2018/4/26

減衰定数・Q 値・複素剛性

1.　はじめに

非減衰の場合の水平成層地盤の応答については重複反射理論・2E 波・粘性境界で説明した．ここでは減衰がある場合の取り扱いについて説明する．以下に述べるとおり減衰の効果は弾性定数に虚部を導入することにより簡単に導入できる．この考え方は広く 2 次元～3 次元の場合にも適用できる．減衰がある場合の応力～ひずみ関係は必ず時計回りのループを描く．応力～ひずみ関係を表すグラフ上における減衰定数hの幾何学的意味についても説明する．

2.　減衰がある場合の支配方程式

非減衰の場合の場合と同様，水平成層地盤に鉛直下方から平面 S 波が入射する場合を考え，減衰がある場合の支配方程式を導く．記号は新たに定義するものを除き非減衰の場合の場合と同様のものを用いる．なお，以下においては非減衰の場合との違いを赤で示すことにする．

水平成層地盤の応答を計算するために考慮すべき式としては，運動方程式，応力～ひずみ関係式，ひずみ～変位関係式がある．これらは減衰が存在する場合次のようになる（層番号を表すnは省略）．

運動方程式：

$$\rho\ddot{u} = \frac{\partial\tau}{\partial z} \tag{1}$$

応力～ひずみ関係式：

$$\tau = G\gamma + c\dot{\gamma} \tag{2}$$

ひずみ～変位関係式：

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{3}$$

式(2)にひずみ速度に依存する項が含まれる点が非減衰の場合との違いである．これらを連立すると

$$\rho\ddot{u} = G\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial z^2} \tag{4}$$

が得られる．これが解くべき支配方程式である．

3.　一般解

式(4)の両辺をフーリエ変換すると

$$-\omega^2\rho\hat{u} = G\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2} + i\omega c\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2} \tag{5}$$

が得られる．ここで減衰定数を

$$h = \frac{\omega c}{2G} \tag{6}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned}-\omega^2\rho\hat{u} &= G\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2} + 2iGh\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}\\ &= G(1+2ih)\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{7}$$

が得られる．ここで複素剛性を

$$G_c = G(1+2ih) \tag{8}$$

で定義すると，減衰がある場合の周波数領域における支配方程式として

$$-\omega^2\rho\hat{u} = G_c\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2} \tag{9}$$

が得られる．すなわち，非減衰の場合の支配方程式において剛性Gを複素剛性G_cに置き換えれば減衰がある場合の支配方程式となる．

ここから先，hとしてはあまり大きくない値を考え，h^2の項は無視できるものとし，

$$\beta_c = \sqrt{\frac{G_c}{\rho}} \cong \beta(1+ih) \tag{10}$$

と置くと（β_cとしては複素平面上の第 1 象限にあるものを考える）

$$-\omega^2\hat{u} = \beta_c^2\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2} \tag{11}$$

が得られる．ここでさらに

$$k_c = \frac{\omega}{\beta_c} \cong k(1-ih) \tag{12}$$

と置くと（k_cとしては複素平面上の第 4 象限にあるものを考える）

$$ {k_c}^2\hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} = 0 \tag{13} $$

が得られる．これの一般解は

$$ \hat{u} = Ce^{-ik_c z} \tag{14} $$

で与えられる．もちろん，これと対になるものとして指数がプラスのものもあるが，ここでは式(14)について考える．式(12)を使って式(14)を変形すると

$$ \hat{u} = Ce^{-khz}e^{-ikz} \tag{15} $$

となる．これはz軸の正方向に減衰しながら伝播する波であり，距離zだけ伝播する間に振幅は

$$ e^{-khz} $$

倍になる．ここで Q 値を次式により定義する．

$$ Q = \frac{1}{2h} \tag{16} $$

これを用いると，距離zだけ伝播する間に振幅は

$$ e^{-\frac{\pi f z}{Q\beta}} $$

倍になると言える．この式が，地震動研究において一般的に考慮される伝播経路における非弾性減衰の式である．

4.　土要素内で吸収されるエネルギー

応力～ひずみ関係式が

$$ \tau = G\gamma + c\dot{\gamma} \tag{17} $$

が与えられる場合について，土要素内で吸収されるエネルギーについて考察する．

まず，式(17)に基づいて**図-1**，**図-2** のように応力～ひずみ関係を描くと，必ず時計回りのループを描くことがわかる．何故なら，γが増えるとき式(17)右辺第 2 項は正となるのでτは$G\gamma$よりも大きく，γが減るとき式(17)右辺第 2 項は負となるのでτは$G\gamma$よりも小さいからである．

ひずみが$\gamma \to \gamma + \Delta\gamma$のように増えるとき，土要素内で吸収される単位体積あたりのエネルギーは**図-1** の着色部の面積である．同じように，ひずみが$\gamma + \Delta\gamma \to \gamma$のように減るとき，土要素内で吸収される単位体積あたりのエネルギーは**図-2** の着色部の面積にマイナスを付けた値である．これらを考慮すると，結局，ワンサイクルの間に土要素内で吸収される単位体積あたりのエネルギーは図のループの面積である．

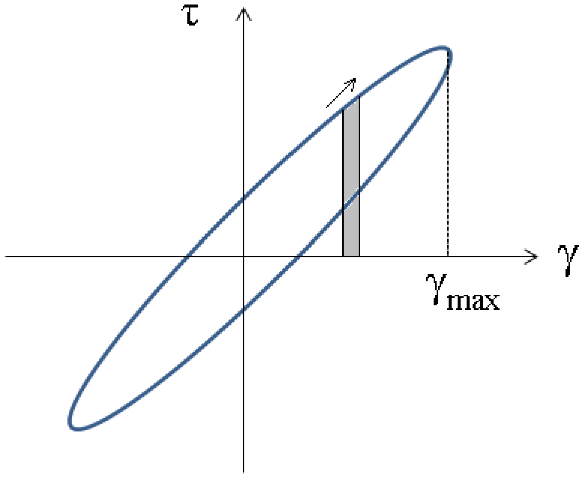

図-1　ひずみが$\gamma \to \gamma + \Delta\gamma$のように増えるとき

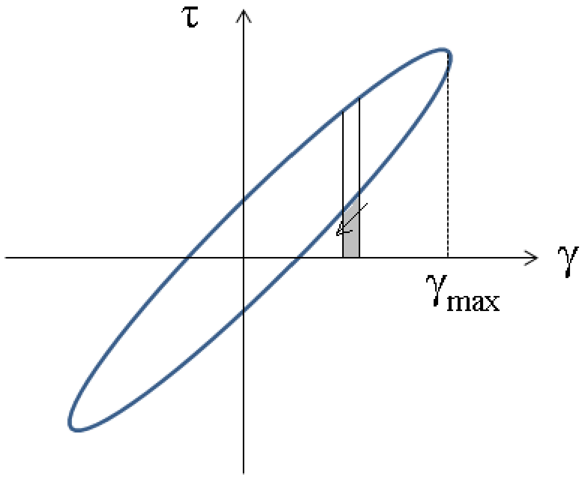

図-2　ひずみが$\gamma + \Delta\gamma \to \gamma$のように減るとき

ところで，図のループはほぼ楕円で近似される．以下，このことを見ていく．図の縦軸をGで除し，τ/Gとγの関係を見ると，軸の傾きは45°となる（**図-3**）．

$$\tau/G = \gamma + \frac{2h}{\omega}\dot{\gamma} \tag{18}$$

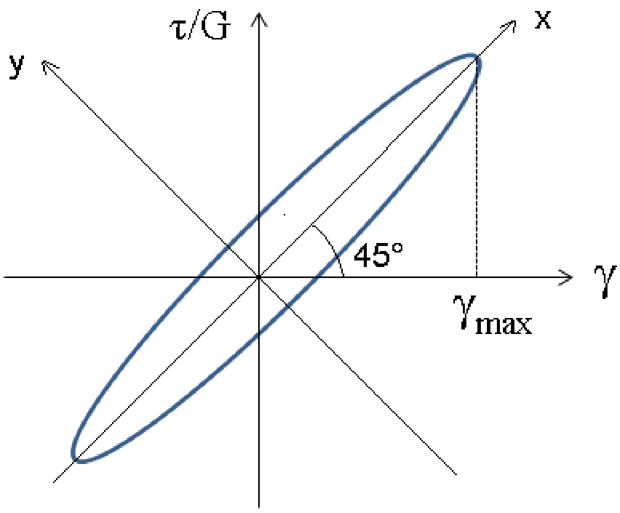

図-3　縦軸を基準化した場合の応力～ひずみ関係

そこで，**図-3** のように$(\gamma, \tau/G\ )$から(x, y)への座標変換を行うことにすると，新座標と旧座標の関係は

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \tau/G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{19}$$

となり，これを式(18)に代入してxとyの関係を求めると

$$y = \frac{h}{\omega}(\dot{x} - \dot{y}) \tag{20}$$

となる．式(20)を近似的に満たす(x, y)として（近似的にとは高次の微小量を除いてという意味である）

$$x = A\cos\omega t \tag{21}$$
$$y = -hA\sin\omega t \tag{22}$$

があることが確認できる．このことから，**図-3** の楕円の<u>長軸と短軸の比はhである</u>．また，**図-3** の楕円の面積は$2\pi h{\gamma_{max}}^2$である．

よって，**図-1** の楕円の面積，すなわち，ワンサイクルの間に土要素内で吸収される単位体積あたりのエネルギーは

$$\varDelta W = 2\pi hG{\gamma_{max}}^2 \tag{23}$$

である．一方，Wを

$$W = \frac{1}{2}G{\gamma_{max}}^2 \tag{24}$$

で定義すると，

$$h = \frac{1}{4\pi}\frac{\Delta W}{W} \tag{25}$$

となる．この式もよく使われる．

5.　減衰がある場合の地盤の増幅率

式(14)の一般解を用い，非減衰の場合の場合と同様に地層境界での変位と応力の連続条件等を考慮して未定係数を決めれば，水平成層地盤の応答が求まる．例として**図-4** のような簡単な 2 層地盤を考え，減衰がある場合と無い場合について 2E 波の増幅率を求めると，**図-5** のようになる．減衰の影響は特に高周波側で表れることがわかる．

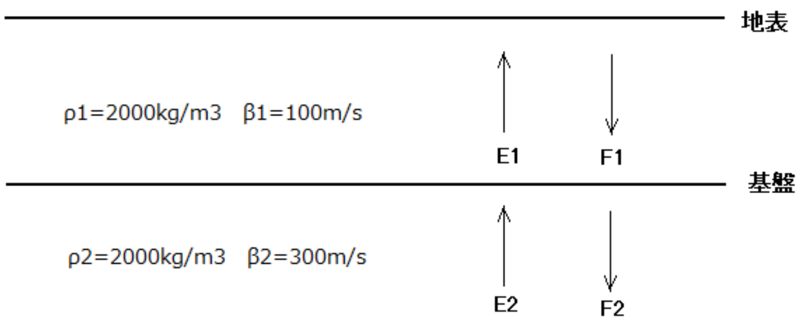

図-4　簡単な 2 層地盤

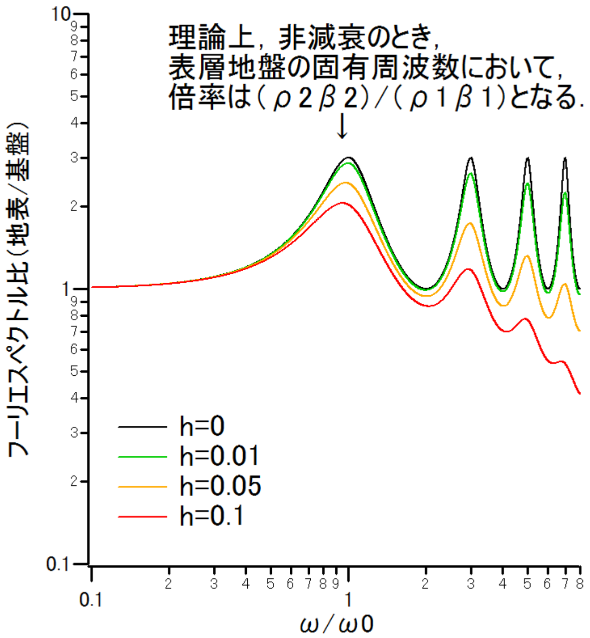

図-5　減衰がある場合と無い場合の 2E 波の増幅率の比較