

1. ヒルベルト変換の定義

与えられた時間関数 $f(t)$ をフーリエ変換し、 $\omega > 0$ の範囲では i 、 $\omega < 0$ の範囲では $-i$ を乗じフーリエ逆変換したものを元の時間関数のヒルベルト変換 $f_H(t)$ と定義する。

この定義を見やすい形に示すと次のようになる。なお以下において矢印 (\rightarrow) はフーリエ変換を表す。

<p>ヒルベルト変換の定義</p> $f(t) \rightarrow F(\omega)$ $f_H(t) \rightarrow i \operatorname{sgn}(\omega)F(\omega)$

ここに $F(\omega)$ は $f(t)$ のフーリエ変換である。また $\operatorname{sgn}(\omega)$ は次式で定義される符号関数である。

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega = 0) \\ -1 & (\omega < 0) \end{cases} \quad (1)$$

すなわちヒルベルト変換とは与えられた関数に対しすべての周波数成分の位相を 90° ずらす操作である。位相を 90° ずらすという点では微分や積分と似ているが、微分や積分と異なりフーリエ振幅の変化はない。

なお、以上の定義において $f(t)$ を実関数に限定する必要はない。

2. ヒルベルト変換の性質

ヒルベルト変換には次の性質がある。

(1) $f(t)$ に2回ヒルベルト変換を適用すると $-f(t)$ となる。

ヒルベルト変換を2回適用することは周波数領域では $i \operatorname{sgn}(\omega)$ の自乗すなわち (-1) を乗じることに相当するので明らかである（ただし $F(0) \neq 0$ である関数にヒルベルト変換を2回適用するとピッタリ $-f(t)$ とならず一定値だけ差が生じることに注意が必要である）。■

(2) $f(t)$ が実関数のとき $f_H(t)$ も実関数である。

$f(t)$ が実関数のときフーリエ変換の性質より $F(\omega)$ は $\pm\omega$ で互いに共役である。一方、 $i \operatorname{sgn}(\omega)$ も $\pm\omega$ で互いに共役であるから、 $i \operatorname{sgn}(\omega)F(\omega)$ も $\pm\omega$ で互いに共役である。よってそのフーリエ逆変換である $f_H(t)$ は実関数である。■

(3) 時間領域で実部と虚部が互いにヒルベルト変換の関係にある関数（実関数 $f(t)$ を用いて $f(t) - if_H(t)$ と書ける関数）は周波数領域では因果関数（ $\omega < 0$ で0となる関数）である。

ヒルベルト変換の定義により

$$f(t) \rightarrow F(\omega)$$

$$f_H(t) \rightarrow i \operatorname{sgn}(\omega)F(\omega)$$

であるから

$$f(t) - if_H(t) \rightarrow (1 + \operatorname{sgn}(\omega))F(\omega)$$

であり、フーリエ変換後の関数は $\omega < 0$ で0である。 ■

- (4) 周波数領域で因果な関数 ($\omega \leq 0$ で0となる関数) は時間領域では実部と虚部が互いにヒルベルト変換の関係にある (実関数 $f(t)$ を用いて $f(t) - if_H(t)$ と書ける)。

周波数領域で与えられた因果関数に対し、図-1 に示すように、 $\omega > 0$ では振幅が半分で、「 $\pm\omega$ で互いに共役」なる関係を満足する関数を新たに考える。これを $F(\omega)$ とする。 $F(\omega)$ のフーリエ逆変換を $f(t)$ とすると、フーリエ変換の性質より $f(t)$ は実関数である。この $f(t)$ に対し $f(t) - if_H(t)$ なる時間関数を考えると、このフーリエ変換は(3)の議論より $(1 + \operatorname{sgn}(\omega))F(\omega)$ となり、最初に与えられた因果関数(図-1 の黒線)に一致する。よって最初に与えられた因果関数のフーリエ逆変換は実関数 $f(t)$ を用いて $f(t) - if_H(t)$ と書ける。 ■

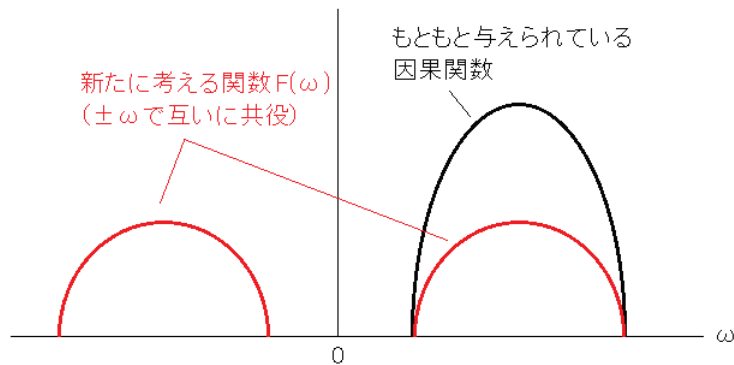


図-1 周波数領域で与えられた因果関数と新たに考える関数 $F(\omega)$

この性質は、むしろ、「時間領域で因果な関数は周波数領域では実部と虚部が互いにヒルベルト変換の関係にある」という形で用いられることが多い。

- (5) $\delta(t)$ のヒルベルト変換は $-1/\pi t$ である。

$\delta(t)$ のフーリエ変換は1である。

一方、 $-1/\pi t$ のフーリエ変換を定義にしたがって計算すると、

$$\mathcal{F}(-1/\pi t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t - i \sin \omega t}{t} dt = \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt \quad (2)$$

ここに \mathcal{F} はフーリエ変換を示す。右辺に含まれる定積分は正弦積分で積分区間の上端が ∞ の場合に相当し、付録に示すように

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) \quad (3)$$

である。式(2)(3)より

$$\mathcal{F}(-1/\pi t) = i \operatorname{sgn}(\omega) \quad (4)$$

である。以上により $\delta(t)$ のヒルベルト変換は $-1/\pi t$ である。■

(6) $f_H(t)$ は次の関係を満たす。

$$f_H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad (5)$$

式(5)の右辺は $f(t)$ と $(-1/\pi t)$ との合積であるから、そのフーリエ変換はそれぞれの関数のフーリエ変換の積すなわち $i \operatorname{sgn}(\omega)F(\omega)$ である。よって式(5)の右辺は $f(t)$ のヒルベルト変換である。■

したがってヒルベルト変換を式(5)で定義しても良いということになる。むしろ多くの教科書ではヒルベルト変換の定義として式(5)を挙げている。しかし、この定義は、ヒルベルト変換が扱いにくいものであるかのような誤解を読者に与えやすいし、「位相を 90° ずらす」というヒルベルト変換の本質を理解する上でもあまり助けにならない。ヒルベルト変換の定義としては、Aki and Richards¹⁾の Box 5.6 のように、フーリエ変換を用いた定義を最初に示す方が親切である。

3. ヒルベルト変換の応用例

近年では設計入力地震動の作成に強震動シミュレーションが多く利用されるようになってきている。強震動シミュレーションの利点は、震源特性・伝播経路特性・サイト特性を考慮して、対象施設の敷地で実際に生じる **realistic** な地震動を生成できることである。特にサイト特性は対象施設の敷地に生じる地震動の周波数特性や経時特性の決定要因として重要であり、これを考慮した設計入力地震動を作成する上で強震動シミュレーション手法は有用である。しかしながら、地震動の他の性質として方向性（＝方向別の振幅特性）もあり、これを適切に与えるという点で、強震動シミュレーション手法は必ずしも有効に機能しない場合がある。また、地震動の卓越方向は震源のメカニズムに依存するので、想定される震源のメカニズムに不確実性がある場合、地震動の卓越方向にも不確実性がある。従って、ある与えられた条件の下で計算された地震動が一方向に顕著な卓越を示すような場合に、それをそのまま設計入力地震動として採用することがためらわれる場合もあるだろう。この点についてなんらかの対策が必要である。

このような背景から、文献²⁾では、スペクトル適合波を対象とした五十嵐他³⁾の研究を参考に、強震動シミュレーションとヒルベルト変換を組み合わせることで、方向性の観点から妥当な設計入力地震動を与える新しい方法を検討しているのので、ここではこれをヒルベルト変換の応用例として紹介する。

地震動が一方向に顕著な卓越を示すのは水平 2 成分の地震波の到来時刻に原因があり、EW 成分のピークと NS 成分のピークが揃って到来する場合に一方向に卓越した揺れとなる。これを解決するため、文献²⁾では次のような手順で水平 2 成分の地震動を作成することを提案している。

- ①水平 2 成分のうちの 1 成分を通常の強震動シミュレーションで作成する。
- ②そのヒルベルト変換を元の成分に直交するもう一方の水平成分とする。

この方法では、水平 2 成分の位相が 90° ずれるため、一方向だけに強く揺れる地震動とはならない。なお、この方法で水平 2 成分の地震動を生成した場合、フーリエ振幅と群遅延時間は全ての方向に対して同一となる。これは次のように示すことができる。いま、強震動シミュレーションで作成した EW 成分のフーリエ変

換を $F(\omega)$ とし、EW成分のヒルベルト変換をNS成分とすることにより、NS成分のフーリエ変換は $iF(\omega)$ 、東から北に角度 ϕ だけ回転した方向の地震動のフーリエ変換は $F(\omega) \cos \phi + iF(\omega) \sin \phi$ である。これは $F(\omega)(\cos \phi + i \sin \phi) = F(\omega)e^{i\phi}$ のように変形できるので、両辺の絶対値をとれば、 ϕ 方向の地震動のフーリエ振幅は ϕ によらず $|F(\omega)|$ となることがわかる。また、 ϕ 方向の地震動のフーリエ位相を $\theta'(\omega)$ 、EW成分のフーリエ位相を $\theta(\omega)$ とすると $\theta'(\omega) = \theta(\omega) - \phi$ であり、両辺を ω で微分すれば、地震動の群遅延時間が ϕ に依存しないことがわかる。

文献²⁾では2005年7月23日千葉県中部の地震を例に検討を行っている。図-2は同地震を対象に疑似点震源モデル⁴⁾を用いてK-NET千葉(CHB009)における地震動のフーリエスペクトルを計算した結果である。ここでは平均的なラディエーション係数を用い、また経験的サイト増幅特性⁵⁾を用いている。図-2では1-2Hzの卓越が見られることなど地震動の周波数特性が強震動シミュレーションにより適切に再現されている。図-3は同じく速度波形の計算を行った結果であるが、経時特性の観点からも強震動シミュレーションの結果は妥当であると考えられる。

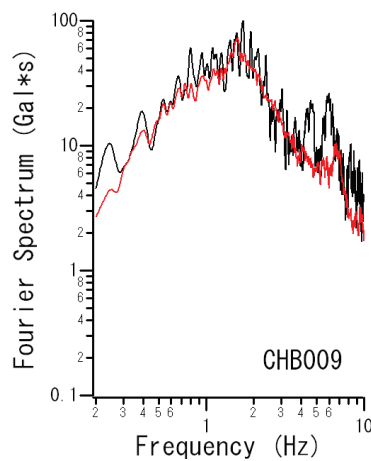


図-2 フーリエスペクトル（水平2成分の自乗和平方根）の観測結果（黒）と強震動シミュレーションによる計算結果（赤）

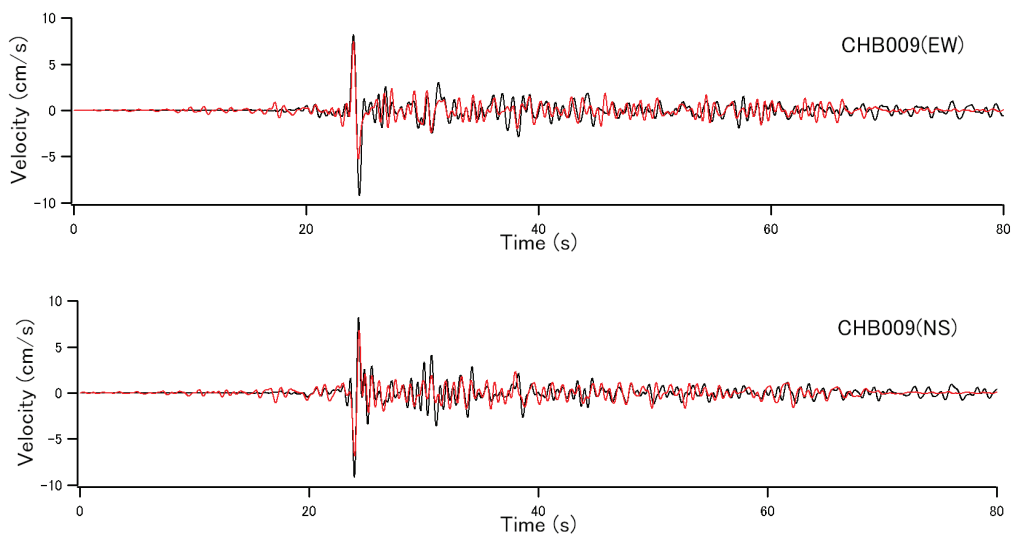


図-3 速度波形（0.2-2Hz）の観測結果（黒）と強震動シミュレーションによる計算結果（赤）

つづいて強震動シミュレーションとヒルベルト変換を組み合わせた場合の結果を示す。図-4は強震動シミュレーションとヒルベルト変換の組み合わせによる速度波形と強震動シミュレーション結果そのものの比較

である。上段は EW 成分からヒルベルト変換で求めた NS 成分と元の NS 成分との比較，下段は NS 成分からヒルベルト変換で求めた EW 成分と元の EW 成分との比較である。強震動シミュレーションとヒルベルト変換の組み合わせによる波形は，経時特性等の観点からも十分に realistic な波形となっており，この点では強震動シミュレーション結果に対して特に遜色はないものと考えられる。図-5 は強震動シミュレーションとヒルベルト変換の組み合わせによる速度軌跡と強震動シミュレーションのみによる速度軌跡の比較である。意図した通り，強震動シミュレーションとヒルベルト変換の組み合わせによる方法では，方向別の振幅の変動が小さい地震動が得られている。

このように，強震動シミュレーションとヒルベルト変換の組み合わせによる方法では，realistic な経時特性等を保ったまま，方向別の振幅の変動が小さい地震動を得ることができる。

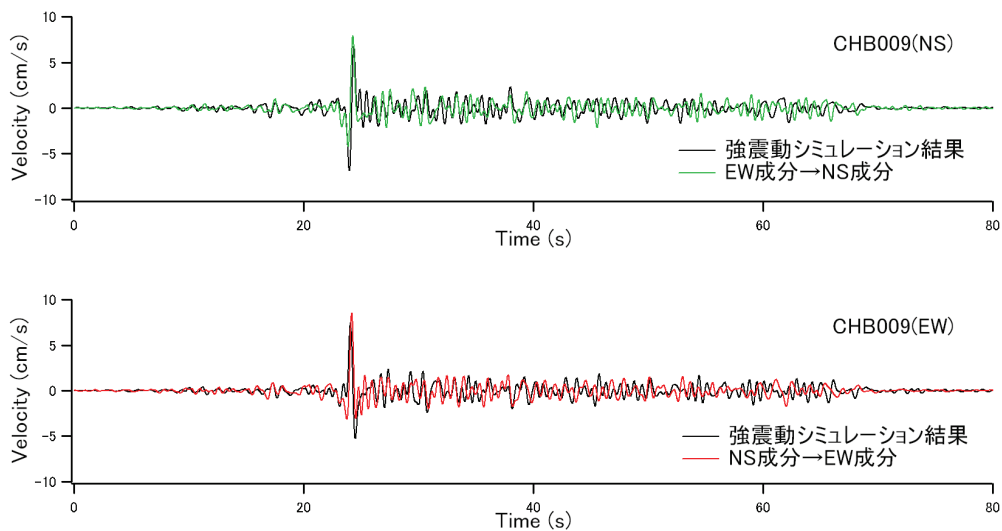


図-4 強震動シミュレーションとヒルベルト変換の組み合わせによる速度波形 (0.2-2Hz) と強震動シミュレーション結果そのものの比較。上段は EW 成分からヒルベルト変換で求めた NS 成分と元の NS 成分との比較，下段は NS 成分からヒルベルト変換で求めた EW 成分と元の EW 成分との比較。上段はヒルベルト変換後の波形の正負を反転させて示している。

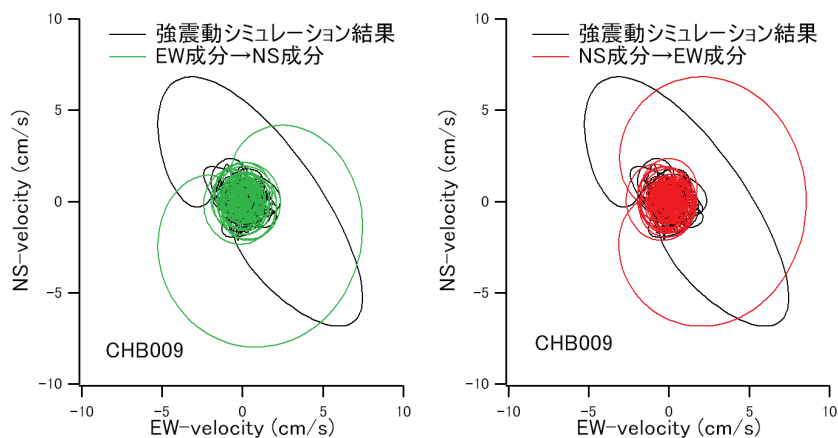


図-5 強震動シミュレーションとヒルベルト変換の組み合わせによる速度軌跡 (0.2-2Hz) と強震動シミュレーションのみによる速度軌跡の比較

謝辞 防災科学技術研究所の強震記録を利用しています。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.
- 2) 野津厚：強震動シミュレーションとヒルベルト変換を併用した新しい設計入力地震動作成法の提案，日本建築学会 2015 年度大会（関東）学術講演梗概集，2015.
- 3) 五十嵐晃・井上和真・古川愛子・宇野裕恵・松田宏：標準波一相補直交成分波の組合せによる橋梁の耐震照査用水平 2 方向入力地震動，土木学会論文集 A1（構造・地震工学），Vol.68，pp.I_458-I_469，2012.
- 4) 長坂陽介・野津厚：疑似点震源モデルのスラブ内地震への適用性に関する検討—2005 年千葉県中部の地震を例に—，港湾空港技術研究所資料，No.1323，2016.
- 5) 野津厚・長尾毅：スペクトルインバージョンに基づく全国の港湾等の強震観測地点におけるサイト増幅特性，港湾空港技術研究所資料，No.1112，2005.

付録

本文の式(2)右辺に登場する定積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt$$

は正弦積分で積分区間の上端が ∞ の場合に相当する。この計算は簡単そうに見えて意外に難しい。これには複数の方法があるが、著者の知る限り文献¹⁾の方法がもっとも簡単なので、ここではこれに沿って説明する。

まず $\lambda \geq 0$ を満たす λ に対して

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} e^{-\lambda t} dt \quad (\text{A1})$$

とおく。両辺を λ で微分すると

$$f'(\lambda) = - \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-\lambda t} dt \quad (\text{A2})$$

であるが、この右辺は計算でき

$$f'(\lambda) = \left[\frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} (\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t) e^{-\lambda t} \right]_{t=0}^{t=\infty} = - \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2} \quad (\text{A3})$$

ここで

$$f(\lambda) - f(0) = \int_0^{\lambda} f'(\lambda') d\lambda' = - \text{Tan}^{-1} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right) \quad (\text{A4})$$

である (ただし $\omega \neq 0$)。これと式(A1)より

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt - \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} e^{-\lambda t} dt = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right) \quad (\text{A5})$$

ここで $\lambda \rightarrow \infty$ の極限をとると、右辺は $\omega > 0$ のとき $\pi/2$ 、 $\omega < 0$ のとき $-\pi/2$ に収束するため

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \quad (\text{A6})$$

である。この式は $\omega = 0$ の場合も成立する。

参考文献

- 1) ちくわこんぶの数学メモ, <http://tikuwakonbu.hatenablog.com/entry/2017/02/15/155529>.