2019/8/12

一般の場合のモーメントテンソル

野津

1.　一般の場合のモーメントテンソルとそれによる弾性体の応答

弾性体中の点 P の周りに局所的に分布荷重が作用しているものとし，その合力はゼロ，点 P 周りのモーメントもゼロとする．点 P の周りの任意の点の座標を$\boldsymbol{\xi}$で表し（点 P を原点とする），分布荷重を$f_i(\boldsymbol{\xi},t)$で表すとき，モーメントテンソルは次式で定義される（Aki and Richards[1]の Box 3.3 の式）．

$$M_{pq}(t)=\int f_p(\boldsymbol{\xi},t)\xi_q dV \tag{1}$$

点 P 周りのモーメントがゼロであるとの条件から

$$M_{pq}(t)=M_{qp}(t) \tag{2}$$

である．教科書などでよく紹介されているダブルカップルとベクトルダイポールの組み合わせによるモーメントテンソル（**図-1**）は式(1)のモーメントテンソルの特別な場合（荷重が集中荷重の場合）と見ることができる．また，断層面上でのすべりと等価なモーメントテンソルも式(1)のモーメントテンソルの特別な場合となっている．

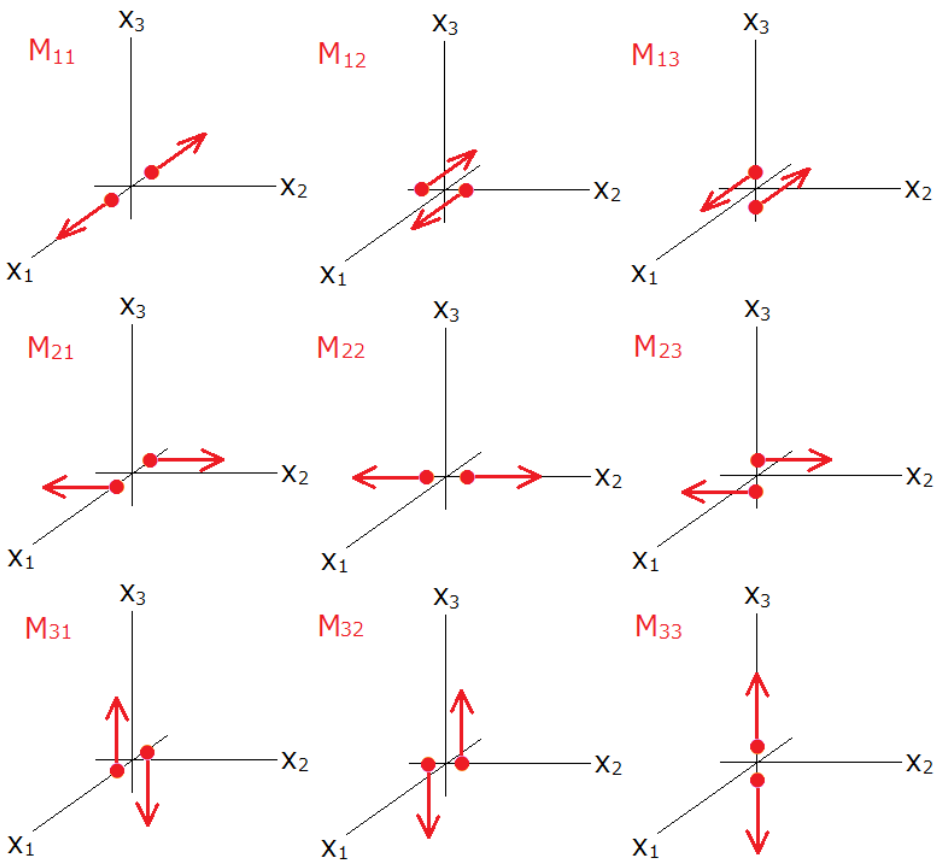

図-1　ダブルカップルとベクトルダイポールの組み合わせ

式(1)のモーメントテンソルが作用した場合の弾性体の応答は次式となる．

$$u_i(\boldsymbol{x},t) = \int f_p(\boldsymbol{\xi},t) * G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi})dV \tag{3}$$

ここで，分布荷重の作用している範囲ではグリーン関数の変化が線形的であると考えられる程度に観測点は遠方にあるものとする．言い換えれば，分布荷重の作用はそれほどに局所的であるとする．

$$G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi}) = G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{0}) + \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi})\xi_q \tag{4}$$

ここで右辺第二項の微分係数は$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$における微分係数である．これを式(3)に代入すると

$$\begin{aligned} u_i(\boldsymbol{x},t) &= \int f_p(\boldsymbol{\xi},t) * G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{0})dV + \int f_p(\boldsymbol{\xi},t) * \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi})\xi_q dV \\ &= \int f_p(\boldsymbol{\xi},t)dV * G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{0}) + \int f_p(\boldsymbol{\xi},t)\xi_q dV * \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

ここで右辺第一項は合力がゼロである条件から消えるので

$$u_i(\boldsymbol{x},t) = \int f_p(\boldsymbol{\xi},t)\xi_q dV * \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi})$$

となる．これと式(1)より

$$u_i(\boldsymbol{x},t) = M_{pq}(t) * \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{ip}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi}) \tag{5}$$

が得られる．これはダブルカップルに対する弾性体の応答を計算するのに一般的に用いられている式と同じである．

2.　モーメントテンソルがテンソルであることについて

式(1)で定義されたモーメントテンソルがテンソルであることを確認しておく．それには，原点を共有する新旧のデカルト座標系を用意し，新旧の座標系におけるモーメントテンソルが

$$\bar{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}^{-1} \tag{6}$$

のような関係にあることを示せばよい（応力・ひずみがテンソルであることについて参照）．ここに$\boldsymbol{M}$は旧座標系におけるモーメントテンソル，$\bar{\boldsymbol{M}}$は新座標系におけるモーメントテンソル，$\boldsymbol{Q}$は回転行列であり，旧座標系$\boldsymbol{x}$から新座標系$\bar{\boldsymbol{x}}$への変換は次式で行えるものとする．

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

モーメントテンソルの定義により

$$\bar{M}_{pq}(t) = \int \bar{f}_p(\boldsymbol{\xi}, t)\bar{\xi}_q dV = \int Q_{pk} f_k(\boldsymbol{\xi}, t) Q_{ql} \xi_l dV \tag{8}$$

ところで，新座標のi成分を旧座標のj成分で偏微分したものと，旧座標のj成分を新座標のi成分で偏微分したものは等しい．これらはともに 2 つの座標軸のなす角の余弦に等しいからである．これを式で表現すると

$$Q_{ji}^{-1} = Q_{ij} \tag{9}$$

となる．式(9)を式(8)に代入すると

$$\bar{M}_{pq}(t) = Q_{pk}\left(\int f_k(\boldsymbol{\xi}, t)\xi_l dV\right) Q_{lq}^{-1} = Q_{pk} M_{kl}(t) Q_{lq}^{-1}$$

すなわち式(6)が成立するので，式(1)で定義されたモーメントテンソルはテンソルである．

参考文献

1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.