

運輸省港湾技術研究所

# 港湾技術研究所 報告

---

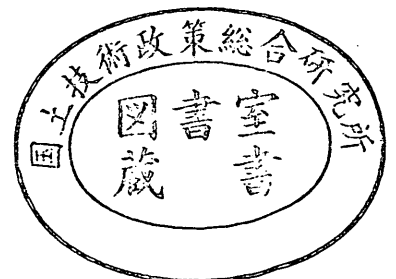
---

REPORT OF  
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH  
INSTITUTE  
MINISTRY OF TRANSPORT

---

VOL. 32 NO. 1 MAR. 1993

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



# 港湾技術研究所報告 (Report of P. H. R. I.)

第32巻 第1号 (Vol.32, No.1) 1993年3月 (Mar.1993)

## 目 次 (CONTENTS)

1. 海洋波の方向スペクトルの推定における最大エントロピー原理法(MEP)の拡張  
.....橋本典明・永井紀彦・浅井 正・菅原一晃.....3~25  
(Extention of Maximum Entropy Principle Method(MEP) for Estimating Directional Ocean Wave Spectrum  
.....Noriaki HASHIMOTO, Toshihiko NAGAI, Tadashi ASAI and Kazuteru SUGAHARA)
2. 波浪の多方向性と弱非線形性を考慮した水圧波から表面波への換算法について  
.....橋本典明・永井紀彦・菅原一晃・浅井 正・朴 慶寿.....27~51  
(Surface Wave Recovery from Subsurface Pressure Record on the Basis of Weakly Nonlinear Directional Wave Theory  
.....Noriaki HASHIMOTO, Toshihiko NAGAI, Kazuteru SUGAHARA, Tadashi ASAI and Kyung-Soo BAHK)
3. 沿岸域における風波の周波数スペクトルと無次元パラメータの特性  
-ハイブリッドパラメータ法による波浪換算モデル(第二報)-  
.....後藤智明・青野利夫.....53~99  
(On The Characteristics of One-Dimensional Spectra And Non-Dimensional Parameters of Wind Waves  
-Wave Hindcast Model Using the Hybrid-Parameter Method (2nd report)-  
.....Chiaki GOTO and Toshio AONO)
4. 袋詰めサントレーンの超軟弱地盤への適用性に関する研究  
.....北詰昌樹・寺師昌明・相原直浩・片山 忠.....101~123  
(Applicability of Fabri-Packed Sand Drain for Extremely Soft Clay Ground  
... Masaki KITAZUME, Masaaki TERASHI, Naohiro AIHARA and Tadashi KATAYAMA)

# 1. 海洋波の方向スペクトルの推定における 最大エントロピー原理法(MEP)の拡張

橋本典明\*・永井紀彦\*\*・浅井 正\*\*\*・菅原一晃\*

## 要 旨

海の波の基本的性質を表示するために、波のエネルギーが周波数および方向角に対して分布している状態を表示する方向スペクトルが用いられる。方向スペクトルを推定する方法としては、これまでもいくつかの方法が提案されており、例えば著者らの提案した方法として最大エントロピー原理法(MEP)やベイズ型モデルを用いる方法(BDM)などがある。MEPは波高計と流速計の組み合わせ、あるいはブイに搭載された加速度計と傾斜計の組み合わせなどからなる3成分観測データから方向スペクトルを推定可能な方法であり、3成分観測データをもとに方向スペクトルを推定する場合には他の方法に比べて最も高い推定精度を有している。一方、BDMは観測データの誤差の影響も考慮した方向スペクトル推定法であり、2方向波浪のような複雑な波浪場においても、任意の4成分以上の波動量の観測データを用いれば、他の方法に比べて最も高精度かつ安定した方向スペクトルの推定値が得られる汎用性に富む方法である。

しかしながら、MEPは3成分観測データにのみ適用可能という面で、簡便であるが汎用性に乏しく、一方、BDMは汎用性に富むものの、方向スペクトルの推定に多大の計算時間を要し、現地での簡便な方向スペクトル推定法としては不向きである。

そこで、著者らは簡便かつ汎用性に富み、あまり計算時間を要しない方向スペクトル推定法として、上記のMEPを拡張した新しい方向スペクトル推定法(拡張最大エントロピー原理法:EMEP)を開発した。EMEPは、BDMと同様に観測データの誤差の影響を考慮した方法であり、また、MEPやBDMと同程度の推定精度を有し、BDMに比べて計算時間を大幅に短縮した方向スペクトル推定法である。

本論文では、EMEPについて、その理論的背景、理論式の定式化および数値計算法について述べる。また、数値シミュレーションや現地観測データへの適用により、EMEPの妥当性及び有用性について検討した結果を述べる。

得られた主な結果は以下のとおりである。

- ① EMEPは任意の観測波動量に適用可能である。
- ② EMEPを3成分観測データに適用する場合にはMEPと同じ方向スペクトルが推定される。
- ③ EMEPを4成分以上の観測波動量に適用する場合にはBDMとほぼ同程度の高精度な方向スペクトルが推定される。
- ④ EMEPによる方向スペクトルの推定はBDMに比べて計算が簡便であり、パーソナル・コンピュータによるリアル・タイム処理が可能である。

キーワード：方向スペクトル、波向、波浪観測、最大エントロピー

\* 海洋水理部 主任研究官  
\*\* 海洋水理部 海象調査研究室長  
\*\*\* 海洋水理部 海象調査研究室研究官

## Extension of Maximum Entropy Principle Method (MEP) for Estimating Directional Ocean Wave Spectrum

Noriaki HASHIMOTO\*  
Toshihiko NAGAI\*\*  
Tadashi ASAI\*\*\*  
Kazuteru SUGAHARA\*

### Synopsis

Directional spectra are the fundamental properties of sea waves, which express the energy distribution as a function of wave frequency and wave propagation direction. So far, many methods for estimating directional spectra for various types of ocean wave measurements have been proposed. For example, two of these methods are the MEP (Maximum Entropy Principle Method) and the BDM (Bayesian Directional Spectrum Estimation Method), which were proposed by the authors in 1985 and 1987 respectively.

The MEP can be applied for estimating directional spectra from simultaneous measurement of three-quantities related to random wave motions. When the MEP is applied for three-quantity measurement of random seas, the estimates of directional spectra show better directional resolution power than the other existing methods. On the other hand, the BDM can be applied for more than three arbitrary mixed instrument array measurement and has the highest resolution power for estimating directional spectrum of all the existing methods. The BDM is also a robust method for estimating directional spectrum from the cross-power spectra contaminated by the estimation errors.

The MEP is, however, not a general method, because it can be applied only for three-quantity measurement. On the other hand, though the BDM seems to be a general method, it has a big problem of time-consuming iteration calculation for estimating directional spectrum. Therefore, it is important to develop a method which can be applied for general measurement of random seas and gives an accurate and robust estimate of directional spectrum easily.

In this report, first, several existing methods for estimating directional spectra are discussed from a view point of their own defects. Secondly, a new method (EMEP), which is developed by extending the MEP, is proposed as a general and practical method for estimating directional spectrum. The EMEP is also as robust as the BDM for estimating directional spectrum, since it is developed by taking into consideration the errors of the cross-power spectra. The EMEP is examined for numerical simulation data and field wave data, and validity of the EMEP is discussed.

The major conclusions are as follows:

- 1) The EMEP can be applied for arbitrary mixed instrument array measurement.
- 2) The EMEP gives the same estimate as the MEP when the EMEP is applied for three-quantity measurement.
- 3) The EMEP gives almost the same estimate as the BDM when the EMEP is applied for more than three arbitrary mixed instrument array measurement.
- 4) The EMEP is suitable for real-time estimation of directional spectrum by a personal computer.

**Key Words :** Directional Wave Spectrum, Wave Direction, Wave Observation, Maximum Entropy

---

\* Senior Research Engineer, Marine Hydrodynamics Division.

\*\* Chief, Marine Observation Laboratory, Marine Hydrodynamics Division.

\*\*\* Member, Marine Observation Laboratory, Marine Hydrodynamics Division.

# 目 次

要 旨 .....	3
1. はじめに .....	7
2. 方向スペクトルの推定問題 .....	7
2. 1 方向スペクトルの定義 .....	7
2. 2 方向スペクトルを推定するための基礎式と方向スペクトルの推定問題 .....	8
2. 3 既往の方向スペクトル推定法 .....	9
3. 拡張最大エントロピー原理法 (EMEP) を用いた方向スペクトル推定法 .....	11
3. 1 クロススペクトルの推定誤差 .....	11
3. 2 EMEP の定式化 .....	12
3. 3 EMEP の数値計算法 .....	14
4. 拡張最大エントロピー原理法 (EMEP) の数値シミュレーションによる検討 .....	15
4. 1 数値シミュレーション法 .....	15
4. 2 数値シミュレーションの条件 .....	15
4. 3 数値シミュレーション結果の検討 .....	16
5. 拡張最大エントロピー原理法 (EMEP) の現地観測データへの適用 .....	18
5. 1 いわき沖波浪観測システムの概要 .....	18
5. 2 観測項目および観測機器の仕様 .....	20
5. 3 現地観測データを用いた方向スペクトルの推定 .....	20
6. おわりに .....	24
参考文献 .....	25

## 1. はじめに

海面を伝わる不規則な波浪は、周期 (周波数) と伝播方向 (波向) の異なる無数の成分波が重なり合って合成されたものとして表現できる。各成分波のエネルギーが周波数に対してどのように分布しているかを示したものを周波数スペクトル、成分波のエネルギーが周波数および波向に対してどのように分布しているかを示したものを方向スペクトルと言う。

周波数スペクトルについては既に多くの調査・研究が行われており、スペクトル構造もかなりのところまで明らかになっている。一方、波浪の本質的な構造を表わす方向スペクトルについてはいまだ十分に調査・研究されているとは言い難い。これは方向スペクトルの観測が多大な労力と費用を必要とするためである。波浪の発生、発達、減衰の各段階を支配するメカニズムの解明、あるいは港湾構造物の設計などの実用的な問題に対しても、方向スペクトルに関する知識が不可欠であることが指摘されており、方向スペクトルに関する調査・研究は今後精力的に取り組まなければならない重要な課題の一つである。

方向スペクトルを測定する方法はこれまでも幾つか提案されている。波高計群、流速計、波浪観測ブイなどを用いる直接測定法、あるいは写真や電波を利用するリモートセンシング法などがある<sup>1), 2), 3)</sup>。また、これらの測定方法に応じて種々の方向スペクトル推定法が提案されている。例えば直接測定法に適用可能なものとして、直接フーリエ変換法 (DFT法)<sup>4)</sup>、パラメータ法<sup>5), 6)</sup>、方向関数あてはめ法<sup>7), 8)</sup>、最尤法 (MLM)<sup>9)</sup>、拡張最尤法 (EMLM)<sup>10)</sup>、最大エントロピー原理法 (MEP)<sup>11)</sup>、ベイズ型モデルを用いる方法 (BDM)<sup>12), 13), 14)</sup> など多くの方法が提案されている。これらの方法の内、MEP および BDM は著者らの開発した方向スペクトル推定法であり、既に現地観測データや実験データの方向スペクトル解析に用いられている。

MEP は波高計と流速計の組み合わせ、あるいはブイに搭載された加速度計と傾斜計の組み合わせなどからなる3成分観測データ (同一座標上の任意の水深における鉛直成分および水平2成分の同時観測記録) から方向スペクトルを推定可能な方法であり、3成分観測データをもとに方向スペクトルを推定する場合には他の方法に比べて最も高い推定精度を有している<sup>11)</sup>。一方、BDM は観測データの誤差の影響も考慮した方向スペクトル推定法であり、例えば2方向波浪のような複雑な波浪場においても、任意座標で観測された4つ以上の任意の波動量

の観測データを用いれば、他の方法に比べて最も高精度かつ安定した方向スペクトルの推定値が得られる汎用性に富む方法である<sup>12)</sup>。

しかしながら、MEP は3成分観測データにのみ適用可能という面で簡便であるが汎用性に乏しく、一方、BDM は汎用性に富むものの、方向スペクトルの推定に多大の計算時間を要し、現地での簡便な方向スペクトル推定法としては不向きである。

そこで、著者らは簡便かつ汎用性に富み、あまり計算時間を要しない方向スペクトル推定法として、上記のMEP を拡張した新しい方向スペクトル推定法を開発した。本方法は、BDM と同様に観測データの誤差の影響を考慮した方法であり、また、MEP や BDM と同程度の推定精度を有し、BDM に比べて計算時間を大幅に短縮した方向スペクトル推定法である。

以下ではまず、方向スペクトル推定問題の基礎的な概念および既往の方向スペクトル推定法とその問題点を概説した後で、今回新たに開発した「拡張最大エントロピー原理法 (EMEP)」について、その理論的背景、理論式の定式化、数値計算法、および数値シミュレーションや現地観測データへ適用することにより EMEP の妥当性や有用性を検討した結果を述べることにする。

## 2. 方向スペクトルの推定問題

### 2.1 方向スペクトルの定義

ランダムな波形をもつ海面波は、第1次近似として、微小な振幅をもつ多くの波数と角周波数の成分波がランダムな位相角をもって重合したものと解釈することができ、Fourier-Stieltjes 積分を用いて次式で表わされる。

$$\eta(x, t) = \int_k \int_\omega dA(k, \omega) \exp\{i(k \cdot x - \omega t)\} \quad (1)$$

ここに、 $\eta(x, t)$  は座標  $x = (x, y)$  上で時刻  $t$  での水面変動、 $k$  は波数ベクトル、 $\omega$  は角周波数、 $i$  は虚数単位である。また、 $dA(k, \omega)$  は複素振幅であり、その絶対値は振幅、偏角は位相角であり、 $0 \sim 2\pi$  の間に等密度にランダムに分布している。

波数・周波数スペクトル  $S(k, \omega)$  は不規則な水面変動場の  $k \sim k + dk$ 、 $\omega \sim \omega + d\omega$  の領域の波動エネルギー密度として、

$$\langle dA^*(k, \omega) dA(k, \omega) \rangle = S(k, \omega) dk d\omega \quad (2)$$

で定義される。ここに、 $\langle \rangle$  はアンサンブル平均、 $*$  は共役複素数を意味する。

波数ベクトルを極座標表示すると、

$$k = (k_x, k_y) = (k \cos \theta, k \sin \theta) \quad (3)$$

と表される。ここに、 $\theta$  は波の伝播する方向角、 $k$  は波数ベクトルの絶対値であり、微小振幅波を対象とする場合、次式で表される分散関係式、

$$\omega^2 = (2\pi f)^2 = gk \tanh kd \quad (4)$$

によって波数  $k$  は周波数  $f$  の関数として一義的に決められる。ここに、 $d$  は水深である。分散関係式の成立を前提とし、波数ベクトル  $k$  と角周波数  $\omega$  で表される式(1)、(2)を周波数  $f$  と方向角  $\theta$  を用いて変換すると、不規則な水面変動場の  $f \sim f + df$ 、 $\theta \sim \theta + d\theta$  の領域の波動エネルギー密度として、

$$\langle dA^*(f, \theta) dA(f, \theta) \rangle = S(f, \theta) df d\theta \quad (5)$$

で方向スペクトルが定義できる。

方向スペクトル  $S(f, \theta)$  は一般に周波数スペクトル  $S(f)$  と方向関数  $G(\theta | f)$  の積として、

$$S(f, \theta) = S(f) G(\theta | f) \quad (6)$$

のように表される。方向関数は 0 以上の値を取り、かつ、

$$\int_0^{2\pi} G(\theta | f) d\theta = 1 \quad (7)$$

あるいは別の表現を用いれば、

$$\int_0^{2\pi} S(f, \theta) d\theta = S(f) \quad (8)$$

の関係がある。

## 2. 2 方向スペクトルを推定するための基礎式と

### 方向スペクトルの推定問題

直接測定法に用いられる方向スペクトル推定法、すなわち、DFT 法<sup>4)</sup>、パラメータ法<sup>5), 6)</sup>、方向関数あてはめ法<sup>7), 8)</sup>、MLM<sup>9)</sup>、EMLM<sup>10)</sup>、MEP<sup>11)</sup>、BDM<sup>12), 13)</sup>、

<sup>14)</sup> はいずれも、波数・周波数スペクトルに伝達関数を乗じ、波数ベクトルについて Fourier 変換したものがクロススペクトルになるという関係に基づいて推定する方

法である。この、「任意の波動量間のクロススペクトルと波数・周波数スペクトルの一般的な関係式」は磯部ら<sup>10)</sup> によって導かれたもので、次式で表される。

$$\Phi_{mn}(\omega) = \int_k H_m(k, \omega) H_n^*(k, \omega) \times \exp[-ik(x_n - x_m)] S(k, \omega) dk \quad (9)$$

ここに、 $x_m$  は  $m$  番目の波動量  $\xi_m$  の計測座標  $(x_m, y_m)$ 、 $\Phi_{mn}(\omega)$  は波動量  $\xi_m$  と  $\xi_n$  のクロススペクトルである。また、 $H_m$  は水面変動  $\eta$  から波動量  $\xi_m$  への伝達関数であり、一般に次のように書ける<sup>10)</sup>。

$$H(k, \omega) = h(k, \omega) (\cos \theta)^\alpha (\sin \theta)^\beta \quad (10)$$

表-1 に主な波動量に対する  $h(k, \omega)$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  を示す<sup>10)</sup>。

式(9)を周波数  $f$  および方向角  $\theta$  を用いて表現すると次式で表される<sup>12)</sup>。

$$\Phi_{mn}(f) = \int_0^{2\pi} H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \times [\cos \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} - i \sin \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] S(f, \theta) d\theta \quad (11)$$

ここに、 $x_{mn} = x_n - x_m$ 、 $y_{mn} = y_n - y_m$  である。

式(9)あるいは式(11)は直接測定法により得られたデータをもとに方向スペクトルを推定する際の基礎式で

表-1 おもな波動量の水面変動に対する伝達関数

項目	記号	$h(k, \omega)$	$\alpha$	$\beta$
水面変動	$\eta$	1	0	0
水圧変動	$p$	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kd}$	0	0
水面鉛直加速度	$\eta_{tt}$	$-\omega^2$	0	0
水面勾配 (x)	$\eta_x$	$ik$	1	0
" (y)	$\eta_y$	"	0	1
水粒子速度 (x)	$u$	$\omega \frac{\cosh kz}{\sinh kd}$	1	0
" (y)	$v$	"	0	1
" (z)	$w$	$-i\omega \frac{\sinh kz}{\sinh kd}$	0	0

$k$  : 波数、 $\omega$  : 角周波数、 $d$  : 水深、 $z$  : 底面からの高さ  
 $\rho$  : 流体の密度、 $g$  : 重力加速度

ある。すなわち、観測された複数の波動量の時系列データから複数の組み合わせのクロススペクトルが推定されるが、その各々のクロススペクトル毎に基礎式 (9) あるいは式 (11) で与えられる連立積分方程式が得られる。波動数・周波数スペクトル  $S(k, \omega)$  あるいは方向スペクトル  $S(f, \theta)$  は、これらの連立積分方程式の非負の解として与えられる。

方向スペクトル推定法の問題の難しさは、この問題が不適切な逆問題であることによる。すなわち、海洋波は近似的には種々の方向に伝わる様々な周波数の微小振幅波の重ね合わせとして表現され、本質的に無限の自由度を有しているが、観測して得られる情報はそれに比して極めて少数であるためである。したがって、未知数の数よりも、それを解くべき方程式の数が極めて少数であるという意味で不適切であり、基礎式が積分方程式で与えられるという意味で逆問題である。

### 2. 3 既往の方向スペクトル推定法

2. 2 で述べた方向スペクトルの推定問題のような不適切な逆問題の最も単純な解法としては、与えられた独立な連立積分方程式の数と等しい (あるいは、それよりも少ない) 数の未知パラメータを含む関数を仮定し、これを式 (9) または式 (11) の連立積分方程式に代入して、未知パラメータに関して解くことにより方向スペクトルを特定する方法が考えられる (ただし、方向スペクトルが非負であるという条件は満たす必要がある)。

既往の方向スペクトル推定法は、その背景となる考え方や誘導方法はそれぞれ異なっているものの、結果的にはいずれもこのような類の方法 (DFT 法を除く) であり、それぞれ以下のような便宜的な近似関数を用いて方向スペクトルの推定値を特定している。

#### (1) DFT 法

この方法は Barber<sup>4)</sup> によって用いられたもので、方向スペクトルの推定式は、

$$\hat{S}(f, \theta) = \alpha \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(f) \exp \{ i k(x_n - x_m) \} \quad (12)$$

で与えられる。ここに、 $\alpha$  は式 (8) の正規化条件を満たすように与えられる定数である。この方法は一般に方向分解能が低く、また負のエネルギーが推定されるなどの不合理が生じる。

#### (2) パラメータ法

この方法は Borgman<sup>5)</sup> によって用いられたもので、

方向スペクトルの推定式として有限 Fourier 級数を用い、

$$\hat{S}(f, \theta) = a_0 \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (13)$$

を仮定し、式 (11) に代入して未知パラメータ  $a_n, b_n$  に関して解くことにより方向スペクトルが特定される。式 (13) のような関数形は次数の少ないモデルでは平坦な形状の方向スペクトルは表現可能であるものの、尖鋭な形状の方向スペクトルを表現することは難しい。また、パラメータの値によっては負のエネルギーを示すなどの不合理が生じる。これを防ぐために式 (13) にさらにウィンドウをかけることが一般に行われるが、方向分解能はさらに低下する。Borgman<sup>5)</sup> よりも早く、Longuet-Higgins<sup>6)</sup> が用いた方法も、このパラメータ法の一種である。

#### (3) 方向関数あてはめ法

本方法は一種のパラメータ法と見なされるが、式 (13) で示した有限 Fourier 級数のような柔軟な関数ではなく、これまでの観測結果をもとに特定の関数形を仮定して、その未知パラメータ求めて、方向スペクトルを特定する方法である。例えば、Hasselmann<sup>7)</sup> は方向関数の標準形としてよく用いられる次式を用いて方向スペクトルを推定している

$$\hat{G}(\theta | f) = G_0 \cos^{2s} \left( \frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \quad (14)$$

ここに、

$$G_0 = \frac{1}{\pi} 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2(S+1)}{\Gamma(2S+1)} \quad (15)$$

であり、 $\Gamma(\ )$  はガンマ関数である。

Hasselmann<sup>7)</sup> は 2 方向波浪に対しては、式 (14) を 2 つ重ね合わせた関数を用いて方向スペクトルの推定を行っている。

この他、山口<sup>8)</sup> は Borgman<sup>15)</sup> により提案された円正規分布、

$$\hat{G}(\theta | f) = \frac{\exp \{ a \cos(\theta - \theta_0) \}}{2\pi I_0(a)} \quad (16)$$

を用い、同様の解析を行っている。なお、式 (16) に含まれるパラメータ  $a$  は式 (14) に含まれる方向集中度パラメータ  $S$  とほぼ線形な関係があり、式 (14) と式 (16) はほぼ同じ形状の方向スペクトルを表す。



方向関数あてはめ法を用いて方向スペクトルを推定する方法は、従来の研究成果により支持された方向関数を用いており、特定の方向スペクトル形への近似という意味では妥当な方法であろう。しかしながら、仮定された関数形以外の方向分布形状を表現できないため、より詳細な波向のエネルギー分布を知ろうとする場合には不適當である。

#### (4) EMLM

この方法では、あらかじめ方向スペクトルの関数形を

$$\hat{S}(f, \theta) = \sum_m \sum_n a_{mn}(k) \Phi_{mn}(f) \quad (17)$$

のように仮定しているものの、ウインドー理論を用いた巧みな方法により最終的な方向スペクトルの推定式として、

$$\hat{S}(f, \theta) = \frac{\alpha}{\sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1}(f) H_m^*(f, \theta) H_n(f, \theta) \exp \{i k(x_n - x_m)\}} \quad (18)$$

の形の推定式を導いている<sup>10)</sup>。この関数形は次数の少ないモデルでも尖鋭な形状の方向スペクトルを表現可能であり、比較的推定精度が高い。また、汎用性が高く、計算が簡便であることから既に現地波浪データ解析に広く用いられている。しかしながら、DFT法やパラメータ法と同様に方向スペクトルに負のエネルギーが生じる場合や、分母が0となる領域でエネルギーが無限に発散するなどの不合理が生じる場合がある。

#### (5) MEP

本方法では、あらかじめ方向スペクトルの形状は仮定してはいないものの、方向関数を一種の確率密度関数と仮定して得られるエントロピーを最大化することにより結果的に、

$$\hat{S}(f, \theta) = \exp \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^2 (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} \quad (19)$$

の形の方向スペクトルが得られる<sup>11)</sup>。式(19)は指数関数の指数部に Fourier 級数が乗った形となっており、パラメータの値の如何によらず負のエネルギーは取り得ない。また、次数の少ないモデルでも平坦な形状から尖鋭な形状まで広い範囲の種々の方向スペクトル形状を表現できる便利な関数形となっている。

なお、著者ら<sup>11)</sup>は MEP を 3 成分観測データに適用可能な方法として提案したが、Nwogu<sup>16)</sup>は本方法を波高計アレイに適用して、その適用性を検討している。ただしこの場合、MEP の定式化をそのまま波高形アレイの場合に拡張したため、式(19)中の exp の指数部は Bessel 関数を含む複雑な関数形になり、式中に含まれる未知パラメータを数値計算により求めることが難しくなっている。

#### (6) BDM

BDM では、他の方向スペクトル推定法とは異なり一般的な関数形は用いられておらず、方向スペクトルの対数変換値を離散的な一定値関数によって表現し、次式で方向スペクトルを近似している<sup>12), 13), 14)</sup>。

$$\hat{S}(f, \theta) = \sum_{k=1}^K \exp \{x_k(f)\} I_k(\theta) \quad (20)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} x_k(f) &= \ln \{S(f, \theta_k)\} \\ I_k(\theta) &= \begin{cases} 1 : (k-1)\Delta\theta \leq \theta < k\Delta\theta \\ 0 : \text{その他} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

( $k=1, \dots, K$ )

である。

式(20)のように方向スペクトルを表現する場合、詳細なエネルギー分布を表現する目的で方向分割数  $K$  (未知数の数) を大きくとれば、一般に未知数の数が与えられる方程式の数よりも多くなる。そこで BDM ではさらに、

$$x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \rightarrow \text{小さい} \quad (22)$$

という条件を付加して方向スペクトルの推定値を特定している。

式(20)の関数は exp の指数部に離散的な一定値関数が乗った形となっており、負値は取り得ない。また、式(22)の制約条件は付加されているものの、一般の関数を用いた表現に比べて種々の形状の方向スペクトルを表すのに柔軟な表現となっている。しかしながら、本方法では離散値  $x_k$  ( $k=1, \dots, K$ ) がすべて未知数となっており、これを解くために、他の方法に比べて多大の計算時間を要する欠点がある。

以上いくつかの既往の方向スペクトル推定法について概説したが、それぞれの推定法で用いられている仮定や

近似方法の違いにより、得られる推定値もそれぞれ異なっており、計算の簡便さ、分解能などの面でそれぞれの特徴を有している。また、BDMを除く他の既往の方法に共通する問題点は、仮定した関数形(パラメトリック・モデルの形)が実際の海洋波の方向スペクトルを十分近似し得る関数であれば問題ないが、実際の現象を十分表現し得ない場合には、用いた関数形に依存して、その関数固有の短所が現われる点にある。すなわち、このような方法はパラメータの少ない低次のモデルで実際の現象の構造を表現しきれないときに、次数の上昇を行った結果、推定値を不安定にするばかりでなく、パラメトリック・モデル固有のくせを持ち込む点において、一般の統計モデルに共通した問題<sup>17)</sup>が生じる。

しかしながら、上記のような統計モデル固有の問題点を度外視すれば、BDMを除く既往の方向スペクトル推定法の中では、MEPで用いられている表現は負値を取らず、また少ない次数で平坦な形状から尖鋭な形状までの広い範囲のエネルギー分布を表現可能という点で、他の方法の表現に比べて優れている。

### 3. 拡張最大エントロピー原理法(EMEP)を用いた方向スペクトル推定法

限られた少数の波動量の同時観測記録から方向スペクトルを推定する場合には、多くの不確定な要素が存在する。既往の方向スペクトル推定法では、2. で述べたように何らかの便宜的な仮定を導入して方向スペクトルを特定している。しかしながら、方向スペクトルを観測した段階では方向スペクトルのエネルギー分布は不明であり、あらかじめ少ないパラメータにより規定される特定の関数形を仮定して方向スペクトルを推定することは適当ではない。このような背景のもとに著者らは以前にBDMを開発した。しかしながら、BDMでは逆に多くの未知パラメータを有し、これがBDMの実用上の障害となっている。

そこで著者らは、2. で述べたことをもとに種々検討し、BDMよりも少ない未知パラメータを有し、かつ精度よく種々の方向スペクトル形を表現可能な柔軟なモデルとして、MEPの表現式(19)を拡張した関数を仮定して方向スペクトルを推定する方法を開発した。2. で述べたようにMEPの関数形は低次のモデルでも平坦な方向スペクトル形状から先鋭な方向スペクトル形状までの広い範囲を表現可能である利点を有しており、かつ負値は取り得ない。また、式(19)の指数部の有限Fourier級数の1次の項のみを用いた場合には、最大エントロピー

定値として、式(16)で与えられる円正規分布が理論的に導かれ<sup>11)</sup>、標準形として用いられる関数形に近い方向関数も表現可能である利点を有している。

しかしながら、MEPの場合でも低次のモデルでデータの構造を表現しきれないときに、次数の上昇を行った結果、推定値を不安定にするばかりでなく、モデル固有のくせを持ち込む一般の統計モデルに共通する問題点は生じる。そこで、新しいモデルでは赤池により開発されたAIC(赤池の情報量基準)<sup>18)</sup>を導入し、AIC最小化法によって、最適なモデル次数の選択を行う機能を付加することとした。観測データに有限の未知パラメータを含む統計モデルをあてはめる場合、モデルの属内から最適なモデルを選択する問題では、AIC最小化法はモデルのデータへの適合度と推定値の滑らかさの両方の観点から望ましい結果が得られることが多い。

なお、方向スペクトルを推定するために解くべき積分方程式は任意の波動量を観測し、クロススペクトルを推定することにより与えられる。クロススペクトルの推定誤差はパワースペクトルの推定誤差と異なり、各周波数ごとに異なる変動性を有し、観測波動量の種類に依存して異なる次元を有する。したがって、方向スペクトルを推定するための基礎式として与えられる連立積分方程式は、それぞれ異なる次元や信頼性を有することになる。BDMを除く既往の方向スペクトル推定法にはクロススペクトルのこのような特性を考慮したものはない。より信頼性の高い方向スペクトルを推定するためには、クロススペクトルの推定誤差の特性も考慮した方向スペクトル推定法を開発する必要がある。したがってここでは、BDMに用いたのと同じ方法によりクロススペクトルの誤差の影響を考慮して定式化を行うこととした。

以下ではまずクロススペクトルの推定誤差について述べ、その後で今回開発した拡張最大エントロピー原理法(EMEP)について述べることとする。

#### 3. 1 クロススペクトルの推定誤差

離散有限フーリエ変換を用いたクロススペクトル  $\hat{\Phi}_{mn}(f)$  の期待値は次式で与えられる<sup>19), 20)</sup>。

$$\begin{aligned} E[\hat{\Phi}_{mn}(f)] &= E[\hat{C}_{mn}(f)] - iE[\hat{Q}_{mn}(f)] \\ &\equiv C_{mn}(f) - iQ_{mn}(f) = \Phi_{mn}(f) \end{aligned} \quad (23)$$

一方、クロススペクトルの実部、虚部、すなわちクロススペクトル  $\hat{C}_{mn}(f)$ 、クオドラチャスペクトル  $\hat{Q}_{mn}(f)$  の分散は次式で与えられる<sup>19), 20)</sup>。

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{C}_{mn}(f)] \\ \doteq \frac{1}{2N_a} \{ \Phi_{mn}(f) \Phi_{nn}(f) + C_{mn}(f)^2 - Q_{mn}(f)^2 \} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{Q}_{mn}(f)] \\ \doteq \frac{1}{2N_a} \{ \Phi_{mn}(f) \Phi_{nn}(f) - C_{mn}(f)^2 + Q_{mn}(f)^2 \} \end{aligned} \quad (25)$$

ここに、 $N_a$  はアンサンブル平均する際の相異なるデータ個数である。

上式に見られるように、クロススペクトルは各周波数ごとに異なる統計的変動性を有し、クロススペクトルを計算する際に組み合わせる波動量の種類の相違によってそれぞれ異なる次元を有するクロススペクトルとなる。

### 3. 2 EMEP の定式化

以下では、式の誘導の便宜上、式(11)の2次元の表示式 ( $m$  番目の波動量と  $n$  番目の波動量のクロススペクトルを  $\Phi_{mn}(f)$  と表示する方式) を、1次元の表示式 ( $\phi_i(f)$  と表示する方式) に再構成して取り扱う。なお、 $\Phi_{mn}(f)$  から構成される行列  $\Phi(f)$  がエルミート行列であることを考慮し、行列  $\Phi(f)$  の上三角の部分のみを用いることとする。このとき、式(11)は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \phi_i(f) = \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) G(\theta | f) d\theta \\ (i=1, \dots, K) \end{aligned} \quad (26)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} H_i(f, \theta) &= H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ &\times [\cos \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ &- i \sin \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] \\ &/ D_{mn}(f) \\ \phi_i(f) &= \Phi_{mn}(f) / \{S(f) D_{mn}(f)\} \\ G(\theta | f) &= S(f, \theta) / S(f) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

であり、 $K$  は独立な方程式の数である。また、 $D_{mn}(f)$  はクロススペクトルを無次元化するとともにクロススペクトルの推定誤差を正規化するために導入した関数であり、式(26)の実部、虚部に対してそれぞれ式(24)および式(25)の平方根、すなわちクロススペクトルの推定誤差

の標準偏差を用いることとした。このような正規化により、与えられたクロススペクトルの偏差の発生確率が最小なバイアスの少ない方向スペクトルが推定されるものと思われる。

方向関数  $G(\theta | f)$  はその定義域  $[0, 2\pi]$  で0以上の値をとる関数であるが、以下では正值として取り扱う。これは  $G(\theta | f)$  が0の領域でも、限りなく0に近い正值であれば、物理的にはそれほど不合理ではないと思われるためである。そこでいま、MEP で用いられた式(19)を拡張し、方向関数の推定値として、

$$\begin{aligned} \hat{G}(\theta | f) \\ = \exp \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

を仮定する。式(28)を式(26)に代入すると、式(26)は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_i(f) = \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) \\ \times \exp \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} d\theta \\ (i=1, \dots, K) \end{aligned} \quad (29)$$

いま、 $\phi_i(f)$  および  $H_i(f, \theta)$  は複素数であり、取扱いが不便である。そこで、

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \text{Real} \{ \phi_i(f) \} \\ \phi_{K+i} &= \text{Imag} \{ \phi_i(f) \} \\ H_i(\theta) &= \text{Real} \{ H_i(f, \theta) \} \\ H_{K+i}(\theta) &= \text{Imag} \{ H_i(f, \theta) \} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

と分離し、すべてを実数に関する式として取り扱う。なお、式(30)の左辺は周波数  $f$  の関数であるが、省略して記述した。以後特別な場合を除き、周波数  $f$  は便宜的に省略して扱うこととする。このとき式(29)および(30)より、正規化されたクロススペクトルの誤差  $\epsilon_i$  を考慮して、結局、式(29)は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon_i = \phi_i - \int_0^{2\pi} H_i(\theta) \\ \times \exp \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} d\theta \\ (i=1, \dots, M) \end{aligned} \quad (31)$$

ここに、 $\epsilon_i : (i=1, \dots, M)$  は互いに独立であり、平均0、未知の分散  $\sigma^2$  の正規分布に従うものとする。また、式(31)では、クロススペクトルの実部が0となる式、虚部が0となる式および式(7)と等価な式はもとの連立積分方程式から除外しており、このような式を除いた残り

の独立な連立積分方程式の数を  $M$  として取り扱っている。

ここで、式(31)の右辺の  $\phi_i$  に式(28)の方向関数  $\hat{G}(\theta | f)$  の積分を乗じ、以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \phi_i \int_0^{2\pi} \exp \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} d\theta \\ &\quad - \int_0^{2\pi} H_i(\theta) \\ &\quad \times \exp \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} d\theta \\ &= \exp(a_0) \int_0^{2\pi} \left\{ \phi_i - H_i(\theta) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} d\theta \\ &\quad (i=1, \dots, M) \end{aligned} \quad (32)$$

さらに、式(7)の条件から得られる、

$$a_0 = -\ln \left[ \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} d\theta \right] \quad (33)$$

の条件を用いて式(32)を整理すると、式(32)は結局、次式で表される。

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} \left\{ \phi_i - H_i(\theta) \right\} \exp \left\{ \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} d\theta}{\int_0^{2\pi} \exp \left\{ \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} d\theta} \\ &\quad (i=1, \dots, M) \end{aligned} \quad (34)$$

したがって、式(28)に含まれる未知パラメータ  $a_n$ ,  $b_n$ , ( $n=1, \dots, N$ ) は、式(34)で与えられる誤差  $\epsilon_i$  の2乗和が最小になるように最小自乗法で求めればよい。また、 $a_0$  は式(33)から求められる。

しかしながら、式(34)は未知パラメータ  $a_n$ ,  $b_n$  に関して非線形であり、これを解析的に求めることは難しい。そこでいま、 $\tilde{a}_n$ ,  $\tilde{b}_n$  が、解  $a_n$ ,  $b_n$  に十分近いものとし、

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a}_n + a'_n \\ b_n = \tilde{b}_n + b'_n \end{cases} \quad (35)$$

で解を表現する。ここに、 $a'_n$ ,  $b'_n$  は解  $a_n$ ,  $b_n$  と推定値  $\tilde{a}_n$ ,  $\tilde{b}_n$  との残差である。

ここで、

$$D(\theta) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^N (\tilde{a}_n \cos n\theta + \tilde{b}_n \sin n\theta) \right\} \quad (36)$$

と置き、式(34)を  $a'_n$ ,  $b'_n$  に関して展開し、1次の項までとると、式(34)は結局次式で表される。

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= Z_i - \sum_{n=1}^N (a'_n X_i + b'_n Y_i) \\ &\quad (i=1, \dots, M) \end{aligned} \quad (37)$$

ここに、

$$Z_i = \frac{\int_0^{2\pi} \left\{ \phi_i - H_i(\theta) \right\} D(\theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} D(\theta) d\theta} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} X_i &= Z_i \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} D(\theta) \cos n\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} D(\theta) d\theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\int_0^{2\pi} \left\{ \phi_i - H_i(\theta) \right\} D(\theta) \cos n\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} \left\{ \phi_i - H_i(\theta) \right\} D(\theta) d\theta} \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} Y_i &= Z_i \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} D(\theta) \sin n\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} D(\theta) d\theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\int_0^{2\pi} \left\{ \phi_i - H_i(\theta) \right\} D(\theta) \sin n\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} \left\{ \phi_i - H_i(\theta) \right\} D(\theta) d\theta} \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

である。

式(37)で与えられる連立線形方程式を繰り返し計算によって解けば、最終的に方向関数の推定値が求められる。数値計算法の具体的手順および AIC の導入については次の3.3で述べる。

なお、式(37)~(40)では、クロススペクトルを積分の中に含ませて、式の展開を行った。これは、MEPの定式化との対比のために便宜的にこのように展開したためである。MEPではその定式化にラグランジュの未定乗数法を用いたため、与えられた制約条件を厳密に満たし、誤差  $\epsilon_i$  は0として定式化されている。このため、式(34)の分子の項のみが0として定式化されており、式(34)の分母は解くべき方程式には含まれていない。

ここで用いた MEP に準じた展開とは別に、方向関数

を最初から次式のように仮定し、

$$\hat{G}(\theta) = \frac{\exp \left\{ \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\}}{\int_0^{2\pi} \exp \left\{ \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right\} d\theta} \quad (41)$$

式(41)中の $a_n, b_n$ について式(35)を用いて同様に線形化すれば、わざわざクロススペクトルを積分中に含ませて展開する必要はなく、式(37)~(40)とはやや異なる整理が可能であることを付記しておく。

### 3. 3 EMEPの数値計算法

式(37)は $a'_n, b'_n$ に関して線形な連立方程式である。そこで、適当な初期値 $\bar{a}_n, \bar{b}_n$ を用いて、式(38)~(40)で与えられる係数 $Z_i, X_i, Y_i$ を数値計算によって求め、式(37)に最小自乗法を適用して $a'_n, b'_n$ を求める。次に、式(35)により新しい推定値 $a_n, b_n$ を求め、これを $\bar{a}_n, \bar{b}_n$ の代わりに式(38)~(40)に代入して同様の計算を繰り返す。このようにして、 $a'_n, b'_n$ が十分に小さくなったところ( $10^{-2}$ )で計算をやめ、このときの $\bar{a}_n, \bar{b}_n$ を最適な推定値 $a_n, b_n$ として採用する。また、 $a_0$ は式(33)によって求められる。このようにして得られた $a_0, a_n, b_n$ を式(28)に代入し、方向関数が得られる。

なお、式(28)で与えられる方向関数のモデル次数として $N$ 次の項まで取るものとする、未知パラメータの数は誤差 $\epsilon_i$ の分散 $\sigma^2$ を含めて $2N+1$ である。したがって、この場合のAICは次式で与えられる<sup>17)</sup>。

$$AIC = M(\ln 2\pi + 1) + M \ln \hat{\sigma}^2 + 2(2N+1) \quad (42)$$

ここに、 $M$ は式(37)の独立な連立方程式の数、 $\hat{\sigma}^2$ は式(37)から最小自乗推定値 $a'_n, b'_n$ を求めた際の収束時の最終的な誤差 $\epsilon_i$ の分散である。

AIC最小化法による最適モデルの選択は、種々のモデル次数 $N$ を与えて上記の収束計算およびAICの計算を実施し、その内で最小のAICを与えるモデル次数 $N$ を最適次数として選択すればよい。

なお、式(37)~(40)の繰り返し計算では、初期値として与えた $\bar{a}_n, \bar{b}_n$ を式(35)によって $a_n, b_n$ に置き換えて繰り返し計算するが、ある場合には繰り返し計算が発散する。そこで、実際の計算では式(35)の代わりに $a'_n, b'_n$ に収束計算を制御するための定数 $r$ を乗じ、次式によって繰り返し計算を実施した。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \bar{a}_n + \gamma a'_n \\ b_n &= \bar{b}_n + \gamma b'_n \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

すなわち、繰り返し計算の途中で $a'_n, b'_n$ の絶対値が設定値(10程度)を超える場合には、 $r$ の値を $r=1$ から $r=0.5$ に変化させて繰り返し計算をやり直す。再度 $a'_n, b'_n$ の絶対値が設定値を超える場合には $r=0.25$ として再計算する。このように、

$$\gamma = (0.5)^n \quad : \quad (n=0, 1, \dots) \quad (44)$$

として徐々に $r$ の値を小さな値に変化させて繰り返し計算を実施するが、今回の計算では $n=4$ まで変化させることとし、 $n=4$ の場合にも収束しない場合には、計算を打ち切ることとした。

以上のようにして、方向関数を求める種々の試算を実施した。しかしながら、モデル次数を色々変化させて計算した結果、方向関数の形状に依存して、ある特定の次数より高次のモデルでは $r$ を小さな値に変化させても式(37)~(40)の繰り返し計算が発散することが判明した。これは、AIC最小化法で与えられる最適次数よりもさらに高次のモデルの場合では、未知パラメータの数が過剰となり、数値計算が不安定になるためと思われる。

したがって、拡張最大エントロピー原理法(EMEP)の数値計算では、低次のモデルから高次のモデルへと順次計算を進めることとし、具体的には以下の手順で行うこととした。

- ① モデル次数として1次のモデル、すなわち式(28)のサンメンション(総和)において $N=1$ を選び、 $\bar{a}_1, \bar{b}_1$ の初期値を0として、式(38)~(40)で係数 $X_i, Y_i, Z_i$ を求め、式(37)に最小自乗法を適用する。
- ② ①で得られた推定値 $a'_1, b'_1$ を式(35)に代入して得られた $a_1, b_1$ を $\bar{a}_1, \bar{b}_1$ に置き換えて①の計算を繰り返す。
- ③ ①~②の計算を繰り返し、 $a'_1, b'_1$ が適当な収束条件( $a'_1, b'_1$ が $10^{-2}$ より小さい)を満たす場合には繰り返し計算を止め、式(42)によりAICを算出する。
- ④ 次に、モデル次数として2次のモデルを選択し、①~③と同様の繰り返し計算およびAICの計算を実施する。ただしこの場合には、 $\bar{a}_1, \bar{b}_1$ の初期値には③で得られた収束解 $a_1, b_1$ を用い、 $\bar{a}_2, \bar{b}_2$ の初期値は0として繰り返し計算を実施する。なお、収束計算の途中で $a'_n, b'_n$ の絶対値のいずれかがある設定条件(10を超える値を示す)場合には前記のように

式(43)の  $r$  の値を変えて再計算を繰り返す。このようにしても収束解が得られない場合には、推定値は不安定、すなわち最適モデル次数を既に越えたものとして数値計算を止め、1次のモデルを最適モデルとして選択する。また、2次のモデルの収束解が得られた場合には、2次のモデルのAICの値と1次のモデルのAICの値を比較し、1次モデルのAICが2次モデルのAICよりも小さい場合は、1次のモデルを最適モデルとして選択し、計算を打ち切る。逆に、2次モデルのAICが1次モデルのAICよりも小さい場合には最適モデルは2次以上であり、次の⑤に進む。

- ⑤ モデルの次数をさらに3次、4次、…と順次高次のモデルに変化させ、④と同様の計算を繰り返すが、あるモデル次数でAICが最小値を示し、次の次数でAICが増大する場合にはその段階で計算を止め、最小のAIC値を示すモデルを最適モデルとして選択する。
- ⑥ ①～⑤の計算で得られた最適モデルの解  $a_n, b_n$  を用い、式(33)より  $a_0$  を求め、式(28)により方向分布関数を計算する。

なお、上記の繰り返し計算においては、モデルの取り得る最高次数は式(37)で与えられる独立な連立方程式の数により制限される。すなわち、未知パラメータの数は方程式の数よりも小さくなければならない、

$$2N+1 \leq M \tag{45}$$

である。最大限この範囲内で①～⑥の計算を実施すればよい。

#### 4. 拡張最大エントロピー原理法 (EMEP) の数値シミュレーションによる検討

##### 4.1 数値シミュレーション法

数値シミュレーション法を利用してEMEPにより推定される方向スペクトルの推定精度の検討を行った。ここでは、方向スペクトルはパワースペクトルと方向関数の積で表わされることから、任意の周波数  $f$  に着目したとして、方向角  $\theta$  に関する分布のみについて検討した。

数値シミュレーションの具体的な手順は以下の通りである<sup>10)</sup>。

- ① 検討対象とする方向関数を次式で与える。

$$G(\theta) = \sum_i \alpha \cos^{2S_i} \left( \frac{\theta - \theta_i}{2} \right) \tag{46}$$

2つの波群から構成されるような双峰型の方向関数を対象とする場合には、式(46)の  $\alpha_i, S_i, \theta_i$  の値を変えた2種類の方向関数を重ね合わせて与えることとする。

- ② 式(46)で与えた方向関数をもとに、式(11)によりクロススペクトルを計算する。
- ③ ②で得られたクロススペクトルをもとに、3.3で述べた方法によりEMEPによる方向関数の推定を行い、真の方向関数、すなわち式(46)で与えられる方向関数と比較する。

なお、ここでは既往の方向スペクトル推定法とEMEPの比較のために、既往の方法としてEMLM (拡張最尤法)<sup>10)</sup>、MEP (最大エントロピー原理法)<sup>11)</sup>、BDM (ベイズ型モデルを用いた方法)<sup>12), 13), 14)</sup> を用いて方向関数の推定を行い、これらの推定値とEMEPの推定値を比較することとした。EMLM, MEP, BDMの数値計算法は文献<sup>10)~14)</sup> を参照されたい。

##### 4.2 数値シミュレーションの条件

4.1で述べた数値シミュレーションを実施するに際しては、MEPが適用可能な3成分観測データを対象とする場合として、水位変動  $\eta$  および同一地点の水面下での  $x$  軸方向および  $y$  軸方向の流速成分  $u$  および  $v$  を観測するとしてシミュレーションを実施した。また、BDMが威力を発揮する4成分以上の観測データを対象とする場合として、図-1に示すスターアレイを用い、4つの地点で水位変動  $\eta$  を観測するとしてシミュレーションを実施した。

上記の2つの観測条件の各々に表-2に示す9種類の波浪条件を与えて数値シミュレーションを実施した。ここに、 $S_i$  は式(46)中の個々の波群の方向集中度パラメー

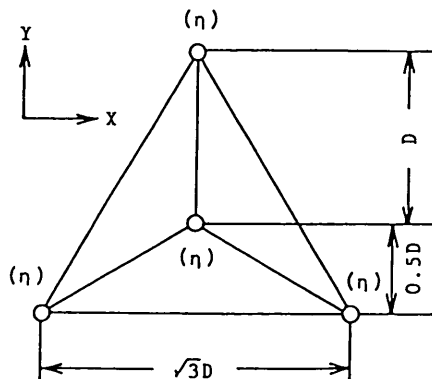


図-1 数値シミュレーションに用いた波高計配置 (スターアレイ)

タ,  $\theta_i$  は個々の波群の卓越波向,  $\alpha_1/\alpha_2$  はそれぞれの波群のエネルギーピーク値の比を表す。

表-2 数値シミュレーションに用いた波浪条件

Case	S	$\Delta\theta$	$\alpha_1/\alpha_2$
(a)	5	0°	
(b)	10	0°	
(c)	20	0°	
(d)	10 & 100	90°	2.0
(e)	10 & 100	120°	2.0
(f)	10 & 100	180°	2.0
(g)	20 & 20	90°	0.5
(h)	20 & 20	120°	0.5
(i)	20 & 20	180°	0.5

4. 3 数値シミュレーション結果の検討

1) 3成分観測データを用いた場合の解析結果

図-2 は3成分観測データ ( $\eta, u, v$ ) を用いた場合の表-2 に示す9種類の波浪条件での数値シミュレーション結果を示したものである。図-2の上段(a)~(c)は一方方向波浪を対象とした場合, 中段と下段の(d)~(i)は二方向波浪の例である。図中のTRUEは式(46)で与えられる真の方向関数を表している。なお, 図の縦軸は真の方向関数のピーク値で基準化して描いている。

図-2(a)~(c)に見られるように, 一方方向波浪を対象とする場合にはいずれの方法の推定結果もほぼ妥当な推定値を示している。しかしながら, EMLMでは, エネルギーピーク付近でやや偏平な推定値を示しており, また, この影響のためにエネルギーが0の領域でも若干のエネルギーが現れており, EMEP, MEP, BDMに比べて推定精度がやや劣っている。BDMは方向集中度が低い場合に真値に比べてエネルギーピーク付近でやや偏平な推定値を示しているものの, EMLMに比べるとその程度は小さくエネルギーの横漏れは生じていない。EMEPとMEPは真値とほぼ一致する推定値を示して

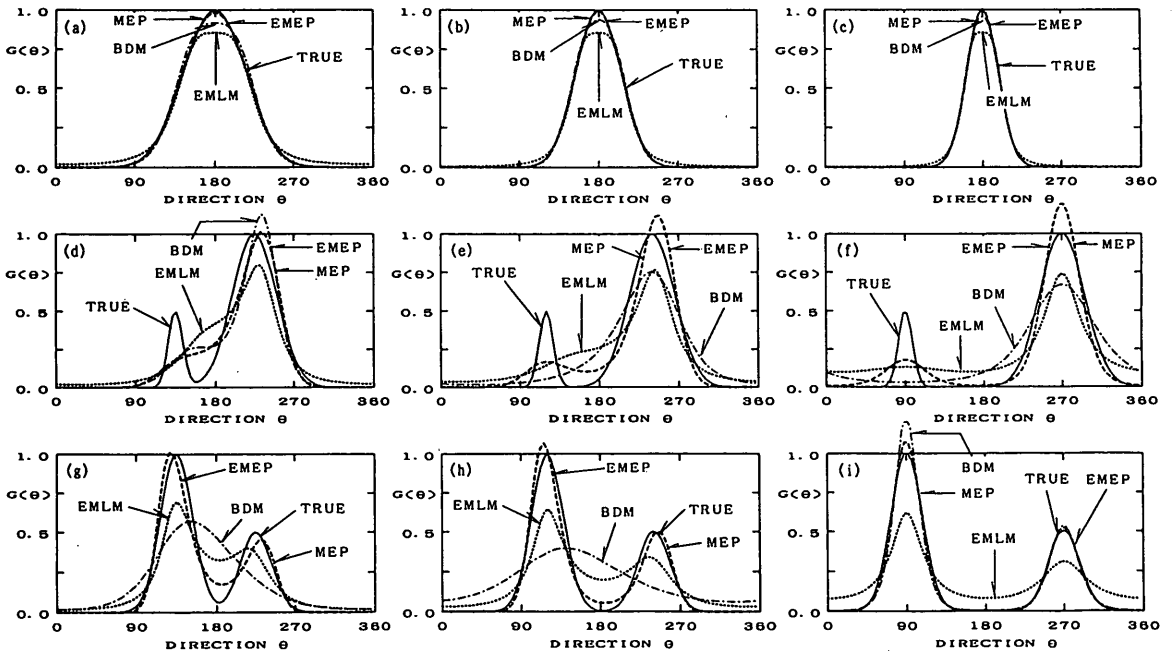


図-2 4種類の方向スペクトル推定法 (EMEP, MEP, BDM, EMLM) による方向関数の推定精度の比較 (3成分観測データ ( $\eta, u, v$ ) を対象とした場合)

り、図-2 からはその差異を識別出来ない。

図-2 (d)~(f)の二方向波浪の例では、(e)、(f)に見られるように、二つの波群が90°より大きい角度で交差している場合には、EMEP および MEP は二方向波浪を明確に識別しており、両者は同じ推定値を示している。しかしながら、EMLM は二方向波浪を明確には識別しておらず、また、BDM は一方向波浪として推定している。

図-2 (g)~(i)の二方向波浪の例でも、EMEP は MEP と同じ推定値を示しており、推定精度は極めて高い。また、EMLM は(g)~(i)の全てで二方向波浪を識別しているが、その推定精度はEMEP や MEP よりも劣っている。BDM は(g)、(h)では二方向波浪を一方向波浪として推定しているが、(i)では二方向波浪を識別している。

以上の例に見られるように、3成分観測データを対象として方向スペクトル解析する場合には、EMEP の推定値は MEP の推定値と一致し、その推定精度は既往の方向スペクトル推定法と比べて極めて良い。

なお、3成分観測データを対象としてBDMを用いる場合、特に二方向波浪を対象として解析する場合に、ここで示した欠点が生じることは、文献<sup>12)</sup>に既に述べた通りである。BDMは基本的には4成分以上の波動量を対象として解析する場合に、高精度かつ安定した方向ス

ベクトル推定値が得られる方法である。

2) 4つの観測波動量 (スターアレイ) を用いた場合の解析結果

図-3は図-1に示すスターアレイを用い、4つの観測データ (水位変動:  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ ) を観測した場合の、表-2に示す9種類の波浪条件での数値シミュレーション結果を示したものである。なお、4つの観測データを対象とするこのような観測条件では MEP は適用できないので、ここでは MEP による方向関数の推定は行っていない。

図-3 (a)~(i)に見られるように、EMEP、BDM、EMLM のいずれの場合も、図-2に比べて推定精度は向上している。特に、EMEP と BDM はほとんど真値と一致する推定値を示しており、推定精度は極めて高い。しかしながら、EMLM では図-2に比べて確かに推定精度は向上しているものの、例えば(d)、(f)、(h)に見られるように、真値には見られないいくつかの疑似ピークを示している。これは EMLM では観測波動量の増大により分解能は向上するものの、安定性は逆に低下することを示している。

以上、図-2および図-3によりEMEP、MEP、BDM、EMLMの数値シミュレーションによる推定精度の検討

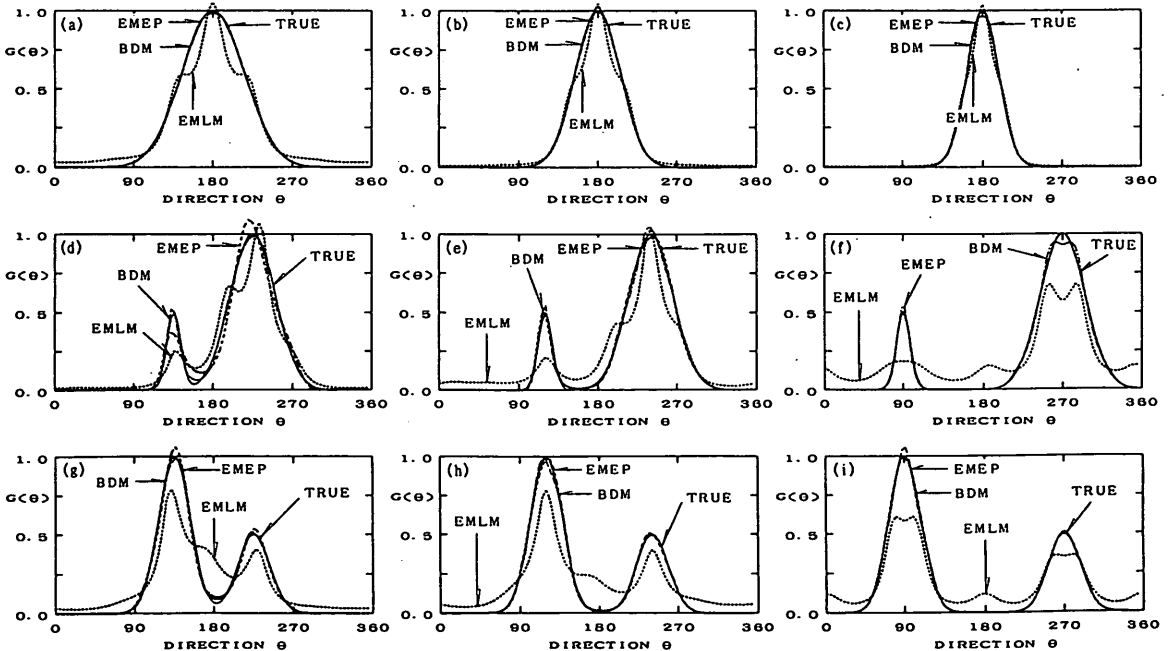


図-3 3種類の方向スペクトル推定法 (EMEP, BDM, EMLM) による方向関数の推定精度の比較 (スターアレイを対象とした場合)



結果を述べた。これらの検討結果より、EMEPは3成分観測データを対象とする場合にはMEPと同じ推定値を示し、4成分以上の波動量を対象とする場合にはBDMとほぼ同じ推定値を示すことが示された。また、4成分以上の波動量を対象とする場合には、BDMと同様に、推定精度が高いことのみならず、安定した推定値を示すことが明かとなった。

なお、今回の数値シミュレーションはパーソナルコンピュータで実施したが、EMEPによる計算はBDMに比べて極めて短時間で終了した。この意味では、EMEPはBDMに比べて実用性が高く、今後の方向スペクトルの標準的解析法として有用な方法である。

## 5. 拡張最大エントロピー原理法 (EMEP) の現地観測データへの適用

EMEPを用いた方向スペクトル推定法の現地観測データへの適用性を検討するために、「いわき沖波浪観測システム」の観測データを用いて方向スペクトル解析を実施した。

### 5. 1 いわき沖波浪観測システムの概要<sup>14)</sup>

いわき沖波浪観測システムは、近年の港湾開発の大規模化、大水深化に対応して、その計画、設計、施工のいずれの分野においても不可欠な波浪に関する正確で総合的な情報をとらえることを目的として運輸省第二港湾建設局小名浜港工事事務所が1986年10月に完成した波浪観測システムである。波浪観測システムの観測局、中継局、監視局は、図-4に示す位置にあり、観測局は塩屋崎灯台北東54km(北緯37°17'49", 東経141°27'47")の位置にある。観測局では天然ガス開発用のプラットフォーム(磐城沖石油開発(株)所有)の脚を利用して計測機を設置し、

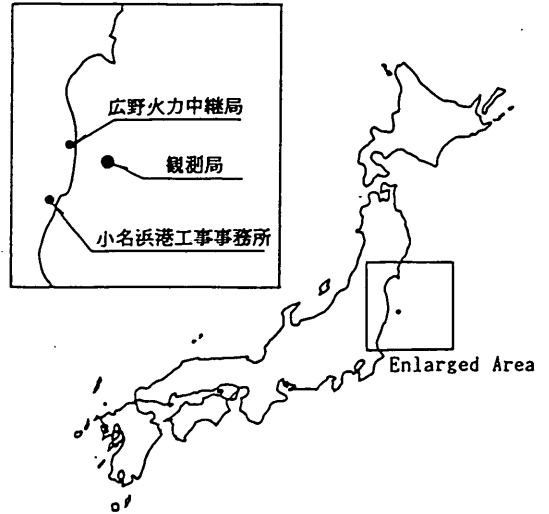


図-4 いわき沖波浪観測システムの位置図

従来困難とされてきた沖波の波浪観測を実施している。観測局の外観は図-5に示す通りである。観測局では波浪観測機器として、4台のステップ式波高計および水圧式波高計の装備された超音波流速計が設置されており、各観測機器の取り付け位置は図-5、図-6および表-3に示す通りである。

観測局で取得された観測データは、観測局から約42km離れた広野火力中継局に無線テレメータにより送信される。さらに、広野火力中継局からは有線テレメータを経由して小名浜港工事事務所の監視局へ送られる。小名浜港工事事務所の監視局ではミニ・コンピュータを利用して種々のデータ処理が実施され、風や波浪に関する情報がリアル・タイムで自動出力されている。また、EMLM(拡張最尤法)を用いた方向スペクトル解析も実施されており、高精度な方向スペクトル情報もリアル・タイムで自動出力されている。

表-3 波浪観測機器の取り付け位置(相対座標)

Channel 番号	観測波動量	観測機器	設置位置		設置水深(m)
			x座標(m)	y座標(m)	
ch. 1	$\eta$	ステップ式波高計	-25.137	2.701	—
ch. 2	"	"	-3.255	12.055	—
ch. 3	"	"	-17.509	-8.870	—
ch. 4	"	"	2.089	-0.853	—
ch. 5	$u$	超音波式流速計	7.826	-1.578	-14.530
ch. 6	$v$	"	"	"	"
ch. 7	$p$	水圧式波高計	"	"	-14.830

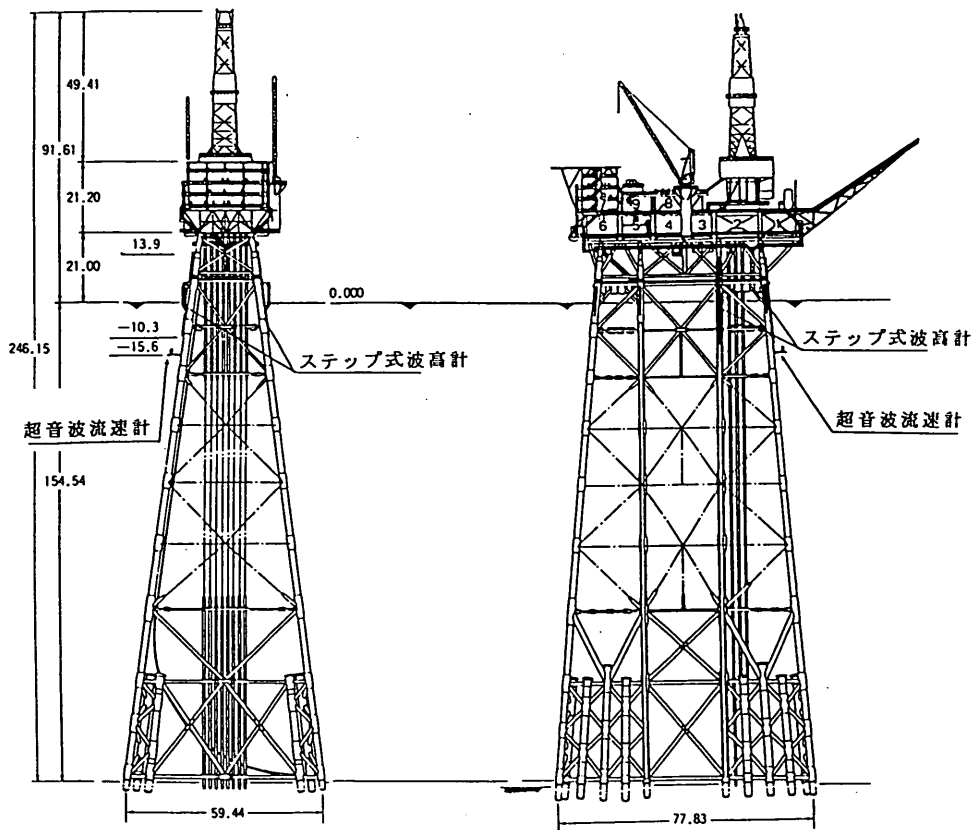


図-5 観測局の外観と観測機器の取り付け位置

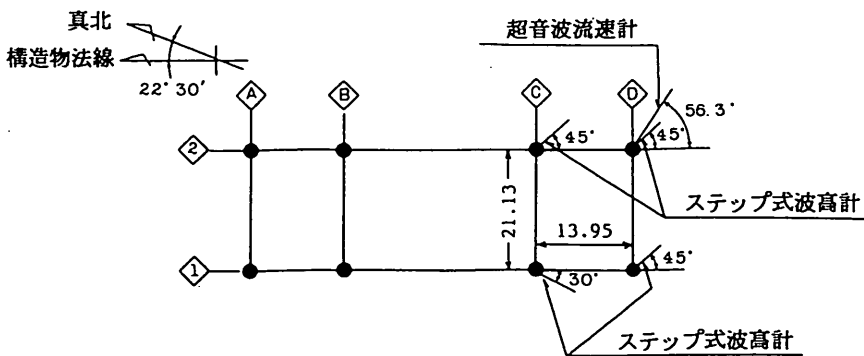


図-6 観測機器の取り付け平面図  
(図中の●は観測局の橋脚を表す)

表-4 波浪観測機器の仕様

	波 高 計	流 速 計	風 向 風 速 計
機 種	ステップ式波高計 (SR-V)	超音波流速計 (TP-21A)	プロペラ型 風向風速計
測 定 範 囲	-10.3~+13.9m 波高桿長 約24.5m センサー点数 252点	成分流速 0~±3m/s	風 速 2~60m/s
		水圧変動 0~±0.5kgf/cm <sup>2</sup>	
測 定 精 度	10cm±5 cm	流 速 ±4 %	風 速 10m/s以下±0.5m/s 10m/s以上±5 %
		流 向 ±5°	風 向 ±5°

## 5. 2 観測項目および観測機器の仕様<sup>14)</sup>

いわき沖波浪観測システムの観測項目は、波高、周期、波向、流向、流速、風向、風速であり、これらは毎偶数時に観測されている。波浪観測は偶数正時前後の10分間の計20分間、流速は正時前後の1分間の計2分間、風向および風速は正時前10分間の観測が実施されている。これらは観測局に設置されたステップ式波高計、水圧センサーの装備された超音波流速計および風向風速計により観測されている。観測局に設置された各観測機器の仕様は表-4に示す通りである。

## 5. 3 現地観測データを用いた方向スペクトルの推定 (1) 風波の場合

図-7は有義波高  $H_{1/3}=5.13\text{m}$ 、有義波周期  $T_{1/3}=12.6$ 秒で、光易型方向関数の方向集中度パラメータ  $S_{\max}$ が10程度の風波を対象として方向スペクトル解析した例を示したものである。図-7の上段より順にEMEP、BDM、EMLMにより解析した結果を示している。図の左側に方向スペクトルの等値線図を、その右に対応する立体図を示している。等値線図ではエネルギー・レベルの広い範囲で詳細な分布を表示するために、等高値を低い方から順に  $10^{0.0}$ 、 $10^{0.2}$ 、 $10^{0.4}$ 、 $10^{0.6}$ 、… ( $\text{m}^2\text{sec./rad.}$ )として描いている。

図-7に見られるようにいずれの方法による推定結果も単一ピークを有する幅の広いエネルギー分布を示している。しかしながら、エネルギー・ピークの値はそれぞれの推定法で異なっており、BDMが最も高く、次いでEMEP、EMLMの順になっている。EMLMでピーク値が

低く推定された影響はエネルギーの低い領域に現れており、EMLMではエネルギーの方向分布が裾をひいた幅広い分布形状を示している。ピーク値の最も高いBDMの場合にもやや裾をひいた形状を示しているが、その程度はEMLMに比べて小さい。EMEPではピーク値はBDMよりも小さいものの、EMLMやBDMに見られる西(W)からのエネルギーは極めて微小である。また、等値線図からはEMEPおよびBDMは主たるエネルギーが来襲する範囲では、方向スペクトルの形状は極めて類似しているが、EMLMはこれら2つの推定値に比べて明らかに幅広い分布となっている。

現地観測データをもとに推定された方向スペクトルの特性を検討する場合、真値が不明であるために、それぞれの推定法の特性を明確には判断できないが、図-7に示されている上記のような特性は、図-3の数値シミュレーション結果にも現れており、このことから図-7に示されるEMEPやBDMの推定値はEMLMに比べて妥当な推定値であろうと思われる。

## (2) うねりの場合

図-8は有義波高  $H_{1/3}=3.81\text{m}$ 、有義波周期  $T_{1/3}=12.3$ 秒で、光易型方向スペクトルの方向集中度パラメータ  $S_{\max}$ が75程度のうねりを対象として方向スペクトル解析した例を示したものである。図-8の上段より順にEMEP、BDM、EMLMにより解析した結果を示している。等値線図では図-7と同様に等高値を低い方から順に  $10^{0.0}$ 、 $10^{0.2}$ 、 $10^{0.4}$ 、 $10^{0.6}$ 、… ( $\text{m}^2\text{sec./rad.}$ )として描いている。

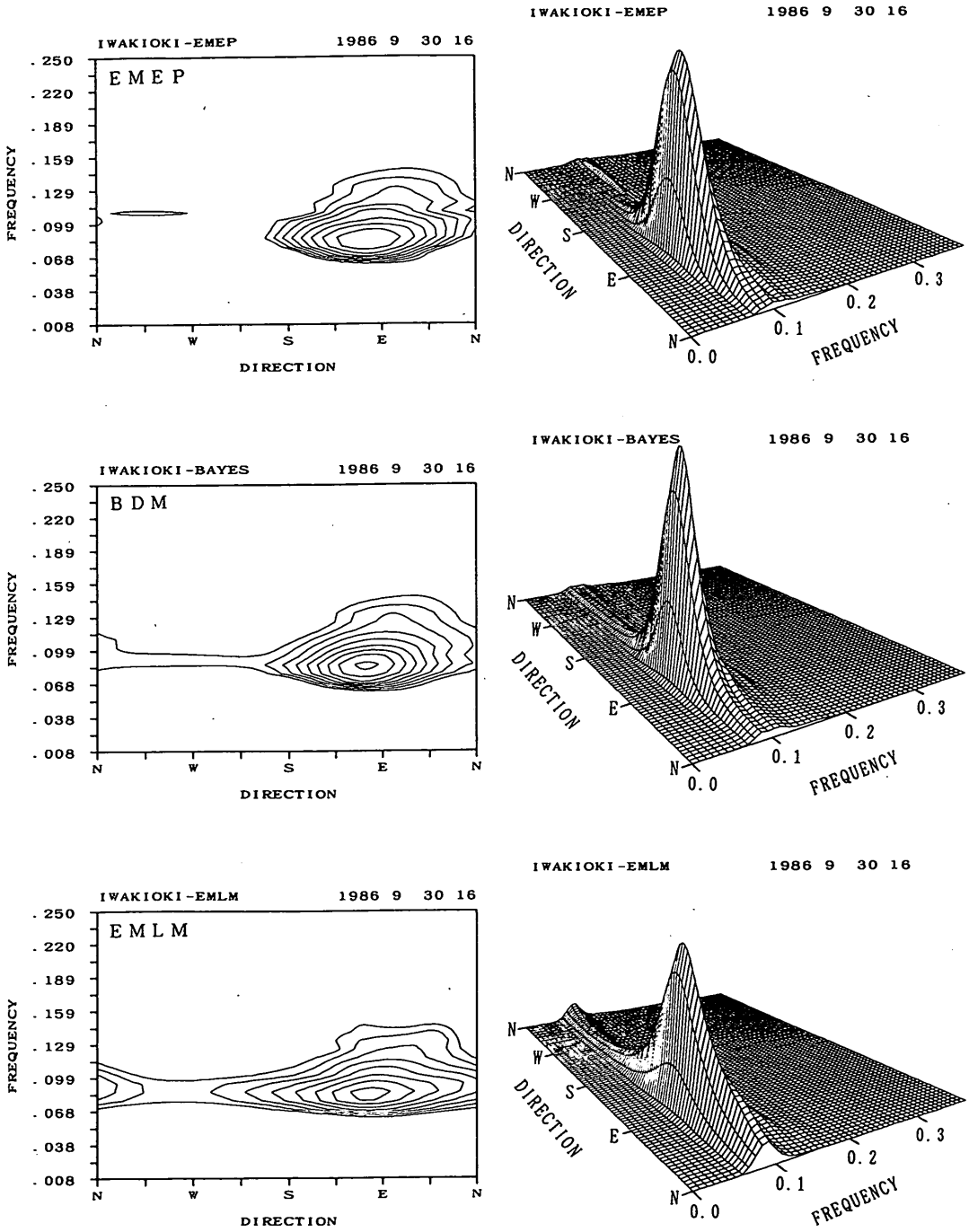


図-7 現地観測データを用いた場合の方向スペクトル推定結果の比較  
(風波, 上段: EMEP, 中段: BDM, 下段: EMLM)

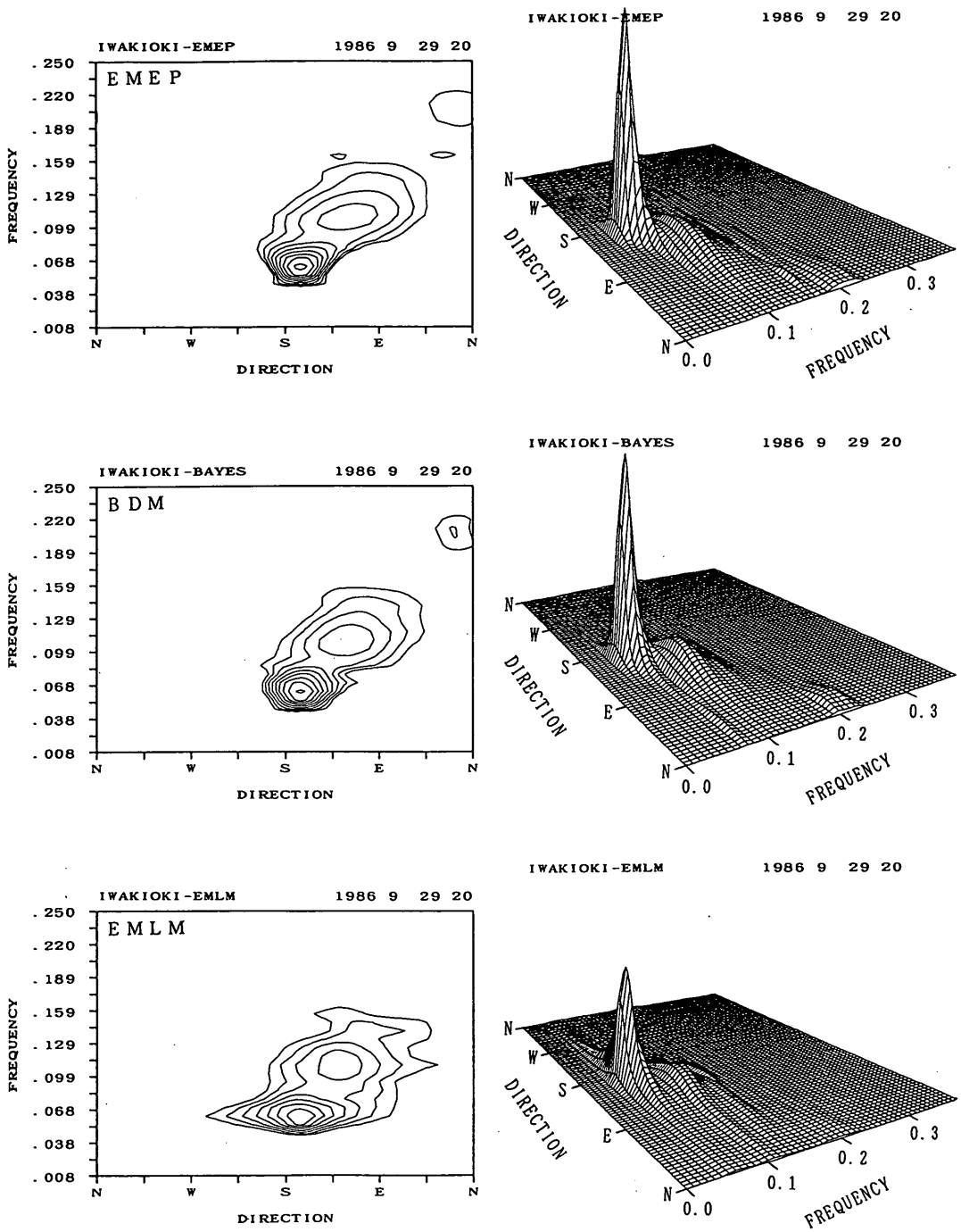


図-8 現地観測データを用いた場合の方向スペクトル推定結果の比較  
(うねり, 上段:EMEP, 中段:BDM, 下段:EMLM)

図-8に見られるようにいずれの方法による推定結果も周波数が0.05Hz付近に鋭いピークを有する幅の狭い方向スペクトルを示している。しかしながら、図-7と同様にEMLMではEMEPやBDMに比べてピークが低く、やや幅広いエネルギー分布を示している。EMLMのピーク値のレベルはEMEPやBDMに比べて7~8割程度である。なお、図-8の例では図-7の例と異なりEMEPのピークの方がBDMよりも高く推定されているが、その差はEMEPのピーク値の高さに対して1割以下である。また、等値線図の形状からはEMEPとBDMの方向スペクトルの形状は極めて類似している。

(3) 多方向波の場合

図-9は特に多方向にピークを有する方向スペクトルの解析結果を等値線図のみを用いて示したものである。図-9の各列はそれぞれ同一の観測データを用いて解析した結果であり、図-9の上段より順にEMEP, BDM, EMLMにより解析した結果を示している。左列の観測

データは有義波高  $H_{1/3}=2.18\text{m}$ , 有義波周期  $T_{1/3}=9.0$  秒の例であり、中央列は有義波高  $H_{1/3}=2.02\text{m}$ , 有義波周期  $T_{1/3}=8.2$ 秒の例、右列は有義波高  $H_{1/3}=3.94\text{m}$ , 有義波周期  $T_{1/3}=8.8$ 秒の例である。なお、図-9では等高線を見やすくするために、それぞれの列で異なる等高値を用いて等値線図を描いている。左列では  $0.2(\text{m}^2\text{sec./rad.})$  を最低レベルとし、  $0.2(\text{m}^2\text{sec./rad.})$  の等間隔で、等高値を設定して描画している。中央列では  $0.3(\text{m}^2\text{sec./rad.})$  を最低レベルとし、  $0.3(\text{m}^2\text{sec./rad.})$  の等間隔で、等高値を設定して描画している。また、右列では  $1.0(\text{m}^2\text{sec./rad.})$  を最低レベルとし、  $1.0(\text{m}^2\text{sec./rad.})$  の等間隔で、等高値を設定して描画した。

図-9の左列を見るとEMEPとBDMはどちらも3つのピークを明瞭に示しており、それらの形状は極めて類似している。しかしながら、EMLMでは周波数が0.145Hz近傍のNNE方向から来襲するエネルギーは明確には現れていない。また、各々のピーク・エネルギー

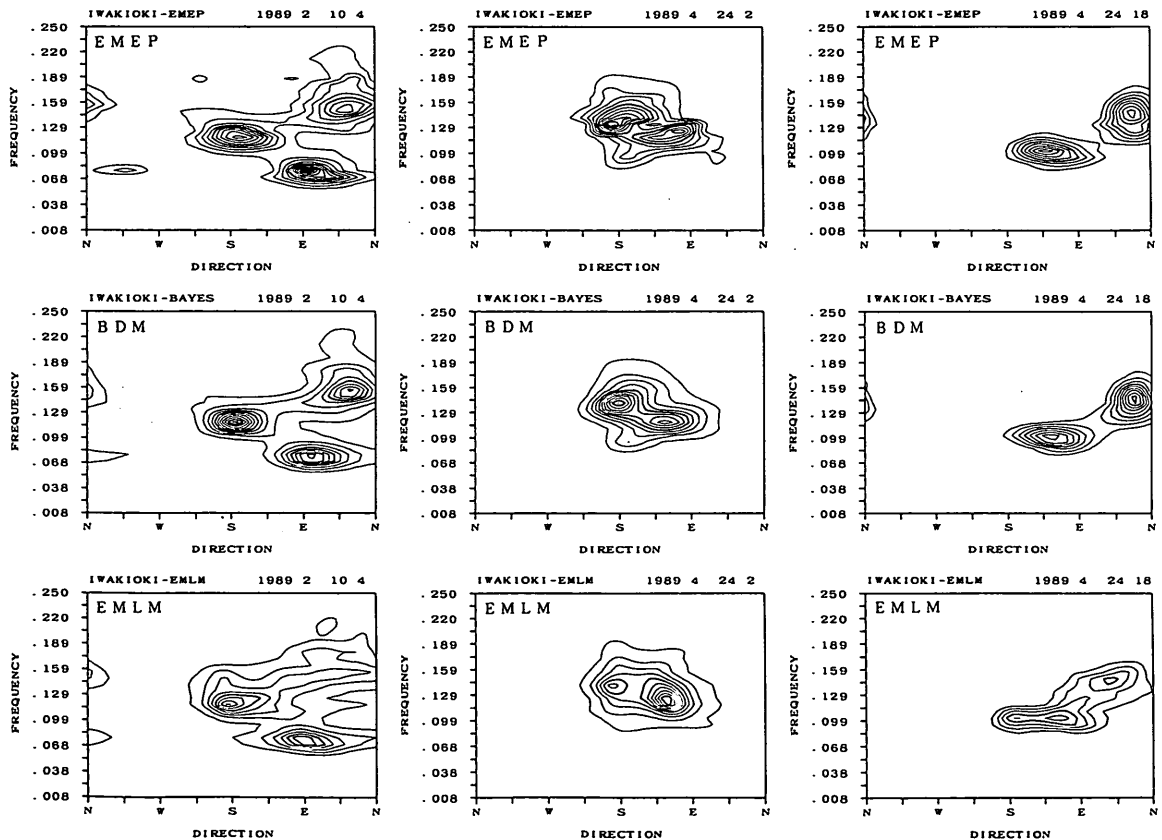


図-9 現地観測データを用いた場合の方向スペクトル推定結果の比較 (多峰性方向スペクトル, 上段:EMEP, 中段:BDM, 下段:EMLM)

のレベルも EMEP や BDM に比べて小さ目である。

図-9の中央列の例ではいずれの方法による結果も二方向波浪を識別している。しかしながら、EMEP と BDM では S 方向のピークが SSE 方向のピークよりも大きく現れているが、EMLM では S 方向から来襲するエネルギーの方が小さく現れており逆の形状を示している。

図-9の右列の例では EMEP と BDM は他の例と同様に極めて類似した形状を示している。しかしながら、EMLM では低周波数側の SSE 方向から来襲するエネルギーはピークが割れた形状を示しており、EMEP や BDM と異なった形状となっている。

以上、風波の場合、うねりの場合および多方向波の場合を対象として、EMEP、BDM および EMLM による解析例を示し、その相違点について述べた。EMEP と BDM の推定値には若干の相違は認められるものの、その程度は小さく、概してよく類似した推定値を示すようである。

なお、BDM の計算には NEC (日本電気株) のワーク・ステーション EWS 4800/220 を用いて行った。一方、EMEP の計算には NEC のパーソナル・コンピュータ PC-9801 RA 21 を用いて行ったが、いわき沖で観測された水位変動 4 成分、流速 2 成分および水圧の 7 つの全波動量の観測データを用いた場合でも、ハード・ディスクからのデータの読み込み、クロススペクトルの計算、EMEP による方向スペクトル計算およびハード・ディスクへの結果の出力の全ての工程を 2~3 分の計算時間で終了した。したがって、EMEP は現地観測データのパーソナル・コンピュータによる即時処理に関しては何ら問題はなく、実用性が高いと言える。

## 6. おわりに

新しい方向スペクトルの推定法として、以前に著者らが提案した MEP (最大エントロピー原理法) を拡張し、任意の観測波動量に適用可能で計算が簡便な方向スペクトル推定法として「拡張最大エントロピー原理法 (EMEP)」を提案した。また、本方法を数値シミュレーションや現地観測データに適用して、その妥当性や有用性について検討した結果を述べた。

EMEP は 3 成分観測データに適用した場合には MEP と同じ方向スペクトルを推定し、4 成分以上の観測波動量に適用する場合には BDM (ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法) とほぼ同じ方向スペクトルを推

定し、その推定精度は MEP や BDM を除く他の既往の方向スペクトル推定法に比べて極めて高い。また、EMEP による方向スペクトルの推定は BDM に比べて計算が簡便であり、パーソナル・コンピュータによるリアル・タイム処理が可能である。さらに、EMEP の定式化には BDM と同様にクロススペクトルの誤差の影響も考慮されており、この意味でも妥当な推定法となっている。

しかしながら、EMEP はあくまで MEP を拡張したものであり、MEP は EMEP の中に包含されるけれども、BDM までを包含するするものではない。すなわち、BDM では EMEP の式 (28) で用いられているような特定の関数形が仮定されているわけではなく、式 (28) で表せない形状の方向スペクトルであっても、方向スペクトルが滑らかな連続関数であれば表現可能である。また、文献<sup>12)</sup>にも述べたように、ベイズ統計学的アプローチは、原因を規定する要因が多く、相互に複雑に影響し合っている現象や、測定がしばしば困難であり測定誤差の大きい現象、あるいは理論の階層的構造化が十分ではなく、理論的検討のみによっては仮説の真偽を論ずることが困難な現象を解析するのに有用な方法であり、ここで述べた EMEP の理論的背景とは異なった立場で有用な方法である。数理統計学の分野においても、尤度関数を用いた既往の統計モデルの理論から、Kullback-leibler 情報量に基礎を置き、「けちの原理」を導入した AIC (赤池の情報量基準)<sup>18)</sup>を用いた統計モデルの理論へと発展し、さらに近年になって、AIC の導入のみでは不十分な現象に統計モデルをあてはめる問題に対してベイズ型モデルが考案され、ABIC (赤池のベイズ型情報量基準)<sup>21)</sup>へと発展して来た。この意味では、BDM は EMEP よりも後の世代の理論であると言える。

しかしながら、現状での方向スペクトル推定理論の現地への適用性を考える場合、あるいはこれまで BDM で解析して得られた方向スペクトルの構造に関する知見からは、実在の方向スペクトルは一般には EMEP で仮定した関数形で十分に近似できることがほぼ明らかとなってきており、この意味では EMEP は BDM も包含する理論であるとも言えよう。

いずれにしても、EMEP は MEP や BDM に匹敵する推定精度を有し、BDM に比べて計算が簡便であるという点で、今後の標準的な方向スペクトル推定法として有用かつ強力な方法であろう。

## 謝 辞

本論文を取りまとめるにあたっては、運輸省港湾技術研究所の堀江毅海洋水理部長からは論文のとりまとめに

関し懇切なる御指導を受けた。ここに心からの感謝の意を表する次第です。また、本論文で用いた観測データの取得に努力して頂いた運輸省第二港湾建設局の関係各位の方々に謝意を表するとともに、今後さらに御協力をお願いする次第です。

(1992年11月25日受付)

### 参 考 文 献

- 1) 合田良実：港湾構造物の耐波設計—波浪工学への序説—，鹿島出版会，210p.，1977. または，Goda, Y. : Random Seas and Design of Maritime Structure, University of Tokyo Press, 323p. , 1985.
- 2) 合田良実：海岸・港湾調査法，土木学会編，新体系土木工学80，技報堂出版，251p.，1986.
- 3) 本間仁・堀川清司：海岸環境工学，東京大学出版会，pp.506～524，補章A方向スペクトルの推定理論，1985.
- 4) Barber, N. F. : The directional resolving power of an array of wave detectors, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall, Inc., pp.137～150, 1961
- 5) Panicker, N. N. and Borgman, L. E. : Enhancement of directional wave spectrum estimate, Proc. 14th Int. Coastal Eng. Conf., Copenhagen, pp.258～279, 1974.
- 6) Longuet-Higgins, M. S., D. E. Cartwright and N. D. Smith : Observation of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall Inc., New Jersey, pp. 111～136, 1963.
- 7) Hasselman, D. E., M. Dunkel and J. A. Ewing : Directional Wave Spectra Observed during JONSWAP 1973, Jour. Physical Oceanography, Vol.10, pp.1264～1280, 1980.
- 8) 山口正隆：方向スペクトル観測装置の分解能について (1) — 3成分流速計による方法 —，愛媛大学紀要第Ⅲ部 (工学)，第9巻，第3号，pp.225～234, 1978.
- 9) Capon, J. : High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis, Proc. IEEE, Vol.57, pp.1480～1418, 1969.
- 10) 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司：方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張，第31回海岸工学講演会論文集，pp.173～177, 1984.
- 11) 橋本典明・小舟浩治：最大エントロピー原理 (MEP) を用いた方向スペクトルの推定，港湾技術研究所報告，第24巻，第3号，pp.123～145, 1985.
- 12) 橋本典明：ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定，港湾技術研究所報告，第26巻，第2号，pp.97～125, 1987.
- 13) 橋本典明・小舟浩治：ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定—入・反射波共存場を対象として—，港湾技術研究所報告，第26巻，第4号，pp.3～33, 1987.
- 14) 橋本典明・小舟浩治・亀山豊：現地観測データを用いた方向スペクトル推定法に関する検討，港湾技術研究所報告，第27巻，第2号，pp.59～94, 1988.
- 15) Borgman, L. E. : Directional spectral model for design use for surface waves, Hyd. Eng. Lab. Univ. Calif., Berkeley, HEL 1-12, 56p., 1965.
- 16) Nwogu, O : Maximum Entropy estimation of directional wave spectra from an array of wave probes, Applied Ocean Res., Vol.11, No.4, pp.176～193, 1989.
- 17) 坂元慶行・石黒真木夫・北川源二郎：情報量統計学，共立出版株式会社，236p., 1983.
- 18) Akaike, H. : Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, 2nd Inter. Symp. on Information Theory (Petrov, B. N. and Csaki, F. eds.), Akademiai Kiado, Budapest, pp.267～281, 1973.
- 19) 磯部雅彦・古市耕輔：不規則波に対する統計量の変動に関する理論的考察，第33回海岸工学講演会論文集，pp.159～163, 1986.
- 20) Bendat, J. S. and A. G. Piersol : Random Data Analysis and Measurement Procedures, Second edition, John Wiley & Sons, 566p., 1986.
- 21) Akaike, H. : Likelihood and Bayes procedures, Bayesian Statistics (Bernardo, J. M., De Groot, M.H., Lindley, D.U. and Smith, A.F.M. eds.) University Press, Valencia, pp.143～166, 1980.