2019/1/25

群速度と群遅延時間

野津

群速度と群遅延時間はそれぞれ地震工学の異なる場面に登場するため（前者は主に地下構造探査，後者は主に模擬地震波作成でよく耳にする言葉である），両者の間に密接な関係があることは案外知られていない．

いま仮に d=0km において**図-1** に示すような波$f(t)$が観測されたとする．そして，この波に含まれる各々の周波数成分は，定められた位相速度$c(\omega)$で水平方向に伝播すると仮定する．このとき，少し離れた地点でどのような波が観測されるかを考える．なお，この例のように各成分が異なる速度で伝播する波を「分散性を有する波」という．また，**図-1** に示す波は 1Hz 前後の成分を多く含むように作成してある．その理由は後述する．

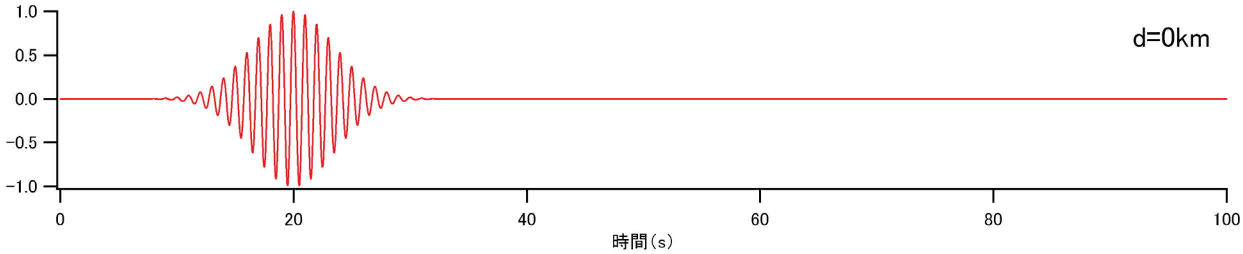

図-1　検討対象とする波

$f(t)$のフーリエ変換を$F(\omega)$とし，伝播方向に距離dだけ離れた地点での波$f'(t)$のフーリエ変換を$F'(\omega)$とすると，

$$F'(\omega) = F(\omega)\, e^{-i\omega d/c(\omega)} \tag{1}$$

である．ここで，波数の水平成分を次式により定義する．

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} \tag{2}$$

これを式(1)に代入すると

$$F'(\omega) = F(\omega)\, e^{-ikd} \tag{3}$$

ここで，$F(\omega)$を振幅と位相に分けて記述すると

$$F(\omega) = |F(\omega)|\, e^{-i\theta} \tag{4}$$

これと式(3)より，

$$F'(\omega) = |F(\omega)|\, e^{-i(\theta+kd)} \tag{5}$$

である．ここで，$f(t)$の群遅延時間を$t_{gr}(\omega)$，$f'(t)$の群遅延時間を$t_{gr}'(\omega)$とすると，群遅延時間の定義により

$$t_{gr}'(\omega) = \frac{d}{d\omega}(\theta + kd) = \frac{d\theta}{d\omega} + d\frac{dk}{d\omega} = t_{gr}(\omega) + d\frac{dk}{d\omega} \tag{6}$$

ここで，

$$U = \frac{d\omega}{dk} \tag{7}$$

と置くと

$$t_{gr}'(\omega) = t_{gr}(\omega) + \frac{d}{U} \tag{8}$$

ここで，群遅延時間には波形の重心としての意味があることを想起すると，Uは波形の重心が移動する速度を表すことがわかる．このUを群速度という．

整理すると

$$位相速度：c = \frac{\omega}{k}$$

$$群速度：U = \frac{d\omega}{dk}$$

である．特別な場合として$c(\omega)$がωに依らない場合は$U = c$となる．

例として**表-1** に示すような地下構造に対してラブ波基本モードの位相速度と群速度を計算すると**図-2** のようになる．この例では，1Hz 前後では群速度は位相速度よりかなり遅いので，**図-1** のように 1Hz 前後の成分を多く含む波に対しては，重心の移動速度は位相速度よりもかなり遅いはずである．

そこで，実際にこのことを数値実験で確かめてみる．いま，**図-1** に示す波形の各々の周波数成分が**図-2** の位相速度で伝播すると仮定し，距離dだけ離れた地点で観測されるであろう波形を計算する．具体的には，**図-1** の波形をフーリエ変換し，伝播の影響を考慮するために$e^{-i\omega d/c(\omega)}$を乗じフーリエ逆変換するだけでよい．

表-1　例として考えた地下構造

層厚（m）	S 波速度（m/s）
5	250
12	410
158	800
125	1200
310	2600
∞	3400

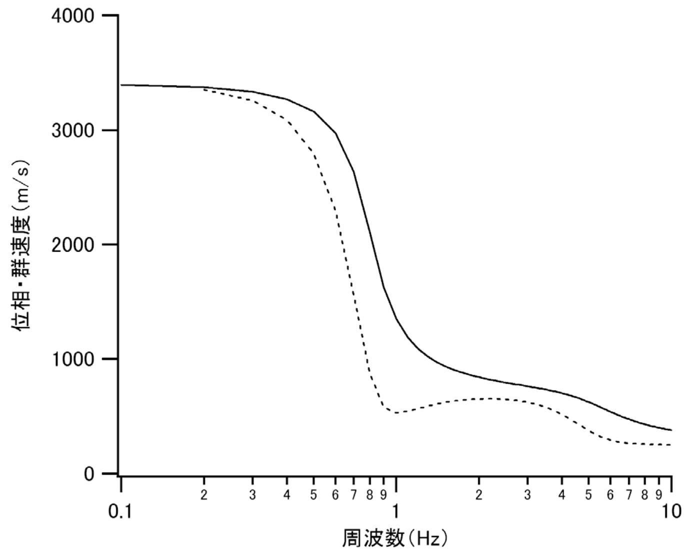

図-2　**表-1** の地下構造に対して計算したラブ波基本モードの位相速度（実線）と群速度（破線）

実際に d=1km～10km の範囲で観測されるであろう波をプロットすると**図-3** の赤線のようになる．比較のため，波が分散性を有せず，(**図-1** に示す波の卓越周波数である）1Hz に対応する位相速度ですべての周波数成分が伝播する場合の結果を**図-3** に点線で示す．この結果から，分散性のない場合とある場合で，波の山谷にズレはないことがわかる．つまり，山谷の伝わる速度に違いはない．これは位相速度が両者でほぼ等しいからである．しかし，波の重心に関しては，分散性のある場合は無い場合と比較して到来時刻が大幅に遅くなっている．さらに伝播が進んだ状態である**図-3** の d=20km の図では，分散性の影響で波の形は大きく崩れている．

このように，波形の重心が移動する速度と群速度が対応していることが数値実験からも確認できる．

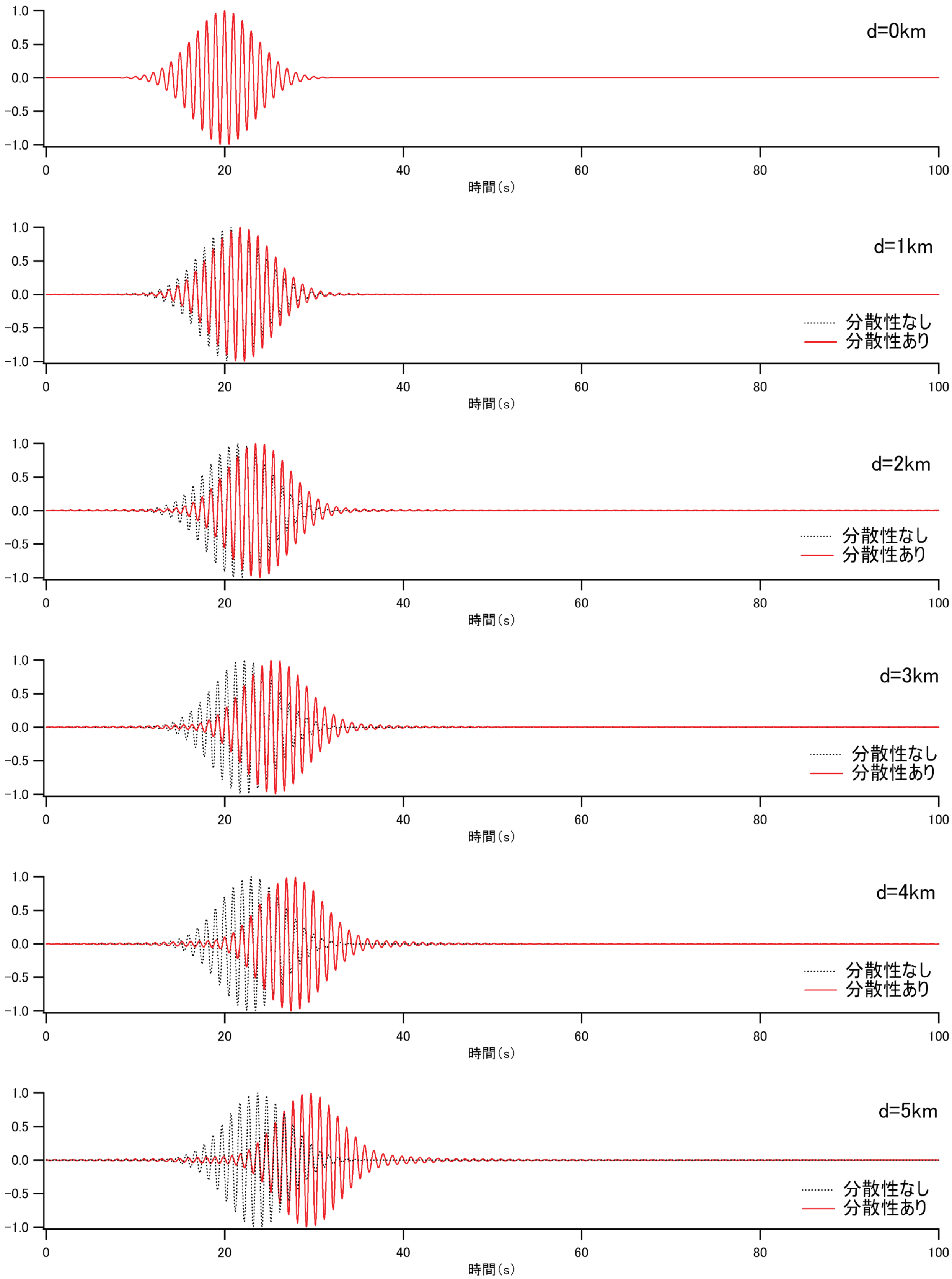

図-3　図-1 に示した波が伝播する様子. 赤は分散性を有する場合. 点線は仮に分散性を有しないとした場合.

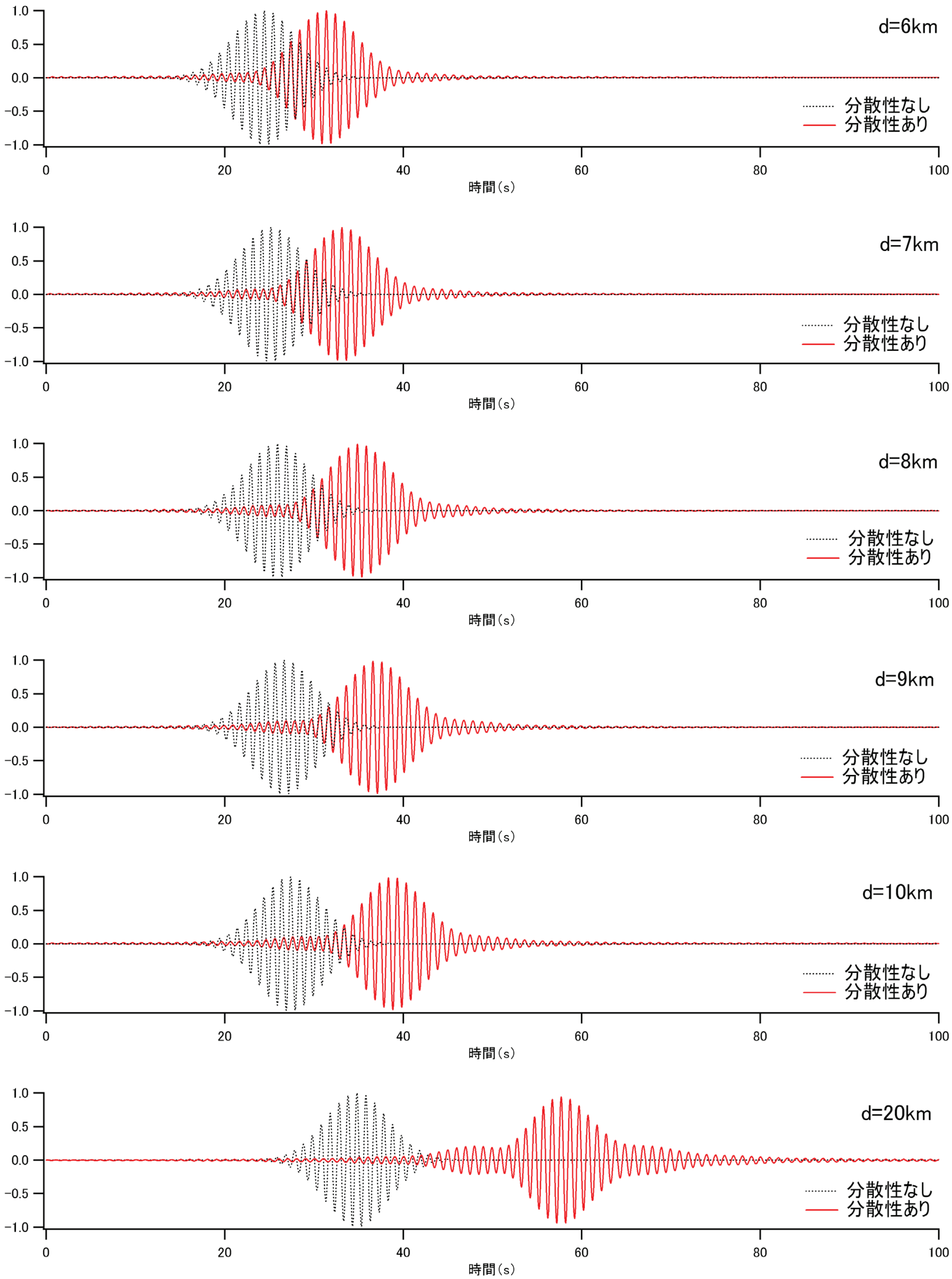
d=6km
d=7km
d=8km
d=9km
d=10km
d=20km
分散性なし
分散性あり
時間(s)
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
20
40
60
80
100

図-3 （つづき）