

1. はじめに

本稿では震源に関する議論の出発点として相反性について説明する．はじめに Betti の相反定理とその拡張について述べ、その後、グリーン関数の定義と相反性について述べる．地球を弾性体と仮定できるならば、東京で地面を北向きに叩いた時のニューヨークにおける東向きの変位と、ニューヨークで地面を東向きに叩いた時の東京における北向きの変位は等しい．本稿を最後まで読むとそのことが理解できる．

2. Betti の相反定理

図-1 のように閉じた面で囲まれた媒質を考える．まず、弾性波動論の支配方程式である [Navier の式](#) から出発する．

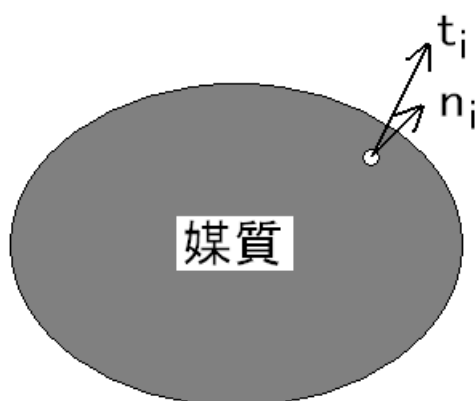
$$\rho \ddot{u}_i = (c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + f_i \quad (1)$$

式(1)の右辺第 2 項は物体力 (外力ともいう) であり、 ρb_i と書かれることもあるが、ここでは f_i と書いている．以下においては、媒質が非一様な場合にも適用できるように、 c_{ijkl} の空間微分がゼロでない場合にも対応できるように式展開をすすめる．

式(1)を満足する任意の二つの変位場 (u_i^I と u_i^{II}) を考える．これらは、同じ支配方程式 (同じ c_{ijkl}) を満足するが、外力や境界条件が異なるため、異なる変位場となっているものとする．

$$\rho \ddot{u}_i^I = (c_{ijkl} u_{k,l}^I)_{,j} + f_i^I \quad (2)$$

$$\rho \ddot{u}_i^{II} = (c_{ijkl} u_{k,l}^{II})_{,j} + f_i^{II} \quad (3)$$



n_i は外向き単位法線ベクトル
 t_i はトラクション

図-1 閉じた面で囲まれた媒質．媒質は非一様であっても良い．

式(2)の両辺に u_i^H を乗じて体積積分すると次式が得られる。

$$\int (f_i^I - \rho \ddot{u}_i^I) u_i^H dV = - \int (c_{ijkl} u_{k,l}^I)_{,j} u_i^H dV$$

ここで部分積分を適用すると右辺は

$$= - \int (c_{ijkl} u_{k,l}^I u_i^H)_{,j} dV + \int c_{ijkl} u_{k,l}^I u_{i,j}^H dV$$

となり、さらに右辺第2項に部分積分を適用すると

$$= - \int (c_{ijkl} u_{k,l}^I u_i^H)_{,j} dV + \int (c_{ijkl} u_k^I u_{i,j}^H)_{,l} dV - \int (c_{ijkl} u_{i,j}^H)_{,l} u_k^I dV$$

となる。ここで $c_{ijkl} = c_{klij}$ を仮定し ([弾性波動論の基礎](#)参照) 右辺第2項、第3項に適用すると

$$= - \int (c_{ijkl} u_{k,l}^I u_i^H)_{,j} dV + \int (c_{klij} u_{i,j}^H u_k^I)_{,l} dV - \int (c_{klij} u_{i,j}^H)_{,l} u_k^I dV$$

第1項と第2項に応力と変位の関係を適用すると

$$= - \int (\sigma_{ij}^I u_i^H)_{,j} dV + \int (\sigma_{kl}^H u_k^I)_{,l} dV - \int (c_{klij} u_{i,j}^H)_{,l} u_k^I dV$$

第3項において添字の交換を行うと、

$$= - \int (\sigma_{ij}^I u_i^H)_{,j} dV + \int (\sigma_{kl}^H u_k^I)_{,l} dV - \int (c_{ijkl} u_{k,l}^H)_{,j} u_i^I dV$$

第3項に式(3)を適用すると

$$= - \int (\sigma_{ij}^I u_i^H)_{,j} dV + \int (\sigma_{kl}^H u_k^I)_{,l} dV + \int (f_i^H - \rho \ddot{u}_i^H) u_i^I dV$$

ここで[ガウスの発散定理](#)を用いると

$$= - \int \sigma_{ij}^I n_j u_i^H dS + \int \sigma_{kl}^H n_l u_k^I dS + \int (f_i^H - \rho \ddot{u}_i^H) u_i^I dV$$

さらに[コーシーの式](#)を適用すると

$$= - \int t_i^I u_i^H dS + \int t_i^H u_i^I dS + \int (f_i^H - \rho \ddot{u}_i^H) u_i^I dV$$

これを整理すると

$$\begin{aligned} \int (f_i^I - \rho \ddot{u}_i^I) u_i^{II} dV - \int (f_i^{II} - \rho \ddot{u}_i^{II}) u_i^I dV \\ = - \int t_i^I u_i^{II} dS + \int t_i^{II} u_i^I dS \end{aligned} \quad (4)$$

となる (Betti の相反定理). ここまで, 弾性体の性質に関して仮定したのは $c_{ijkl} = c_{klij}$ のみである. すなわちここまでの議論は非一様な弾性体にも適用可能である.

なお, 式(2)(3)から式(4)が導かれたが, このとき, 式(2)(3)はそれぞれ別の時刻に対応していても構わない. すなわち, 例えば, $t = t_1$ に対応する u_i^I と $t = t_2$ に対応する u_i^{II} との間にも式(4)は成立する. このことが以下において重要となる.

3. Betti の相反定理の拡張

式(4)は時間に関する概念を含まないので, これを, 時間の概念を含むように拡張する.

式(4)は任意の時刻に対して成立するものであった. そこで, 時刻 τ における u_i^I と, 時刻 $t - \tau$ における u_i^{II} に対する式(4)を考えた上で, 式(4)の両辺を τ で $-\infty$ から $+\infty$ まで積分する.

これは, 二つの時間関数に関して次のような演算を行っていることになる.

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

これは二つの時間関数の合積である. そこで, 合積の記号 (*) を用いると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \int (f_i^I - \rho \ddot{u}_i^I) * u_i^{II} dV - \int (f_i^{II} - \rho \ddot{u}_i^{II}) * u_i^I dV \\ = - \int t_i^I * u_i^{II} dS + \int t_i^{II} * u_i^I dS \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)の左辺には, 加速度と変位の合積が含まれているが, これは次のように打ち消し合う.

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i^I * u_i^{II} - \ddot{u}_i^{II} * u_i^I &= \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_i^I(\tau) u_i^{II}(t - \tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_i^{II}(\tau) u_i^I(t - \tau) d\tau \\ &= [\dot{u}_i^I(\tau) u_i^{II}(t - \tau)]_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} - [\dot{u}_i^{II}(\tau) u_i^I(t - \tau)]_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_i^I(\tau) \dot{u}_i^{II}(t - \tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_i^{II}(\tau) \dot{u}_i^I(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\dot{u}_i^I(\tau)u_i^{II}(t-\tau)]_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} - [\dot{u}_i^{II}(\tau)u_i^I(t-\tau)]_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \\
&\quad + \dot{u}_i^I * \dot{u}_i^{II} - \dot{u}_i^{II} * \dot{u}_i^I
\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)の右辺の第1項と第2項は、時刻 $\tau = -\infty$ と $\tau = +\infty$ で速度がゼロである条件の下ではゼロである。また、式(6)の右辺の第3項と第4項は同じものである（合積は順序を変更しても同じ）。よって式(6)の右辺はゼロである。よって

$$\begin{aligned}
&\int f_i^I * u_i^{II} dV - \int f_i^{II} * u_i^I dV \\
&= - \int t_i^I * u_i^{II} dS + \int t_i^{II} * u_i^I dS
\end{aligned} \tag{7}$$

である。この式は一様でない弾性体に対しても成立する。

さらに、媒質が有限で、変位場 I, II が境界上でトラクション=0 を満足する場合は、式(7)右辺の面積積分がゼロとなるため、

$$\int f_i^I * u_i^{II} dV - \int f_i^{II} * u_i^I dV = 0 \tag{8}$$

が成立する。

また、式(7)右辺の面積積分がゼロとなる別な条件として、媒質が無限遠方まで延びており、変位場 I, II が無限遠方でゾンマーフェルトの放射条件を満足する場合がある。ゾンマーフェルトの放射条件を満足する場合とは、図-2 に示すように、全ての不均質と震源が有限な範囲に収まっている場合である。このとき、図-2 に示すように、境界として十分大きい球 S_∞ をとれば、 S_∞ 上における波動場は中心から外に向かう球面波となるので、それらのフーリエ変換は

$$\hat{u}_i^I = \frac{1}{r} e^{-i\omega r/c} S_i^I(\omega) \tag{9}$$

$$\hat{u}_i^{II} = \frac{1}{r} e^{-i\omega r/c} S_i^{II}(\omega) \tag{10}$$

と書くことができる。ここに $S_i^I(\omega)$ と $S_i^{II}(\omega)$ は輻射の強さを表す（ラディエーションパターンなどもすべてここに含める）。また c はP波速度またはS波速度である。式(9)(10)に対応するトラクションを計算すると

$$\hat{t}_i^I = -i\omega\rho c \frac{1}{r} e^{-i\omega r/c} S_i^I(\omega) \tag{11}$$

$$\hat{t}_i^{II} = -i\omega\rho c \frac{1}{r} e^{-i\omega r/c} S_i^{II}(\omega) \tag{12}$$

となる（この計算は、波の進行方向と平行にローカルな座標系をとると比較的簡単に行うことができる）。式(9)(10)(11)(12)を用いて式(7)右辺のフーリエ変換を計算するとゼロとなる。すなわち式(8)が成立する。ただし、媒質の不均質が無限遠まで続くような場合、例えば無限遠方に散乱体があるような場合は、波動場は中心から外に向かう球面波とはならず、ゾンマーフェルトの放射条件は成立しない。

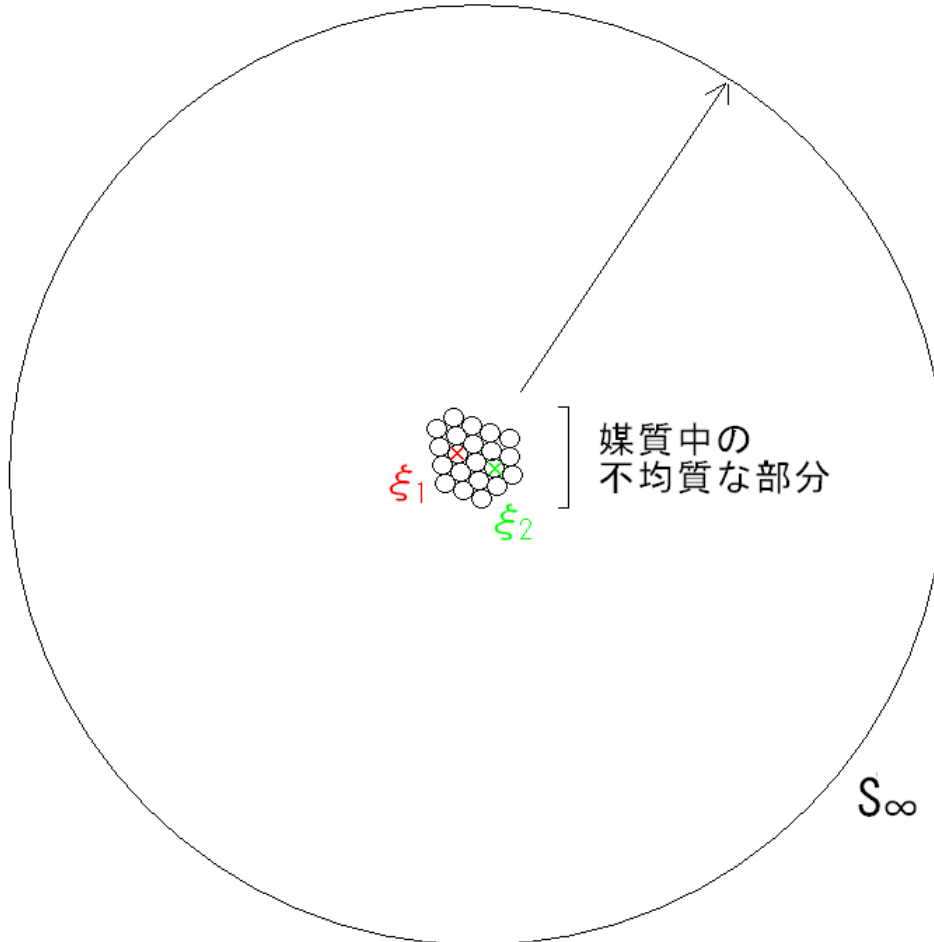


図-2 ゾンマーフェルトの放射条件 (ξ_1, ξ_2 は震源を表す)

4. グリーン関数の定義

弾性体内部のある一つの点をトンカチで叩いたときの弾性体の応答をグリーン関数という。具体的には、式(1)において、外力 f_i が

$$f_i = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t) \quad (13)$$

で与えられる場合の u_i を

$$u_i = G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) \quad (14)$$

のような記号で表し、これをグリーン関数と呼ぶ。このとき $\boldsymbol{\xi}$ は載荷点、 n は載荷方向である。 G_{in} は、点 $\boldsymbol{\xi}$ を n 方向に叩いた時の点 \mathbf{x} における i 方向の変位を、叩いた時刻をゼロとして表したものである。

グリーン関数は定義により次式を満足する.

$$\rho \ddot{G}_{in} = (c_{ijkl} G_{kn,l})_{,j} + \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t) \quad (15)$$

なお, $\delta(t)$ と $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ はそれぞれ次の性質を有する.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (16)$$

$$\int_{\text{全空間}} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dV = 1 \quad (17)$$

ここで, グリーン関数は通常の変位とはディメンジョンが異なっていることに注意が必要である.

グリーン関数は媒質や境界条件に応じて一般には複雑な関数となるが, 一様な全無限弾性体のグリーン関数は比較的単純な関数となる.

5. グリーン関数の相反性

ここで表-1 の 2 系統のグリーン関数を考え, それらを式(7)に代入する.

表-1 2 系統のグリーン関数

载荷条件	式
载荷点: $\boldsymbol{\xi}_1$ 载荷方向: n	$f_i^I = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1) \delta(t)$ $u_i^I = G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_1)$
载荷点: $\boldsymbol{\xi}_2$ 载荷方向: m	$f_i^{II} = \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_2) \delta(t)$ $u_i^{II} = G_{im}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_2)$

5.1 有限な弾性体におけるグリーン関数の相反性

媒質が有限で, グリーン関数が境界上で (例えば Aki and Richards¹⁾ の p.38 にあるように地球の表面で) トラクション=0 を満足する場合は, 式(7)右辺の面積積分はゼロとなる. 一方, 式(7)左辺は

$$\int \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1) \delta(t) * G_{im}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_2) dV - \int \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_2) \delta(t) * G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_1) dV$$

合積を実行すると

$$\int \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1) G_{im}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_2) dV - \int \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_2) G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_1) dV$$

体積積分を行うと

$$\delta_{in}G_{im}(\xi_1, t; \xi_2) - \delta_{im}G_{in}(\xi_2, t; \xi_1)$$

さらに*i*に関する和をとると

$$G_{nm}(\xi_1, t; \xi_2) - G_{mn}(\xi_2, t; \xi_1)$$

従って、この場合、グリーン関数の相反性、すなわち

$$G_{nm}(\xi_1, t; \xi_2) = G_{mn}(\xi_2, t; \xi_1) \quad (18)$$

が成立する。すなわち、点 ξ_1 を*n*方向に叩いた時の点 ξ_2 における*m*方向の変位と、点 ξ_2 を*m*方向に叩いた時の点 ξ_1 における*n*方向の変位は等しい。このことは、一様でない弾性体に対しても言える。例えば東京で地面を北向きに叩いた時のニューヨークにおける東向きの変位と、ニューヨークで地面を東向きに叩いた時の東京における北向きの変位は等しい（理論上は）。

5.2 有限でない弾性体におけるグリーン関数の相反性

5.1の説明では、有限でない弾性体のグリーン関数の相反性が説明できていない。これを説明する方法は複数ある。一つは、全ての不均質が有限な範囲に収まっている弾性体（図-2）を考え、「ゾンマーフェルトの放射条件より式(7)右辺はゼロとなる」とするものである。しかし、この説明は、任意の有限でない弾性体に適用できないという欠点がある。

もう一つの説明²⁾は、式(7)右辺の被積分関数が合積となっていることに着目するものである。一般に二つの関数が

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \text{ for } t < t_1 \\ g(t) &= 0 \text{ for } t < t_2 \end{aligned}$$

を満足するとき、その合積は

$$f(t) * g(t) = 0 \text{ for } t < t_1 + t_2$$

を満足する。式(7)右辺に含まれる関数は、この場合、グリーン関数、およびグリーン関数から計算されるトラクションであり、震源からP波が到達しない時刻においてはゼロであるため、積分を行う境界を無限遠方にとれば、任意の有限な時刻において式(7)右辺はゼロ、すなわち、任意の有限な時刻において式(18)の相反性が成立する。こちらの説明の方が、任意の有限でない弾性体に適用できるので優れている。

参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.
- 2) 日下部哲也・亀伸樹：表現定理とグリーン関数－全無限グリーン関数による有限領域の弾性変形場の表現－，地震2，第68巻，pp.83-89，2015年。