

## 水平成層地盤におけるせん断食い違い型点震源による地震動

野津

## 1. はじめに

水平成層地盤の任意の位置に単位インパルス力（図-1 左）を作用させた場合の波動場，すなわち水平成層地盤のグリーン関数を計算する方法については[水平成層地盤のグリーン関数](#)で説明した．ここではその続きとしてせん断食い違い型点震源による波動場を計算する方法を説明する．[表現定理・地震モーメント・ダブルカップル](#)で説明したように，せん断食い違い型点震源による波動場はダブルカップル（図-1 右）による波動場と等価である．したがって，グリーン関数を数値的に微分する方法でもせん断食い違い型点震源による波動場を計算できるが，ここではグリーン関数を解析的に微分する方法について説明する．

なお，以下の説明では，[水平成層地盤のグリーン関数](#)に関する説明と同様，フーリエ変換対としては[周波数に虚部を含む場合のフーリエ変換対](#)を用い，媒質の減衰は弾性波速度に虚部を導入することにより考慮する．

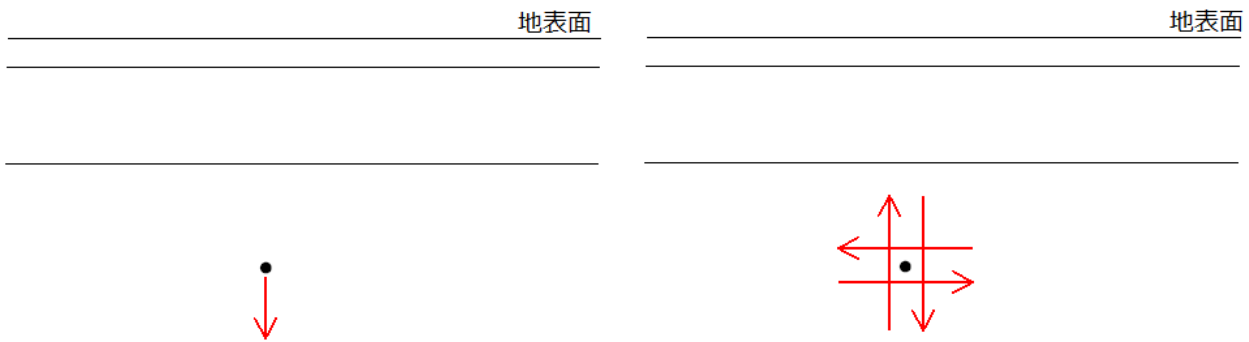


図-1 単位インパルス力とダブルカップル

## 2. せん断食い違い型点震源による波動場とグリーン関数の関係

以下においては慣例に従い $x$ 軸を北向きに， $y$ 軸を東向きに， $z$ 軸を鉛直下向きにとる．また，[水平成層地盤のグリーン関数](#)に関する説明のときと同様の円筒座標系（図-2）を導入する．

[表現定理・地震モーメント・ダブルカップル](#)の式(26)より，せん断食い違い型点震源による波動場とグリーン関数の関係は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
 u_r(\mathbf{x}, t) = & M_{zz}(t) * \frac{\partial G_{rz}}{\partial z_s} + M_{xz}(t) * \left( \frac{\partial G_{rx}}{\partial z_s} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial x_s} \right) + M_{yz}(t) * \left( \frac{\partial G_{ry}}{\partial z_s} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial y_s} \right) \\
 & + M_{xx}(t) * \frac{\partial G_{rx}}{\partial x_s} + M_{yy}(t) * \frac{\partial G_{ry}}{\partial y_s} + M_{xy}(t) * \left( \frac{\partial G_{rx}}{\partial y_s} + \frac{\partial G_{ry}}{\partial x_s} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

ここに $u_r(\mathbf{x}, t)$ はせん断食い違い型点震源による変位のラディアル成分である． $G_{rx}$ ,  $G_{ry}$ ,  $G_{rz}$ はグリーン関数のラディアル成分であり，添え字の $x$ ,  $y$ ,  $z$ は载荷方向を示す． $\partial/\partial x_s$ ,  $\partial/\partial y_s$ ,  $\partial/\partial z_s$ は载荷点の座標に関する微分を示す． $u_r(\mathbf{x}, t)$ ,  $G_{rx}$ ,  $G_{ry}$ ,  $G_{rz}$ における $r$ を $\theta$ に置き換えればトランスバース成分に関する式に， $z$ に

置き換えれば鉛直成分に関する式になる． $M_{xx}(t)$ 等はモーメントテンソルの各成分であり，次式で与えられる（[表現定理・地震モーメント・ダブルカップル](#)参照）．

$$\begin{aligned}
 M_{xx}(t) &= -M(t)(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi + \sin 2\delta \sin \lambda \sin^2 \phi) \\
 M_{xy}(t) &= M(t) \left( \sin \delta \cos \lambda \cos 2\phi + \frac{1}{2} \sin 2\delta \sin \lambda \sin 2\phi \right) \\
 M_{xz}(t) &= -M(t)(\cos \delta \cos \lambda \cos \phi + \cos 2\delta \sin \lambda \sin \phi) \\
 M_{yy}(t) &= M(t)(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi - \sin 2\delta \sin \lambda \cos^2 \phi) \\
 M_{yz}(t) &= -M(t)(\cos \delta \cos \lambda \sin \phi - \cos 2\delta \sin \lambda \cos \phi) \\
 M_{zz}(t) &= M(t) \sin 2\delta \sin \lambda
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

ここに $\phi$ は走向， $\delta$ は傾斜， $\lambda$ はすべり角である．式(1)において $\partial G_{rz}/\partial z_s$ は $z$ 方向にわずかに離れた2点に互いに逆向きで大きさの等しい $z$ 方向のインパルス力を作用させた場合の波動場を示している．このような荷重は vector dipole と呼ばれる． $\partial G_{rx}/\partial x_s$ と $\partial G_{ry}/\partial y_s$ も同様である． $(\partial G_{rx}/\partial z_s + \partial G_{rz}/\partial x_s)$ は $x-z$ 平面内の， $(\partial G_{ry}/\partial z_s + \partial G_{rz}/\partial y_s)$ は $y-z$ 平面内の， $(\partial G_{rx}/\partial y_s + \partial G_{ry}/\partial x_s)$ は $x-y$ 平面内のダブルカップルによる波動場を表す．式(1)の関係は周波数領域では次式となる．

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_r(x, \omega) &= \hat{M}_{zz}(\omega) \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial z_s} + \hat{M}_{xz}(\omega) \left( \frac{\partial \hat{G}_{rx}}{\partial z_s} + \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial x_s} \right) + \hat{M}_{yz}(\omega) \left( \frac{\partial \hat{G}_{ry}}{\partial z_s} + \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial y_s} \right) \\
 &\quad + \hat{M}_{xx}(\omega) \frac{\partial \hat{G}_{rx}}{\partial x_s} + \hat{M}_{yy}(\omega) \frac{\partial \hat{G}_{ry}}{\partial y_s} + \hat{M}_{xy}(\omega) \left( \frac{\partial \hat{G}_{rx}}{\partial y_s} + \frac{\partial \hat{G}_{ry}}{\partial x_s} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

以下においては，vector dipole およびダブルカップルによる波動場を解析的に求める方法を説明する．

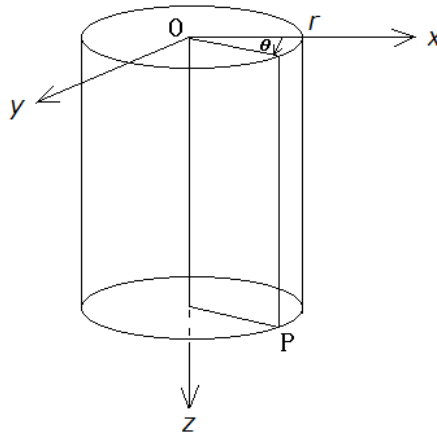


図-2 円筒座標系（任意の点 P の座標を $(r, \theta, z)$ の組み合わせで表示）

### 3. 透過・反射の影響を受ける以前の vector dipole およびダブルカップルによる波動場

以下においては円筒座標系の原点に載荷点があるものとして議論を進める．また，全体を通じ，載荷点の座標に関する微分と観測点の座標に関する微分では符号が反対になる性質を利用する．なお，以下において

は、例えば $\hat{G}_{rz}$ の $z_s$ に関する微分を $\hat{G}_{rz,z}$ と書く。添え字の最後の $z$ は本来は $z_s$ と書くべきであるが、煩雑なノテーションを避けるため、ここでは $z$ と書く。

### 3.1 $\hat{G}_{rz,z}$ , $\hat{G}_{zz,z}$ について

まず、載荷方向が鉛直方向であるグリーン関数を載荷点の鉛直座標に関して微分する場合を考える。[水平成層地盤のグリーン関数](#)の式(18)より

$$\hat{G}_{rz} = \frac{-1}{4L\rho\omega^2} \text{sgn}(z) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-i\nu_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) J_1(k_n r) \quad (4)$$

である。ここに $L$ は離散化波数法に特有のパラメタであり、仮想的な同心円状の震源の最小半径 $r$ である（その意義については[水平成層地盤のグリーン関数](#)参照）。 $\rho$ は媒質の密度、 $\text{sgn}(z)$ は符号関数で $z$ が正のとき1、 $z$ が負のとき-1の値をとる。 $\varepsilon_n$ は次式により定義される。

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$k_n$ は離散化された波数であり次式により定義される。

$$k_n = 2\pi n/L \quad (6)$$

$\nu_n$ ,  $\gamma_n$ はそれぞれP波、S波の波数の鉛直成分であり次式で定義される。

$$\nu_n = \sqrt{k_\alpha^2 - k_n^2}, \quad \text{Im}(\nu_n) < 0 \quad (7)$$

$$\gamma_n = \sqrt{k_\beta^2 - k_n^2}, \quad \text{Im}(\gamma_n) < 0 \quad (8)$$

$$k_\alpha = \omega/\alpha \quad (9)$$

$$k_\beta = \omega/\beta \quad (10)$$

$J_1$ は第1種1次のベッセル関数である。式(4)の両辺を $z_s$ で微分すると次式を得る。

$$\hat{G}_{rz,z} = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (\nu_n e^{-i\nu_n|z|} - \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|}) J_1(k_n r) \quad (11)$$

$z$ が正の場合と負の場合で指数関数を微分したときの符号が逆になるので $\text{sgn}(z)$ は消える。また、載荷点の座標に関する微分なので符号を反転させている。

一方、[水平成層地盤のグリーン関数](#)の式(19)より

$$\hat{G}_{zz} = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n \left( \nu_n e^{-i\nu_n|z|} + \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \right) J_0(k_n r) \quad (12)$$

である。ここに $J_0$ は第1種0次のベッセル関数である。式(12)の両辺を $z_s$ で微分すると次式を得る（載荷点の座標に関する微分なので符号を反転させている）。

$$\hat{G}_{zz,z} = \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n (v_n^2 e^{-iv_n|z|} + k_n^2 e^{-i\gamma_n|z|}) J_0(k_n r) \quad (13)$$

### 3.2 $\hat{G}_{rx,z}$ , $\hat{G}_{\theta x,z}$ , $\hat{G}_{zx,z}$ , $\hat{G}_{ry,z}$ , $\hat{G}_{\theta y,z}$ , $\hat{G}_{zy,z}$ について

次に、載荷方向が水平方向であるグリーン関数を載荷点の鉛直座標に関して微分する場合を考える。  
[水平成層地盤のグリーン関数](#)の式(24)(25)(26)より

$$\hat{G}_{rx} \text{ or } \hat{G}_{ry} = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} J_1(k_n r) + \frac{k_\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right\} \quad (14)$$

$$\hat{G}_{\theta x} \text{ or } \hat{G}_{\theta y} = \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{1}{r} J_1(k_n r) + \frac{k_\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \right\} \quad (15)$$

$$\hat{G}_{zx} \text{ or } \hat{G}_{zy} = -\frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-iv_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) J_1(k_n r) \quad (16)$$

である ( $\theta_0$ は載荷方向を表しており、左辺が $\hat{G}_{rx}$ ,  $\hat{G}_{\theta x}$ ,  $\hat{G}_{zx}$ のとき $\theta_0 = 0$ , 左辺が $\hat{G}_{ry}$ ,  $\hat{G}_{\theta y}$ ,  $\hat{G}_{zy}$ のとき $\theta_0 = \pi/2$ ).  
式(14)(15)(16)の両辺を $z_s$ で微分すると次式を得る (載荷点の座標に関する微分なので符号を反転させている).

$$\hat{G}_{rx,z} \text{ or } \hat{G}_{ry,z} = \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ (k_n^2 e^{-iv_n|z|} + \gamma_n^2 e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{d}{dr} J_1(k_n r) + k_\beta^2 e^{-i\gamma_n|z|} \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right\} \quad (17)$$

$$\hat{G}_{\theta x,z} \text{ or } \hat{G}_{\theta y,z} = -\frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ (k_n^2 e^{-iv_n|z|} + \gamma_n^2 e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{1}{r} J_1(k_n r) + k_\beta^2 e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \right\} \quad (18)$$

$$\hat{G}_{zx,z} \text{ or } \hat{G}_{zy,z} = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (v_n e^{-iv_n|z|} - \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|}) J_1(k_n r) \quad (19)$$

### 3.3 $\hat{G}_{rz,x}$ , $\hat{G}_{\theta z,x}$ , $\hat{G}_{zz,x}$ , $\hat{G}_{rz,y}$ , $\hat{G}_{\theta z,y}$ , $\hat{G}_{zz,y}$ について

つづいて、載荷方向が鉛直方向であるグリーン関数を載荷点の水平座標に関して微分する場合を考える。  
[円筒座標系における Navier の式](#)で説明したように、グリーン関数の $r$ 成分や $\theta$ 成分を $x$ または $y$ で偏微分する際には少し注意が必要であり、ある点  $P(r_p, \theta_p, z_p)$  において偏微分を計算しようとするとき、[図-3](#)に示すように角度の固定された $\xi$ 座標と $\eta$ 座標をとり、グリーン関数の $\xi$ 成分や $\eta$ 成分の偏微分を計算する必要がある。

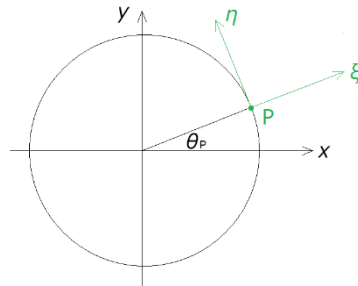


図-3  $\xi$ 座標と $\eta$ 座標

グリーン関数の $\xi$ 成分や $\eta$ 成分と $r$ 成分や $\theta$ 成分との関係は次式で与えられる。



$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial r} \sin(\theta - \theta_p) + \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial r} \cos(\theta - \theta_p) \right) \sin \theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial \theta} \sin(\theta - \theta_p) + \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial \theta} \cos(\theta - \theta_p) + \hat{G}_{rz} \cos(\theta - \theta_p) - \hat{G}_{\theta z} \sin(\theta - \theta_p) \right) \cos \theta
\end{aligned}$$

であり,  $\theta \rightarrow \theta_p$  の極限をとると

$$\frac{\partial \hat{G}_{\xi z}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial r} \cos \theta_p - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial \theta} - \hat{G}_{\theta z} \right) \sin \theta_p \quad (22)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{\xi z}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial r} \sin \theta_p + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial \theta} - \hat{G}_{\theta z} \right) \cos \theta_p \quad (23)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{\eta z}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial r} \cos \theta_p - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial \theta} + \hat{G}_{rz} \right) \sin \theta_p \quad (24)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{\eta z}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial r} \sin \theta_p + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial \theta} + \hat{G}_{rz} \right) \cos \theta_p \quad (25)$$

となる. なお, 同様の式はグリーン関数の載荷方向をz方向からx方向またはy方向に変更した場合にも成立する.

式(22)(23)(24)(25)より

$$\frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial \theta} - \hat{G}_{\theta z} \right) \sin \theta \quad (26)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{rz}}{\partial \theta} - \hat{G}_{\theta z} \right) \cos \theta \quad (27)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial \theta} + \hat{G}_{rz} \right) \sin \theta \quad (28)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{\theta z}}{\partial \theta} + \hat{G}_{rz} \right) \cos \theta \quad (29)$$

であり, これらに式(4)と  $\hat{G}_{\theta z} = 0$  を代入すると

$$\hat{G}_{rz,x} = \frac{1}{4L\rho\omega^2} \text{sgn}(z) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-i\nu_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \cos \theta \quad (30)$$

$$\hat{G}_{rz,y} = \frac{1}{4L\rho\omega^2} \text{sgn}(z) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-i\nu_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \sin \theta \quad (31)$$

$$\hat{G}_{\theta z,x} = -\frac{1}{4L\rho\omega^2} \text{sgn}(z) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-i\nu_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{1}{r} J_1(k_n r) \sin \theta \quad (32)$$

$$\hat{G}_{\theta z,y} = \frac{1}{4L\rho\omega^2} \text{sgn}(z) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-i\nu_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{1}{r} J_1(k_n r) \cos \theta \quad (33)$$

が得られる (載荷点の座標に関する微分なので符号を反転させている).

一方, 式(12)より

$$\hat{G}_{zz,x} = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 \left( \nu_n e^{-i\nu_n|z|} + \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \right) J_1(k_n r) \cos \theta \quad (34)$$

$$\hat{G}_{zz,y} = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 \left( v_n e^{-iv_n|z|} + \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \right) J_1(k_n r) \sin \theta \quad (35)$$

である（載荷点の座標に関する微分なので符号を反転させている）。

### 3.4 $\hat{G}_{rx,x}$ , $\hat{G}_{\theta x,x}$ , $\hat{G}_{zx,x}$ , $\hat{G}_{rx,y}$ , $\hat{G}_{\theta x,y}$ , $\hat{G}_{zx,y}$ , $\hat{G}_{ry,x}$ , $\hat{G}_{\theta y,x}$ , $\hat{G}_{zy,x}$ , $\hat{G}_{ry,y}$ , $\hat{G}_{\theta y,y}$ , $\hat{G}_{zy,y}$ について

最後に、載荷方向が水平方向であるグリーン関数を載荷点の水平座標に関して微分する場合を考える。式(22)(23)(24)(25)において載荷方向をz方向からx方向またはy方向に変更した式より

$$\frac{\partial \hat{G}_{rx}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{rx}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{rx}}{\partial \theta} - \hat{G}_{\theta x} \right) \sin \theta \quad (36)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{rx}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{rx}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{rx}}{\partial \theta} - \hat{G}_{\theta x} \right) \cos \theta \quad (37)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{\theta x}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{\theta x}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{\theta x}}{\partial \theta} + \hat{G}_{rx} \right) \sin \theta \quad (38)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{\theta x}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{\theta x}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{\theta x}}{\partial \theta} + \hat{G}_{rx} \right) \cos \theta \quad (39)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{ry}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{ry}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{ry}}{\partial \theta} - \hat{G}_{\theta y} \right) \sin \theta \quad (40)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{ry}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{ry}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{ry}}{\partial \theta} - \hat{G}_{\theta y} \right) \cos \theta \quad (41)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{\theta y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{\theta y}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{\theta y}}{\partial \theta} + \hat{G}_{ry} \right) \sin \theta \quad (42)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{\theta y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{\theta y}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{G}_{\theta y}}{\partial \theta} + \hat{G}_{ry} \right) \cos \theta \quad (43)$$

であり、これらに式(14)(15)を代入し、載荷点の座標に関する微分であることを考慮し符号を反転させると

$\hat{G}_{rx,x}$  or  $\hat{G}_{ry,x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) - \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \\ &+ \frac{i}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) + \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

$\hat{G}_{rx,y}$  or  $\hat{G}_{ry,y}$

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) - \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \\ &+ \frac{i}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) + \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \quad (45) \end{aligned}$$

$\hat{G}_{\theta x,x}$  or  $\hat{G}_{\theta y,x}$

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) + \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) \right\} \\ &- \frac{i}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) - \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \quad (46) \end{aligned}$$

$\hat{G}_{\theta x,y}$  or  $\hat{G}_{\theta y,y}$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) + \frac{k_\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) \right\} \\
&+ \frac{i}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) - \frac{k_\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \quad (47)
\end{aligned}$$

が得られる（載荷方向が $x$ 方向のとき $\theta_0 = 0$ ，載荷方向が $y$ 方向のとき $\theta_0 = \pi/2$ ）。

一方，

$$\frac{\partial \hat{G}_{zx}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{zx}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{G}_{zx}}{\partial \theta} \sin \theta \quad (48)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{zx}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{G}_{zx}}{\partial \theta} \cos \theta \quad (49)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{zy}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{G}_{zy}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{G}_{zy}}{\partial \theta} \sin \theta \quad (50)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_{zy}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{G}_{zy}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{G}_{zy}}{\partial \theta} \cos \theta \quad (51)$$

であり，これらに式(16)を代入し，載荷点の座標に関する微分であることを考慮し符号を反転させると

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{zx,x} \text{ or } \hat{G}_{zy,x} &= \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-iv_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{1}{r} J_1(k_n r) \\
&+ \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-iv_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \quad (52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{zx,y} \text{ or } \hat{G}_{zy,y} &= -\frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-iv_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{1}{r} J_1(k_n r) \\
&+ \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-iv_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \quad (53)
\end{aligned}$$

が得られる（載荷方向が $x$ 方向のとき $\theta_0 = 0$ ，載荷方向が $y$ 方向のとき $\theta_0 = \pi/2$ ）。

### 3.5 結果の整理

3.1～3.4の結果を式(3)で用いるのに便利のように整理すると次のようになる。

$z$ 方向の vector dipole による波動場：

$$\hat{G}_{rz,z} = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (v_n e^{-iv_n|z|} - \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|}) J_1(k_n r) \quad (54)$$

$$\hat{G}_{zz,z} = \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n (v_n^2 e^{-iv_n|z|} + k_n^2 e^{-i\gamma_n|z|}) J_0(k_n r) \quad (55)$$

$x-z$ 平面内のダブルカップルによる波動場：

$$\hat{G}_{rx,z} + \hat{G}_{rz,x} = \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ (2k_n^2 e^{-iv_n|z|} + (\gamma_n^2 - k_n^2) e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{d}{dr} J_1(k_n r) + k_\beta^2 e^{-i\gamma_n|z|} \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right\} \cos \theta \quad (56)$$



$$\hat{G}_{\theta x,z} + \hat{G}_{\theta z,x} = -\frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ (2k_n^2 e^{-iv_n|z|} + (\gamma_n^2 - k_n^2) e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{1}{r} J_1(k_n r) + k_\beta^2 e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \right\} \sin \theta \quad (57)$$

$$\hat{G}_{zx,z} + \hat{G}_{zz,x} = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 \left( 2v_n e^{-iv_n|z|} + \left( \frac{k_n^2}{\gamma_n} - \gamma_n \right) e^{-i\gamma_n|z|} \right) J_1(k_n r) \cos \theta \quad (58)$$

$y-z$ 平面内のダブルカップルによる波動場：

$$\hat{G}_{ry,z} + \hat{G}_{rz,y} = \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ (2k_n^2 e^{-iv_n|z|} + (\gamma_n^2 - k_n^2) e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{d}{dr} J_1(k_n r) + k_\beta^2 e^{-i\gamma_n|z|} \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right\} \sin \theta \quad (59)$$

$$\hat{G}_{\theta y,z} + \hat{G}_{\theta z,y} = \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ (2k_n^2 e^{-iv_n|z|} + (\gamma_n^2 - k_n^2) e^{-i\gamma_n|z|}) \frac{1}{r} J_1(k_n r) + k_\beta^2 e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \right\} \cos \theta \quad (60)$$

$$\hat{G}_{zy,z} + \hat{G}_{zz,y} = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 \left( 2v_n e^{-iv_n|z|} + \left( \frac{k_n^2}{\gamma_n} - \gamma_n \right) e^{-i\gamma_n|z|} \right) J_1(k_n r) \sin \theta \quad (61)$$

$x$ 方向の vector dipole による波動場：

$$\begin{aligned} \hat{G}_{rx,x} &= \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) \cos^2 \theta + \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \sin^2 \theta \right\} \\ &\quad + \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{k_\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos 2\theta \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\theta x,x} &= -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \sin 2\theta \\ &\quad - \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{k_\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (63)$$

$$\hat{G}_{zx,x} = \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-iv_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \left\{ \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \cos^2 \theta + \frac{1}{r} J_1(k_n r) \sin^2 \theta \right\} \quad (64)$$

$y$ 方向の vector dipole による波動場：

$$\begin{aligned} \hat{G}_{ry,y} &= \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) \sin^2 \theta + \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos^2 \theta \right\} \\ &\quad - \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{k_\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos 2\theta \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\theta y,y} &= \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \sin 2\theta \\ &\quad + \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{k_\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (66)$$

$$\hat{G}_{zy,y} = \frac{\text{sgn}(z)}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-iv_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|}) \left\{ \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \sin^2 \theta + \frac{1}{r} J_1(k_n r) \cos^2 \theta \right\} \quad (67)$$

$x-y$ 平面内のダブルカップルによる波動場：

$$\hat{G}_{rx,y} + \hat{G}_{ry,x} = \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \sin 2\theta$$

$$+ \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{k\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \sin 2\theta \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\theta x,y} + \hat{G}_{\theta y,x} &= \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( \frac{k_n^2}{\nu_n} e^{-i\nu_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos 2\theta \\ &+ \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{k\beta^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (69)$$

$$\hat{G}_{zx,y} + \hat{G}_{zy,x} = \frac{sgn(z)}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 \left( e^{-i\nu_n|z|} - e^{-i\gamma_n|z|} \right) \left\{ \frac{d}{dr} J_1(k_n r) - \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right\} \sin 2\theta \quad (70)$$

## 4. 地層境界における透過・反射の計算

### 4.1 透過・反射の計算の概要

式(54)-(70)では透過・反射の影響を受ける以前の vector dipole およびダブルカップルによる波動場が様々な波数 $k_n$ を有する波の重ね合わせで表現されている。ここで図-4に示すように水平成層地盤の任意の層に震源がある場合を考えると、震源から放射された波は地層境界で透過と反射を繰り返すことになるが、この透過と反射は波数 $k_n$ 毎に独立に計算することができる。そこで、波数 $k_n$ 毎に透過と反射の計算を行い、その結果をすべての波数について重ね合わせれば、透過・反射の影響を含む vector dipole およびダブルカップルによる波動場が求まる。

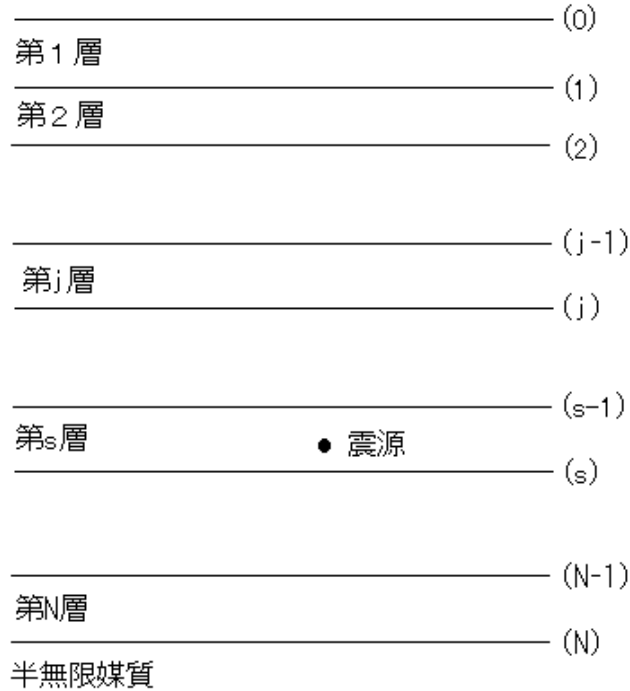


図-4 水平成層地盤

### 4.2 z方向の vector dipole による波動場

図-4に示すように、各地層に浅い方から順に1,2,3,...,N,N+1のように番号をふる。第N+1層は基盤に対応する。これまでは震源において $z=0$ としていたが、以降は地表面において $z=0$ とする。第j層上端のz座

標を $z^{(j-1)}$ とし、震源のある層を第 $s$ 層とする。図-4では震源が基盤以外の層にある場合を示しているが、震源は基盤内にあっても良い。すなわち $s = N + 1$ であっても良い。

$z$ 方向の vector dipole が作用したときの第 $j$ 層における変位および応力のフーリエ変換は次の形に書けるものとする。

$$\hat{u}_r^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_1^{jn} J_1(k_n r) \quad (71)$$

$$\hat{u}_z^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_2^{jn} J_0(k_n r) \quad (72)$$

$$\hat{\sigma}_{rz}^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_3^{jn} J_1(k_n r) \quad (73)$$

$$\hat{\sigma}_{zz}^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_4^{jn} J_0(k_n r) \quad (74)$$

ここに $V_1^{jn}$ ,  $V_2^{jn}$ ,  $V_3^{jn}$ ,  $V_4^{jn}$ は motion-stress vector と呼ばれ、それぞれ $z$ ,  $\omega$ の関数である。ここでは motion-stress vector は次の形に書けるものとする。

$$\begin{pmatrix} V_1^{jn} \\ V_2^{jn} \\ V_3^{jn} \\ V_4^{jn} \end{pmatrix} = \omega^{-1} \times \begin{pmatrix} \alpha_j k_n & \beta_j \gamma_{jn} & & & \alpha_j k_n & \beta_j \gamma_{jn} \\ & -i\alpha_j \nu_{jn} & i\beta_j k_n & & i\alpha_j \nu_{jn} & -i\beta_j k_n \\ & 2i\alpha_j \mu_j k_n \nu_{jn} & i\beta_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & & -2i\alpha_j \mu_j k_n \nu_{jn} & -i\beta_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) \\ \alpha_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & & -2\beta_j \mu_j k_n \gamma_{jn} & & \alpha_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & -2\beta_j \mu_j k_n \gamma_{jn} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} e^{-i\nu_{jn}(z^{(j)}-z)} & & & & & & 0 \\ & e^{-i\gamma_{jn}(z^{(j)}-z)} & & & & & \\ & & e^{-i\nu_{jn}(z-z^{(j-1)})} & & & & \\ & & & e^{-i\gamma_{jn}(z-z^{(j-1)})} & & & \\ & 0 & & & e^{-i\nu_{jn}(z-z^{(j-1)})} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_u^{jn} \\ SV_u^{jn} \\ P_d^{jn} \\ SV_d^{jn} \end{pmatrix} \quad (75)$$

ここに $P_u^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$ はそれぞれ上昇するP波、上昇するSV波、下降するP波、下降するSV波の振幅である。上昇波の振幅は第 $j$ 層の下端において、下降波の振幅は第 $j$ 層の上端において、それぞれ評価されている。 $\alpha_j$ は第 $j$ 層のP波速度、 $\beta_j$ は第 $j$ 層のS波速度、 $\mu_j$ は第 $j$ 層のラメ定数である。また、

$$\nu_{jn} = \sqrt{(\omega/\alpha_j)^2 - k_n^2}, \quad \text{Im}(\nu_{jn}) < 0 \quad (76)$$

$$\gamma_{jn} = \sqrt{(\omega/\beta_j)^2 - k_n^2}, \quad \text{Im}(\gamma_{jn}) < 0 \quad (77)$$

である。Motion-stress vector の各成分が式(75)で与えられるとき、式(71)(72)(73)(74)の変位と応力が[円筒座標系における Navier の式](#)および[応力～変位関係式](#)を満足することは、式(71)(72)(73)(74)をこれらの関係式に代入することにより確認できる。

式(71)(72)(73)(74)はすでに Navier の式および応力～変位関係式を満足しているのであるから、後は境界条件と放射条件を満足するように $P_u^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$ を決定すれば、 $z$ 方向の vector dipole に対する波動場が求まることになる。

$P_u^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$ はP-SV波を対象とした一般化反射/透過マトリクスにより求めることができる([水平層地盤のグリーン関数](#)の式(47)-(50)および(61)-(65))。このとき、震源項 $S_u$ および $S_d$ としては、式(54)(55)と(71)(72)の比較により、次式のものを与えればよい。

$$S_u = S_d = \begin{pmatrix} -\frac{ik_n \nu_{sn}}{4L\rho_s \omega \alpha_s} \\ \frac{ik_n^2}{4L\rho_s \omega \beta_s} \end{pmatrix} \quad (78)$$

### 4.3 x-z 平面内および y-z 平面内のダブルカップルによる波動場

x-z 平面内のダブルカップルが作用したときの第 j 層における変位および応力のフーリエ変換は次の形に書けるものとする。なお、y-z 平面内のダブルカップルに対しては  $\theta$  を  $\theta - \pi/2$  で置き換える。

$$\hat{u}_r^j = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( V_1^{jn} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) + H_1^{jn} \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos \theta \quad (79)$$

$$\hat{u}_\theta^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( V_1^{jn} \frac{1}{r} J_1(k_n r) + H_1^{jn} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \right) \sin \theta \quad (80)$$

$$\hat{u}_z^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_2^{jn} k_n J_1(k_n r) \cos \theta \quad (81)$$

$$\hat{\sigma}_{rz}^j = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( V_3^{jn} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) + H_2^{jn} \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos \theta \quad (82)$$

$$\hat{\sigma}_{\theta z}^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( V_3^{jn} \frac{1}{r} J_1(k_n r) + H_2^{jn} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \right) \sin \theta \quad (83)$$

$$\hat{\sigma}_{zz}^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_4^{jn} k_n J_1(k_n r) \cos \theta \quad (84)$$

ここに  $V_1^{jn}, V_2^{jn}, V_3^{jn}, V_4^{jn}, H_1^{jn}, H_2^{jn}$  は motion-stress vector である (それぞれ  $z, \omega$  の関数)。ここでは motion-stress vector の各成分うち  $V_1^{jn}, V_2^{jn}, V_3^{jn}, V_4^{jn}$  は式(75)の形に書けるものとし、 $H_1^{jn}, H_2^{jn}$  は次の形に書けるものとする。

$$\begin{pmatrix} H_1^{jn} \\ H_2^{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_j \gamma_{jn} & -i\mu_j \gamma_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_{jn}(z^{(j)}-z)} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_{jn}(z-z^{(j-1)})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SH_u^{jn} \\ SH_d^{jn} \end{pmatrix} \quad (85)$$

ここに  $SH_u^{jn}, SH_d^{jn}$  はそれぞれ上昇する SH 波と下降する SH 波の振幅である。上昇波の振幅は第 j 層の下端において、下降波の振幅は第 j 層の上端において、それぞれ評価されている。Motion-stress vector の各成分が式(75)(85)で与えられるとき、式(79)-(84)の変位と応力が [円筒座標系における Navier の式](#) および [応力～変位関係式](#) を満足することは、式(79)-(84)をこれらの関係式に代入することにより確認できる。

式(79)-(84)はすでに Navier の式および応力～変位関係式を満足しているのであるから、後は境界条件と放射条件を満足するように  $P_u^{jn}, P_d^{jn}, SV_u^{jn}, SV_d^{jn}, SH_u^{jn}, SH_d^{jn}$  を決定すれば、x-z 平面内および y-z 平面内のダブルカップルに対する波動場が求まることになる。

$P_u^{jn}, SV_u^{jn}, P_d^{jn}, SV_d^{jn}$  は P-SV 波を対象とした一般化反射/透過マトリクスにより求めることができる ([水平成層地盤のグリーン関数](#) の式(47)-(50)および(61)-(65))。このとき、震源項  $S_u$  および  $S_d$  としては、式(56)-(61)と(79)-(81)の比較により、次式のものを与えればよい。

$$S_u = \begin{pmatrix} \frac{2k_n}{4L\rho_s \omega \alpha_s} \\ \frac{\gamma_{sn}^2 - k_n^2}{4L\rho_s \omega \beta_s \gamma_{sn}} \end{pmatrix}, S_d = \begin{pmatrix} -\frac{2k_n}{4L\rho_s \omega \alpha_s} \\ -\frac{\gamma_{sn}^2 - k_n^2}{4L\rho_s \omega \beta_s \gamma_{sn}} \end{pmatrix} \quad (86)$$

$SH_u^{jn}$ ,  $SH_d^{jn}$ はSH波を対象とした一般化反射/透過マトリクスにより求めることができる ([水平成層地盤のグリーン関数](#)の式(47)-(50)および(61)-(65)). このとき, 震源項 $S_u$ および $S_d$ としては, 式(56)(57)(59)(60)と(79)(80)の比較により, 次式のものを与えればよい.

$$S_u = \frac{1}{4L\rho_s\beta^2}, S_d = -\frac{1}{4L\rho_s\beta^2} \quad (87)$$

#### 4.4 x方向およびy方向の vector dipole による波動場

x方向の vector dipole が作用したときの第j層における変位および応力のフーリエ変換は次の形に書けるものとする. なお, y方向の vector dipole に対しては $\theta$ を $\theta - \pi/2$ で置き換える.

$$\hat{u}_r^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ V_1^{jn} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) \cos^2 \theta + \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \sin^2 \theta \right\} + H_1^{jn} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos 2\theta \right] \quad (88)$$

$$\hat{u}_\theta^j = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ V_1^{jn} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \sin 2\theta + H_1^{jn} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \frac{1}{2} \sin 2\theta \right] \quad (89)$$

$$\hat{u}_z^j = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_2^{jn} k_n \left\{ \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \cos^2 \theta + \frac{1}{r} J_1(k_n r) \sin^2 \theta \right\} \quad (90)$$

$$\hat{\sigma}_{rz}^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ V_3^{jn} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) \cos^2 \theta + \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \sin^2 \theta \right\} + H_2^{jn} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos 2\theta \right] \quad (91)$$

$$\hat{\sigma}_{\theta z}^j = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ V_3^{jn} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \sin 2\theta + H_2^{jn} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \frac{1}{2} \sin 2\theta \right] \quad (92)$$

$$\hat{\sigma}_{zz}^j = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_4^{jn} k_n \left\{ \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \cos^2 \theta + \frac{1}{r} J_1(k_n r) \sin^2 \theta \right\} \quad (93)$$

ここに $V_1^{jn}$ ,  $V_2^{jn}$ ,  $V_3^{jn}$ ,  $V_4^{jn}$ ,  $H_1^{jn}$ ,  $H_2^{jn}$ は motion-stress vector である (それぞれ $z$ ,  $\omega$ の関数). ここでは motion-stress vector の各成分うち $V_1^{jn}$ ,  $V_2^{jn}$ ,  $V_3^{jn}$ ,  $V_4^{jn}$ は式(75)の形に書けるものとし,  $H_1^{jn}$ ,  $H_2^{jn}$ は式(85)の形に書けるものとする. Motion-stress vector の各成分が式(75)(85)で与えられるとき, 式(88)-(93)の変位と応力が[円筒座標系における Navier の式](#)および[応力～変位関係式](#)を満足することは, 式(88)-(93)をこれらの関係式に代入することにより確認できる.

式(88)-(93)はすでに Navier の式および応力～変位関係式を満足しているのであるから, 後は境界条件と放射条件を満足するように $P_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$ ,  $SH_u^{jn}$ ,  $SH_d^{jn}$ を決定すれば, x方向およびy方向の vector dipole に対する波動場が求まることになる.

$P_u^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$ はP-SV波を対象とした一般化反射/透過マトリクスにより求めることができる ([水平成層地盤のグリーン関数](#)の式(47)-(50)および(61)-(65)). このとき, 震源項 $S_u$ および $S_d$ としては, 式(62)-(67)と(88)-(90)の比較により, 次式のものを与えればよい.

$$S_u = S_d = \begin{pmatrix} ik_n \\ \frac{4L\rho_s\omega\alpha_s\nu_{sn}}{i} \\ \frac{4L\rho_s\omega\beta_s}{i} \end{pmatrix} \quad (94)$$

$SH_u^{jn}$ ,  $SH_d^{jn}$ はSH波を対象とした一般化反射/透過マトリクスにより求めることができる ([水平成層地盤のグリーン関数](#)の式(47)-(50)および(61)-(65)). このとき, 震源項 $S_u$ および $S_d$ としては, 式(62)(63)(65)(66)と(88)(89)の比較により, 次式のものを与えればよい.

$$S_u = S_d = \frac{i}{4L\rho_s\beta^2\gamma_{sn}} \quad (95)$$

#### 4.5 x-y 平面内のダブルカップルによる波動場

x-y平面内のダブルカップルが作用したときの第j層における変位および応力のフーリエ変換は次の形に書けるものとする。

$$\hat{u}_r^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ V_1^{jn} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} + H_1^{jn} 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right] \sin 2\theta \quad (96)$$

$$\hat{u}_\theta^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ V_1^{jn} 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) + H_1^{jn} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \right] \cos 2\theta \quad (97)$$

$$\hat{u}_z^j = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_2^{jn} k_n \left\{ \frac{d}{dr} J_1(k_n r) - \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right\} \sin 2\theta \quad (98)$$

$$\hat{\sigma}_{rz}^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ V_3^{jn} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} + H_2^{jn} 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right] \sin 2\theta \quad (99)$$

$$\hat{\sigma}_{\theta z}^j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ V_3^{jn} 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) + H_2^{jn} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} J_1(k_n r) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \right\} \right] \cos 2\theta \quad (100)$$

$$\hat{\sigma}_{zz}^j = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_4^{jn} k_n \left\{ \frac{d}{dr} J_1(k_n r) - \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right\} \sin 2\theta \quad (101)$$

ここに $V_1^{jn}$ ,  $V_2^{jn}$ ,  $V_3^{jn}$ ,  $V_4^{jn}$ ,  $H_1^{jn}$ ,  $H_2^{jn}$ は motion-stress vector である(それぞれ $z$ ,  $\omega$ の関数). ここでは motion-stress vector の各成分うち $V_1^{jn}$ ,  $V_2^{jn}$ ,  $V_3^{jn}$ ,  $V_4^{jn}$ は式(75)の形に書けるものとし,  $H_1^{jn}$ ,  $H_2^{jn}$ は式(85)の形に書けるものとする. Motion-stress vector の各成分が式(75)(85)で与えられるとき, 式(96)-(101)の変位と応力が[円筒座標系における Navier の式](#)および[応力～変位関係式](#)を満足することは, 式(96)-(101)をこれらの関係式に代入することにより確認できる.

式(96)-(101)はすでに Navier の式および応力～変位関係式を満足しているのであるから, 後は境界条件と放射条件を満足するように $P_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$ ,  $SH_u^{jn}$ ,  $SH_d^{jn}$ を決定すれば, x方向およびy方向の vector dipole に対する波動場が求まることになる.

$P_u^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$ は P-SV 波を対象とした一般化反射/透過マトリクスにより求めることができる ([水平成層地盤のグリーン関数](#)の式(47)-(50)および(61)-(65)). このとき, 震源項 $S_u$ および $S_d$ としては, 式(68)-(70)と(96)-(98)の比較により, 次式のものを与えればよい.

$$S_u = S_d = \begin{pmatrix} \frac{ik_n}{4L\rho_s\omega\alpha_s v_{sn}} \\ i \\ \frac{i}{4L\rho_s\omega\beta_s} \end{pmatrix} \quad (102)$$

$SH_u^{jn}$ ,  $SH_d^{jn}$ は SH 波を対象とした一般化反射/透過マトリクスにより求めることができる ([水平成層地盤のグリーン関数](#)の式(47)-(50)および(61)-(65)). このとき, 震源項 $S_u$ および $S_d$ としては, 式(68)(69)と(96)(97)の比較により, 次式のものを与えればよい.

$$S_u = S_d = \frac{i}{4L\rho_s\beta^2\gamma_{sn}} \quad (103)$$

#### 参考文献

- 1) Bouchon, M.: A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.71, pp.957-971, 1981.

## 付録 ベッセル関数の公式

本稿で用いたベッセル関数の公式は以下の通りである.

$$\frac{d}{dz}J_0(z) = -J_1(z) \quad (\text{A1})$$

$$\frac{d}{dz}J_1(z) = J_0(z) - \frac{1}{z}J_1(z) \quad (\text{A2})$$

$$\frac{d^2}{dz^2}J_1(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}J_1(z) + \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)J_1(z) = 0 \quad (\text{A3})$$

これらの証明は[水平成層地盤のグリーン関数の付録 C](#) 参照.