ で、変位の r 成分は

$$u_r = (v - \phi z) \cos \theta + (w + \phi y) \sin \theta = v \cos \theta + w \sin \theta \quad (66)$$

で与えられる。ここに v と w は図心における変位である。これらを考慮すると γ_{xr} は

$$\gamma_{xr} = 3(C_1 \cos^3 \theta + C_2 \cos^2 \theta \sin \theta + C_3 \cos \theta \sin^2 \theta + C_4 \sin^3 \theta)r^2 + 2(C_5 \cos^2 \theta + C_6 \cos \theta \sin \theta + C_7 \sin^2 \theta)r + C_8 \cos \theta + C_9 \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \quad (67)$$

となり、三角関数の公式を使って整理すると

$$\gamma_{xr} = \frac{3}{4}(C_1 - C_3)r^2 \cos 3\theta + \frac{3}{4}(C_2 - C_4)r^2 \sin 3\theta + (C_5 - C_7)r \cos 2\theta + C_6 r \sin 2\theta + \left(\frac{3}{4}(3C_1 + C_3)r^2 + C_8 + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cos \theta + \left(\frac{3}{4}(C_2 + 3C_4)r^2 + C_9 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \sin \theta + (C_5 + C_7)r \quad (68)$$

となる。これが $r = a$ で θ によらず 0 となるべきことから

$$C_2 - C_4 = 0 \quad (69)$$

$$\frac{3}{4}(C_2 + 3C_4)a^2 + C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (70)$$

すなわち

$$C_2 = C_4 = -\frac{1}{3a^2} \left(C_9 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (71)$$

となる。これを式(51)に代入すると κ の算定式として

$$\kappa = \frac{I}{A} \frac{3a^2 A - \int_A y^2 dA - 3I}{3a^2 I - \int_A y^2 z^2 dA - \int_A z^4 dA} \quad (72)$$

が得られる．一方，半径 a の円形断面に対して断面の諸量を計算すると

$$A = \pi a^2 \quad (73)$$

$$I = \frac{1}{4} \pi a^4 \quad (74)$$

$$\int_A y^2 dA = \frac{1}{4} \pi a^4 \quad (75)$$

$$\int_A y^2 z^2 dA = \frac{1}{24} \pi a^6 \quad (76)$$

$$\int_A z^4 dA = \frac{1}{8} \pi a^6 \quad (77)$$

となるので，式(72)より

$$\kappa = \frac{6}{7} \quad (78)$$

となる．

10.3 パイプ

半径 a ，板厚 t で， t/a の2乗以上の項を無視できる程度に薄肉のパイプに対しては， $C_1 \sim C_{10}$ を決める境界条件は半径 a の円形断面と同様であることから， κ の算定式は式(72)となる．一方，断面の諸量を計算すると

$$A = 2\pi a t \quad (79)$$

$$I = \pi a^3 t \quad (80)$$

$$\int_A y^2 dA = \pi a^3 t \quad (81)$$

$$\int_A y^2 z^2 dA = \frac{1}{4} \pi a^5 t \quad (82)$$

$$\int_A z^4 dA = \frac{3}{4} \pi a^5 t \quad (83)$$

となるので，式(72)より

$$\kappa = \frac{1}{2} \quad (84)$$

となる．

11. 既存の資料における κ の値との比較

冒頭で述べたように、せん断変形の係数 κ については、同一の断面に対しても様々な値が提案されている。少し比較をしてみると表-1のようになる。本稿の結果はCowper²⁾による結果と整合している。なお、Cowper²⁾の方法は本稿の方法に近いが、変位分布として特定の静的な載荷条件に対する変位分布の解析解を用いている点異なる。

表-1 せん断変形の係数 κ の比較

	矩形断面	円形断面	パイプ*
本稿の方法	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{2}$
Timoshenko(1937) ³⁾	$\frac{2}{3}$	—	—
Cowper(1966) ²⁾	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{2}$
土木学会構造力学公式集 ⁴⁾	$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}$
近藤(1993) ⁵⁾	$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{10}$	—
日置・村田(2010) ¹⁾	$\frac{5}{6}$	—	—
Chopra(2012) ⁶⁾	$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{10}$	—

* パイプは t/r の2乗以上の項を高次の微小量として無視した場合の値

** Cowper(1966)はポアソン比も考慮しており、ここでは他と条件を揃えるためポアソン比=0の場合を示す。

参考文献

- 1) 日置興一郎・村田賢：等分布荷重を受ける異方性弾性長方形断面梁の平面応力状態解の古典理論解からの誘導，日本建築学会構造系論文集，No.656，pp.1837-1845，2010年。
- 2) Cowper, G.R.: The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, J. Appl. Mech., Vol.33, No.2, pp. 335-340, 1966.
- 3) Timoshenko, S.: Vibration Problems in Engineering, Second Edition, D. Van Nostrand Company, Inc., 1937.
- 4) 土木学会：構造力学公式集，昭和61年版，1986年。
- 5) 近藤恭平：工学基礎 振動論，培風館，1993年。
- 6) Chopra, A.K.: Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, Fourth Edition, 2012.