2018/11/25

平均ラディエーション係数

野津

S 波のラディエーション係数の平均値 0.63 は強震動予測の分野で頻繁に用いられている[例えば 1)]．Aki and Richards[2)]では P 波，S 波のラディエーション係数の平均値（正確には自乗平均の平方根）としてそれぞれ$\sqrt{4/15}$, $\sqrt{2/5}$が紹介されており，後者を小数に直したものが 0.63 である．ここではこれらの導出方法を示す．

図-1 に示す球座標系において，P 波のラディエーション係数は$\sin 2\theta \cos\phi$，S 波のラディエーション係数は$\hat{\boldsymbol{\theta}}$成分が$\cos 2\theta \cos\phi$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$成分が$\cos\theta \sin\phi$である（全無限弾性体におけるせん断食い違い型点震源による地震動の式(13)参照）．ここでは震源を中心とする半径rの球面上でこれらを平均することを考える．

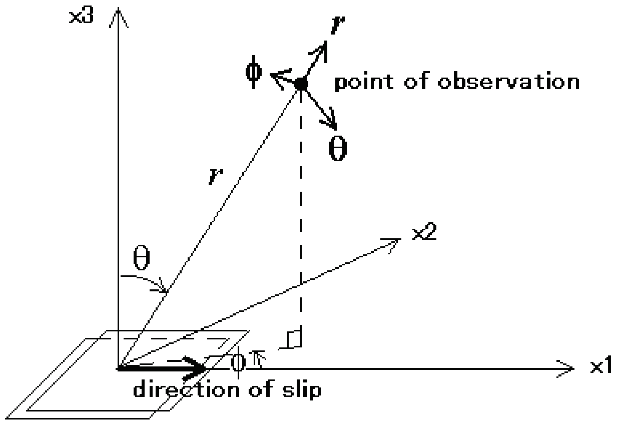

図-1　球座標系

半径rの球面上における微小面積は$r^2 \sin\theta\, d\phi d\theta$と表すことができる．これを用いると，P 波のラディエーション係数の自乗平均は次式で表される．

$$\langle R_P \rangle^2 = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 (\sin 2\theta \cos\phi)^2 \sin\theta\, d\phi d\theta}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\phi d\theta} \tag{1}$$

ここに$\langle R_P \rangle$は P 波のラディエーション係数の自乗平均の平方根である．式(1)の分母は球の表面積であるから$4\pi r^2$である．また分子は**付録**の公式を用いると

$$r^2 \int_0^{\pi} (\sin 2\theta)^2 \sin\theta\, d\theta \times \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi = r^2 \cdot \frac{16}{15} \cdot \pi$$

となるから，

$$\langle R_P \rangle^2 = \frac{4}{15}$$

である．■

一方，S 波のラディエーション係数の自乗平均は次式で表される．

$$\langle R_S\rangle^2 = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\{(\cos 2\theta\cos\phi)^2+(\cos\theta\sin\phi)^2\}\sin\theta d\phi d\theta}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta d\phi d\theta} \tag{2}$$

ここに$\langle R_S\rangle$は S 波のラディエーション係数の自乗平均の平方根である．式(2)の分母は球の表面積であるから$4\pi r^2$である．また分子は**付録**の公式を用いると

$$r^2\int_0^{\pi}(\cos 2\theta)^2\sin\theta\,d\theta\times\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi + r^2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\times\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,d\phi$$
$$= r^2\cdot\frac{14}{15}\cdot\pi + r^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi$$

となるから，

$$\langle R_S\rangle^2 = \frac{2}{5}$$

である．■

参考文献

1) Boore, D.M.: Stochastic simulation of high-frequency ground motions based on seismological models of the radiated spectra, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.73, No.6A, pp.1865-1894, 1983.

2) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.

付録

平均ラディエーション係数の計算では以下に示す三角関数の公式を用いると便利である.

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi = \frac{2}{3} \tag{A1}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\cos 2\theta)^2 \sin\theta \, d\theta &= \int_0^\pi (2\cos^2\theta - 1)^2 \sin\theta \, d\theta \\
&= 4\int_0^\pi \cos^4\theta \sin\theta \, d\theta - 4\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta + \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \\
&= 4\left[-\frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^\pi - 4\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi + [-\cos\theta]_0^\pi \\
&= 4\left[-\frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^\pi - 4\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi + [-\cos\theta]_0^\pi \\
&= \frac{14}{15}
\end{aligned} \tag{A2}$$

$$\int_0^\pi (\sin 2\theta)^2 \sin\theta \, d\theta = \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta - \int_0^\pi (\cos 2\theta)^2 \sin\theta \, d\theta = 2 - \frac{14}{15} = \frac{16}{15} \tag{A3}$$