2019/8/12

応力・ひずみがテンソルであることについて

野津

1. はじめに

応力・ひずみの各成分はデカルト座標系では

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

のように書かれることが多いが，このように 9 つの数字の並んだものがすべてテンソルであるとは限らない．テンソル（中でも 2 階のテンソル）はベクトルからベクトルへの線形変換と定義されており [1]，座標系のとり方によらず同じベクトルを同じベクトルに変換するものでなければならない．ここでは式(1)(2)のように書かれた応力とひずみが確かにテンソルであることを確認しておく．

2. 確認方法

一般に新旧のデカルト座標系の間の関係としては座標軸の並行移動と回転が考えられるが，座標軸の並行移動だけでは式(1)(2)の成分は変わらず，同じベクトルが同じベクトルに変換されることは明らかなので，ここでは座標軸の回転について考えておけばよい．

原点を共有する新旧のデカルト座標系を用意し，旧座標系$\boldsymbol{x}$から新座標系$\bar{\boldsymbol{x}}$への変換は次式で行えるものとする．

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ここに$\boldsymbol{Q}$は回転行列である．このとき，新旧座標系で行列表示された変換

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{pmatrix} \tag{5}$$

により同じベクトルが同じベクトルに変換されるための必要十分条件は

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1} \tag{6}$$

となることである．以下，このことを確認する．

まず，必要条件を確認する．同一のベクトルを異なる座標系で見たものを$\boldsymbol{x}$，$\bar{\boldsymbol{x}}$とする．

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{7}$$

これらをそれぞれの座標系で変換したものを$\boldsymbol{y}$，$\bar{\boldsymbol{y}}$とする．

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{8}$$
$$\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}} \tag{9}$$

変換後のベクトルが同一であるためには

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \tag{10}$$

でなければならない．式(7)-(10)より

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{11}$$

これが任意の$\boldsymbol{x}$に対して成立すべきことから

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A} \tag{12}$$

すなわち式(6)が言える．逆に式(6)が成立するとき任意の$\boldsymbol{x}$に対し式(11)が成立するので同一のベクトルは同一のベクトルに変換される．

したがって，式(1)(2)の応力とひずみがテンソルであることを確認するには，これらが式(6)を満たすことを確認すればよい．

3.　応力がテンソルであることについて

弾性体中に単位法線ベクトルが$\boldsymbol{n}$であるような面を考え，この面に作用するトラクションを$\boldsymbol{t}$とする．$\boldsymbol{n}$も$\boldsymbol{t}$も座標系によらないベクトルである．

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{n} \tag{13}$$
$$\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{t} \tag{14}$$

ここでコーシーの式より新旧座標系において

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} \tag{15}$$
$$\bar{\boldsymbol{t}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\boldsymbol{n}} \tag{16}$$

である．式(13)-(16)より

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\bar{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} \tag{17}$$

これが任意の方向の$\boldsymbol{n}$に対して成立することから

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\overline{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\sigma} \tag{18}$$

である．すなわち式(1)の応力は式(6)を満たすのでテンソルである．

4. ひずみがテンソルであることについて

ひずみの定義より

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Q_{kj}^{-1}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + Q_{ki}^{-1}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\right)
\end{aligned}$$

ここで

$$\bar{u}_i = Q_{il}u_l$$

であることを考慮すると

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(Q_{kj}^{-1}Q_{il}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + Q_{ki}^{-1}Q_{jl}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Q_{lj}^{-1}Q_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + Q_{ki}^{-1}Q_{jl}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

ところで，新座標のi成分を旧座標のj成分で偏微分したものと，旧座標のj成分を新座標のi成分で偏微分したものは等しい．これらはともに 2 つの座標軸のなす角の余弦に等しいからである．これを式で表現すると

$$Q_{ji}^{-1} = Q_{ij} \tag{20}$$

となる．式(20)を式(19)に代入すると

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(Q_{lj}^{-1}Q_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + Q_{ik}Q_{lj}^{-1}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \\
&= Q_{ik}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)Q_{lj}^{-1} \\
&= Q_{ik}\varepsilon_{kl}Q_{lj}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{Q}^{-1} \tag{21}$$

すなわち式(2)のひずみは式(6)を満たすのでテンソルである．

参考文献

1）小林昭一：テンソル解析の初歩（Ⅰ），材料，第 27 巻，第 302 号，pp.1121-1127，1978 年.