第 1 版　2017/10/7
第 2 版　2020/4/11

ガウスの発散定理

野津

任意のベクトル場$\boldsymbol{u}$に対して

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{u}\, dV = \int \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{1}$$

が成立する．このことをガウスの発散定理という．ここに$\boldsymbol{n}$は領域Vの外向き単位法線ベクトルである．成分で書けば

$$\int u_{i,i}\, dV = \int u_i n_i\, dS \tag{2}$$

となる．ところで，ガウスの発散定理は「任意のスカラー場ϕに対して

$$\int \phi_{,i} dV = \int \phi n_i dS \tag{3}$$

が成立する」と言い換えることもできる．実際，式(2)において(u_1, u_2, u_3)のうち 1 成分がϕで他の 2 成分がゼロであるような特別の場合を考えれば式(3)が得られる．また，式(3)において

$$\begin{aligned} &\phi = u_1 \quad \text{かつ} \quad i = 1 \\ &\phi = u_2 \quad \text{かつ} \quad i = 2 \\ &\phi = u_3 \quad \text{かつ} \quad i = 3 \end{aligned}$$

の 3 通りの場合を考え和をとれば式(2)が得られる．このように式(2)と式(3)の間は自由に往き来できるが，筆者の経験上は，ガウスの発散定理を式(3)の形で覚えておく方が便利である．

ガウスの発散定理は一見ややこしそうに見えるが，単に「定積分の値は積分区間の上端と下端における原始関数の差で与えられる」ということを言っているに過ぎない．

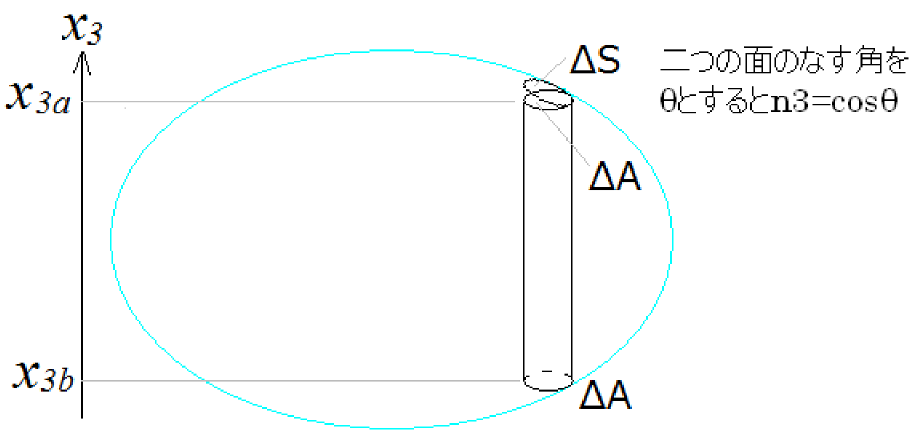

図-1　ガウスの発散定理の説明

例えば$i = 3$の場合について式(3)の左辺を計算してみる．まず，x_3に関する積分を先に行うことにして，次に面積積分を行うことにすれば，

$$\int \phi_{,3} dV = \sum \Delta A \int_{x_{3b}}^{x_{3a}} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx_3$$

となる．ここにΔAはx_3軸に垂直な微小面積である．ここで「定積分の値は積分区間の上端と下端における原始関数の差で与えられる」ことを考慮すると，上式は

$$\int \phi_{,3} dV = \sum \left(\Delta A\, \phi|_{x_3 = x_{3a}} - \Delta A\, \phi|_{x_3 = x_{3b}} \right)$$

となる．ここにx_{3a}とx_{3b}は積分区間の上端と下端である．ここで，境界面（図-1 の青線）に沿った微小面積ΔSとΔAとの比は，二つの面のなす角θをとすると$\cos\theta = n_3$で与えられるため，上式は

$$\int \phi_{,3} dV = \sum \left(\phi n_3 \Delta S|_{x_3 = x_{3a}} + \phi n_3 \Delta S|_{x_3 = x_{3b}} \right)$$

のように変形できる．ここで，単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$は外向きであることから，$x_3 = x_{3b}$では$n_3 < 0$であることを考慮した．最後に$\Delta S \to 0$の極限をとれば，

$$\int \phi_{,3} dV = \int \phi\, n_3 dS$$

が得られる．$i = 1,2$の場合についても同じように考えることができる．