2017/9/4 第 1 版
2021/5/13 第 2 版

フーリエ変換はなぜ元に戻るのか？

野津

1. はじめに

日本で地震工学に携わる人の多くはフーリエ解析を大崎先生の本[1)]で学ぶことになる．大崎先生の本はたいへん優れた本であるが，私が個人的に大崎先生の本の唯一の欠点だと思っているのは，先に有限フーリエ係数について学び，後から連続関数のフーリエ変換について学ぶようになっているので，最短時間でフーリエ解析を学ぶのに必ずしも適していないという点である．先に連続関数のフーリエ変換を学び，フーリエ変換に関する諸定理を連続関数の状態で学んだ上で，フーリエ変換の離散表示としての有限複素フーリエ係数を後から学ぶ方が，はるかに効率が良く，また，より深く理解できるようにも思う．ただしその場合，連続関数のフーリエ変換と逆変換が確かに互いに逆変換の関係にあることを最初に学ばなければならない．

時刻歴波形$f(t)$に対し，一般にフーリエ変換は式(1)で，フーリエ逆変換は式(2)で定義される．

$$\text{フーリエ変換}\quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1}$$

$$\text{フーリエ逆変換}\quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{2}$$

式(1)によりフーリエ変換可能な任意の時刻歴波形は，式(1)(2)の演算を行うことにより元に戻るのであるが，この点についてきちんと説明している教科書は，やや高度な教科書を除けば意外に少ない．そこで本稿では，式(1)(2)の演算で任意の時刻歴波形が元に戻ることをできるだけわかりやすく説明する．

なお以下の説明は，文献 2)の p.65 にある説明を，地震工学者にとってより馴染みやすくなるように再構成したものである．全体は二つの手順からなっている．はじめにガウス関数がフーリエ変換＋逆変換で元に戻ることについて述べ，次に任意の時刻歴波形がフーリエ変換＋逆変換で元に戻ることについて述べる．

2. ガウス関数のフーリエ変換・逆変換

ここでは，式(3)に示すように，平均値 0，標準偏差σの正規分布の確率密度関数を考える．

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{3}$$

このフーリエ変換を定義に従って計算すると，

$$G(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \tag{4}$$

となる（**付録 1** 参照）．すなわち，ガウス関数のフーリエ変換はガウス関数となる．また$G(\omega)$のフーリエ逆変換を定義に従って計算すると$g(t)$に戻ることが確認できる（**付録 1** 参照）．したがって，少なくともガウス関数に関しては，フーリエ変換＋逆変換で元に戻ると言える．

ここで，$\sigma \to 0$の極限をとると，$g(t)$は面積=1 を保ったまま幅が狭くなっていき，$\delta(t)$に収束する．また，$G(\omega)$は 1 に収束する．このような関数を用意した上で，任意の時刻歴波形についての検討に移る．

3.　任意の時刻歴波形のフーリエ変換・逆変換

いま，任意の時刻歴波形$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$に対し，次のような積分を考える．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{G}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau\right)\mathrm{G}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega \tag{5}$$

ここで右辺においてωに関する積分を先に行うことにすれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{G}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{G}(\omega)e^{i\omega(\mathrm{t}-\mathrm{\tau})}\, d\omega\right) f(\tau)\, d\tau \tag{6}$$

となる．ここで右辺の括弧内は$\mathrm{G}(\omega)$のフーリエ逆変換であることに注意すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{G}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)\, d\tau \tag{7}$$

この式は，フーリエ解析でよく登場する「時間領域での合積は周波数領域での積に対応する」という性質を表している．ここで$\sigma \to 0$の極限をとれば，$g(\tau) \to \delta(\tau)$，$G(\omega) \to 1$となるため，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = f(t) \tag{8}$$

が得られる．したがって，式(1)によりフーリエ変換可能な任意の時刻歴波形は，フーリエ変換＋逆変換で元に戻ると言える．

参考文献

1) 大崎順彦：新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994 年．
2) 新井仁之：新・フーリエ解析と関数解析学，培風館，2010 年．

付録１　ガウス関数のフーリエ変換・逆変換の詳細

まず次のような積分を考える．

$$I=\int_{-\tau}^{\tau} g(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\tau}^{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-i\omega t}\,dt \tag{A1}$$

両辺をωで微分すると

$$\frac{dI}{d\omega}=-i\int_{-\tau}^{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-i\omega t}\,dt \tag{A2}$$

となり，右辺に部分積分を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\omega}&=i\sigma^2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-i\omega t}\right]_{-\tau}^{\tau}-\sigma^2\omega\int_{-\tau}^{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-i\omega t}\,dt\\&=i\sigma^2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-i\omega t}\right]_{-\tau}^{\tau}-\sigma^2\omega I\end{aligned} \tag{A3}$$

となる．ここで$\tau\to\infty$とすると右辺第一項は消え，$I\to G(\omega)$となるため，結局

$$G'(\omega)=-\sigma^2\omega G(\omega) \tag{A4}$$

のような$G(\omega)$に関する微分方程式が導かれることになり，これを解くと

$$G(\omega)=G(0)e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \tag{A5}$$

が得られる．一方，定義により

$$G(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt \tag{A6}$$

であるが，この最後の積分の値は$\sqrt{2\pi}\sigma$である（付録 2 参照）から$G(0)=1$であり，

$$G(\omega)=e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \tag{A7}$$

すなわち式(4)が得られる．

次に，このフーリエ逆変換を定義に従って計算する．式(3)(4)より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\, dt = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \tag{A8}$$

であるが，この式でtとωを入れ替え，σを$1/\sigma$に入れ替え，$\sqrt{2\pi}\sigma$で割ると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} e^{-i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{A9}$$

が得られ，両辺の共役複素数をとると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{A10}$$

が得られる．この式は，$G(\omega)$をフーリエ逆変換すると$g(t)$に戻ることを示している．

付録 2　ガウス関数の積分

　ガウス関数の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx$$

は次のように二重積分を使って計算できる[例えば 1)]．まず，関数$\exp\{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)\}$の面積積分は次のように二通りに表すことができる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\ dxdy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\ rd\theta dr \tag{A11}$$

右辺は極座標表示である．ここで左辺は次式のように書き換えることができる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\ dxdy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\ dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx\right)^2 \tag{A12}$$

また右辺を計算すると

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\ rd\theta dr = 2\pi\int_{0}^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\ dr = 2\pi\sigma^2 \tag{A13}$$

式(A11)(A12)(A13)より次式が得られる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx = \sqrt{2\pi}\sigma$$

参考文献

1）高木貞治：解析概論，改訂第三版，岩波書店，1961 年.