2019/5/8

超関数とそのフーリエ変換

野津

1. はじめに

多くの場合，フーリエ変換と逆変換は式(1)(2)の広義積分で定義される．

$$\text{フーリエ変換}\quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1}$$

$$\text{フーリエ逆変換}\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{2}$$

しかし，式(1)(2)の定義だけでは不都合な場合がある．例えば，式(1)によると$\delta(t)$のフーリエ変換は 1 であるから，1 のフーリエ逆変換は$\delta(t)$であってほしい．これを無理に式で表現すると

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{i\omega t}\,d\omega \tag{3}$$

となるが，この式の右辺の広義積分が意味をなさないことは明らかである．つまり 1 のフーリエ逆変換は広義積分では定義できない．同様に$\sin\omega_0 t$や$\cos\omega_0 t$のような主立った関数のフーリエ変換も広義積分では定義できない．これらの問題点を解決してくれるのが超関数（distribution）という概念である．この概念を用いると，後ろめたさを感じることなく「1 のフーリエ逆変換は$\delta(t)$である」と言えるようになり，$\sin\omega_0 t$や$\cos\omega_0 t$のフーリエ変換も定義できるようになる．

地震工学に登場する多くの時間関数は式(1)の広義積分によりフーリエ変換可能である．断層近傍で観測される永久変位成分を含む地動変位波形や，非減衰 1 自由度系の応答変位波形など，式(1)の広義積分がそのままでは適用できない時間関数もあるが，これらも Phinney 法を適用すれば広義積分に持ち込むことができる．地震工学に登場する概念で超関数と特に関わりの深いものとしてグリーン関数があるが，その導出においても，グリーン関数を超関数として扱うことが必ずしも有利とは言えない（グリーン関数の超関数としての扱いについては本稿の最後に言及する）．このように，地震工学において必要な解析を行う上で超関数を知っておくことが必須であるかと言えば，それは少し疑問である．しかし，地震工学の分野で超関数に言及している文献にときどき遭遇するのは事実であり，そのような時のために，超関数とそのフーリエ変換についてコンパクトにまとめた文書があると便利であろう．本稿はそのような考えからまとめたものである．したがって，現時点で超関数に関して何も困っていないという方には，本稿を読むことは時間の無駄であるからおすすめしない．しかし，現に超関数に遭遇して理解できずに困っているという方には，本稿の内容はかなり役に立つと思う．

以下においては，まず超関数について説明し，その上で，超関数の微分とフーリエ変換について説明する．そして，その応用問題としてグリーン関数の超関数としての扱いに言及する．グリーン関数に関連して頻出する式である$(1/r)_{,ii}=-4\pi\delta(\boldsymbol{x})$についても少し寄り道をして説明する．

2. 超関数について

通常の関数$f(t)$は与えられたtに対し何らかの値$f(t)$を定めるものであった．一方，与えられた試験関数$\varphi(t)$に対し

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(t)\,dt \tag{4}$$

のような積分を介して$f(t)$が何らかの積分値を定める場合に，$f(t)$は超関数であると言う．ただし$\varphi(t)$は微分可能性や急減少性などの良い性質を有しており，式(1)(2)によりフーリエ変換・逆変換が可能であるものとする．$\delta(t)$は式(4)を介して積分値$\varphi(0)$を与えるので超関数の例である．また，例えば「1」のように通常の関数の多くも超関数と見なすことができる．

$f(t)$を超関数と考える場合は，積分値だけに着目し，個々のtに対する$f(t)$の値は不問に付すことにする．すなわち$f(t)$と$g(t)$に対し

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \tag{5}$$

であれば$f(t)$と$g(t)$は超関数として等しいと言う．このとき個々のtに対して$f(t) = g(t)$であることは要請されない．ただし，φとしては局所的に値を持つ Ricker Wavelet のような関数を考えることもできるので，$f = g$であるためには，fとgの局所的な重み付け平均値が等しくなければならない．

具体例として，$\lim_{\omega \to \infty} \sin \omega t$のように十分に周波数の高い正弦波を考えたとき（**図-1**），これは超関数としては 0 に等しい．すなわち

$$\lim_{\omega \to \infty} \sin \omega t = 0 \tag{6}$$

である．なぜなら，与えられた$\varphi(t)$に対し

$$\langle \lim_{\omega \to \infty} \sin \omega t \, , \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\lim_{\omega \to \infty} \sin \omega t) \varphi(t) \, dt$$

のような積分を考え，$\varphi(t)$を一定と見なすことができる程度に小さな時間区間$[t_1, t_2]$毎に積分を行うこととすれば，いま正弦波の周波数は十分に高いとしているので時間区間$[t_1, t_2]$での正弦波の平均値は 0 となり，時間区間$[t_1, t_2]$での積分値は 0，$-\infty$から∞までの積分値も結局 0 となるからである．

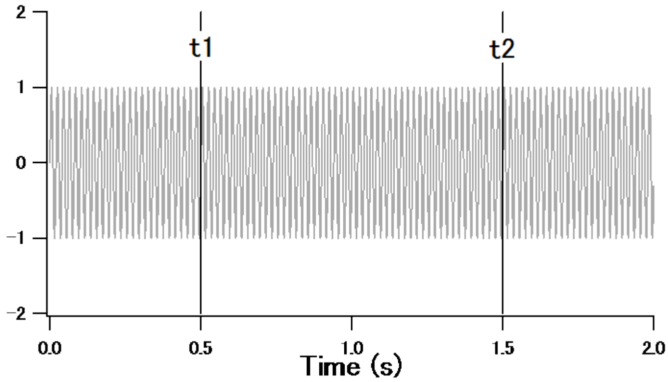

図-1　十分に周波数の高い正弦波

もちろん個々のtに対しては$\lim_{\omega \to \infty} \sin \omega t \neq 0$であるが，超関数として等しいかを議論するときはそのことは不問に付す．このように，超関数という概念は関数に対してより広い心を持って接するためのツールであると言える．

ただし，超関数は式(4)に示すように他の関数と組み合わせて積分することで初めて意味をもつものであるから，超関数を用いるときは，最終的にはそれを他の関数と組み合わせて積分するという前提の下で用いる必要がある．そうでなければ，式(6)のような等式は意味をなさなくなる．超関数が実際に用いられている事例を見れば，上述のような前提の下で用いられていることがわかる．例えば，超関数の一つであるグリーン関数は，断層面上におけるすべりの時空間分布と組み合わせて積分することで，地震動という意味のある情報を与える．

3.　超関数の微分

超関数$f(t)$については個々のtに対し$f(t)$の値が必ずしも定められていないので，通常の関数のように

$$f'(t) = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(f)}{\Delta \mathrm{t}} \tag{7}$$

で微分を定義するわけにはいかない．そこで，超関数の微分は以下のように定義する．

まず，<u>あたかも$f(t)$が通常の関数であるかのように</u>，次のような式変形を行う．

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt = [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \langle f, \varphi' \rangle \tag{8}$$

ここで$\varphi(t)$は急減少関数であるから右辺第 1 項は 0 であり，

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle \tag{9}$$

が得られる．この式は$f(t)$が通常の関数であるときに成立すべき式であるが，この式を超関数の微分の定義として利用する．すなわち，与えられた超関数$f(t)$に対し，式(9)を満たすような$f'(t)$が見つかれば，それを$f(t)$の微分と定義する．

ここで，少し回りくどいが，fとgが超関数として等しいときf'とg'も超関数として等しいことを確認しておく．超関数の微分の定義より

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$$
$$\langle g', \varphi \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle$$

であるが，fとgが超関数として等しいことから，これらの右辺は等しい．したがってこれらの左辺も等しい．このことはf'とg'が超関数として等しいことを意味する．以上のことから，$f = g$のような超関数同士の等式があった場合，両辺の微分をとることで，$f' = g'$という新たな超関数同士の等式を得ることができる．このことは超関数に関する演算を進める上で重要である．

超関数の微分の例として次式で示される単位階段関数の微分を考える．

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

式(9)右辺の$f(t)$に$u(t)$を代入すると

$$-\langle u, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(t)\,dt = -\varphi(\infty) + \varphi(0) = \varphi(0)$$

となる．一方，

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

であるから

$$\langle \delta, \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle \tag{11}$$

これを式(9)と比較すると，$u(t)$の微分は$\delta(t)$であることがわかる．

ところで，前述の通り通常の関数の中にも超関数と見なせるものは多く存在するが，それらについて，通常の関数としての微分の定義と超関数としての微分の定義の間に矛盾はないのだろうか.

まず，全区間にわたり微分可能な関数については，通常通り式(7)により$f'(t)$を定義すれば，式(8)(9)はそのまま成立するので，式(7)により定義した$f'(t)$が超関数としてのfの微分にもなっていると言える．

それでは，式(10)に示した単位階段関数のように，一部に微分不可能な点を含む関数についてはどうだろうか．この場合，微分可能な範囲に含まれる十分に小さな時間区間$[t_1, t_2]$で局所的に値を持つ Ricker Wavelet をφとして考えると，式(7)により定義した$f'(t)$に対し

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\varphi(t)\,dt = [f(t)\varphi(t)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi'(t)\,dt \tag{12}$$

が成立する．一方，超関数としてのfの微分に対しては定義により

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$$

すなわち

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi'(t)\,dt \tag{13}$$

が成立するので，通常の関数としての微分と超関数としての微分は，微分可能な区間においては，局所的な重み付け平均値が等しくなければならない．この場合も含めて，超関数の微分の定義は通常の関数の微分の定義を包含したものとなっていると言える．

なお，超関数の微分に関しては従来通り積の微分の公式が適用可能である（付録参照）．

4.　超関数の微分の定義に隠された意図－不連続な関数にもガウスの発散定理を適用する

一般に微分可能な関数については

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\,dt = f(t_2) - f(t_1) \tag{14}$$

となるが，区間$[t_1, t_2]$の範囲に一箇所でも不連続な点があれば，通常は式(14)は適用できない．しかし，式(14)を不連続な関数にも適用できれば便利である．超関数の微分を式(9)で定義することには，実は式(14)を不連続な関数にも適用するという隠れた意図が込められている．

いま関数$f(t)$は区間$[-\varepsilon, \varepsilon]$を除く全区間で連続で微分可能とする．このとき，微分可能な区間については

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f'(t)\varphi(t)\,dt = f(-\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(t)\varphi'(t)\,dt$$
$$\int_{\varepsilon}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt = -f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt$$

が成立し，これらを超関数の微分の定義式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt$$

から引けば

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f'(t)\varphi(t)\,dt = f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\varphi'(t)\,dt$$

が得られる．ここでφとして区間$[-\varepsilon, \varepsilon]$でほとんど値の変化がないものを選べば

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f'(t)\,dt = f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)$$

が得られる．すなわち，超関数の微分を式(9)で定義することは，式(14)を不連続な関数にも適用することと等価である．

同じことは空間座標の関数についても言える．いま関数$f(\boldsymbol{x})$は原点を中心とする半径εの球V_εを全空間Vから除いた範囲$V - V_\varepsilon$で連続で微分可能とする．このとき微分可能な部分についてはガウスの発散定理より

$$\int_{V-V_\varepsilon} f_{,i}\varphi\,dV = \int_{V-V_\varepsilon} (f\varphi)_{,i}\,dV - \int_{V-V_\varepsilon} f\varphi_{,i}\,dV = -\int_{S_\varepsilon} f\varphi n_i\,dS - \int_{V-V_\varepsilon} f\varphi_{,i}\,dV$$

が成立し（ここにS_εはV_εの表面，n_iは外向き単位法線ベクトルである），これを超関数の微分の定義式

$$\int_V f_{,i}\varphi\,dV = -\int_V f\varphi_{,i}\,dV \tag{15}$$

から引けば

$$\int_{V_\varepsilon} f_{,i}\varphi\,dV = \int_{S_\varepsilon} f\varphi n_i\,dS - \int_{V_\varepsilon} f\varphi_{,i}\,dV$$

が得られる．ここでφとしてV_εでほとんど値の変化がないものを選べば

$$\int_{V_\varepsilon} f_{,i}\, dV = \int_{S_\varepsilon} f n_i\, dS \tag{16}$$

が得られる．すなわち，空間座標の関数について超関数の微分を式(15)で定義することは，ガウスの発散定理を不連続な関数にも適用することと等価である．

この関係を$f = (1/r)_{,i}$に適用すると，

$$\int_{V_\varepsilon} (1/r)_{,ii}\, dV = \int_{S_\varepsilon} (1/r)_{,i} n_i\, dS = \int_{S_\varepsilon} \left(-\frac{1}{r^2}\right) dS = -\frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi \tag{17}$$

となる．一方，原点以外では$(1/r)_{,ii} = 0$であり，これらより，超関数として見た場合，

$$(1/r)_{,ii} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}) \tag{18}$$

である．この式はグリーン関数について論じるとき必ず出てくる式である．

5. 超関数のフーリエ変換・逆変換

微分のときと同様に，あたかも$f(t)$が式(1)の広義積分によりフーリエ変換可能であるかのように，次のような式変形を行う．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt\right) \varphi(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega\right) dt \tag{19}$$

ここで$f(t)$のフーリエ変換を

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

$\varphi(\omega)$のフーリエ変換を

$$\mathcal{F}[\varphi](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega$$

と書くことにすれば（ここではωの関数をフーリエ変換した結果がtの関数となっている），式(19)より

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \tag{20}$$

が得られる．この式は$f(t)$が式(1)の広義積分によりフーリエ変換可能であるときに成立すべき式であるが，この式を超関数のフーリエ変換の定義として利用する．すなわち，与えられた超関数$f(t)$に対し，式(20)を満たすような$\mathcal{F}[f]$が見つかれば，それを$f(t)$のフーリエ変換と定義する．この定義は通常の関数のフーリエ変換の定義を包含したものとなっている．

フーリエ逆変換についても，同様に，まずは$f(t)$が式(2)の広義積分によりフーリエ逆変換可能であるかのように，次のような式変形を行う．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt\right)\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\right)dt \tag{21}$$

ここで$f(t)$のフーリエ逆変換を

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$$

$\varphi(\omega)$のフーリエ逆変換を

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

と書くことにすれば，式(21)より

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle \tag{22}$$

が得られる．この式は$f(t)$が式(2)の広義積分によりフーリエ逆変換可能であるときに成立すべき式であるが，この式を超関数のフーリエ逆変換の定義として利用する．すなわち，与えられた超関数$f(t)$に対し，式(22)を満たすような$\mathcal{F}^{-1}[f]$が見つかれば，それを$f(t)$のフーリエ逆変換と定義する．この定義は通常の関数のフーリエ逆変換の定義を包含したものとなっている．

ここで，少し回りくどいが，fとgが超関数として等しいとき$\mathcal{F}[f]$と$\mathcal{F}[g]$も超関数として等しいことを確認しておく．超関数のフーリエ変換の定義より

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle$$
$$\langle \mathcal{F}[g], \varphi\rangle = \langle g, \mathcal{F}[\varphi]\rangle$$

であるが，fとgが超関数として等しいことから，これらの右辺は等しい．したがってこれらの左辺も等しい．このことは$\mathcal{F}[f]$と$\mathcal{F}[g]$が超関数として等しいことを意味する．以上のことから，$f = g$のような超関数同士の等式があった場合，両辺をフーリエ変換することで，$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$という新たな超関数同士の等式を得ることができる（フーリエ逆変換についても同様）．このことは超関数に関する演算を進める上で重要である．

6.　超関数もフーリエ変換＋逆変換で元に戻る

超関数fにフーリエ変換$\mathcal{F}[f]$が存在するとき，定義により

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle = \langle f, \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\right]\rangle \tag{23}$$

である．ここで$\varphi(t)$は式(1)(2)によりフーリエ変換・逆変換が可能な関数であるから，フーリエ変換はなぜ元に戻るのか？で述べたように，フーリエ変換＋逆変換により元に戻る．すなわち

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\right] = \varphi \tag{24}$$

である．したがって，式(23)(24)より

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle f, \varphi \rangle \tag{25}$$

である．式(25)は

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] = f \tag{26}$$

であることを示している．すなわち，超関数fにフーリエ変換$\mathcal{F}[f]$が存在するとき，$\mathcal{F}[f]$はフーリエ逆変換可能であり，逆変換を行った結果はfとなる．逆変換が存在するという事実は全無限弾性体のグリーン関数の導出にも用いられる（後述）．

7. 超関数の微分のフーリエ変換

通常の関数$f(t)$に対しては微分のフーリエ変換の公式

$$\mathcal{F}[f'] = i\omega\mathcal{F}[f] \tag{27}$$

が成立するが（フーリエ変換の諸定理参照），同様の関係が超関数に対しても成立することを確認しておく．定義に従って計算すると

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[f'], \varphi \rangle = \langle f', \mathcal{F}[\varphi] \rangle = -\langle f, (\mathcal{F}[\varphi])' \rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} i\omega\varphi(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega\varphi(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right)d\omega \\
&= \langle i\omega\mathcal{F}[f], \varphi \rangle
\end{aligned}$$

となるので式(27)は超関数の場合にも成立する．この関係は全無限弾性体のグリーン関数の導出にも用いられる（後述）．

8. 超関数のフーリエ変換・逆変換の例

(1) 1 のフーリエ逆変換は$\delta(t)$

すでに 6. で示したことから，1 のフーリエ逆変換は$\delta(t)$である．実際，定義に従って計算すると

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[1](t), \varphi(t) \rangle = \langle 1, \mathcal{F}^{-1}[\varphi](\omega) \rangle$$

となるが，この右辺は$\mathcal{F}^{-1}[\varphi](\omega)$をフーリエ変換して$t = 0$としたものであるから

$$= \mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\big](0) = \varphi(0) = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle$$

となる．したがって

$$\mathcal{F}^{-1}[1](t) = \delta(t) \tag{28}$$

である．

(2) $e^{i\omega_0 t}$のフーリエ変換は$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

定義にしたがって計算すると

$$\langle\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}](\omega),\varphi(\omega)\rangle=\langle e^{i\omega_0 t},\mathcal{F}[\varphi](t)\rangle$$

となるが，この右辺は$\mathcal{F}[\varphi](t)$をフーリエ逆変換して$\omega=\omega_0$とし2πを乗じたものであるから

$$=2\pi\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[\varphi]\big](\omega_0)=2\pi\varphi(\omega_0)=\langle 2\pi\delta(\omega-\omega_0),\varphi(\omega)\rangle$$

となる．したがって

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}](\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{29}$$

である．

(3)$\cos\omega_0\mathrm{t}$のフーリエ変換は$\pi\{\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\}$

式(29)で$\omega_0=-\omega_0$とおくと

$$\mathcal{F}[e^{-i\omega_0 t}](\omega)=2\pi\delta(\omega+\omega_0) \tag{30}$$

であり，式(29)と式(30)を加えて 2 で割ると

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0\mathrm{t}](\omega)=\pi\{\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\} \tag{31}$$

である．

(4)$\sin\omega_0\mathrm{t}$のフーリエ変換は$-i\pi\{\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\}$

式(29)から式(30)を引いて$2i$で割ると

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0\mathrm{t}](\omega)=-i\pi\{\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\} \tag{32}$$

である．

9. グリーン関数の超関数としての扱い

以上により超関数とのそのフーリエ変換に関する知識が一通り整理できたので，その応用問題として，全無限弾性体のグリーン関数の導出においてグリーン関数を超関数として扱うことがどのような違いを生むのかについて考えてみる．結論としては，蓬田[1)]も指摘しているように，グリーン関数を超関数と考えるか否かによる数式上の違いはない．しかし，論理構成は以下の通りかなり異なるものとなる．

グリーン関数の導出の出発点となるのは Navier の式

$$\rho \ddot{u}_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + f_i \tag{33}$$

であり，この式において外力f_iが単位インパルス力

$$f_i = \delta_{in}\delta(\boldsymbol{x})\delta(t) \tag{34}$$

である場合のu_iをグリーン関数とよび$G_{in}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi})$などと書く．式(33)(34)より

$$\rho \ddot{G}_{in} = \mu G_{in,jj} + (\lambda+\mu) G_{jn,ji} + \delta_{in}\delta(\boldsymbol{x})\delta(t) \tag{35}$$

である．

ここで，グリーン関数を（超関数でなく）一般の関数と考える場合は，それと対応するように，式(34)を「時間的にも空間的にも十分に点に近いけれども厳密には点ではない載荷」と考えておく必要がある．つまり$\delta(t)$や$\delta(\boldsymbol{x})$を一般の関数と考えるということである．そしてそのような載荷を行ったときの弾性体の応答をG_{ij}とする（これはグリーン関数に関する通常の理解であろう）．この立場に立つとき，$\ddot{G}_{ij}$には「加速度」という物理的意味が生じ，$\ddot{G}_{ij}$はニュートンの運動法則を満足すべきであると言えるから，式(35)が言える．そこから先は，全無限弾性体のグリーン関数に書かれているように，式(35)の両辺にフーリエ変換・逆変換を適用することになるが，このときのフーリエ変換・逆変換は一般の関数に関するフーリエ変換・逆変換である．この手順により周波数領域のグリーン関数（次式）を問題なく導くことができる．

$$\hat{G}_{in}(\boldsymbol{x},\omega;\boldsymbol{0}) = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\delta_{in}\frac{e^{-ik_\beta r}}{r} + \frac{1}{{k_\beta}^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_n}\left(\frac{e^{-ik_\beta r} - e^{-ik_\alpha r}}{r}\right)\right] \tag{36}$$

一方，グリーン関数を超関数と考える場合，$\ddot{G}_{ij}$は超関数の微分として定義されることになる．したがって，$\ddot{G}_{ij}$はニュートンの運動法則を満足すべきであると主張することが難しくなり，結果的に，式(35)の成立を主張することが難しくなる．そこで，この場合は少し発想を転換して，超関数に関する等式である式(35)を満足するG_{ij}が仮に見つかったら…と考える．仮にそのようなG_{ij}が見つかった場合，式(35)の両辺を外力の時空間分布と組み合わせて積分することにより式(35)から式(33)に戻れるので，G_{ij}を外力の時空間分布と組み合わせて積分したものが式(33)の解であると主張できる．そこで，超関数に関する等式である式(35)を満足するような超関数G_{ij}を見つけることが課題となる．そのため，全無限弾性体のグリーン関数に書かれているように，式(35)の両辺を変形していくことになる．ここで注意すべきなのは，式(35)以降の式はすべて必要条件にすぎないという点である．つまり「式(35)を満足する超関数G_{ij}が仮にあった場合，そのG_{ij}は以降の式を満足すべきである」ことが言えるだけで，式(35)を満足する超関数G_{ij}が存在することはまだ示されていない．したがって，最終的に得られたG_{ij}が式(35)を満足していることを最後に確認する必要がある．式(35)を満足する超関数G_{ij}を見つける過程では，全無限弾性体のグリーン関数に書かれているように，式(35)の両辺にフーリエ変換・逆変換を適用するが，このときのフーリエ変換・逆変換は超関数に関するフーリエ変換・逆変換である．また，G_{ij}を見つける過程では

・超関数はフーリエ変換＋逆変換で元に戻る

・$\mathcal{F}[f'] = i\omega\mathcal{F}[f]$

といったこれまで導いてきた性質を利用する．最終的にはG_{ij}は式(36)のように求められ，これを式(35)に代入すれば，これが式(35)の解であることが確認できる（このとき式(18)を用いる）．

参考文献

1）蓬田清：演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門，共立出版，2007 年．

付録　積の微分の公式

超関数に対しては微分の定義が新たに与えられたので，積の微分の公式

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{A1}$$

が成り立つことは必ずしも自明でない．そこで，少し回りくどいが，超関数に対しても積の微分の公式が成り立つことを確認しておく．

まず，fとgの一方が超関数でもう一方が通常の関数の場合（例えばgが通常の関数の場合），超関数の微分の定義により

$$\langle (fg)', \varphi \rangle = -\langle fg, \varphi' \rangle = -\langle f, g\varphi' \rangle$$

となるが，$g\varphi'$は通常の関数なので積の微分の公式が使えて

$$= -\langle f, (g\varphi)' - g'\varphi \rangle = -\langle f, (g\varphi)' \rangle + \langle f, g'\varphi \rangle$$

ここで再び超関数の微分の定義を用いると

$$= \langle f', g\varphi \rangle + \langle f, g'\varphi \rangle = \langle f'g, \varphi \rangle + \langle fg', \varphi \rangle = \langle f'g + fg', \varphi \rangle$$

これは，fとgの一方が超関数でもう一方が通常の関数の場合に式(A1)が成立することを示している．

次に，fとgの両方が超関数の場合，超関数の微分の定義により

$$\langle (fg)', \varphi \rangle = -\langle fg, \varphi' \rangle = -\langle f, g\varphi' \rangle$$

となるが，$g\varphi'$は超関数と通常の関数の積であり，これに対して積の微分の公式が使えることは既に確かめたので

$$= -\langle f, (g\varphi)' - g'\varphi \rangle = -\langle f, (g\varphi)' \rangle + \langle f, g'\varphi \rangle$$

ここで再び超関数の微分の定義を用いると

$$= \langle f', g\varphi \rangle + \langle f, g'\varphi \rangle = \langle f'g, \varphi \rangle + \langle fg', \varphi \rangle = \langle f'g + fg', \varphi \rangle$$

これは，fとgの両方が超関数の場合に式(A1)が成立することを示している．