

## 1 自由度系の応答と応答スペクトル

野津

### 1. はじめに

1自由度系 (single-degree-of-freedom system, SDOF system, 1質点系とも言う) とは図-1 に示すように一つの質点と地盤をバネとダッシュポットで結んだものである。質点 (質量 $m$ ) には, 質点と地盤の相対変位に比例する力 (比例定数 $k$ ) と, 相対速度に比例する力 (比例定数 $c$ ) が作用すると考える。1自由度系は建物や橋梁の地震応答を模擬するためによく用いられる。港湾構造物については, 岸壁のように周辺地盤の影響を受けやすい構造物の応答を表すのに1自由度系は適していないと考えられるが, 渡版を介しての背後地盤の影響が小さいなど理想化された条件での栈橋の応答を表すのに1自由度系は適していると考えられる。

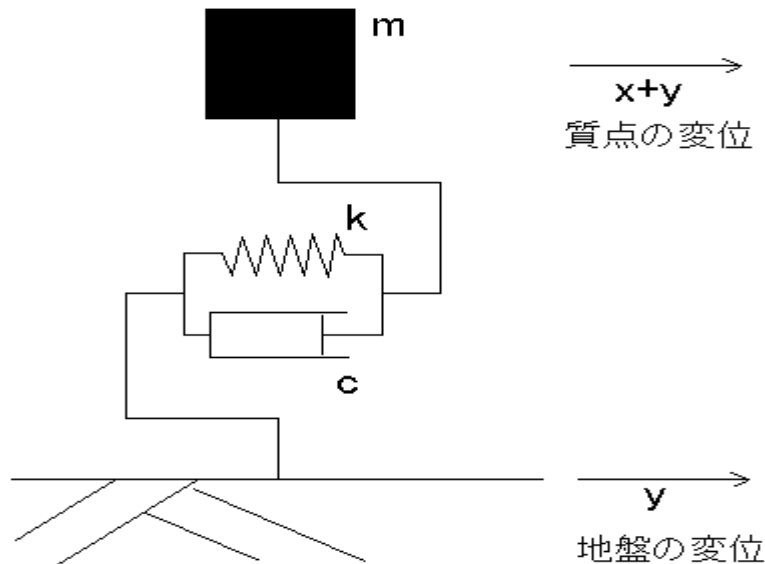


図-1 1自由度系

### 2. 1自由度系の運動方程式

地盤の変位を $y$ , 質点の変位を $x+y$ とし, 1自由度系の運動方程式を立てると

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}) = -kx - c\dot{x} \quad (1)$$

となり, 整理すると次式となる

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y} \quad (2)$$

ここで

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

$$h = \frac{\omega_0 c}{2k} \quad (4)$$

とおくと式(2)は次式となる ( $h$ は減衰定数と呼ばれる).

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\ddot{y} \quad (5)$$

右辺は外力項であり, これを $-f(t)$ とおけば次式が得られる.

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -f \quad (6)$$

### 3. 周波数領域での応答

式(6)の両辺をフーリエ変換すると

$$(-\omega^2 + 2ih\omega_0\omega + \omega_0^2)\hat{x} = -\hat{f} \quad (7)$$

すなわち

$$\frac{\hat{x}}{\hat{f}} = -\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ih\omega_0\omega} \quad (8)$$

が得られる. この右辺を周波数応答関数または伝達関数などと呼び,  $H(\omega)$ などと表す(文献1)では式(7.35)). すなわち, 1自由度系の応答を求めるためには, 外力をフーリエ変換し, 周波数応答関数を乗じ, フーリエ逆変換すれば良い. このように, フーリエ変換を活用すると1自由度系の応答は簡単に求まる. なお, 非減衰の場合は $\omega = \omega_0$ において式(8)右辺の分母がゼロとなるため, このままでは1自由度系の応答を正しく求めることができない. この問題点に対処するには [Phinneyの方法](#) (複素周波数を用いる方法) を用いるのが便利である.

式(8)に $\hat{f} = -\omega^2\hat{y}$ を代入すると次の二つの関係式が得られる.

$$\frac{\hat{x}}{\hat{y}} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ih\omega_0\omega} \quad (9)$$

$$\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\hat{y}} = \frac{\omega_0^2 + 2ih\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ih\omega_0\omega} \quad (10)$$

後者は地盤の変位に対する質点の絶対変位の応答倍率を表したもので, その絶対値を $h = 0.05$ の場合についてプロットすると図-2となる. この図からわかるように, 応答倍率は低周波側の極限では1であり, ほぼ $\omega = \omega_0$ で極大となる.  $\omega_0$ を $2\pi$ で除したもの ( $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ ) を固有振動数, その逆数 ( $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ) を固有周期という.

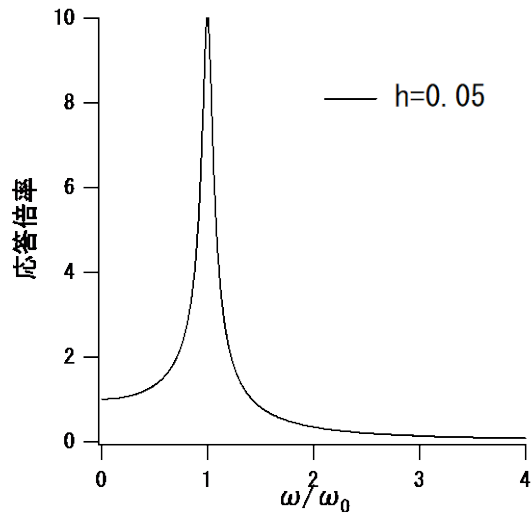


図-2 地盤の変位に対する質点の絶対変位の応答倍率

#### 4. 時間領域での応答（その1）Duhamel 積分

以上のように周波数領域での1自由度系の応答の計算は簡単であるが、時間領域での計算方法も知っておく価値がある。

まず、式(6)の応答を求める代わりに、式(6)の $f(t)$ を $\delta(t)$ に置き換えた場合の応答を求める。その場合の応答を $g(t)$ と書くことにすれば次式となる。

$$\ddot{g} + 2h\omega_0\dot{g} + \omega_0^2g = -\delta(t) \quad (11)$$

いま式(11)の解が $t > 0$ で

$$g = Ce^{\lambda t} \quad (12)$$

という形で与えられると仮定する。これを

$$\ddot{g} + 2h\omega_0\dot{g} + \omega_0^2g = 0 \quad (t > 0) \quad (13)$$

に代入すると次の特性方程式を得る。

$$\lambda^2 + 2h\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (14)$$

この解は二つあって、 $h < 1$ の場合

$$\lambda = -h\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-h^2} \quad (15)$$

である。ここで

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-h^2} \quad (16)$$

とおけば次式が得られる。

$$\lambda = -h\omega_0 \pm i\omega_d \quad (17)$$

よって式(13)の一般解は

$$g = e^{-h\omega_0 t} (C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}) \quad (t > 0) \quad (18)$$

あるいは

$$g = e^{-h\omega_0 t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \quad (t > 0) \quad (19)$$

で与えられる。これは振動しながら振幅が次第に減少していく関数を表す。ここで初期条件として  $t = +0$  で

$$g = 0, \quad \dot{g} = -1 \quad (20)$$

であることを考慮すると

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{\omega_d} \quad (21)$$

となるから、最終的に式(11)を満足する  $g(t)$  は

$$g = -\frac{1}{\omega_d} e^{-h\omega_0 t} \sin \omega_d t \quad (t > 0) \quad (22)$$

で与えられる。これを力積応答関数またはインパルスレスポンスまたはグリーン関数と言う（文献 1）では式(7.33)。グリーン関数の例を図-3 に示す。

いったんグリーン関数がわかれば、外力が任意の関数である場合の応答は次のようにして求まる。式(11)の両辺と  $f(t)$  との合積（convolution）を計算すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (g * f) + 2h\omega_0 \frac{\partial}{\partial t} (g * f) + \omega_0^2 (g * f) = -f(t) \quad (23)$$

時間領域の合積は周波数領域では二つの関数の積であり、時間領域の微分は周波数領域では  $i\omega$  を乗じる操作であるため、合積と時間微分の順序は交換可能である。式(23)を導く際はこの性質を利用している。式(23)と式(6)を見比べると

$$x(t) = g(t) * f(t) \quad (24)$$

である。すなわち、外力  $f(t)$  とグリーン関数  $g(t)$  の合積を計算すれば、それが系の応答となる。  $f(t) = \ddot{y}(t)$  である場合の応答は、  $t < 0$  で  $\ddot{y}(t) = 0$  ならば次式となる（文献 1）では式(7.31)。これは Duhamel 積分と呼ばれる。

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-h\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (25)$$

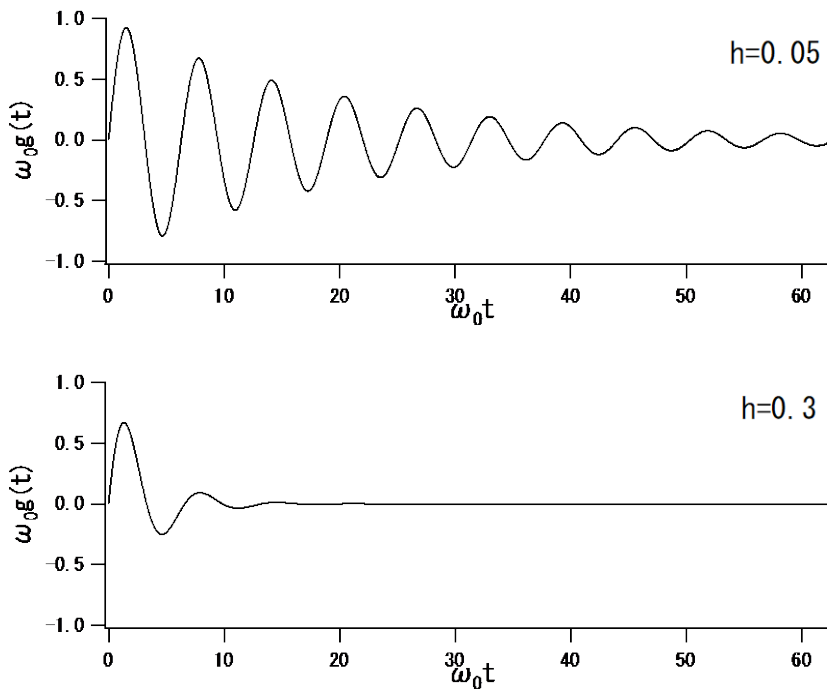


図-3  $h = 0.05$ と $h = 0.3$ の場合のグリーン関数の例. グリーン関数は時間の次元を持っているので $\omega_0$ を乗じて無次元化し, 初速度がプラスとなるように $(-1)$ を乗じて示している.

ところで, 式(24)の両辺をフーリエ変換すると

$$\frac{\hat{x}}{\hat{f}} = \hat{g} \quad (26)$$

となる. すなわち, グリーン関数 $g(t)$ のフーリエ変換が周波数応答関数 $H(\omega)$ である. 式(22)の $g(t)$ をフーリエ変換すると式(8)の $H(\omega)$ となることは $\sin \omega_a t = (e^{i\omega_a t} - e^{-i\omega_a t})/(2i)$ と置き換えて積分することで確認できる (付録 A 参照). 式(8)の $H(\omega)$ をフーリエ逆変換すると式(22)の $g(t)$ となることは留数定理を使えば確認できる (付録 B 参照).

## 5. 時間領域での応答 (その 2) Nigam の方法

上述の Duhamel 積分による 1 自由度系の応答計算は必ずしも効率が良くない. 実際には 1 自由度系の応答計算には以下に述べる Nigam の方法<sup>2)</sup>が用いられることが多い.

Nigam の方法は, 地盤加速度が $\Delta t$ 刻みの離散的なデータとして与えられることを前提とし, データとデータの間が線形補間できることを仮定し, その他の近似は用いずに式(5)を解く方法である.  $t = t_i = i\Delta t$ での地盤加速度を $\dot{y}_i$ とすれば,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ の範囲で解くべき方程式は次式となる.

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = -\left(\dot{y}_i + \frac{\Delta \dot{y}}{\Delta t} \tau\right) \quad (27)$$

ここに $\tau = t - t_i$ ,  $\Delta \dot{y} = \dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i$ である. いま $t = t_i$ での相対変位と相対速度を

$$x(t_i) = x_i, \quad \dot{x}(t_i) = \dot{x}_i \quad (28)$$

とし、これを初期条件として  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  の範囲で式(27)の解を求めると次式となる。

$$x(t) = e^{-h\omega_0\tau} (A \cos \omega_d\tau + B \sin \omega_d\tau) - \frac{\dot{y}_i}{\omega_0^2} + \frac{2h\Delta\dot{y}}{\omega_0^3\Delta t} - \frac{\Delta\dot{y}}{\omega_0^2\Delta t} \tau \quad (29)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-h\omega_0\tau} (-A\omega_d \sin \omega_d\tau + B\omega_d \cos \omega_d\tau - Ah\omega_0 \cos \omega_d\tau - Bh\omega_0 \sin \omega_d\tau) - \frac{\Delta\dot{y}}{\omega_0^2\Delta t} \quad (30)$$

ここに

$$A = x_i + \frac{\dot{y}_i}{\omega_0^2} - \frac{2h\Delta\dot{y}}{\omega_0^3\Delta t} \quad (31)$$

$$B = \frac{1}{\omega_d} \left( h\omega_0 x_i + \dot{x}_i - \frac{2h^2-1}{\omega_0^2} \frac{\Delta\dot{y}}{\Delta t} + \frac{h}{\omega_0} \dot{y}_i \right) \quad (32)$$

である。式(29)(30)を式(27)(28)に代入すれば、これらが式(27)(28)の解であることが確認できる。式(29)(30)で  $\tau = \Delta t$  とおけば、 $t = t_{i+1}$  での相対変位と相対速度が次の通り求まる。

$$x_{i+1} = A_{11}x_i + A_{12}\dot{x}_i + B_{11}\dot{y}_i + B_{12}\ddot{y}_{i+1} \quad (33)$$

$$\dot{x}_{i+1} = A_{21}x_i + A_{22}\dot{x}_i + B_{21}\dot{y}_i + B_{22}\ddot{y}_{i+1} \quad (34)$$

ここに

$$A_{11} = e^{-h\omega_0\Delta t} \left( \cos \omega_d\Delta t + \frac{h\omega_0}{\omega_d} \sin \omega_d\Delta t \right) \quad (35)$$

$$A_{12} = e^{-h\omega_0\Delta t} \frac{1}{\omega_d} \sin \omega_d\Delta t \quad (36)$$

$$A_{21} = -e^{-h\omega_0\Delta t} \frac{\omega_0^2}{\omega_d} \sin \omega_d\Delta t \quad (37)$$

$$A_{22} = e^{-h\omega_0\Delta t} \left( \cos \omega_d\Delta t - \frac{h\omega_0}{\omega_d} \sin \omega_d\Delta t \right) \quad (38)$$

$$B_{11} = e^{-h\omega_0\Delta t} \left( \left( \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2h}{\omega_0^3\Delta t} \right) \cos \omega_d\Delta t + \left( \frac{h}{\omega_0\omega_d} - \frac{1-2h^2}{\omega_0^2\omega_d\Delta t} \right) \sin \omega_d\Delta t \right) - \frac{2h}{\omega_0^3\Delta t} \quad (39)$$

$$B_{12} = e^{-h\omega_0\Delta t} \left( -\frac{2h}{\omega_0^3\Delta t} \cos \omega_d\Delta t + \frac{1-2h^2}{\omega_0^2\omega_d\Delta t} \sin \omega_d\Delta t \right) - \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2h}{\omega_0^3\Delta t} \quad (40)$$

$$B_{21} = e^{-h\omega_0\Delta t} \left( -\frac{1}{\omega_0^2\Delta t} \cos \omega_d\Delta t - \left( \frac{h}{\omega_0\omega_d\Delta t} + \frac{1}{\omega_d} \right) \sin \omega_d\Delta t \right) + \frac{1}{\omega_0^2\Delta t} \quad (41)$$

$$B_{22} = e^{-h\omega_0\Delta t} \left( \frac{1}{\omega_0^2\Delta t} \cos \omega_d\Delta t + \frac{h}{\omega_0\omega_d\Delta t} \sin \omega_d\Delta t \right) - \frac{1}{\omega_0^2\Delta t} \quad (42)$$

である。このように、 $t = t_i$  での相対変位と相対速度が与えられると  $t = t_{i+1}$  での相対変位と相対速度が求まる仕組みになっている。揺れ始める前の時間から計算を始めて、式(33)(34)を繰り返し用いることで、1自由度系の応答が求まる。式(35)-(42)の係数は最初に一回だけ計算しておけば良いため効率が良い。

## 6. 応答スペクトル

一つの地震動に対して、様々な固有周期を有する 1 自由度系の応答を計算し（減衰定数は固定しておく）、その応答の時刻歴波形の最大値を縦軸に、固有周期を横軸にとったグラフを応答スペクトルと呼ぶ。応答スペクトルには、1 自由度系の最大値として何を選ぶかにより、「絶対加速度応答スペクトル」「相対速度応答スペクトル」「相対変位応答スペクトル」がある<sup>1)</sup>。これらはそれぞれ「加速度応答スペクトル」「速度応答スペクトル」「変位応答スペクトル」と呼ばれることもある<sup>1)</sup>。いま極めて  $k$  の大きな 1 自由度系を考えると、質点は地盤と一体となって動くはずであるから、質点の絶対加速度と地盤加速度は等しい。すなわち、短周期側の極限では絶対加速度応答スペクトルは地盤加速度の最大値に一致する。

相対変位  $x$  が最大となる時刻においては、バネによる復元力  $kx$  も最大となる。したがって、ダッシュポットの存在により系の荷重-変位関係がわずかに楕円形となることの影響を除けば、質点の絶対加速度（の絶対値）もこの時刻に最大となる。この時刻に相対速度はゼロであることに注意すると、絶対加速度応答スペクトルと相対変位応答スペクトルとの間には次の関係がある。

$$(\text{絶対加速度応答スペクトル}) \approx (\text{相対変位応答スペクトル}) \times \frac{k}{m}$$

すなわち

$$(\text{絶対加速度応答スペクトル}) \approx (\text{相対変位応答スペクトル}) \times \omega_0^2$$

一方、相対速度応答スペクトルには類似の関係が無く、仲間外れの状態となっている。そこで、相対変位応答スペクトルに  $\omega_0$  を乗じたものを擬似速度応答スペクトルと定義し、仲間に加えることが多い。

地震動にある特定の周期成分が強く含まれていれば、その周期の付近で応答スペクトルは大きくなりやすい。したがって、応答スペクトルは間接的に地震動の周期特性を表すと言える。ただし、一般に 1 自由度系の応答は、固有周期付近の地震動成分だけでなく、様々な周期の地震動成分の影響を受ける。例えば固有周期の長い 1 自由度系に短周期成分のみを含む地震動が作用した場合、その応答の最大値は地震動の短周期成分で決まる。比較的小規模な ( $M4 \sim M5$  程度の) 地震の記録を扱う場合、地震動に含まれる長周期成分が少ないので、応答スペクトルの長周期成分は地震動の短周期成分で決まっている可能性が高い。例えば 2 地点間の応答スペクトルの長周期成分の比をとったとき、地震動の長周期成分の比を見ているつもりでも、実は短周期成分の比を見ている可能性がある。このあたりが、地震動を解析するためのツールとして見た場合の応答スペクトルの限界であると言える。

Chopra<sup>3)</sup>による応答スペクトルの歴史の解説は興味深い。

### 参考文献

- 1) 大崎順彦：新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994 年。
- 2) Nigam, N.C. and P.C. Jennings: Calculation of response spectra from strong-motion earthquake records, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.59, pp.909-922, 1969.
- 3) Chopra, A.K.: Elastic response spectrum: A historical note, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.36, pp.3-12, 2007.

付録 A グリーン関数から周波数応答関数へ

式(22)の $g(t)$ のフーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^{\infty} e^{-h\omega_0 t} \sin \omega_d t e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A1})$$

において $\sin \omega_d t = (e^{i\omega_d t} - e^{-i\omega_d t})/(2i)$ と置き換えれば

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt &= -\frac{1}{2i\omega_d} \int_0^{\infty} (e^{-h\omega_0 t - i\omega t + i\omega_d t} - e^{-h\omega_0 t - i\omega t - i\omega_d t}) dt \\ &= -\frac{1}{2i\omega_d} \left( \frac{1}{-h\omega_0 - i\omega + i\omega_d} [e^{-h\omega_0 t - i\omega t + i\omega_d t}]_{t=0}^{t=\infty} - \frac{1}{-h\omega_0 - i\omega - i\omega_d} [e^{-h\omega_0 t - i\omega t - i\omega_d t}]_{t=0}^{t=\infty} \right) \\ &= -\frac{1}{2i\omega_d} \left( -\frac{1}{-h\omega_0 - i\omega + i\omega_d} + \frac{1}{-h\omega_0 - i\omega - i\omega_d} \right) \\ &= -\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ih\omega_0\omega} \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

となり式(8)の $H(\omega)$ に一致する.



付録 B 周波数応答関数からグリーン関数へ

式(8)の $H(\omega)$ のフーリエ逆変換

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - 2ih\omega_0\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega - ih\omega_0 - \omega_d)(\omega - ih\omega_0 + \omega_d)} e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{B1})$$

において留数定理を適用する.  $t > 0$ に対しては, 式(B1)の積分を上半平面における反時計回りの積分に置き換えることができ,  $\omega = ih\omega_0 \pm \omega_d$ における留数が拾われる形となり,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = i \left( \frac{e^{i(ih\omega_0 + \omega_d)t}}{2\omega_d} - \frac{e^{i(ih\omega_0 - \omega_d)t}}{2\omega_d} \right) = -\frac{1}{\omega_d} e^{-h\omega_0 t} \sin \omega_d t \quad (\text{B2})$$

となる.  $t < 0$ に対しては, 式(B1)の積分を下半平面における時計回りの積分に置き換えることができ, 下半平面に特異点が存在しないので

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 0 \quad (\text{B3})$$

となる. いずれにしても $H(\omega)$ のフーリエ逆変換は式(22)の $g(t)$ に一致する.