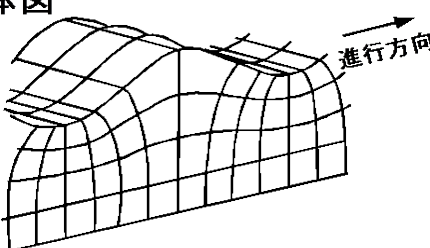

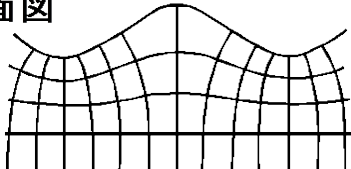
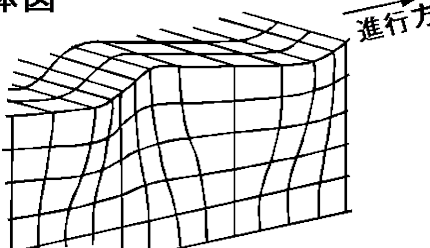
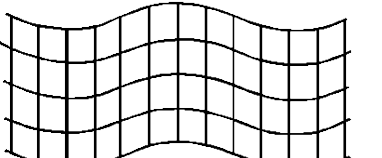
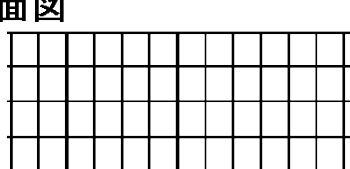
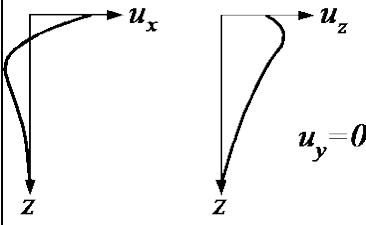
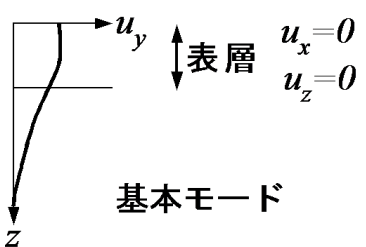


表面波（その1）Love波

1. Rayleigh波とLove波の概要

地表付近を水平に進む波として表面波（Rayleigh波とLove波）が知られている。表面波の進行方向にx軸、深さ方向にz軸をとると、Rayleigh波による変位はx成分とz成分のみをもち、Love波による変位はy成分のみをもち（表-1）。簡単な水平成層地盤を仮定すると、表面波の諸特性を弾性波動論に基づいて論じることができる。それによると、理論上、Rayleigh波は半無限地盤もしくは水平成層地盤上で存在でき、Love波は水平成層地盤上で存在できる（表-1）。ここでは表面波の伝播速度や深さ方向の振幅分布を弾性波動論に基づいて計算する方法について述べる。本稿ではLove波について述べ、Rayleigh波については[その2](#)で述べる。なお、以下の内容は斜め入射SH波に対する水平成層地盤の応答を計算するのにも用いることができる。

表-1 Rayleigh波とLove波の概要

	Rayleigh波	Love波
存在する地盤	半無限地盤もしくは水平成層地盤	水平成層地盤
変位モード	<p>立体図</p>  <p>平面図（地表面）</p>  <p>断面図</p> 	<p>立体図</p>  <p>平面図（地表面）</p>  <p>断面図</p> 
振幅分布 u_x, u_y, u_z : x, y, z方向の 変位成分 xは表面波の進行 方向 zは深さ方向	 <p>振幅分布は地盤条件に依存。 図は半無限地盤の場合。</p>	 <p>表層 $u_x=0$ $u_z=0$</p> <p>基本モード</p> <p>振幅分布は地盤条件に依存。</p>

2. SH 波動場の支配方程式

弾性波動論における支配方程式 (Navier の式) は, 物体力 (自重など) を無視すると次式で与えられる.

$$\rho \ddot{u}_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} \quad (1)$$

これをフーリエ変換すると次式が得られる.

$$\omega^2 \rho \hat{u}_i + \mu \hat{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \hat{u}_{j,ij} = 0 \quad (2)$$

以下, SH 波動場 (面外問題) を考えることにする. すなわち, 波の進行方向に x 軸, 深さ方向 z 軸をとり, 変位は y 軸方向にのみ生じるとする. またあらゆる物理量は y 方向に一様とする (金太郎あめのような状態を仮定する). すなわち弾性定数や変位などあらゆる物理量に対し $\partial/\partial y = 0$ とする.

この時の支配方程式は次のようになる.

$$\omega^2 \rho \hat{u}_y + \mu (\hat{u}_{y,xx} + \hat{u}_{y,zz}) = 0 \quad (3)$$

3. 一般解 (=Love 波の構成要素)

式(3)の一般解として次のものがある.

◎上昇する SH 波 (Upcoming SH wave) :

$$\hat{u}_y = SH_u e^{i\gamma z} e^{-ikx} \quad (4)$$

◎下降する SH 波 (Downgoing SH wave) :

$$\hat{u}_y = SH_d e^{-i\gamma z} e^{-ikx} \quad (5)$$

ただし

$$k^2 + \gamma^2 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \quad (6)$$

である. k は「波数の水平成分」または単に「波数」と呼ばれる. また γ は波数の鉛直成分と呼ばれる. SH_u と SH_d は未定係数である. k は実数であるが, γ は実数の場合と虚数の場合がある. いずれにしても, 式(4)(5)が式(3)の解であることは代入すれば確認できる.

いま, しばらくは γ が実数である場合を考えると, 式(4)(5)の意味するものは, ベクトル $\vec{k} = (k, \gamma)$ または $(k, -\gamma)$ の方向に速度 β で進む平面波であると理解される. なぜなら, 例えば式(5)の場合, フーリエ逆変換するために $e^{i\omega t}$ を乗じると,

$$e^{-i\gamma z} e^{-ikx} e^{i\omega t} = e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{x}\cdot\vec{e}}{\beta}\right)} \quad (7)$$

となるからである。ここに、 \vec{e} はベクトル \vec{k} 方向の単位ベクトル、 $\vec{x} = (x, z)$ である。 $k = 0$ は鉛直方向への伝播を意味する。 k を大きくしていくと、波の進む向きが水平に近くなる。

x 方向への見かけの伝播速度（=位相速度）を c とすると、

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (8)$$

である。また x 方向の波長を L とすると

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (9)$$

となる。つまり k は（地表面に沿った）距離 2π あたりの波の数を表す。

k を大きくしていくと、式(6)の γ は虚数となる（ここで、色々事情があり、 γ が虚数となる場合には、虚部が負となるようにとる）。重要なことは、式(4)(5)は γ が虚数の場合にも式(3)の一般解として依然として有効であるという点である。

ここで γ が虚数の場合に式(4)(5)がどのような波を表すか見てみよう。 γ が虚数のとき

$$\gamma = -i|\gamma| \quad (10)$$

である。これを式(4)に代入すると、

$$\hat{u}_y = SH_u e^{|\gamma|z} e^{-ikx} \quad (11)$$

となり、これは $+z$ 方向に振幅が指数関数的に増える波を表す。同様に、式(5)に代入すると

$$\hat{u}_y = SH_u e^{-|\gamma|z} e^{-ikx} \quad (12)$$

となり、これは $-z$ 方向に振幅が指数関数的に増える波を表す。 γ が実数のとき式(4)(5)は homogeneous wave と呼ばれる。 γ が虚数のとき式(4)(5)は inhomogeneous wave と呼ばれる。まとめると表-2 のようになる。

表-2 Homogeneous wave と Inhomogeneous wave

	式(4)	式(5)	名称
γ が実数のとき	上昇する SH 波	下降する SH 波	homogeneous wave
γ が虚数のとき	$+z$ 方向に振幅が指数関数的に増える波	$-z$ 方向に振幅が指数関数的に増える波	inhomogeneous wave

Homogeneous wave も inhomogeneous wave も波動場全体を構成するための「部品」である。Inhomogeneous wave は全無限弾性体では存在できない。なぜなら遠方で振幅が無限大になってしまうからである。半無限弾

性体でも存在できない。なぜなら地表で応力=0の条件を満足できないからである。しかし、基盤に1層以上の地層が載っている水平成層地盤においては、inhomogeneous waveは、homogeneous waveと組み合わせられることにより、Love波の一部として存在できる。

4. 水平成層地盤における Love 波

図-1 に示すような水平成層地盤を考える。

一つの層の中で、変位（のフーリエ変換）を上昇波と下降波の和として以下の式で表す。

$$\hat{u}_y = (SH_u e^{iyz} + SH_d e^{-iyz}) e^{-ikx} \quad (13)$$

これに対応する応力（のフーリエ変換）は以下の通りである。

$$\hat{\sigma}_{yz} = i\gamma\mu(SH_u e^{iyz} - SH_d e^{-iyz}) e^{-ikx} \quad (14)$$

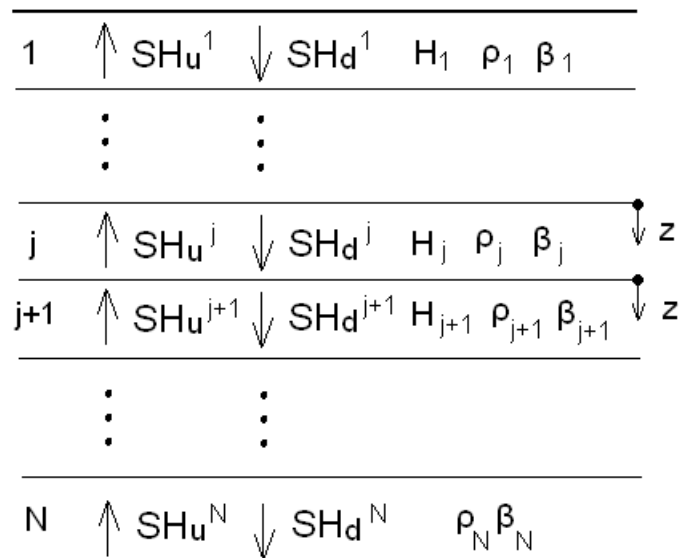


図-1 水平成層地盤

これをマトリクス形式で書くと

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_y \\ \hat{\sigma}_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma\mu & -i\gamma\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{iyz} & 0 \\ 0 & e^{-iyz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SH_u \\ SH_d \end{pmatrix} e^{-ikx} \quad (15)$$

第j層と第j+1層の間では変位と応力が連続でなければならないので

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma_{j+1}\mu_{j+1} & -i\gamma_{j+1}\mu_{j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SH_u^{j+1} \\ SH_d^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma_j\mu_j & -i\gamma_j\mu_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma_j H_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_j H_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SH_u^j \\ SH_d^j \end{pmatrix} \quad (16)$$

ここでは各層の物性を区別するために添え字を用いた。また H_j は第 j 層の層厚である。これを变形すると

$$\begin{pmatrix} SH_u^{j+1} \\ SH_d^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma_{j+1}\mu_{j+1} & -i\gamma_{j+1}\mu_{j+1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma_j\mu_j & -i\gamma_j\mu_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma_j H_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_j H_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SH_u^j \\ SH_d^j \end{pmatrix} \quad (17)$$

これは、 γ が実数となる k の範囲では、斜めに伝播するSH波の重複反射を表すマトリクスである。 $k=0$ とすればSHAKE等で用いられている[鉛直入射の重複反射を表すマトリクス](#)に一致する。

以上の定式化において、第 j 層における波と第 $j+1$ 層における波で k が等しいもの同士を接続していることに注目していただきたい。 k が異なるもの同士は接続できない。第 j 層における k と第 $j+1$ 層における k が等しいことからスネルの法則が導かれる。

これ以降、Love波が伝播するための条件を考える。簡単のため

$$E_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma_j\mu_j & -i\gamma_j\mu_j \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_j H_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_j H_j} \end{pmatrix}$$

などと書くことにすれば

$$\begin{pmatrix} SH_u^{j+1} \\ SH_d^{j+1} \end{pmatrix} = E_{j+1}^{-1} E_j \Lambda_j \begin{pmatrix} SH_u^j \\ SH_d^j \end{pmatrix} \quad (18)$$

この式を繰り返し用いると

$$\begin{pmatrix} SH_u^N \\ SH_d^N \end{pmatrix} = (E_N^{-1} E_{N-1} \Lambda_{N-1}) (E_{N-1}^{-1} E_{N-2} \Lambda_{N-2}) \dots (E_2^{-1} E_1 \Lambda_1) \begin{pmatrix} SH_u^1 \\ SH_d^1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} SH_u^N \\ SH_d^N \end{pmatrix} = (E_N^{-1} E_{N-1} \Lambda_{N-1}) (E_{N-1}^{-1} E_{N-2} \Lambda_{N-2}) \dots (E_2^{-1} E_1 \Lambda_1) E_1^{-1} \begin{pmatrix} \hat{u}_y(0) \\ \hat{\sigma}_{yz}(0) \end{pmatrix} e^{ikx} \quad (20)$$

である。ここで第 N 層は基盤である。また、 $\hat{u}_y(0)$ は地表面における変位（のフーリエ変換）、 $\hat{\sigma}_{yz}(0)$ は地表面における応力（のフーリエ変換）である。ここで

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = (E_N^{-1} E_{N-1} \Lambda_{N-1}) (E_{N-1}^{-1} E_{N-2} \Lambda_{N-2}) \dots (E_2^{-1} E_1 \Lambda_1) E_1^{-1}$$

と書くことにすると

$$\begin{pmatrix} SH_u^N \\ SH_d^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_y(0) \\ \hat{\sigma}_{yz}(0) \end{pmatrix} e^{ikx} \quad (21)$$

である。ここで、いま、 $SH_u^N = 0$ という条件を課すことにする。これは、表-2によれば、基盤で上昇波が存在しないという条件、または、深さ方向に指数関数的に振幅が増える波は存在しないという条件に対応する。また、地表面での境界条件として $\hat{\sigma}_{yz}(0) = 0$ であることが必要である。これらを考慮すると、式(22)において非自明解が存在するためには $A_{11} = 0$ でなければならない。

A_{11} の値は (ω, k) の設定により変化する。通常、与えられた ω に対し、 $A_{11} = 0$ を満足するような k を一つまたは複数見つけることができる。これらの (ω, k) の組み合わせに対しては、基盤からのエネルギーの供給が無くても、波は x 方向への伝播を続けることができる。これが Love 波である。

与えられた ω に対し、 $A_{11} = 0$ を満足する k が複数存在するとき、 k の大きいもの (c の小さいもの) から順に、基本モード、1次の高次モード、2次の高次モード...という。

与えられた ω に対し、 $A_{11} = 0$ を満足する k を見つけないことと、 $A_{11} = 0$ を満足する c を見つけないことは等価であるが、この c の探索において、 $\beta_1 < c < \beta_N$ の範囲で探索を行えば良い。なぜなら、任意の地層に対し

$$\gamma^2 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (22)$$

であるから、もしも最表層において $c < \beta$ であれば、 γ は虚数となってしまい、最表層の波動場が inhomogeneous wave となってしまい、地表における応力=0の条件を満足することができない。よって $\beta_1 < c$ である。また、もしも基盤において $\beta < c$ であれば、 γ は実数となってしまい、表面波とはならない。よって $c < \beta_N$ である。以上より、 c は必ず $\beta_1 < c < \beta_N$ の範囲にあると言える。つまり Love 波の伝播速度は最表層の S 波速度と基盤の S 波速度の間である。

また、 γ は最表層では実数でなければならないことから、Love 波は少なくとも最表層においては斜めに伝播する実体波の重ね合わせであることがわかる。

5. 基盤の上に一層だけある場合の Love 波

基盤の上に一層だけある場合について Love 波の性質を少し調べてみる。この場合

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma_2\mu_2 & -i\gamma_2\mu_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma_1\mu_1 & -i\gamma_1\mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma_1 H_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_1 H_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma_1\mu_1 & -i\gamma_1\mu_1 \end{pmatrix}^{-1}$$

ここで $A_{11} = 0$ という条件を課し、 γ_1 は実数、 γ_2 は虚数であることに注意すれば

$$\tan \omega H \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}}{\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2}}} \quad (23)$$

となる ($H_1 = H$ とした). 式(23)の右辺と左辺をプロットすると図-2 のようになることから, $\beta_1 < c < \beta_2$ の範囲に周波数に応じて複数の c が求まる. ω が小さいとき c は一つだけ求まる (基本モード). ω が大きいとき, 2つめ以降の c が求まる (高次モード). 一つのモードに着目すると, ω が小さいほど (長周期側ほど) c は大きくなり, 基盤の S 波速度に近づく. このように周波数により伝播速度が異なる性質を分散性という. 一つのモードに着目すると, H が大きいほど c は小さくなる. すなわち厚い地盤ほど Love 波の位相速度は遅い.

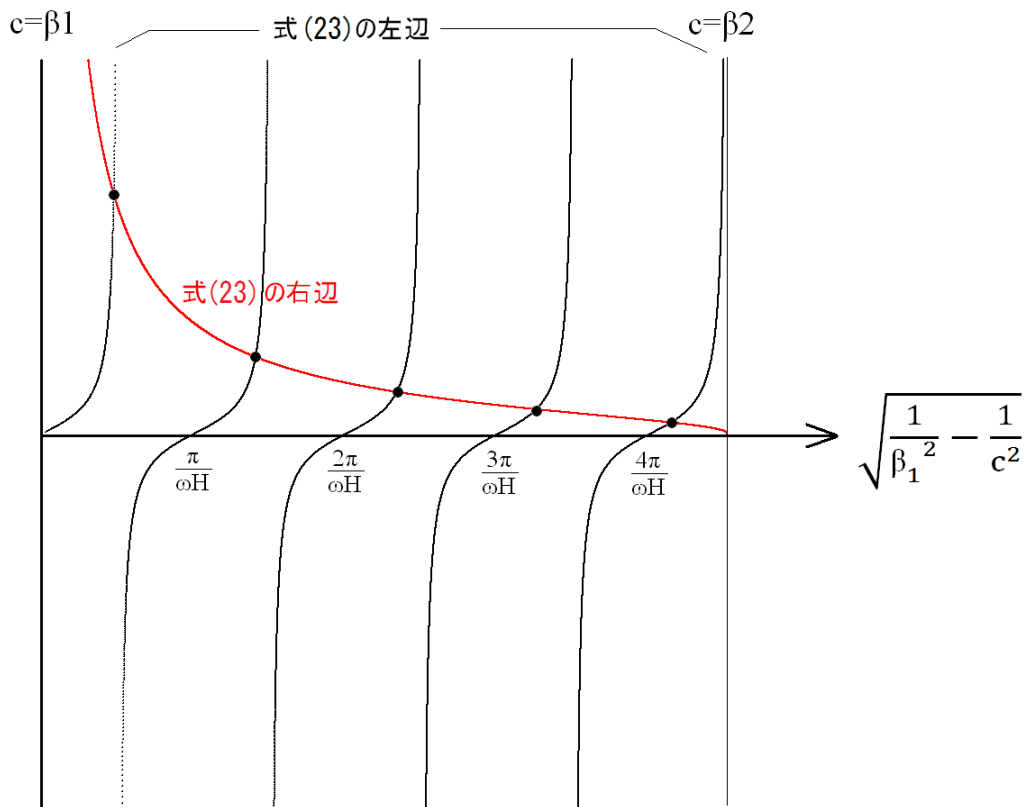


図-2 式 (23) の解の存在範囲 (Aki and Richards¹⁾の Figure 7.2 に基づく)

参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.