

## 1. はじめに

Navier の式

$$\rho \ddot{u}_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i \quad (1)$$

において、外力  $f_i$  が単位インパルス力

$$f_i = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t) \quad (2)$$

である場合の  $u_i$  を動弾性問題のグリーン関数とよび  $G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})$  などと書く。また、加速度項を含まない Navier の式

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = 0 \quad (3)$$

において、外力  $f_i$  が集中荷重

$$f_i = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (4)$$

である場合の  $u_i$  を静弾性問題のグリーン関数とよび  $G_{in}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$  などと書く。

等質等方な全無限弾性体の場合、動弾性問題のグリーン関数は、時間領域では

$$\begin{aligned} G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4\pi\rho} (3r_{,i}r_{,n} - \delta_{in}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_{,i}r_{,n} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_{,i}r_{,n} - \delta_{in}) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

で、周波数領域では

$$\begin{aligned} \hat{G}_{in}(\mathbf{x}, \omega; \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4\pi\rho} (3r_{,i}r_{,n} - \delta_{in}) \frac{1}{r^3} \frac{1}{\omega^2} (e^{-i\omega r/\beta} - e^{-i\omega r/\alpha}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\rho} (3r_{,i}r_{,n} - \delta_{in}) \frac{1}{r^2} \frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{\beta} e^{-i\omega r/\beta} - \frac{1}{\alpha} e^{-i\omega r/\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_{,i}r_{,n} \frac{1}{r} e^{-i\omega r/\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_{,i}r_{,n} - \delta_{in}) \frac{1}{r} e^{-i\omega r/\beta} \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる．ここに  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ ,  $r_i = \partial r / \partial x_i$  である．また，同じく等質等方な全無限弾性体の場合，静弾性問題のグリーン関数は

$$\bar{G}_{in}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left( \delta_{in} r_{,l} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} r_{,in} \right) \quad (7)$$

で与えられる．これらの結果は極めて重要であるが，その導出過程はそれなりに複雑である．

全無限弾性体のグリーン関数が式(5)～(7)で与えられることについて，一応納得はしておきたいが，そのため使える時間は限られているという人も多いと思う．本稿はそのような人のために書いてみた解説書である．全無限弾性体のグリーン関数の導出については，ポテンシャルを利用する方法もあるが，空間座標に関するフーリエ変換を利用する方法<sup>2)</sup>の方が早いようなので，ここではこちらの方法を説明する．

## 2. 全無限弾性体における動弾性問題のグリーン関数

等質等方な全無限弾性体の場合， $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ としても一般性を失わないので（震源をどこに置いても同じ），以下  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  とする．

式(1)(2)より

$$\rho \ddot{G}_{in} = \mu G_{in,jj} + (\lambda + \mu) G_{jn,ji} + \delta_{in} \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad (8)$$

であり，両辺をフーリエ変換すると

$$\rho \omega^2 \hat{G}_{in} + \mu \hat{G}_{in,jj} + (\lambda + \mu) \hat{G}_{jn,ji} = -\delta_{in} \delta(\mathbf{x}) \quad (9)$$

を得る．

ここで空間座標に関する3重フーリエ変換

$$\tilde{f}(k_1, k_2, k_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x_1, x_2, x_3) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx_1 dx_2 dx_3$$

を適用する．ここに

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \quad (10)$$

である．これまで，時間に関するフーリエ変換では，常に順変換に  $e^{-i\omega t}$  を，逆変換に  $e^{i\omega t}$  を用いてきたが，空間座標に関するフーリエ変換では，常に順変換に  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  を，逆変換に  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  を用いる．その理由は，そのような選択を行うことで，逆変換の際に

$$e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1)}$$

のような関数が現われ， $\omega$  と  $k_1$  がともに正の時に  $x_1$  軸の正方向に進む波を表すことになり，混乱が少ないためである．また，以降，空間座標に関する3重フーリエ変換後の関数には  $\sim$  を付けて区別する．ところで，空間座標に関する3重フーリエ変換は，特定の座標系に依存するものではなく，ベクトル  $\mathbf{k}$  が与えられると  $\tilde{f}$  の値が決まると考えておく方がすっきりする． $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{x}$  に対して同じ座標系を採用したときに限り内積は式(10)で表される．

空間座標に関する 3 重フーリエ変換を式(9)に適用すると次式を得る.

$$\rho\omega^2\tilde{G}_{in} - k^2\mu\tilde{G}_{in} - k_ik_j(\lambda + \mu)\tilde{G}_{jn} = -\delta_{in} \quad (11)$$

ここに

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

である. 式(11)を変形すると

$$[(k^2\mu - \rho\omega^2)\delta_{ij} + k_ik_j(\lambda + \mu)]\tilde{G}_{jn} = \delta_{in}$$

両辺を $\mu$ で除すると

$$\left[ \left( k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) \delta_{ij} + k_ik_j \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1 \right) \right] \tilde{G}_{jn} = \frac{\delta_{in}}{\mu}$$

P 波と S 波の波数を $k_\alpha = \omega/\alpha$ ,  $k_\beta = \omega/\beta$ のように書くことにすると

$$\left[ (k^2 - k_\beta^2)\delta_{ij} + k_ik_j \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) \right] \tilde{G}_{jn} = \frac{\delta_{in}}{\mu} \quad (12)$$

を得る. これをマトリクス形式で書くと

$$\begin{pmatrix} (k^2 - k_\beta^2) + k_1k_1 \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) & k_1k_2 \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) & k_1k_3 \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) \\ k_2k_1 \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) & (k^2 - k_\beta^2) + k_2k_2 \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) & k_2k_3 \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) \\ k_3k_1 \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) & k_3k_2 \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) & (k^2 - k_\beta^2) + k_3k_3 \left( \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} - 1 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{1n} \\ \tilde{G}_{2n} \\ \tilde{G}_{3n} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \delta_{1n} \\ \delta_{2n} \\ \delta_{3n} \end{pmatrix} \quad (13)$$

のようにも書ける. この係数行列の逆行列に相当する

$$\frac{\delta_{ki}}{k^2 - k_\beta^2} + \frac{k_kk_i}{k_\beta^2} \left( \frac{1}{k^2 - k_\alpha^2} - \frac{1}{k^2 - k_\beta^2} \right)$$

を式(12)に乗じると

$$\tilde{G}_{in} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\delta_{in}}{k^2 - k_\beta^2} + \frac{k_ik_n}{k_\beta^2} \left( \frac{1}{k^2 - k_\alpha^2} - \frac{1}{k^2 - k_\beta^2} \right) \right] \quad (14)$$

が得られる.

ここで式(14)に含まれる $k^2 - k_\alpha^2$ または $k^2 - k_\beta^2$ のいずれかがゼロとならないかを心配しておく必要があるが, 実際には, [減衰定数・Q 値・複素剛性](#)で述べるように,  $\alpha$ と $\beta$ にわずかではあるが正の虚部が含まれると

考えておけば良い。そうすると、 $k_\alpha$ と $k_\beta$ には負の虚部が含まれることになり、 $k^2 - k_\alpha^2$ も $k^2 - k_\beta^2$ もゼロとなる心配はない。

次に、式(14)のフーリエ逆変換を計算する。それには

$$I_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - k_\alpha^2} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (15)$$

のような積分を計算できればよい。この積分は座標系のとり方に依存しない形になっている。そこで、 $k_3$ 軸を $x_3$ 軸方向ではなく観測点方向にとることにする。そしてさらに図-1に示す球座標系を導入すると、ベクトル $\mathbf{k}$ とベクトル $\mathbf{x}$ のなす角は $\theta$ となるので、それらの内積は

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kr \cos \theta \quad (16)$$

で与えられる。また微小な体積は

$$dV = k^2 \sin \theta d\theta d\phi dk \quad (17)$$

で与えられる。式(16)(17)を式(15)に代入すると

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{k^2 \sin \theta e^{-ikr \cos \theta}}{k^2 - k_\alpha^2} d\theta d\phi dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{k^2 \sin \theta e^{-ikr \cos \theta}}{k^2 - k_\alpha^2} d\theta dk \end{aligned}$$

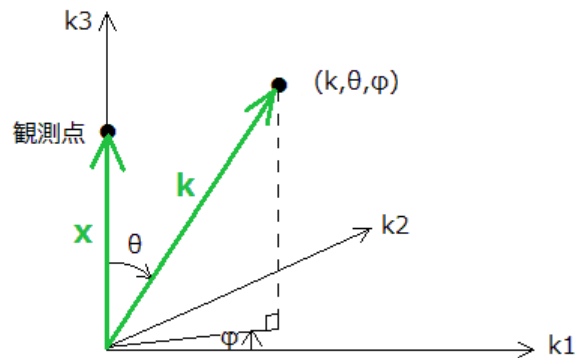


図-1 球座標系

ここで $\cos \theta = \xi$ のように変数変換を行うと $d\theta/d\xi = -1/\sin \theta$ であるから

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 - k_\alpha^2} \left( \int_{-1}^1 e^{-ikr \xi} d\xi \right) dk \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 - k_\alpha^2} (e^{-ikr} - e^{ikr}) dk \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{k}{k^2 - k_\alpha^2} e^{-ikr} dk \end{aligned}$$

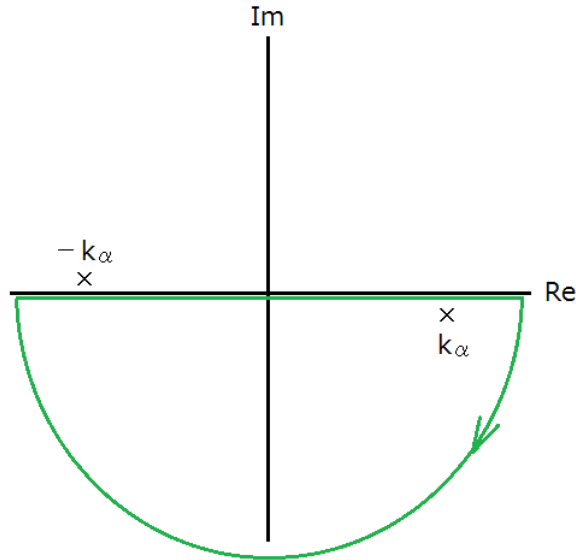


図-2 積分経路

この最後の積分を行うために、複素平面上に図-2のように時計回りに積分経路をとると、これに含まれる極は  $k = k_\alpha$  の1箇所のみであるから、留数定理により

$$I_\alpha = \frac{i}{(2\pi)^2 r} (-2\pi i) R(k_\alpha) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ik_\alpha r} \quad (18)$$

となる。このことと、微分のフーリエ変換の公式を利用すれば、周波数領域のグリーン関数として

$$\hat{G}_{in}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \delta_{in} \frac{e^{-ik_\beta r}}{r} + \frac{1}{k_\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_n} \left( \frac{e^{-ik_\beta r} - e^{-ik_\alpha r}}{r} \right) \right] \quad (19)$$

が得られる。さらに、付録の公式を利用して変形すると式(6)が得られる。また

$$\begin{aligned} \int_0^{r/\alpha} \tau e^{-i\omega\tau} d\tau &= \left[ -\frac{1}{i\omega} \tau e^{-i\omega\tau} \right]_0^{r/\alpha} + \int_0^{r/\alpha} \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{i\omega} \frac{r}{\alpha} e^{-i\omega r/\alpha} + \frac{1}{\omega^2} [e^{-i\omega\tau}]_0^{r/\alpha} \\ &= -\frac{1}{i\omega} \frac{r}{\alpha} e^{-i\omega r/\alpha} + \frac{1}{\omega^2} (e^{-i\omega r/\alpha} - 1) \end{aligned} \quad (20)$$

であることを利用すると、時間領域のグリーン関数が式(5)で表されることもわかる。

### 3. 全無限弾性体における静弾性問題のグリーン関数

単位インパルス力

$$f_i = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t) \quad (2) \text{再掲}$$

を時間積分して残留値をとると集中荷重

$$f_i = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (4) \text{再掲}$$

となる。したがって動弾性問題のグリーン関数 (式(5)) を時間積分して残留値をとると静弾性問題のグリーン関数 (式(7)) となるはずである (式(1)の両辺を時間積分して残留値をとればこのことが証明できる)。そこで、この計算を具体的に行ってみる。

式(5)に含まれる時間関数

$$g(t) = \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau$$

は図-3 のような形をしており、これの時間積分の残留値は

$$\frac{1}{2} \left( \frac{r}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\alpha} \right)^2$$

となる。

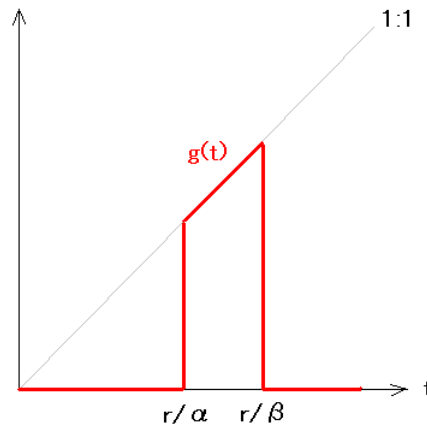


図-3 関数 $g(t)$ の形

このことなどを考慮すると、静弾性問題のグリーン関数は

$$\begin{aligned} \bar{G}_{in}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{8\pi\rho} (3r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_i r_n \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{8\pi\rho} \frac{1}{r} \left[ (\delta_{in} - r_i r_n) \frac{1}{\alpha^2} + (\delta_{in} + r_i r_n) \frac{1}{\beta^2} \right] \\ &= \frac{1}{8\pi\rho} \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \delta_{in} - \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) r_i r_n \right] \\ &= \frac{1}{8\pi\rho} \frac{1}{r} \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} \delta_{in} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} r_i r_n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{r} \left( \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} \delta_{in} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} r_i r_n \right) \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{r} \left( 2\delta_{in} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} (\delta_{in} - r_i r_n) \right) \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \left( \delta_{in} r_{,ll} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} r_{,in} \right) \tag{21}
\end{aligned}$$

となり、式(7)に一致する。なお、ここでは付録の公式を用いた。

#### 4. 動弾性問題のグリーン関数の遠地項・近地項と静的項・動的項の関係

ここでは、動弾性問題のグリーン関数の遠地項・近地項と静的項・動的項の関係を整理する。

式(5)に示す動弾性問題のグリーン関数のうち第1項は $r^{-2}$ に比例し第2項・第3項は $r^{-1}$ に比例する。第1項は一見 $r^{-3}$ に比例するように見えるけれども、第1項に含まれる時間関数 $g(t)$ の値が図-3に示すように $r$ に比例するため、実際には $r^{-2}$ に比例する。第1項を近地項、第2項・第3項を遠地項とよぶ<sup>3)</sup>。遠地項はさらに遠地P波項とS波項に分けられる。

一方、動弾性問題のグリーン関数を静的項と動的項に分けることがある。まず時間領域において静的項とは静弾性問題のグリーン関数に $\delta(t)$ を乗じた時間関数、すなわち $\bar{G}_{in}\delta(t)$ である。これを動弾性問題のグリーン関数 $G_{in}$ から差し引いたもの、すなわち $G_{in} - \bar{G}_{in}\delta(t)$ を動的項とよぶ(表-1)。 $\delta(t)$ のフーリエ変換は1であるから、周波数領域では $\hat{G}_{in}$ から $\bar{G}_{in}$ を差し引くことになる(表-1)。

表-1 動弾性問題のグリーン関数の遠地項・近地項と静的項・動的項の関係

	静的項	動的項
動弾性問題のグリーン関数 $G_{in}$ (時間領域)	$\bar{G}_{in}\delta(t)$	$G_{in} - \bar{G}_{in}\delta(t)$
動弾性問題のグリーン関数 $\hat{G}_{in}$ (周波数領域)	$\bar{G}_{in}$	$\hat{G}_{in} - \bar{G}_{in}$
近地項 (周波数領域)	$\frac{1}{8\pi\rho} (3r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)$	式(22)
遠地P波項 (周波数領域)	$\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_i r_n \frac{1}{r}$	式(23)
遠地S波項 (周波数領域)	$-\frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r}$	式(24)

これを近地項・遠地P波項・遠地S波項のそれぞれについて見ると表-1のように整理できる。近地項・遠地P波項・遠地S波項のそれぞれの静的項は、式(21)の右辺において近地・遠地P波・遠地S波の各項に由来する項を示したものである。動的項は、 $\hat{G}_{in}$ の各項をテイラー展開し、静的項を差し引いたものである。例えば近地項については動的項は次式となる。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi\rho} (3r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r^3} \frac{1}{\omega^2} (e^{-i\omega r/\beta} - e^{-i\omega r/\alpha}) - \frac{1}{4\pi\rho} (3r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r^2} \frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{\beta} e^{-i\omega r/\beta} - \frac{1}{\alpha} e^{-i\omega r/\alpha} \right) \\
&\quad - \frac{1}{8\pi\rho} (3r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\rho} (3r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\omega^2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\beta} \right)^m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\alpha} \right)^m \right\} \\ - \frac{1}{r} \frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{1}{\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\beta} \right)^m - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\alpha} \right)^m \right\} \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\rho} (3r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\omega^2} \left\{ 1 - i \frac{\omega r}{\beta} - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega r}{\beta} \right)^2 + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\beta} \right)^m \right\} \\ - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\omega^2} \left\{ 1 - i \frac{\omega r}{\alpha} - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega r}{\alpha} \right)^2 + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\alpha} \right)^m \right\} \\ - \frac{1}{r} \frac{1}{i\omega} \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - i \frac{\omega r}{\beta} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\beta} \right)^m \right\} \\ + \frac{1}{r} \frac{1}{i\omega} \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 - i \frac{\omega r}{\alpha} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\alpha} \right)^m \right\} \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\rho} (3r_i r_n - \delta_{in}) \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{r^3} \frac{1}{\omega^2} \left\{ \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\beta} \right)^m - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\alpha} \right)^m \right\} \\ - \frac{1}{r^2} \frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{1}{\beta} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\beta} \right)^m - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\alpha} \right)^m \right\} \end{array} \right] \quad (22)
\end{aligned}$$

遠地 P 波項については動的項は次式となる.

$$\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_i r_n \frac{1}{r} (e^{-i\omega r/\alpha} - 1) = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_i r_n \frac{1}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\alpha} \right)^m \quad (23)$$

遠地 S 波項については動的項は次式となる.

$$-\frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r} (e^{-i\omega r/\beta} - 1) = -\frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_i r_n - \delta_{in}) \frac{1}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{i\omega r}{\beta} \right)^m \quad (24)$$

式(22)~(24)より動的項は $r^{-m}$  (ただし $m \geq 1$ ) に比例する項を含まない. したがって,  $r$ の値が小さい場合に, 動弾性問題のグリーン関数を静的項と動的項に分けると数値計算上有利となることがある<sup>4)</sup>.

#### 参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, p.68, 2002.
- 2) 小林昭一: 波動解析と境界要素法, 第2章, 動弾性問題とその境界要素法, 京都大学出版会, p.41, 2000年.
- 3) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, p.72, 2002.
- 4) 小林昭一: 波動解析と境界要素法, 第2章, 動弾性問題とその境界要素法, 京都大学出版会, p.71, 2000年.



付録 全無限弾性体のグリーン関数の導出に使える公式

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (1)$$

$$r_{,i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r} \quad (2)$$

$$r_i r_{,i} = \frac{x_i x_i}{r r} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r^2} = 1 \quad (3)$$

$$r_{,ij} = \frac{\delta_{ij} r - x_i r_{,j}}{r^2} = \frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} \quad (4)$$

$$r_{,ii} = \frac{\delta_{ii} - r_{,i} r_{,i}}{r} = \frac{3-1}{r} = \frac{2}{r} \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{,i} = -\frac{r_{,i}}{r^2} \quad (6)$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{,ij} = \frac{3r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}}{r^3} \quad (7)$$