2013/2/5

なぜ群遅延時間と地震動の経時特性は関係があるのか？（その 1）

野津

1.　はじめに

群遅延時間は地震動の経時特性と関係がある [1)]．しかし，その理由をわかりやすく説明している教科書は意外に少ない．以下においては，群遅延時間と地震動の経時特性の関係をできるだけわかりやすく説明することを試みる．なお，以下の知識は筆者がコーエンの教科書 [2)]から得たものである．

2.　群遅延時間の定義

まず，群遅延時間の定義から始める．任意の時刻歴波形$f(t)$に対し，フーリエ変換を式(1)で，フーリエ逆変換を式(2)で定義する．

$$\text{フーリエ変換}\quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1}$$

$$\text{フーリエ逆変換}\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{2}$$

ここで，$f(t)$は加速度波形でも速度波形でも変位波形でも構わない．また，当面，$f(t)$を実関数に限定する必要はない．

さて，$F(\omega)$は一般には複素数であり，複素平面上にプロットすれば，その腕の長さ，および，実軸とのなす角が存在する．そこで，それらを$A(\omega)$，$\theta(\omega)$と書くことにすると，式(3)が得られる．

$$F(\omega)=A(\omega)e^{-i\theta(\omega)} \tag{3}$$

ここで$\theta(\omega)$は時計回りを正としている点に注意していただきたい．反時計回りを正と定義することも可能であるが，時計回りを正とした方が，群遅延時間をより自然な形で定義することができる．$A(\omega)$，$\theta(\omega)$をそれぞれフーリエ振幅，フーリエ位相と呼ぶ．

ここで，$\theta(\omega)$をωで微分したものを群遅延時間と定義し，$t_{gr}(\omega)$で表す．すなわち，

$$t_{gr}(\omega)=\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \tag{4}$$

である．群遅延時間が時間の単位を持つことは式(4)からすぐにわかる．

このように定義された群遅延時間は，実は，時刻歴波形に含まれる周波数ω前後の成分の到来時刻を表している．このことを，以下においては式を使って説明する．

3.　群遅延時間の例

一般の場合について説明する前に，わかりやすい例を紹介する．いま，時刻歴波形$f(t)$がデルタ関数の場合を考える．すなわち

$$f(t)=\delta(t-t_0) \tag{5}$$

である．これは，時刻t_0の所にすべてのエネルギーが集中している波形である．
　この波形に対し，実際に群遅延時間を計算してみる．まず，式(5)を式(1)に代入すると

$$F(\omega) = e^{-i\omega t_0} \tag{6}$$

を得る．これと式(3)を比較することにより

$$\theta(\omega) = \omega t_0 \tag{7}$$

が得られる．さらに，これを式(4)に代入すれば，群遅延時間はωによらず

$$t_{gr}(\omega) = t_0 \tag{8}$$

となることがわかる．すなわち，この場合，確かに，群遅延時間は周波数ωの成分の到来時刻を表していると言える．このようなことが任意の波形に対して言えるだろうか？それを次に説明する．

4.　群遅延時間と到来時刻の関係

　まず，任意の時刻歴波形の重心$< t >$を次の式で定義する．

$$< t > = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t|f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \tag{9}$$

式(9)の右辺は，時間を表す変数であるtに振幅の自乗の重みを付けて平均をとったものであるから，これが時刻歴波形の重心を表すことは理解しやすい．ここではコーエン[1)]に倣い$< t >$を平均時間と呼ぶ.
　さて，式(9)の右辺の分母は，次のように変形することができる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt \tag{10}$$

ここで*は共役複素数を表す．ところで(2)より

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') e^{i\omega' t}\, d\omega' \tag{11}$$

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \tag{12}$$

であり，これらを式(10)に代入すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') F^*(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t}\, d\omega' d\omega\ \ dt \tag{13}$$

が得られる．ここでtに関する積分を先に行うことにする．式(2)より，$\delta(\omega - \omega')$のフーリエ逆変換は$(1/2\pi)e^{i\omega' t}$である．従って，$e^{i\omega' t}$のフーリエ変換は$2\pi\delta(\omega - \omega')$である．このことを式で書くと

$$2\pi\delta(\omega-\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t}\,dt \tag{14}$$

となる．これを式(13)に代入すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')F^*(\omega)\,\delta(\omega-\omega')\,d\omega' d\omega \tag{15}$$

となり，さらにω'に関する積分を行うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)\,d\omega \tag{16}$$

すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \tag{17}$$

となる（パーセバルの定理）．

これと類似の式変形を式(9)の右辺の分子にも適用することができる．式(9)の右辺の分子は

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t\,f(t)f^*(t)dt \tag{18}$$

と書ける．この式に式(11)(12)を代入すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t\,F(\omega')F^*(\omega)e^{-i(\omega-\omega')t}\,d\omega' d\omega\ \ dt \tag{19}$$

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega')\mathrm{t}}\right] = -\mathrm{ite}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega')\mathrm{t}} \tag{20}$$

であることを利用すると，式(19)は次のように書ける（このテクニックは文献[2)]から学んだ．言われてみなければなかなか気付かない所である）．

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt = \frac{i}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')F^*(\omega)\frac{\partial}{\partial\omega}\left[e^{-i(\omega-\omega')t}\right]d\omega' d\omega\ \ dt \tag{21}$$

ここで，式(14)を用いてtに関する積分を先に行うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')F^*(\omega)\frac{\partial}{\partial\omega}[\delta(\omega-\omega')]\,d\omega' d\omega \tag{22}$$

となる．さらにω'に関する積分を先に行うことにすると，式(22)は

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')\delta(\omega-\omega')d\omega'\right]d\omega \tag{23}$$

と書き換えることができ，ω'に関する積分を実行すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)\frac{d}{d\omega}[F(\omega)]\,d\omega \tag{24}$$

となる．ここで式(3)より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\mathrm{F}(\omega)] = \left[\frac{\mathrm{dA}(\omega)}{\mathrm{d}\omega} - \mathrm{iA}(\omega)\frac{\mathrm{d}\theta(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)} \tag{25}$$

よって

$$F^*(\omega)\frac{d}{d\omega}[F(\omega)] = A(\omega)\frac{dA(\omega)}{d\omega} - iA^2(\omega)\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \tag{26}$$

である（ここで，$F^*(\omega) = A(\omega)e^{i\theta(\omega)}$であることを用いている）．これを式(24)に代入すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\frac{dA(\omega)}{d\omega}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{i}{2\pi}\left[\frac{A^2(\omega)}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t_{gr}(\omega)|F(\omega)|^2\,d\omega \tag{27}$$

右辺第一項については,

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} A(\omega) = 0 \tag{28}$$

となるような波形を解析の対象としておく．すると，右辺第一項はゼロとなるので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t_{gr}(\omega)|F(\omega)|^2\,d\omega \tag{29}$$

となる．

式(17)と式(29)より，次式が導かれる．

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t|f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t_{gr}(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega} \tag{30}$$

すなわち

$$<t> = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t_{gr}(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \tag{31}$$

である．

ここで，いままでは仮定していなかったが，$f(t)$は実関数であると仮定する．このとき，$|F(\omega)|$は偶関数となる（$f(t)$が実関数のとき，$F(\omega)$とは$F(-\omega)$は互いに共役複素数であるため）．また，$\theta(\omega)$は奇関数であるため，その微分である$t_{gr}(\omega)$は偶関数である．これらのことを考慮すると，式(31)右辺の積分区間を半分にすることができ，

$$<t> = \frac{\int_{0}^{\infty} t_{gr}(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{0}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \tag{32}$$

を得る．すなわち，$t_{gr}(\omega)$にパワースペクトルで重み付けして全周波数にわたり平均をとったものが平均時間である．

さて，ここまでの議論だけでは，$t_{gr}(\omega)$の平均値が平均時間であることが示されただけであり，個別のωに対応する$t_{gr}(\omega)$の意味は示されていないのではないかという疑問を持つかもしれない．しかし，個別のωに対応する$t_{gr}(\omega)$の意味を知りたければ，もとの波形からバンドパスフィルタで周波数がω前後の成分だけを取り出し，その波形に対して上記と全く同じ議論を適用すれば良い．そうすれば，ω付近における$t_{gr}(\omega)$の局所的な平均値が，ω前後の成分の平均的な到来時刻を表すことがわかる．

なお，このとき，周波数がちょうどωの成分だけを取りだしてしまうと，取り出されたものは頭と尻尾のない正弦波になってしまうので，地震波の到来時刻を議論する意味が無くなってしまう．地震波の到来時刻の意味が失われないためには，ωを中心として，ある程度の幅を持って波形を取り出すことが必要である．

ここまでは$t_{gr}(\omega)$のω付近における局所的な平均値の意義について説明してきた．$t_{gr}(\omega)$のω付近における局所的な標準偏差の意義については（その 2）で述べる．

参考文献

1）理論地震動研究会編：地震動ーその合成と波形処理，鹿島出版会，1994 年．
2) L.コーエン著，吉川昭・佐藤俊輔訳：時間-周波数解析，朝倉書店，1998 年．