

1. 固体力学の基本構造

固体力学の基本構造は、図-1に示すように、運動方程式、応力～ひずみ関係（構成式）、ひずみ～変位関係を連立させて問題を解くようになっている。この構造は単純な1次元の問題から複雑な3次元の問題まで変わらない。ここではこれらの基本式を順次説明するとともに、それらを連立させて弾性波動論の支配方程式である Navier の式を導く。

応力～ひずみ関係については、地盤工学の分野では昔から土を対象に非線形の応力～ひずみ関係が多数提案されているが、地震学の大半の理論は線形の応力～ひずみ関係に基づいて構築されている。ここで説明するのも線形の応力～ひずみ関係である。線形弾性体の応力～ひずみ関係を規定する弾性定数のうち独立なものが何個あるかという点については少し詳しく説明する。

ひずみ～変位関係については最も広く用いられている微小ひずみ理論に基づく関係を説明する。

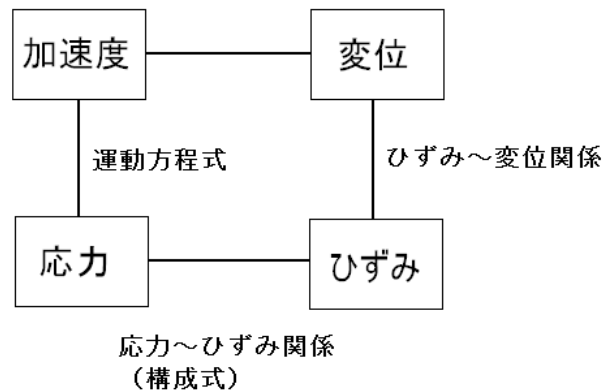


図-1 固体力学の基本構造

2. 運動方程式

図-2に示すような微小な直方体に関する x_1 方向の運動方程式を考える。 x_1 軸に垂直な2枚の面に作用する x_1 方向の力の合計は

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \Delta x_1\right) \Delta x_2 \Delta x_3 - \sigma_{11} \Delta x_2 \Delta x_3 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

である。ここに σ_{ij} は応力である。 x_2 軸に垂直な面と x_3 軸に垂直な面についても同様に考えることができるので、6枚の面を介して直方体に作用する x_1 方向の力の合計は

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}\right) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

となる。これに物体力（例えば重力） b_i を加えると、直方体に作用する x_1 方向の力の合計は

$$\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1\right)\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$$

となる。ここに ρ は密度である。（質量） \times （加速度）＝（力）であるから、

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1\right) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

であり（ここに u_i は変位である）、両辺を $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ で割れば

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1$$

が得られる。 x_2 方向と x_3 方向についても同様に考えることができるので、結局運動方程式は次式で与えられる。

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + \rho b_i \tag{1}$$

ここでは表記を簡単にするため次の記号を用いている。

$$\text{時間微分} : \dot{\circ} \equiv \frac{\partial \circ}{\partial t}$$

$$\text{空間微分} : \circ_{,i} \equiv \frac{\partial \circ}{\partial x_i}$$

また添字には総和規約を適用している。これらの記号と総和規約は特に断らない限り本稿全体を通じて適用する。

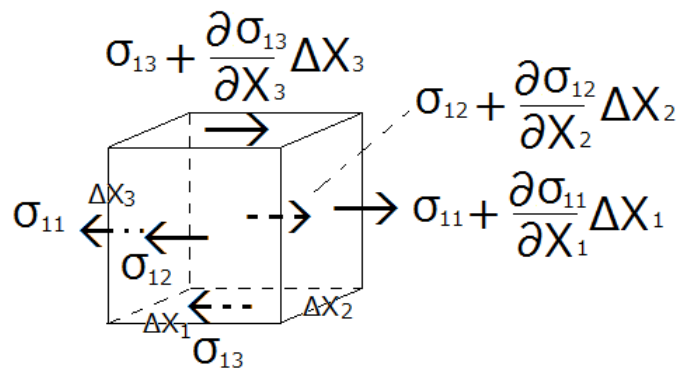


図-2 運動方程式を導くのに用いる微小な直方体

応力の各成分のうち σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} は直応力, σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} はせん断応力と呼ばれる. また, 応力の各成分について次式 (コーシーの式) が成立する.

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2)$$

ここに \mathbf{n} はある面に対する単位法線ベクトル, n_i はその成分, \mathbf{t} はトラクション (面を挟んで \mathbf{n} の指し示している側がそうでない側に及ぼす単位面積当たりの力), t_i はその成分である. コーシーの式は図-3 に示すような微小な三角錐 OABC に関する力のつり合いを考慮することにより導くことができる. その際, 三角形 ABC と三角形 ABO の面積比は n_3 であることを利用できる. 力のつり合いを考慮する際, 慣性力と物体力は高次の微小量として消えてしまう. 三角錐の一边の長さを Δl で表した場合, 表面に作用する力は Δl の 2 乗に比例するのに対し, 慣性力と物体力は Δl の 3 乗に比例するためである.

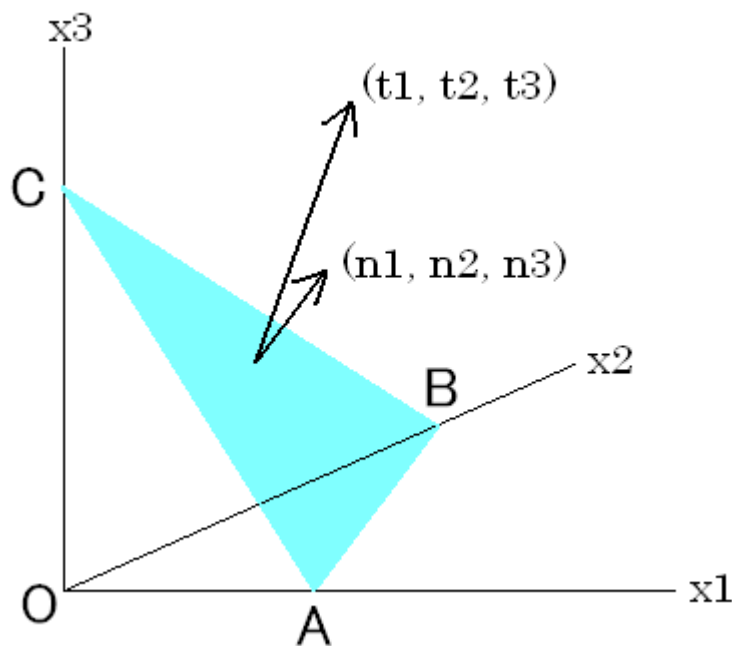


図-3 微小な三角錐 OABC

応力の各成分については $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ であるとも言える. この式は, 弾性体の微小な要素についてのモーメントのつり合いを考えることにより導くことができる. その際, 角加速度を含む項と物体力によるモーメントの項は高次の微小量として消えてしまう.

3. ひずみ～変位関係 (ひずみの定義式)

微小ひずみ理論によるひずみ～変位関係 (ひずみの定義式) は次式で与えられる.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

ひずみの各成分のうち ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} は直ひずみ, ε_{12} , ε_{23} , ε_{31} はせん断ひずみと呼ばれる. また定義により $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ である.

一方、次のものを「工学ひずみ」と呼ぶことがある。「工学」は省略することがある。しかし、記号として γ が使われていれば、それは ε の 2 倍であると思って良い。

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (4)$$

4. 応力～ひずみ関係

線形弾性体の応力～ひずみ関係を規定する弾性定数のうち独立なものが何個あるかという点については過去に論争が行われたこともあるようである¹²⁾。このような論争が起こる背景として、弾性論のこの部分について多くの教科書で採用されているひずみエネルギー関数に基づく説明¹³⁾がわかりにくいという点があるのではないかと考えている。この部分に関しては、(力) × (変位) = (仕事) という基本概念に戻って考える方が、より簡明で誰にとっても納得のいく説明となるので良いと思う。以下にこれを示す。

まず、応力が 9 成分、ひずみが 9 成分あるので、それらの間の線形関係を記述するためには、一般には 81 個の定数が必要である。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1121} & c_{1132} & c_{1113} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2221} & c_{2232} & c_{2213} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3321} & c_{3332} & c_{3313} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1223} & c_{1231} & c_{1221} & c_{1232} & c_{1213} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2323} & c_{2331} & c_{2321} & c_{2332} & c_{2313} \\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & c_{3112} & c_{3123} & c_{3131} & c_{3121} & c_{3132} & c_{3113} \\ c_{2111} & c_{2122} & c_{2133} & c_{2112} & c_{2123} & c_{2131} & c_{2121} & c_{2132} & c_{2113} \\ c_{3211} & c_{3222} & c_{3233} & c_{3212} & c_{3223} & c_{3231} & c_{3221} & c_{3232} & c_{3213} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} & c_{1323} & c_{1331} & c_{1321} & c_{1332} & c_{1313} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \end{pmatrix} \quad (5)$$

式(5)の添え字による表現は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (6)$$

ここで、ひずみの対称性 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ より、マトリクスの 4～6 列目と 7～9 列目を加算することができ、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} + c_{1121} & c_{1123} + c_{1132} & c_{1131} + c_{1113} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} + c_{2221} & c_{2223} + c_{2232} & c_{2231} + c_{2213} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} + c_{3321} & c_{3323} + c_{3332} & c_{3331} + c_{3313} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} + c_{1221} & c_{1223} + c_{1232} & c_{1231} + c_{1213} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} + c_{2321} & c_{2323} + c_{2332} & c_{2331} + c_{2313} \\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & c_{3112} + c_{3121} & c_{3123} + c_{3132} & c_{3131} + c_{3113} \\ c_{2111} & c_{2122} & c_{2133} & c_{2112} + c_{2121} & c_{2123} + c_{2132} & c_{2131} + c_{2113} \\ c_{3211} & c_{3222} & c_{3233} & c_{3212} + c_{3221} & c_{3223} + c_{3232} & c_{3231} + c_{3213} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} + c_{1321} & c_{1323} + c_{1332} & c_{1331} + c_{1313} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (7)$$

が得られる。この式の形を見ると、 c_{ijkl} と c_{ijlk} を加算したものには意味があるが、個々の c_{ijkl} と c_{ijlk} の値には意味が無い。したがって

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad (8)$$

となるように c_{ijkl} を決めることができ、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 2c_{1112} & 2c_{1123} & 2c_{1131} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & 2c_{2212} & 2c_{2223} & 2c_{2231} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & 2c_{3312} & 2c_{3323} & 2c_{3331} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & 2c_{1212} & 2c_{1223} & 2c_{1231} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & 2c_{2312} & 2c_{2323} & 2c_{2331} \\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & 2c_{3112} & 2c_{3123} & 2c_{3131} \\ c_{2111} & c_{2122} & c_{2133} & 2c_{2112} & 2c_{2123} & 2c_{2131} \\ c_{3211} & c_{3222} & c_{3233} & 2c_{3212} & 2c_{3223} & 2c_{3231} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & 2c_{1312} & 2c_{1323} & 2c_{1331} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (9)$$

次に、応力の対称性 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ より

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad (10)$$

でなければならず、マトリクスの4~6行目と7~9行目は同じでなければならない。よって、この部分を縮約することができ、その結果次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 2c_{1112} & 2c_{1123} & 2c_{1131} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & 2c_{2212} & 2c_{2223} & 2c_{2231} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & 2c_{3312} & 2c_{3323} & 2c_{3331} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & 2c_{1212} & 2c_{1223} & 2c_{1231} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & 2c_{2312} & 2c_{2323} & 2c_{2331} \\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & 2c_{3112} & 2c_{3123} & 2c_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (11)$$

このように、応力とひずみの対称性を考えることで弾性定数は **36 個**まで減る。

次に、ひずみエネルギーの観点から弾性定数の数を絞ることを考える。

まず、直ひずみ ε_{11} と ε_{22} のみが存在するような場合を考える。このとき、応力の成分 σ_{11} と σ_{22} は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} \\ c_{2211} & c_{2222} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで図-4のようなサイクルでひずみが増え元に戻ることを考える。このとき、弾性体の小領域に対して外部からなされる単位体積あたりの仕事を考えると次のようになる。

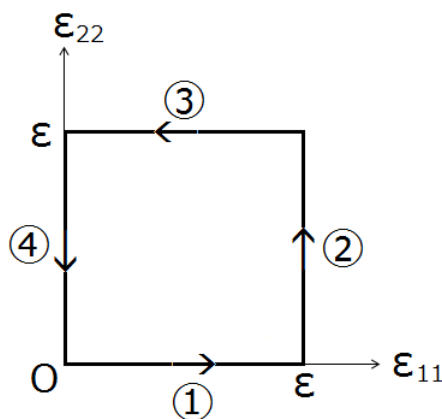


図-4 ひずみのサイクル

経路①では $\varepsilon_{22} = 0$ であるから $\sigma_{11} = c_{1111}\varepsilon_{11}$ である。よって外部からなされる単位体積あたりの仕事は次式で与えられる。

$$W_1 = \int_0^\varepsilon \sigma_{11} d\varepsilon_{11} = \int_0^\varepsilon c_{1111}\varepsilon_{11} d\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}c_{1111}\varepsilon^2$$

経路②では $\varepsilon_{11} = \varepsilon$ であるから $\sigma_{22} = c_{2211}\varepsilon + c_{2222}\varepsilon_{22}$ である。よって外部からなされる単位体積あたりの仕事は次式で与えられる。

$$W_2 = \int_0^\varepsilon \sigma_{22} d\varepsilon_{22} = \int_0^\varepsilon (c_{2211}\varepsilon + c_{2222}\varepsilon_{22}) d\varepsilon_{22} = c_{2211}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}c_{2222}\varepsilon^2$$

経路③では $\varepsilon_{22} = \varepsilon$ であるから $\sigma_{11} = c_{1111}\varepsilon_{11} + c_{1122}\varepsilon$ である。よって外部からなされる単位体積あたりの仕事は次式で与えられる。

$$W_3 = \int_\varepsilon^0 \sigma_{11} d\varepsilon_{11} = \int_\varepsilon^0 (c_{1111}\varepsilon_{11} + c_{1122}\varepsilon) d\varepsilon_{11} = -\frac{1}{2}c_{1111}\varepsilon^2 - c_{1122}\varepsilon^2$$

経路④では $\varepsilon_{11} = 0$ であるから $\sigma_{22} = c_{2222}\varepsilon_{22}$ である。よって外部からなされる単位体積あたりの仕事は次式で与えられる。

$$W_4 = \int_\varepsilon^0 \sigma_{22} d\varepsilon_{22} = \int_\varepsilon^0 c_{2222}\varepsilon_{22} d\varepsilon_{22} = -\frac{1}{2}c_{2222}\varepsilon^2$$

よって、1サイクルの間に外部からなされる単位体積あたりの仕事は次式で与えられる。

$$W = (c_{2211} - c_{1122})\varepsilon^2$$

ここで、 $c_{2211} < c_{1122}$ であれば、1サイクル回ってひずみがゼロの状態に戻るまでの間に負の仕事がなされる、すなわち弾性体の小領域からエネルギーが湧いてくることになるので不都合である。また、 $c_{2211} > c_{1122}$ であれば、サイクルを逆に回せばやはりエネルギーが湧いてくることになるので不都合である。従って $c_{2211} = c_{1122}$ でなければならない。

ここでは ε_{11} と ε_{22} の組み合わせを考えたが、他のひずみ成分の組み合わせについても同じ議論が展開できる。従って、 c_{ijkl} は対称性

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (13)$$

を有していなければならず、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} \\ \text{syn.} & c_{2222} & c_{2233} \\ \text{syn.} & \text{syn.} & c_{3333} \\ \text{syn.} & \text{syn.} & \text{syn.} \\ \text{syn.} & \text{syn.} & \text{syn.} \\ \text{syn.} & \text{syn.} & \text{syn.} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (14)$$

このように、ひずみエネルギーの観点から弾性定数は 21 個まで減る。

ここから先さらに弾性定数を減らそうと思えば、弾性体の対称性を仮定せざるを得ない。対称性を仮定するという事は等方性を仮定するという事でもある。なぜなら、仮に等方的でない弾性体があった場合、例えば x_1 方向と x_2 方向で P 波速度の異なる弾性体があった場合、 45° 回転させてみれば、その弾性体は対称的ではないからである。そこで、以下においては弾性体の対称性と等方性をセットで仮定する。

弾性体の対称性を仮定すると、直応力は直ひずみで、せん断応力はせん断ひずみで決まることになる。直応力がせん断ひずみに関連すると仮にすると、例えば右向きのせん断変形が生じたときに直応力が増え、左向きのせん断変形が生じたときに直応力が減ることになるので、弾性体の対称性に反することになる。せん断応力と直ひずみの関係についても同様のことが言える。従って、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & & & \\ \text{syn.} & c_{2222} & c_{2233} & & & \\ \text{syn.} & \text{syn.} & c_{3333} & & & \\ & & & \mathbf{0} & & \\ & & & 2c_{1212} & 2c_{1223} & 2c_{1231} \\ & & & \text{syn.} & 2c_{2323} & 2c_{2331} \\ & & & \text{syn.} & \text{syn.} & 2c_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (15)$$

が得られる。ここで $\mathbf{0}$ はゼロ行列である。

次に、 $x_1 - x_2$ 平面内でのせん断変形のみが生じている状態を考える。すなわち ε_{12} のみが存在するような変位場を考える。このとき、 x_3 方向には変位が生じていないのであるから、応力成分のうち σ_{23} や σ_{31} はゼロとなるべきである（これも弾性体の対称性である）。すなわち式(15)で青で表示している箇所はゼロとなるべきである。他の成分についても同様に考えると次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & & & \\ \text{syn.} & c_{2222} & c_{2233} & & & \\ \text{syn.} & \text{syn.} & c_{3333} & & & \\ & & & \mathbf{0} & & \\ & & & 2c_{1212} & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2c_{2323} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2c_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (16)$$

さらに、いま等方性を仮定しているので

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} = c \quad (17)$$

$$c_{1122} = c_{1133} = c_{2233} = \lambda \quad (18)$$

$$2c_{1212} = 2c_{2323} = 2c_{3131} = 2\mu \quad (19)$$

とおくことができ、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & c & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & c & & & \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2\mu & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (20)$$

が得られる。

ここで、 ε_{11} と ε_{22} のみが存在するような変位場を考え、図-5に示すように古い座標系 (x_1, x_2) から新しい座標系 (\bar{x}_1, \bar{x}_2) への変換を考える。このとき変位、ひずみ、応力は次式のように変換される。

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (23)$$

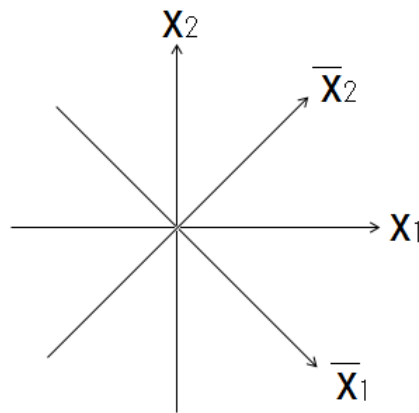


図-5 (x_1, x_2) から (\bar{x}_1, \bar{x}_2) への座標変換 (45度ずれている)

特別な場合として $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) = (\varepsilon, -\varepsilon)$ の場合を考えると、新座標系でのせん断応力～せん断ひずみ関係は

$$\bar{\sigma}_{12} = (c - \lambda)\bar{\varepsilon}_{12}$$

であり、これと式(19)を見比べると、等方であればせん断剛性が等しくなければならないので

$$c - \lambda = 2\mu$$

すなわち

$$c = \lambda + 2\mu$$

である。これらを整理すると次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2\mu & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (24)$$

λ と μ はラメ定数と呼ばれる。マトリクス of 添え字による表現は次式で与えられる。

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (25)$$

この逆行列をとり弾性定数を書き換えると次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad (26)$$

ここに E はヤング率， ν はポアソン比， G はせん断弾性係数またはせん断剛性であり次式で与えられる。

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu \quad (27)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (28)$$

$$G = \mu \quad (29)$$

せん断剛性とヤング率，ポアソン比の関係は次式で与えられる。

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (30)$$

ここで重要な式をまとめておくと次のようになる。

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6) \text{再掲}$$

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad (10) \text{再掲}$$

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad (8) \text{再掲}$$

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (13) \text{再掲}$$

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (25) \text{再掲}$$

式(6)と式(25)をまとめると次式が得られる。

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (31)$$

5. Navier の式

式(1)(3)(6)を連立させると次式が得られる (ここで $c_{ijkl} = c_{ijlk}$ を用いている).

$$\rho \ddot{u}_i = (c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + \rho b_i \quad (32)$$

式(32)は汎用性を持たせるため c_{ijkl} の空間微分がゼロでない場合にも対応できる式としているが、ほとんどの応用問題では c_{ijkl} は区分的に一定と考える. その場合, 式(32)は次式となる.

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} u_{k,jl} + \rho b_i \quad (33)$$

さらに, 大多数の応用問題では式(25)の弾性定数を採用する. その場合, 式(33)は次式となる.

$$\rho \ddot{u}_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i \quad (34)$$

式(32)(33)(34)が弾性波動論における支配方程式 (Navier の式) である. これを与えられた初期条件と境界条件の下で解くことになる.

ここまでの議論からわかるように, 等方 (isotropic) な弾性体の特性を規定するパラメーターのうち独立なものは3つ (E, ν, ρ または λ, μ, ρ) である. 減衰を考える場合はこれに Q 値が加わる. 弾性定数間の換算式を付録に示す.

6. P 波速度

いま x_1 方向に伝播する平面波を考え, かつ, 変位の向きは x_1 に平行とする. 式(34)より

$$\rho \ddot{u}_1 = (\lambda + 2\mu) u_{1,11} \quad (35)$$

両辺をフーリエ変換すると

$$-\omega^2 \rho \hat{u}_1 = (\lambda + 2\mu) \hat{u}_{1,11} \quad (36)$$

ここで

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (37)$$

と置くと

$$\omega^2 \hat{u}_1 + \alpha^2 \hat{u}_{1,11} = 0 \quad (38)$$

ここで

$$k_\alpha = \omega/\alpha \quad (39)$$

と置くと

$$k_\alpha^2 \hat{u}_1 + \hat{u}_{1,11} = 0 \quad (40)$$

これの一般解は

$$\hat{u}_1 = C e^{-ik_\alpha x_1} \quad (41)$$

式(41)が表すものは、 x_1 方向に速度 α で伝播する波である。これは、式(41)をフーリエ逆変換することをイメージすればわかりやすい。式(41)をフーリエ逆変換するときは $e^{i\omega t}$ を乗じて ω で積分する。そのとき、

$$e^{i(\omega t - k_\alpha x_1)}$$

のような関数が現れるが、ある時刻とある地点を基準に考えると、その時刻から Δt だけ経過した時刻における $\Delta x_1 = +\alpha \Delta t$ だけ移動した地点での関数の値は、元の値から変化しない。従って基準時刻における基準地点での変位の値が伝播していくとみなすことができる。

7. S波速度

いま x_1 方向に伝播する平面波を考え、かつ、変位の向きは x_2 に平行とする。式(34)より

$$\rho \ddot{u}_2 = \mu u_{2,11} \quad (42)$$

両辺をフーリエ変換すると

$$-\omega^2 \rho \hat{u}_2 = \mu \hat{u}_{2,11} \quad (43)$$

ここで

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (44)$$

と置くと

$$\omega^2 \hat{u}_2 + \beta^2 \hat{u}_{2,11} = 0 \quad (45)$$

ここで

$$k_\beta = \omega/\beta \quad (46)$$

と置くと

$$k_\beta^2 \hat{u}_2 + \hat{u}_{2,11} = 0 \quad (47)$$

これの一般解は

$$\hat{u}_2 = C e^{-ik_\beta x_1} \quad (48)$$

式(48)が表すものは、 x_1 方向に速度 β で伝播する波である。

式(37)と式(44)を比較すると必ずP波速度の方がS波速度より大きい。従って、P波は必ずS波より先に到達する。またPS時間から震源距離を概略推定できる。非常に大雑把に言うとPS時間が10sなら震源距離 $\approx 100\text{km}$ である。

8. 媒質境界での弾性波の透過・反射

図-6に示すように、平面を境に異なる媒質が接しており、平面に対して垂直に平面波（ここではS波）が入射する状況を考える。このとき、透過率と反射率はそれぞれ次式で与えられる。

$$(\text{透過率}) = \left| \frac{2}{1+R} \right| \quad (49)$$

$$(\text{反射率}) = \left| \frac{1-R}{1+R} \right| \quad (50)$$

ここに

$$R = \frac{\rho_1 \beta_1}{\rho_2 \beta_2} \quad (51)$$

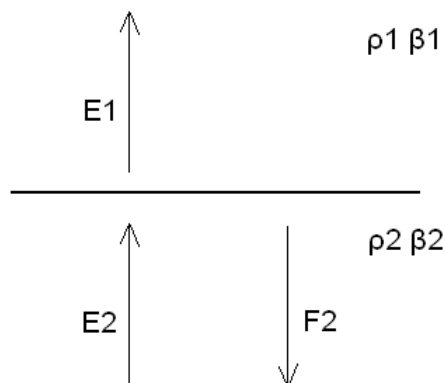


図-6 弾性波の透過と反射

これらの式は次のようにして導くことができる。上向きに x 軸をとり、境界で $x = 0$ とすると、領域 I と領域 II での変位と応力はそれぞれ次式で与えられる。

変位

$$\text{領域 I : } \hat{u} = E_1 e^{-ik_1 x}$$

$$\text{領域 II : } \hat{u} = E_2 e^{-ik_2 x} + F_2 e^{ik_2 x}$$

せん断応力

$$\text{領域 I : } \hat{t} = -ik_1 \mu_1 E_1 e^{-ik_1 x}$$

$$\text{領域 II : } \hat{t} = -ik_2 \mu_2 E_2 e^{-ik_2 x} + ik_2 \mu_2 F_2 e^{ik_2 x}$$

また境界での変位と応力はそれぞれ次式で与えられる。

境界での変位

$$\text{領域 I : } \hat{u} = E_1$$

$$\text{領域 II : } \hat{u} = E_2 + F_2$$

境界でのせん断応力

$$\text{領域 I : } \hat{t} = -ik_1 \mu_1 E_1$$

$$\text{領域 II : } \hat{t} = -ik_2 \mu_2 E_2 + ik_2 \mu_2 F_2$$

境界での変位とせん断応力の連続条件から

$$E_1 = E_2 + F_2$$

$$RE_1 = E_2 - F_2$$

であり、これより透過率と反射率が求まる。

ここで少し極端なケースを考えてみると、

- 1) $R = 0$ すなわち自由端反射の場合
(透過率) = 2, (反射率) = 1
- 2) $R = 1$ すなわち上下の媒質に差がない場合
(透過率) = 1, (反射率) = 0
- 3) $R = \infty$ すなわち固定端反射の場合
(透過率) = 0, (反射率) = 1

となる。

式(49)(50)より、地震波は S 波速度の大きい地層から小さい地層に入ると増幅すると言える。しかし、重複反射が生じない限り、増幅倍率は 2 倍に留まる (重複反射については後述)。

上記では S 波の場合について説明したが、P 波の場合は β を α に置き換えるだけである。斜め入射の場合も、少し式は複雑になるが、同じように透過・反射の係数が求まる。平面境界に球面波が入射する場合は、球面波を円筒波の重ね合わせで表現することにより、透過・反射の係数が求まる。境界が平面でない場合の透過・反射係数を解析的に求めることはとても難しいので、差分法・有限要素法・AL 法などの数値解法に頼ることになる。

9. 媒質境界での弾性波の屈折

媒質境界での弾性波の屈折はスネルの法則に従う。

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad (52)$$

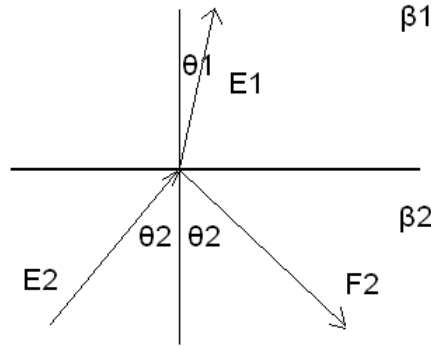


図-7 弾性波の屈折

屈折の結果，地表に近づくほど波線は鉛直に近づく．海の波の進行方向が汀線に近づくほど汀線に垂直になるのと似ている．仮に地震基盤 ($\beta = 3000\text{m/s}$) で入射角が 90 度でも，工学的基盤 ($\beta = 300\text{m/s}$) まで地震波が上昇してくる間にはほとんど伝播方向は鉛直になっている．従って， $\beta \leq 300\text{m/s}$ の表層地盤の地震応答解析では，鉛直下方からの入射を仮定することは妥当であると考えられる．また，地表付近では，P 波は主に上下動に，S 波は主に水平動に対応する．

10. 弾性体におけるエネルギーの収支

運動方程式

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + \rho b_i \quad (1) \text{再掲}$$

の両辺に速度 \dot{u}_i を乗じ， i に関する和をとり，体積積分すると

$$\int \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i dV = \int \dot{u}_i \sigma_{ij,j} dV + \int \rho b_i \dot{u}_i dV \quad (53)$$

式(53)の左辺は

$$\int \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i dV = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (54)$$

式(53)の右辺第一項は，

$$\int \dot{u}_i \sigma_{ij,j} dV = \int (\dot{u}_i \sigma_{ij})_{,j} dV - \int \dot{u}_{i,j} \sigma_{ij} dV \quad (55)$$

となり，さらに式(55)の右辺第一項にガウスの発散定理とコーシーの式 (式(2)) を適用すると

$$\begin{aligned} \int (\dot{u}_i \sigma_{ij})_{,j} dV &= \int \dot{u}_i \sigma_{ij} n_j dS \\ &= \int \dot{u}_i t_i dS \end{aligned} \quad (56)$$

となる。また、式(55)の右辺第二項は

$$\begin{aligned} \int \dot{u}_{i,j} \sigma_{ij} dV &= \int \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \right) \end{aligned} \quad (57)$$

となるので（ここで $c_{ijkl} = c_{klij}$ を用いている）、式(55)(56)(57)から

$$\int \dot{u}_i \sigma_{ij,j} dV = \int \dot{u}_i t_i dS - \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \right) \quad (58)$$

式(53)の右辺第二項は、物体力が時間的に変化しないとすると

$$\int \rho b_i \dot{u}_i dV = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \rho b_i u_i dV \right) \quad (59)$$

式(54)(58)(59)を式(53)に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \int \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV - \int \rho b_i u_i dV \right) = \int \dot{u}_i t_i dS \quad (60)$$

運動エネルギー
ひずみエネルギー
位置エネルギー

この式は、系のエネルギーの単位時間当たりの増分が、外部からなされる単位時間当たりの仕事に等しいことを示している。

参考文献

- 1) 鈴木保典：Hooke 弾性体の独立な弾性定数は 21 ケか 36 ケか？，地震 2，第 42 巻，pp.521-524，1989 年。
- 2) ゲラー ロバート：鈴木保典氏の「Hooke 弾性体の独立な弾性定数は 21 ケか 36 ケか？」についてのコメント，地震 2，第 43 巻，pp.133-135，1990 年。
- 3) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.

付録 弾性定数間の換算式

弾性定数間の換算式を整理すると以下のようになる。

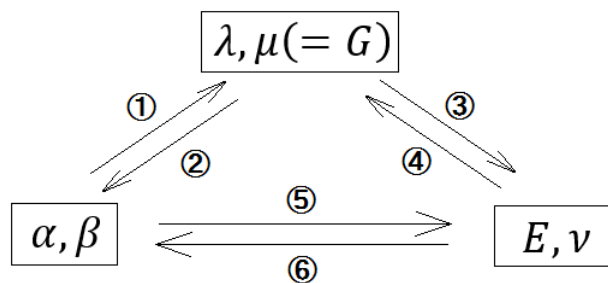


図-A.1 弾性定数間の換算

① α, β から $\lambda, \mu (= G)$ を求めるとき (本文式(37)(44)より)

$$\lambda = \rho(\alpha^2 - 2\beta^2) \quad (\text{A1})$$

$$\mu = \rho\beta^2 \quad (\text{A2})$$

② $\lambda, \mu (= G)$ から α, β を求めるとき (本文式(37)(44)そのもの)

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{A3})$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{A4})$$

③ $\lambda, \mu (= G)$ から E, ν を求めるとき (本文式(27)(28)そのもの)

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu \quad (\text{A5})$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{A6})$$

④ E, ν から $\lambda, \mu (= G)$ を求めるとき (本文式(27)(28)より)

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (\text{A7})$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A8})$$

⑤ α, β から E, ν を求めるとき (式(A1)(A2)(A5)(A6)より)

$$E = \frac{3\alpha^2 - 4\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \rho \beta^2 \quad (\text{A9})$$

$$\nu = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2(\alpha^2 - \beta^2)} \quad (\text{A10})$$

⑥ E, ν から α, β を求めるとき (式(A3)(A4)(A7)(A8)より)

$$\alpha = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad (\text{A11})$$

$$\beta = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \quad (\text{A12})$$

$$\alpha/\beta = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}} \quad (\text{A13})$$

最後の式はP波速度とS波速度の比がポアソン比だけで決まることを示している。 $\nu = 0.25$ のとき $\alpha/\beta = \sqrt{3}$ であるが、この場合の弾性体をポアソン固体と呼ぶ。 $\nu \rightarrow 0.5$ のとき $\alpha/\beta \rightarrow \infty$ となる。