2020/2/24

フーリエ級数とサンプリング定理

野津

1. フーリエ級数

フーリエ級数は連続関数のフーリエ変換と離散フーリエ変換の中間的な存在である．地震工学の分野では，理論の構築には連続関数のフーリエ変換が主に用いられ，実際の数値計算には離散フーリエ変換が用いられるため，フーリエ級数が活躍する機会は意外に少ないが，一般には重要な概念である．フーリエ級数は連続関数のフーリエ変換からも離散フーリエ変換からもアプローチ可能である．以下，これらについて見ていくことにする．

2. 連続関数のフーリエ変換からのアプローチ

まず連続関数のフーリエ変換からのアプローチについて見てみる．時刻歴波形$f(t)$に対し，フーリエ変換および逆変換は次式で与えられる．

$$\text{フーリエ変換}\quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1}$$

$$\text{フーリエ逆変換}\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{2}$$

ここで$f(t)$は区間$[0,T]$のみで値を持つものとすると，式(1)より

$$F(\omega)=\int_{0}^{T} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{3}$$

である．ここで$\Delta\omega=2\pi/T$とし，$\omega=\omega_k=k\Delta\omega$での$F(\omega)$の値$F(\omega_k)$を考えることにすれば

$$F(\omega_k)=\int_{0}^{T} f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt \tag{4}$$

となる．ここで

$$C_k\equiv F(\omega_k)/T \tag{5}$$

とおけば

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt \tag{6}$$

である．一方，式(2)の積分を台形公式で近似すると

$$f(t)\cong\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k)e^{i\frac{2\pi kt}{T}}\Delta\omega \tag{7}$$

これと式(5)より

$$f(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \tag{8}$$

式(6)(8)をまとめて書くと次式が得られる．

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt \qquad \text{(6)再掲}$$

$$f(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \qquad \text{(8)再掲}$$

これらが$f(t)$のフーリエ級数を表す式である．ただし式(8)の左辺と右辺が等号ではなく≅で結ばれている．この点については後述する．

3.　離散フーリエ変換からのアプローチ

　離散フーリエ変換からのアプローチは大崎先生の本[1)]にも紹介されているので地震工学者にとっては馴染み深いものである．$f(t)$は区間$[0,T]$のみで値を持つ時刻歴波形とする．$\Delta t = T/N$とし，$t = t_m = m\Delta t$での$f(t)$の値$f(t_m) = f_m$を考えることにすれば，離散フーリエ変換および逆変換は次式で与えられる．

$$\bar{C}_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m\, e^{-i\frac{2\pi km}{N}} \tag{9}$$

$$f_m = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \bar{C}_k\, e^{i\frac{2\pi km}{N}} \tag{10}$$

式(9)(10)はいずれも近似ではなく厳密に成立する関係であった．ここでTを一定に保ったまま$N \to \infty$とすれば，式(9)は

$$\bar{C}_k \to \frac{1}{T}\lim_{\Delta t \to 0}\sum_{m=0}^{N-1} f_m\, e^{-i\frac{2\pi kt_m}{T}}\Delta t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt = C_k \tag{11}$$

となり，式(10)は

$$f(t_m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2\pi kt_m}{T}} \tag{12}$$

となる．式(12)のt_mは本来は飛び飛びの値であるが，$N \to \infty$のときt_mは区間$[0,T]$の任意の値となり得るので，

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \qquad (0 \le t \le T) \tag{13}$$

が得られる．式(6)(13)をまとめて書くと次式が得られる．

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}dt \qquad \text{(6)再掲}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \qquad (0 \le t \le T) \qquad \text{(13)再掲}$$

このように，離散フーリエ変換からも$f(t)$のフーリエ級数を表す式が得られる．ただし，今度は式(13)の左辺と右辺が等号で結ばれている．

4. サンプリング定理

式(8)は台形公式を使って導かれたものであるため，誤差を含むのが当然であるように思える．しかし式(13)は$0 \le t \le T$の範囲では誤差がないことを示している．

式(13)が示すものは実はサンプリング定理である．$C_k \equiv F(\omega_k)/T$であったことを想起すると，式(13)より

「時刻歴波形$f(t)$が$0 \le t \le T$でのみ値を持つとき，$f(t)$を表現するために$F(\omega)$の値が連続的に得られている必要はなく，間隔$\Delta\omega = 2\pi/T$の離散値$F(\omega_k)$のみで$f(t)$を表現できる．ただしその際$F(\omega_k)$の値は無限個（$-\infty < k < \infty$）必要である」

と言える．ここで $f(t)$が値を持つ範囲を$-T/2 \le t \le T/2$に変更しても，式(6)が

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}dt \qquad \text{(6)'}$$

に変わるだけで結論は変わらないため，

「時刻歴波形$f(t)$が$-T/2 \le t \le T/2$でのみ値を持つとき，$f(t)$を表現するために$F(\omega)$の値が連続的に得られている必要はなく，間隔$\Delta\omega = 2\pi/T$の離散値$F(\omega_k)$のみで$f(t)$を表現できる．ただしその際$F(\omega_k)$の値は無限個（$-\infty < k < \infty$）必要である」

と言える．ここで時間領域と周波数領域を反転させると

「時刻歴波形$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$が$-\Omega/2 \le \omega \le \Omega/2$でのみ値を持つとき，$F(\omega)$を表現するために$f(t)$の値が連続的に得られている必要はなく，間隔$\Delta t = 2\pi/\Omega$の離散値$f(t_m)$のみで$F(\omega)$を表現できる．ただしその際$f(t_m)$の値は無限個（$-\infty < m < \infty$）必要である」

となる．これが一般的に知られているサンプリング定理である．離散値$f(t_m)$のみで$F(\omega)$を表現できれば，そのフーリエ逆変換である$f(t)$も離散値$f(t_m)$のみで表現できることになる．

例えば$f(t)$が 50Hz 以下の成分のみを含む場合，$\Omega/2 = 2\pi \times 50\text{Hz}$であるから，$\Delta t = 0.01s$でサンプリングされたデータがあれば，それにより$f(t)$を再現できる．

参考文献

1) 大崎順彦：新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994 年．