

運輸省港湾技術研究所

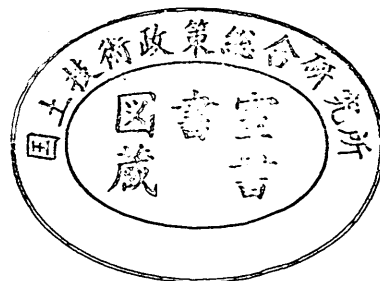
港湾技術研究所 報告

REPORT OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH
INSTITUTE

MINISTRY OF TRANSPORT

VOL. 30 NO. 1 MAR. 1991

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I)

第30巻 第1号 (Vol.30, No.1) 1991年3月 (Mar.1991)

目次 (CONTENTS)

1. 遠地津波の外洋伝播計算
.....後藤 智明.....3
(Numerical Simulation of the Trans-oceanic Propagation of Tsunami
.....Chiaki GOTO)
2. 碎波および反射を考慮した波浪変形計算
.....高山 知司・池田 直太・平石 哲也.....21
(Practical Computation Method of Directional Random Wave Transformation
.....Tomotsuka TAKAYAMA, Naota IKEDA and Tetsuya HIRAISHI)
3. 多方向不規則波を用いた波浪変形模型実験
.....高山 知司・池田 直太・小杉 宜史.....69
(Hydraulic Model Test on Wave Diformation by using Directional Random Waves
.....Tomotsuka TAKAYAMA, Naota IKEDA and Yoshifumi KOSUGI)
4. 波の連なりを考慮した長周期波の波高の推定
—波崎海洋研究施設における現地観測における現地観測にもとづく検討—
.....加藤 一正・中村 聡志・池田 直太.....137
(Estimation of Infragravity Waves in Consideration of Wave Groups
—An Examination on Basis of Field Observation at HORF—
.....Kazumasa KATOH, Satoshi NAKAMURA and Naota IKEDA)
5. 現地データによる移動床模型実験の検証
—河原子海岸におけるケース・スタディー—
.....加藤 一正・井上 浩司・柳嶋 慎一.....165
(Inspection of Movable-bed Model Experiments with Field Data
—Case Study at Kwarago Beach—
.....Kazumasa KATOH, Kouji INOUE and Shin-ichi YANAGISHIMA)
6. ヨシ原による水質浄化の特性
.....細川 恭史・三好 英一・古川 恵太.....205
(Characteristics of Water Purification in Coastal Reed Field
.....Yasushi HOSOKAWA, Eiichi MIYOSHI and Keita FURUKAWA)
7. 空港コンクリート舗装の不同沈下管理に関する考察
.....八谷 好高・横田 弘.....239
(Differential Settlement Management of Airport Concrete Pavements
on Reclaimed Ground
.....Yoshitaka HACHIYA and Hiroshi YOKOTA)

8. 大変形する単杭構造による接岸ドルフィンの残留変位と累積疲労損傷度
上田 茂・白石 悟.....267
 (Residual Deflection and Cumulative Fatigue Damage Ratio
 of Breasting Dolphin by Single Pile Structure
Shigeru UEDA and Satoru SHIRAISHI)
9. カラーコンクリートの材料特性に関する研究
 —強度特性, 色彩特性, および耐久性—
福手 勤・山本 邦夫・濱田 秀則.....313
 (A Study on the Material Properties of Coloured Concrete
 —Strength, Colouring, and Durability—
Tsutomu FUKUTE, kunio YAMAMOTO and Hidenori HAMADA)
10. 捨石による基礎マウンドの形状および力学特性に関する考察
口田 登・辻垣 武彦・森田 博史.....347
 (Study on Configuration and Mechanical Properties of Rubble Mounds
Noboru KUTIDA, Takehiko TSUJIGAKI and Hirohumi MORITA)

1. 遠地津波の外洋伝播計算

後藤智明*

要旨

北米沖や南米沖で発生した地震により発生した津波が太平洋を長距離伝播し、日本沿岸へ来襲することがある。この津波を日本沿岸付近で発生する近地津波と区別し、遠地津波と呼んでいる。

日本沿岸に被災をもたらした遠地津波に1960年のチリ津波が著名である。この津波により被った災害は、死傷者が1,000名以上であり、北海道から九州に至る太平洋岸一帯で家屋、耕地、港湾および船舶などに大きな被害を被っている。

一般に、津波の現象のスケールは沿岸地形と同じ程度の大きさであり、沿岸海域によりそれぞれ特性が大きく異なるのが通常である。このような理由により津波防災対策には数値シミュレーションが利用されている。遠地津波の数値計算は、伝播距離が長いと、近地津波に比べ波数分散性を無視することができなく、また、数値計算上の誤差の累積に注意する必要がある。このような遠地津波の伝播計算に関して支配方程式の各項のオーダー比較と計算誤差解析などによる若干の検討を行った結果、数値シミュレーションを所要の精度で行うための条件に関する知見が得られたので報告する。

キーワード：遠地津波，支配方程式，計算誤差，津波シミュレーション

* 水工部 海洋エネルギー利用研究室長

1. Numerical Simulation of the Trans-oceanic Propagation of Tsunami.

Chiaki GOTO*

Synopsis

Numerical simulations of the trans-oceanic tsunami propagation require a well designed computation program. In order to obtain good, reliable results, spatial and temporal grid sizes should be carefully determined. The area included in and the time for the computation are so wide and long that a huge computer memory is inevitable. There are two major sources of error which are closely related with grid size. One is the dispersion, physical or numerical, and the other is the accumulation of round-off errors.

After a comparison of the magnitude of terms in the fundamental equations for long waves, it is concluded that the convection term can be negligible and that the linear Boussinesq equations including the Coriolis force, expressed in the longitude-latitude coordinates, should be used.

Effects of the grid size on the computed results are examined as the one-dimensional problem for four different grids assuming that staggar leap-frog scheme is applied to the linear long wave and linear Boussinesq equations. For comparisons, the linear surface wave equation is considered as the best equation, because it fully includes the effects of dispersion. The linear Boussinesq equations give better results with finer grid size, while the linear long wave equations give the best result with grid size 10km, with which the numerically introduced dispersion approximates well the physical dispersion.

Diagrams are provided to estimate errors in wave profile and wave length as a function of the grid size, travel distance and original wave length, for both the linear long wave and linear Boussinesq equations.

As an example of practical application, the Great Alaska Earthquake Tsunami of 1964 in the North Pacific Ocean is simulated with the linear long wave and linear Boussinesq equations.

Key Words : Distant Tsunami, Governing Equations, Numerical Error, Tsunami Numerical Simulation

* Chief, Ocean Energy Utilization Laboratory,
Hydraulic Engineering Division

目 次

要 旨	3
1. ま え が き	7
2. 遠地津波の外洋伝播に関する支配方程式の検討	7
3. 計算の格子間隔に関する検討	9
3. 1 計算格子間隔の違いによる計算結果の変化	9
3. 2 計算誤差を考慮した支配方程式と計算格子間隔の選定	10
4. 二次元伝播計算に関する検討	13
4. 1 計算法	13
4. 2 数値計算結果	14
5. ま と め	14
参考文献	17
付録 緯度・経度座標による非線形長波理論	17

1. まえがき

わが国が遠地から襲来した津波により被害を受けた例としては、1960年のチリ沖地震津波が著名である。この津波による死傷者は、三陸地方を中心に1000名を超える。このような遠地津波の第一の特徴は、地震の規模が大きく波源が広いため、周期の長い津波になることである。したがって、近地津波の場合では湾の固有周期が異なり、波高の増幅がそれほど見られなかったところでも、被害が大きくなる可能性がある。さらに、火力または原子力発電所の多くが沿岸域に設置されるようになり、通常の津波による破壊、浸水などの被災の他に、長時間にわたる水位低下による冷却取水の中断といった新たな問題が生ずると考えられる。以上のように、遠地津波は、近地津波と異なった防災上の問題が残されているにもかかわらず、予測のための数値計算手法が十分確立されていないのが現状である。

近地で発生する津波に比べ遠地津波の数値計算で問題となると考えられることは、対象とする領域が広いため多くの演算時間および記憶容量が必要となること、さらに長距離伝播するため伝播に波数分散効果を考慮しなければならないことである。また、現象時間が長いため計算誤差の累積にも注意する必要がある。

過去の遠地津波の計算例としては Ueno¹⁾, Hwang^{2), 3)}によるものがある。しかし、差分格子が粗く、計算の支配方程式の精度が劣るといった理由により、計算結果の信頼性は低く、遠地津波の来襲を予測、再現する充分な方法とは考えられていない。

以上のことから、本研究では、1964年アラスカ地震津波を取り上げ遠地津波の外洋伝播計算法に関する基礎的な検討を行う。題材として選んだアラスカ地震津波は、地盤変位の測量結果などから波源の様子が精度よく求められており、また、計算結果と比較検討するための検潮記録が数多く残されているものでもある。

本研究では、まず始めに、運動の式中の各項のオーダーを比較することにより遠地津波計算の支配方程式に関する検討を行う。次に、支配方程式および計算格子間隔の違いによる計算結果の差について検討し、適切な支配方程式と計算格子間隔について提案する。最後に、実用問題の例として北太平洋を対象領域にしたアラスカ地震津波の二次元伝播計算を行い、遠地津波計算を実施する上で問題となる事項について考察する。

本論文で報告する計算は、すべてリープフロッグ形式の差分法に基づくものである。これは、演算時間、記憶容量の問題、境界条件の設定の容易性および数値計算の

誤差の性質などの理由による。また、実用計算は緯度、経度による球面座標系の式群を用いているが、数値計算の誤差解析は、簡単のためすべて平面座標系に関して実施している。表記法は異なるものの、本質的な現象は両者共に同じであるという判断による。

2. 遠地津波の外洋伝播に関する支配方程式の検討

一般に、津波の伝播は、波源の大きさに比べ水深が小さいため長波理論で取り扱われる。後藤⁴⁾, 藤間⁵⁾の展開によると、コリオリ項を考慮した二次元伝播に関する長波理論式は、 (x, y) を静水面に採った空間座標、 t を時間座標、 $(\bar{u}, \bar{v})$ を (x, y) 軸方向の断面平均流速、 η を水位変動、 h を静水深、 g を重力加速度、 f をコリオリ因子とすると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M^2}{h+\eta} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{MN}{h+\eta} \right] \\ + g(h+\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ = -fN + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{3} F_1 + \frac{h^2}{2} F_2 \right] \\ + \frac{\partial h}{\partial x} \left[\frac{h^2}{2} F_1 + h F_2 \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{N^2}{h+\eta} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{MN}{h+\eta} \right] \\ + g(h+\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ = fM + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{h^3}{3} F_1 + \frac{h^2}{2} F_2 \right] \\ + \frac{\partial h}{\partial y} \left[\frac{h^2}{2} F_1 + h F_2 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで、 M , N および F_1 , F_2 は次の諸式で与えられる。

$$M = (h+\eta)\bar{u}, \quad N = (h+\eta)\bar{v}$$

$$F_1 = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t \partial y}, \quad F_2 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{v} \frac{\partial h}{\partial y} \right]$$

この式は長波理論の第二次近似にあたり、Boussinesq, Korteweg-de Vries, Mei-Le Méhauté, Peregrine および Kakutani によって導かれたものと等価な式である。⁴⁾第三次近似以上の理論式も藤間⁵⁾により導かれているが、5階以上の微分項を含むなど数値計算に用いるのは難しい。したがって、式(1)-(3)が現状の計算機および数値計算手法で扱い得る最も高次の長波の式と考えてもよい。

遠地津波の計算は、対象とする領域が近地津波の場合

に比べ格段に広いので式 (1)-(3) でも難しく、さらに伝播距離も長くなるので計算誤差の累積にも注意する必要がある。したがって、精度を落とさず式 (1)-(3) をさらに簡単にすることを考えなくてはならない。以下、遠地津波の大まかなスケールを用いて運動の式の各項の重要性を調べ、数値計算に適した支配方程式について検討する。

いま、津波の一次元伝播問題を取り上げ、水位変動 η と水平流速 $\bar{u}$ を最も簡単な線形長波の関係から、波速を $c_0 = \sqrt{gh}$ として

$$\eta = a \sin(kx - \sigma t), \quad \bar{u} = (c_0/h) \eta \quad (4)$$

と与えるものとする。津波波形を無限に続く正弦波と考え、振幅 a および波数 k を津波初期波形の代表的な寸法で近似するといった現実におきる津波とややかけ離れた条件を仮定したが、大まかな津波の伝播状況のオーダー比較を考える場合には問題がないと思われる。

移流項の大きさは局所項で正規化すると

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M^2}{h + \eta} \right] / \frac{\partial M}{\partial t} \sim O(a/h) \quad (5)$$

となり、波高水深比のオーダーであることがわかる。静水圧力項に関しては線形の部分と有限振幅の効果の部分に分けると

$$gh \frac{\partial \eta}{\partial x} / \frac{\partial M}{\partial t} \sim O(1) \quad (6)$$

および

$$g\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} / \frac{\partial M}{\partial t} \sim O(a/h) \quad (7)$$

となる。同様にして、コリオリ項および分散項のオーダーを求めると

$$fM / \frac{\partial M}{\partial t} \sim O(f/c_0 k) \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x} \right] / \frac{\partial M}{\partial t} \sim O(k^2 h^2) \quad (9)$$

となる。ただし、分散項は水平床近似に関するもので、

分散項中の斜面勾配の効果を考慮していない。これは、長尾ら⁶⁾により比較的急勾配の斜面においても、分散項中の斜面勾配の効果は分散項全体の数%程度の大きさであることが明らかにされているためである。

運動量の式の各項の大きさを具体的に調べるために津波の波高を 5m に仮定すると、式 (5)-(9) から運動量の式 (2) の各項の大きさは表-1 のようになる。表中の数字は水深 4km の海域を伝播する津波に関して、局所項の大きさに対する各項の比を表している。また、津波の代表的な波長としては 1000km, 100km および 10km の 3 種類のを仮定している。表から、移流項、静水圧力項中の有限振幅性の効果は 10^{-3} のオーダーと小さく無視可能であることがわかる。分散項は、津波の代表スケールにより異なり 10^{-5} から 10^{-1} のオーダーとなる。したがって、現実の津波は多くの波長成分の重ね合わせで表され、たとえ波源が大きい津波であっても波長の短い成分も考慮する必要があることを考え合わせると、分散項は無視できないものと判断される。また、コリオリ項は波長が長い成分ほど大きくなり、場合によっては 10^{-1} 以上のオーダーとなるため無視することはできないこともわかる。

以上の検討結果をまとめると、遠地津波の外洋伝播計算の支配方程式としてはコリオリ力項を考慮した線形 Boussinesq 理論が適しており、式 (1)-(3) に比べ簡単な

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} = -fN + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{3} F_1 \right] \quad (11)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} = fM + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{h^3}{3} F_1 \right] \quad (12)$$

を用いればよいことになる。

日本沿岸で発生する津波を考える場合では、せいぜい 1000km 四方の海域を対象とするため式 (10)-(12) のような平面座標で扱うことが多い。しかし、アラスカまたはチリで発生した津波が我が国へ来襲するといった 10,000km 以上も伝播する現象を扱うには精度の点で問

表-1 長波理論式の各項のオーダー比較

	水深	波長	移流項	静水圧項	静水圧項中の有限振幅性の効果	コリオリ項	海底摩擦項	分散項
各項の大きさ	5000m	1000km	10^{-3}	10^{+0}	10^{-3}	10^{-1}	10^{-4}	10^{-5}
		100km				10^{-2}	10^{-5}	10^{-3}
		10km				10^{-3}	10^{-6}	10^{-1}

題があり、球面座標を用いる必要がある。いま、地球を半径 R の球体として考え、緯度、経度座標を (λ, φ) とし、各方向の線流量を新たに (M, N) とすると、平面座標の式 (10)-(12) に相当する緯度・経度座標系の式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (M \cos \lambda) + \frac{\partial N}{\partial \varphi} \right] = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{gh}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = -fN + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{h^3}{3} F_3 \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{gh}{R \cos \lambda} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = fM + \frac{1}{R \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{h^3}{3} F_3 \right] \quad (15)$$

$$F_3 = \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (\bar{u} \cos \lambda) + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t \partial y} \right]$$

となる。なお、緯度・経度座標の非線形分散波理論に関しては付録を参照されたい。

3. 計算の格子間隔に関する検討

3.1 計算格子間隔の違いによる計算結果の変化

数値計算では、計算格子間隔に比例して離散化誤差や打ち切り誤差が大きくなり、物理的な性質とは異なる分散効果が生じたり散逸効果が働くことが知られている。⁹⁾ この種の誤差は対象とする津波波形により変化するため、ここでは比較的波源の精度が良いと考えられているアラスカ地震津波を例にとり検討する。

計算は簡単のため一次元伝播とする。用いた理論は線形長波理論、線形 Boussinesq 理論および微小振幅表面波理論の 3 種類である。微小振幅表面波理論を計算の対象に加えた理由は、非線形効果が無視できる遠地津波の外洋伝播計算において、微小振幅表面波理論の解が真値と考えられるためである。計算に用いた津波初期波形は、図-1 に示す Plafker⁷⁾ の推定したアラスカ地震津波の代表的な断面波形 A-A' であり、簡単のため水深 4km の水平床を仮定 (アラスカ津波の波源は平均水深が 0.91 km であるため、本計算では Green の法則から波長を 2 倍、波高を 0.7 倍している。) し、約 6000km (アラスカからメキシコまたは日本の三陸沿岸までに相当) の距離を伝播させている。計算の方法としては、線形長波理論がリープフロッグ法 (陽解法)、線形 Boussinesq 理論は計算点の配置をリープフロッグ法と同じにした陰差分法、そして微小振幅表面波理論がフーリエ変換による方法を用いている。

図-2 に、線形長波理論および線形 Boussinesq 理論を用いて計算した結果の一例を示す。図は空間水位に関するものであり、計算格子間隔 (Δx) を 5, 10, 20,

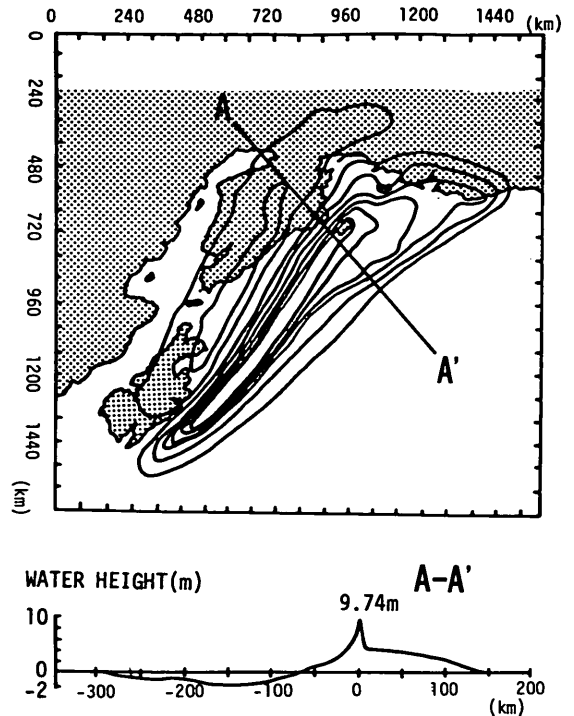
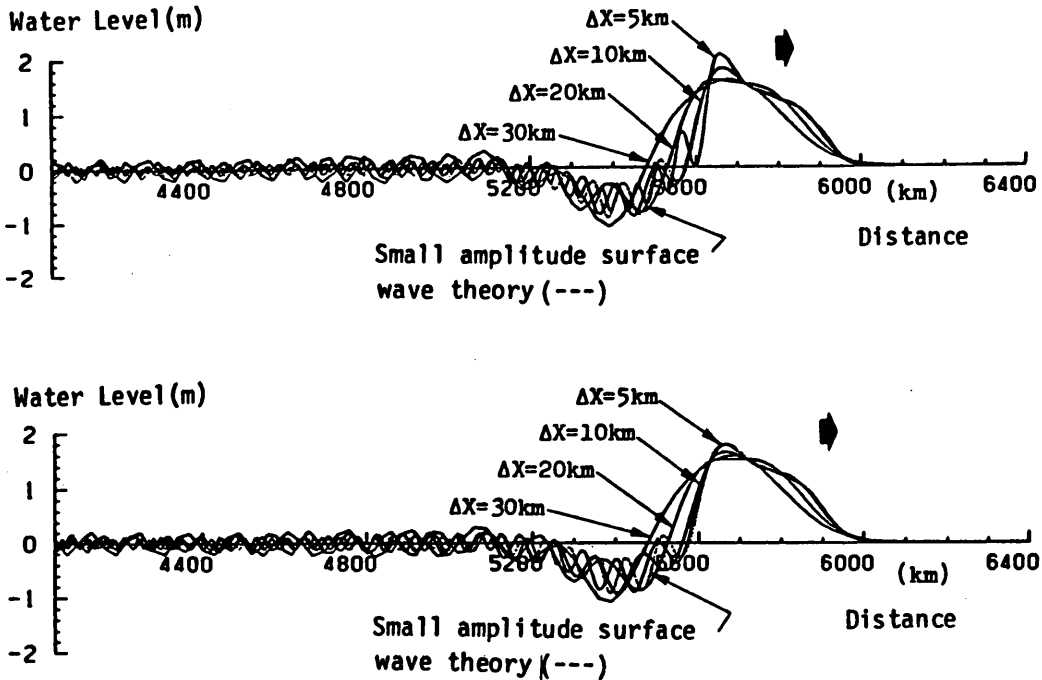


図-1 1964年アラスカ津波の初期波形

30km の 4 種類について変化させて、微小振幅表面波の解と比較したものである。上段の図、すなわち線形長波理論による計算結果は、本来ならば 図-1 に示す初期波形の半分の寸法の方が相似形を保って伝播しているものになるはずであるが、打ち切り誤差に起因する数値分散性のため、主峰が減衰し高波数成分が顕著に現れた結果になる。この数値分散効果は計算の格子間隔に関係し、格子間隔が小さいものほど波長の短い分散波列が発生し、大きいものほど波長の長いものが起こる性質があることがわかる。また、真値と考えられる微小振幅表面波理論も水深に関する分散性 (以後、物理分散性と呼ぶ) が現われる。したがって、両者の効果がほぼ等しくなる場合もあり、この場合には $\Delta x = 10\text{km}$ 程度がその条件であることもわかる。過去の Ueno および Hwang らの計算は線形長波理論を用い、それぞれ緯度、経度で 5 度、10 分すなわち 600km, 20-30km 程度の比較的粗い差分格子を用いて実施されたものである。この程度の差分格子間隔では、図からも明かなように真値との差が大きくなり、計算精度に関しては問題が残されていたこともよく理解できる。図-2 の下段の図は、線形 Boussinesq 理論の場合について同種の比較を行ったものである。線形長波理論の計算では $\Delta x = 10\text{km}$ 程度に最適な結果



図—2 計算格子間隔の違いによる計算結果の差

を与える条件があったが、線形 Boussinesq 理論の計算では格子間隔を細かくするほど精度がだんだん良くなる傾向があることが図から判断できる。線形 Boussinesq 理論では第一次近似ではあるものの物理分散効果が考慮されており、計算結果に現れる最終的な分散現象はこの物理的なものと打ち切り誤差に起因する数値的なものが合わさったものである。したがって、格子間隔を小さくするほど数値分散効果が小さくなり、本来の物理分散効果に近づくためである。

3. 2 誤差を考慮した支配方程式と格子間隔の選定

前節において、物理的に精度が劣る線形長波理論を用いても計算条件によっては、線形 Boussinesq 理論を用いた結果と同程度の精度が得られる場合があることが明らかとなった。本節では、この理由を数値計算の打ち切り誤差の理論解析から明らかにし、また、所要の精度を得るための計算の支配方程式と格子間隔について検討する。

一般に、発展方程式の数値計算^{8),9)}の打ち切り誤差としては数値散逸または数値分散効果が知られている。各効果は用いる計算手法により異なり、ここで用いているリープフロッグ差分法には数値分散効果があることが明らか

かにされている。^{8),9)}したがって、計算精度を量的に吟味するためには、波速の誤差について調べればよい。

水平床を仮定した線形長波理論のリープフロッグ差分計算上の波速に関する厳密解 c_L は、 $(\Delta x, \Delta y)$ を計算格子長、 Δt を時間間隔、 (k_x, k_y) を (x, y) 方向の波数とすると

$$\frac{c_L}{c_0} = \frac{\arcsin(S_L)}{[(\omega_x k_x)^2 + (\omega_y k_y)^2]^{1/2}} \quad (16)$$

で表される。¹⁰⁾ここに、 $S_L = [K_x^2 \sin^2 \omega_x + K_y^2 \sin^2 \omega_y]^{1/2}$ 、 $\omega_x = k_x \Delta x / 2$ 、 $\omega_y = k_y \Delta y / 2$ であり、 $K_x = c_0 \Delta t / \Delta x$ 、 $K_y = c_0 \Delta t / \Delta y$ である。線形 Boussinesq 理論の計算上の波速 c_B は

$$\frac{c_B}{c_0} = \frac{\arcsin(S_B)}{[(\omega_x k_x)^2 + (\omega_y k_y)^2]^{1/2}} \quad (17)$$

である。¹⁰⁾ここに、 $S_B = (S_1/S_2)^{1/2}$ 、 $S_1 = [K_x^2 \sin^2 \omega_x + K_y^2 \sin^2 \omega_y]^{1/2}$ 、 $S_2 = 1 + (4h^2/3\Delta x^2) \sin^2 \omega_x + (4h^2/3\Delta y^2) \sin^2 \omega_y$ である。一方、真値として考えられる微小振幅表面波の波速 c_s は

$$c_s/c_0 = [\tanh(kh)/kh]^{1/2} \quad (18)$$

である。

各計算上の波速の誤差を

$$\epsilon_o = |c_L - c_s| / c_s \text{ または } |c_B - c_s| / c_s$$

(19)

で定義し、波速の誤差が 5% 以内となる津波の波長を調べてみた結果が 図-3 および 図-4 である。

図-3 は平均的な太平洋の水深を $h = 4\text{km}$ と仮定

し、 $\Delta x = 2\Delta y$, $K_x = 0.2$ の条件で Δx を 3 種類に変化させた場合である。 $\Delta x = 5, 10, 20\text{km}$ は後に述べる球座標系 (緯度, 経度座標系) においてそれぞれ 2.5, 5, 10 分格子に相当するものであり、 $\Delta x = 2\Delta y$ としたのは球座標では高緯度になるほど経度方向の格子間隔が短くなることを考慮したことを意味する。また、

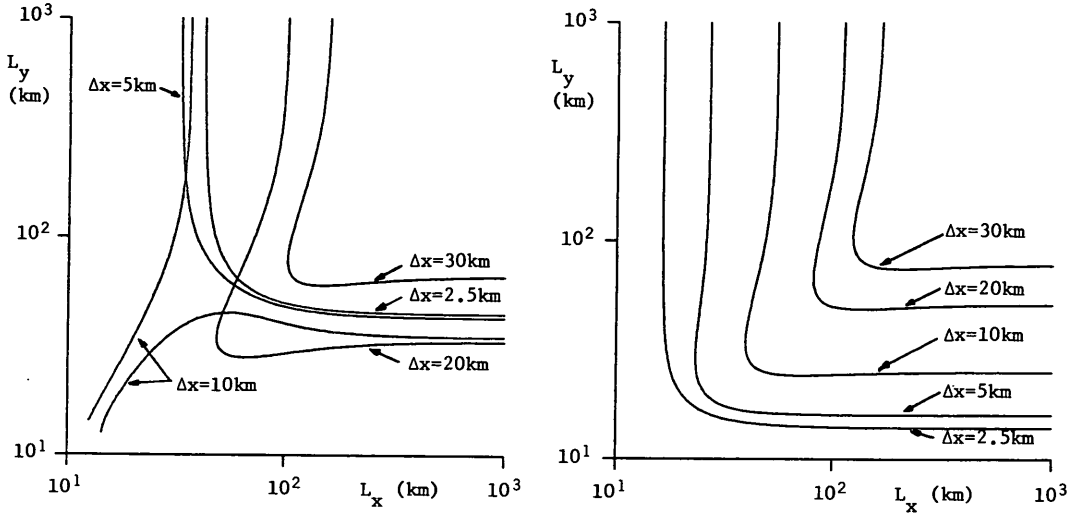


図-3 波速の誤差が 5% 以内となる計算格子間隔

(左図) 線形長波計算

(右図) 線形 Boussinesq 計算

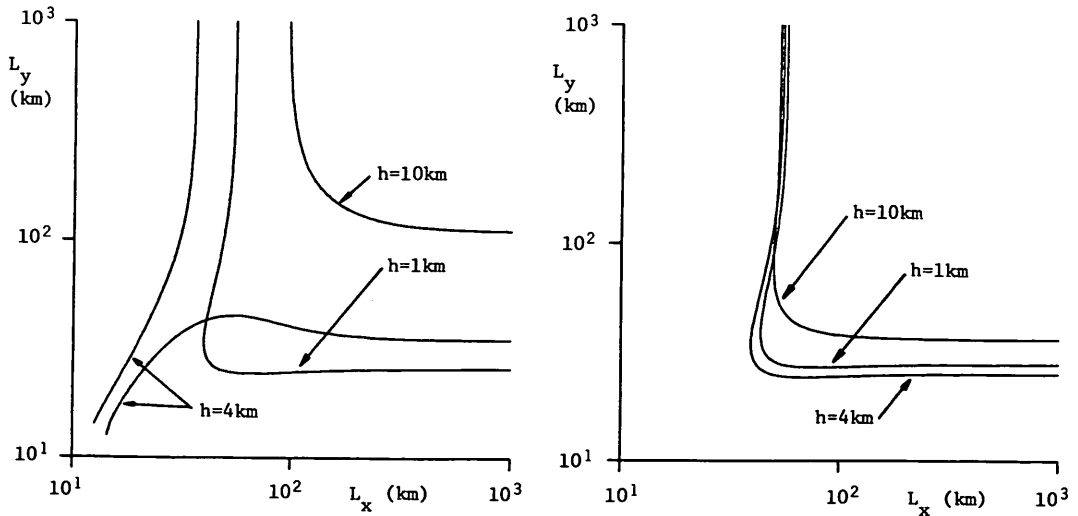


図-4 計算格子間隔を 10km とした場合に波速の誤差が 5% 以内となる水深

(左図) 線形長波計算

(右図) 線形 Boussinesq 計算

図の縦軸 L_x 、横軸 L_y は x, y 方向の津波波長をフーリエ分解したときの成分波の波長を示し、各曲線より長い波長の成分の誤差が 5% 以内で計算できることを表している。この図から、線形 Boussinesq 計算は格子長を小さくするほど精度が良い計算が可能となることがわかる。また、線形長波計算は線形 Boussinesq 計算に比べ単純ではなく、 $\Delta x = 10\text{km}$ が 3 種類の中では最も精度が良いことがわかる。これは $\Delta x = 5\text{km}$ または 20km の場合の数値分散性は物理分散性に比べ小さすぎたり大きすぎたりするためであり、先に述べたように 10km 程度で物理分散効果と数値分散効果がほぼ等しくなるためであると考えられる。

図-4 は $\Delta x = 2\Delta y = 10\text{km}$, $K_x = 0.2$ の条件で水深を変化させた場合である。線形 Boussinesq 計算の精度はほとんど変わらないが、線形長波計算は水深により大きく精度が異なることがわかる。ただし、遠地津波の外洋伝播を考える場合には、水深 4km 程度の海洋底が長く続き、水深 10km 程度の海溝部および水深 2km 以下の浅海部は比較的距離が短いため、全体を通すと大きな誤差を生ずる可能性は少ないと考えられる。

以上の議論では、波速の誤差 5% を一種の判定基準にとり計算誤差の説明をしているが、波速の誤差から最終的な津波波形の誤差に直接結び付けるのは難しい。津波波形の誤差を調べるには、具体的な初期波形を与える必要がある。そこで、初期波形の標準形としては比較的精度が良いと考えられているアラスカ津波の波源と相似なものを選び、津波波形に関する誤差評価を行うことを考える。具体的な誤差評価としては、波速の誤差が明らかとなっている数値計算を用いて波速の誤差と津波波形の誤差の関係を調べる方法を用いている。計算は線形長波理論の一次元伝播問題とし、 $\Delta x = 2\Delta y = 10\text{km}$, $h = 4\text{km}$, $K_x = 0.2$ の条件で行っている。また、初期波形はアラスカ津波の断面波形であり、水平距離を 3 種類 (0.5, 1.0, 2.0 倍) に変化させて計算している。波速の誤差と波形の誤差の関係を計算結果から整理すると図-5 が求まる。図の縦軸は

$$\varepsilon_H = \int_{x_0}^{x_0+L_0} \eta_c - \eta_s dx / \int_{x_0}^{x_0+L_0} \eta_s dx \quad (20)$$

で定義した津波波形の誤差、横軸は伝播距離そして内部パラメータは L'/L_0 である。ここで、 L' は波速の誤差が 5% となる成分波の波長である。また、 η_c は津波波形に関する数値計算結果、 η_s は真値として考えられる微小振

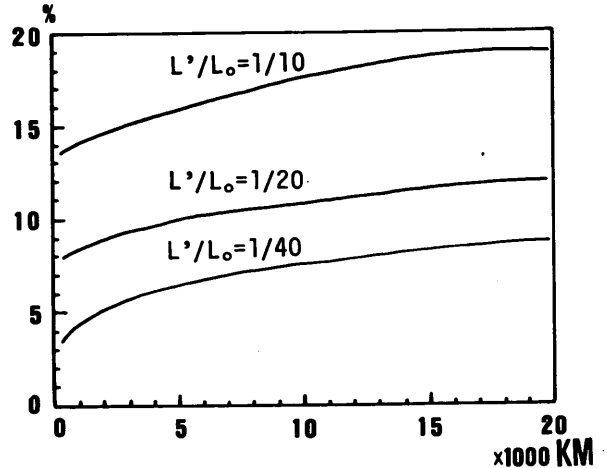


図-5 伝播距離と津波波形の誤差

幅波理論の解、 x_0 は津波の先端の位置そして L_0 は zero-up-cross で定義した津波主峰部の波長である。この図から、所要の精度を得るための適切な支配方程式および計算格子を定めることができる。例えば、初期波形の寸法が $L_0 = 1,000\text{km}$ の津波で伝播距離が $20,000\text{km}$ とした場合、波形の精度を 20% 以内で計算しようとする $L'/L_0 = 1/10$ であるので、波長 100km 程度まで誤差 5% 以内で計算する必要がある。したがって、図-3 から $\Delta x = 20\text{km}$ の線形長波理論または線形 Boussinesq の式を用いればよいことがわかる。同様に、波形の誤差 10% であるなら $\Delta x = 10\text{km}$ の線形長波理論または線形 Boussinesq の式、そして波形の誤差 8% までなら $\Delta x = 5\text{km}$ の線形 Boussinesq 理論を選ばばよいことになる。

以上の計算誤差に関する検討では、 K_x の値について詳しい議論をしていない。 K_x の値による打ち切り誤差の変化は、 $K_x = 0.1-0.4$ の範囲で無視できる程度に小さく、あまり問題とはならない。ただし、安定条件の許す範囲で K_x の値を大きくすると、徐々に打ち切り誤差が小さくなる性質があるので、打ち切り誤差の性質を利用する線形長波理論を用いた計算では逆に注意が必要である。また、数値計算の誤差には、打ち切り誤差の他に離散化誤差が考えられる。これは、連続量を離散量で取り扱うことに起因するもので、フーリエ解析のエリアジングと同種の問題と考えてもよい。この誤差に関しては $\Delta x/L_0 = 1/30$ 程度以下であればほとんど問題とならない。

4. 二次元伝播計算に関する検討

4.1 計算法

前節までの結果から遠地津波の外洋伝播計算では、コリオリ項を考慮した線形 Boussinesq 理論を支配方程式とすればよいことが明らかになった。また、線形長波理論を用いても、 $\Delta x = 10\text{km}$ の条件で計算するなら、比較的精度の良い結果を得ることができるとなどを明らかにした。ここでは、実用計算への応用としてアラスカ津波を対象とし、線形長波理論と線形 Boussinesq 理論を用いた計算を行う。

線形 Boussinesq 理論を用いた計算の差分式は、陽的なリープフロッグ法と同じ計算点の配置をする

$$\begin{aligned} \eta_{j,m}^{n+1/2} = & \eta_{j,m}^{n-1/2} - R_1 \left[M_{j+1/2,m}^n \cos \lambda_{j+1/2} \right. \\ & - M_{j-1/2,m}^n \cos \lambda_{j-1/2} \\ & \left. + N_{j,m+1/2}^n - N_{j,m-1/2}^n \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (1 + 2R_2 \cos \lambda_{j+1/2}) M_{j+1/2,m}^{n+1} = & (R_2 + R_3) M_{j+3/2,m}^{n+1} \cos \lambda_{j+3/2} \\ & + (R_2 - R_3) M_{j-1/2,m}^{n+1} \cos \lambda_{j-1/2} \\ & - (R_4 - R_2 + R_3) N_{j,m-1/2}^{n+1} \\ & - (R_4 + R_2 + R_3) N_{j+1,m+1/2}^{n+1} \\ & - (R_4 + R_2 - R_3) N_{j+1,m-1/2}^{n+1} \\ & - (R_4 - R_2 - R_3) N_{j-1,m+1/2}^{n+1} \\ & + (1 + 2R_2 \cos \lambda_{j+1/2}) M_{j+1/2,m}^n \\ & - (R_2 + R_3) M_{j+1/2,m}^n \cos \lambda_{j+1/2} \\ & - (R_2 - R_3) M_{j-1/2,m}^n \cos \lambda_{j-1/2} \\ & + (R_4 + R_2 - R_3) N_{j,m-1/2}^n \\ & - (R_4 - R_2 - R_3) N_{j+1,m-1/2}^n \\ & - (R_4 - R_2 + R_3) N_{j,m+1/2}^n \\ & - (R_4 + R_2 + R_3) N_{j+1,m+1/2}^n \\ & - R_5 [\eta_{j+1,m}^{n+1/2} - \eta_{j,m}^{n+1/2}] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (1 + 2R_6) N_{j,m+1/2}^{n+1} = & R_6 [N_{j,m+3/2}^{n+1} + N_{j,m-1/2}^{n+1}] \\ & + (R_7 + R_6 \cos \lambda_{j-1/2}) M_{j-1/2,m}^{n+1} \\ & + (R_7 - R_6 \cos \lambda_{j+1/2}) M_{j+1/2,m}^{n+1} \\ & + (R_7 - R_6 \cos \lambda_{j-1/2}) M_{j-1/2,m+1}^{n+1} \\ & + (R_7 + R_6 \cos \lambda_{j+1/2}) M_{j+1/2,m+1}^{n+1} \\ & + (1 + 2R_6) N_{j,m+1/2}^n \\ & - R_6 [N_{j,m+3/2}^n + N_{j,m-1/2}^n] \\ & + (R_7 - R_6 \cos \lambda_{j-1/2}) M_{j-1/2,m}^n \\ & + (R_7 + R_6 \cos \lambda_{j+1/2}) M_{j+1/2,m}^n \\ & + (R_7 + R_6 \cos \lambda_{j-1/2}) M_{j-1/2,m+1}^n \\ & + (R_7 - R_6 \cos \lambda_{j+1/2}) M_{j+1/2,m+1}^n \\ & - R_8 [\eta_{j,m+1}^{n+1/2} - \eta_{j,m}^{n+1/2}] \end{aligned} \quad (23)$$

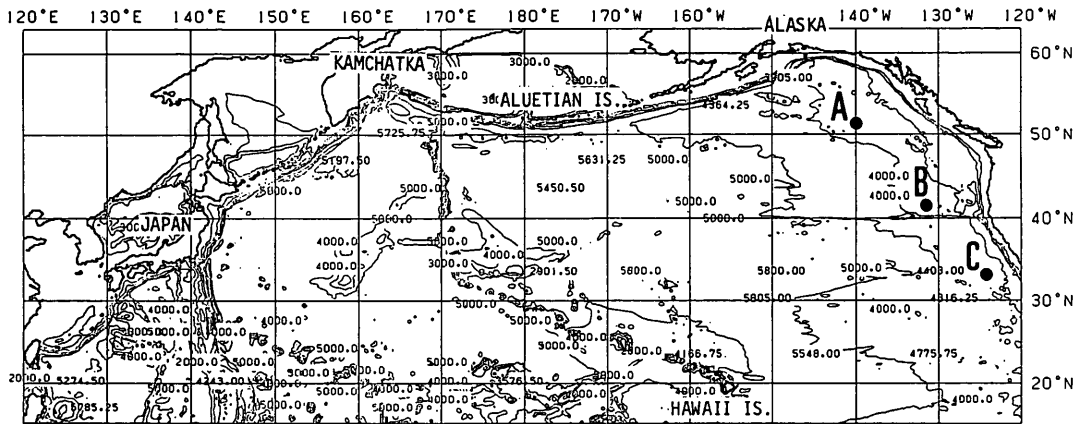
となる。ここに、

$$\begin{aligned} R_1 &= \Delta t / (R \cos \lambda_j \Delta \lambda), \\ R_2 &= (h_{j+1/2,m})^2 / (3 \Delta \lambda^2 R^2 \cos^2 \lambda_{j+1/2}), \\ R_3 &= (h_{j+1/2,m})^2 \tan \lambda_{j+1/2} \\ &\quad / (6 \Delta \lambda R^2 \cos \lambda_{j+1/2}), \\ R_4 &= (\gamma/4) \sin \lambda_{j+1/2} \Delta t, \\ R_5 &= (gh_{j+1/2,m} / R) (\Delta t / \Delta \lambda) \\ R_6 &= (h_{j,m+1/2})^2 / (3 \Delta \lambda^2 R^2 \cos^2 \lambda_j), \\ R_7 &= (\gamma/4) \sin \lambda_j \Delta t, \\ R_8 &= [gh_{j,m+1/2} / (R \cos \lambda_j)] (\Delta t / \Delta \lambda) \end{aligned}$$

である。また、 (j,m,n) は (λ, ψ, t) 軸方向の計算点を表し、 $(\Delta \lambda, \Delta \psi, \Delta t)$ は格子間隔である。ただし、簡単のためここでは $\Delta \lambda = \Delta \psi$ としている。また、 γ は地球の自転の角速度を意味する。差分式から判断してわかるように、この線形 Boussinesq 理論を用いた計算は陰解法により行われる。一方、線形長波理論の計算の差分式は式 (22), (23) 中の分散項を無視したものであり、計算は陽解法である。

線形 Boussinesq 理論に関する計算は緯度、経度各 5 分の 1 種類、線形長波理論計算では 5, 10, 30 分の 3 種類に関して実施している。前節の誤差解析では、アラスカ津波の代表断面の水深 4km 相当寸法が約 900km であるので、それぞれ 10, 20, 40% の津波波形の誤差を許す計算をしていることになる。時間間隔は、空間格子 5 分の場合が 10 秒、10 分で 20 秒、30 分で 60 秒としている。計算領域は、図-6 に示すように日本近海から北アメリカ西海岸までの北太平洋全域としている。緯度、経度 5 分の計算格子で日本列島、ハワイ諸島を含みアメリカ西海岸に至るほぼ北太平洋全域を覆っている。この場合の総計算点数は約 83 万個である。また、本計算では潮汐などの津波以外の波は一切考慮していない。

アラスカ津波の計算はかつて Hwang-Divoky²⁾ と Hwang-Butler-Divoky³⁾ によって研究されたことがある。前者では直交座標系で表された線形長波理論による波源域付近の計算と Ray-tracing による伝播図の作成がなされている。後者では本計算とはほぼ等しい範囲で緯度、経度座標を採用した外洋伝播計算を実施している。計算格子間隔は本計算に対して経度方向が 3 倍の 15 分、緯度方向が 2 倍の 10 分を用いている。また、これらの計算の初期条件には、地盤の立ち上がり速度と破壊進行速度が考慮されている。本計算では、Aida¹⁾ の研究成果から判断し、アラスカ地震の場合波源域の平均水深が 900m と浅いこと、立ち上がり時間および破壊進行時間が短いことから、これらの影響は小さいと考え無視



図—6 計算領域

している。

4. 2 計算結果

線形 Boussinesq 理論を用いた計算結果の一例を図—7 に示す。図は津波発生後 2 時間毎の空間水位分布である。波源域では 10m 近い波高を有していたが、アメリカ西海岸付近では 30 から 70cm 程度、日本に向かうものは 10cm 以下であるといった傾向がわかる。実際、アラスカ津波の検潮記録を調べて見るとアメリカ西海岸で 0.6 から 3.0m、ハワイ州で 0.4 から 2.0m、日本沿岸で 0.05 から 0.2m となっており、この計算結果と定性的には良く一致している。

図—8 は、線形 Boussinesq 計算と線形長波理論計算の 4 種類の津波発生後 3 時間 30 分の空間水位分布に関する結果を比較したものである。線形長波計算のうち格子間隔 10 分と 30 分の結果は線形 Boussinesq 計算との差が見られるが、前節で予測したように 5 分の結果は非常に良い一致を示す。図—9 は 図—6 に示す 3 地点 A, B, C の水位の時間変化で比較したものである。線形長波理論計算の 10 分のものは比較的線形 Boussinesq 理論計算に近い結果となるが、分散効果の違いがあり主峰の減衰が多少大きいものとなる。30 分の結果は非常に大きな差が見られ、同じ津波を対象とした計算とは考えにくいほどのものとなる。5 分の結果は高波数成分の位相に若干の差があるものの良好な一致を示している。

図—10 に Wake 島における水位経時変化に対する検潮記録¹²⁾と線形 Boussinesq 理論計算による結果の比較を示す。図には同時に Hwang らの結果も参照のため示しているが、両者とも全体的に検潮記録とはよい対

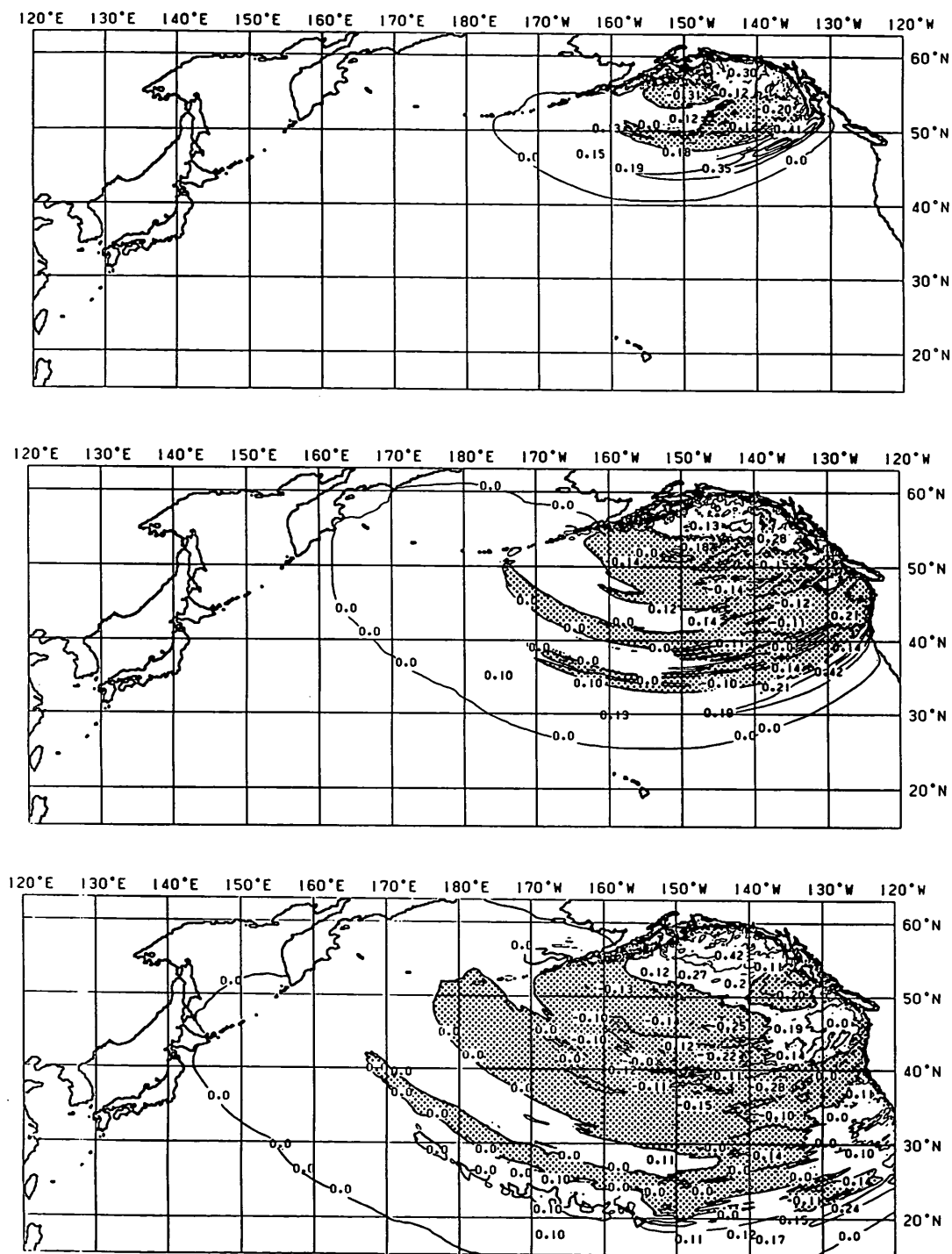
応を見せている。検潮所が津波の進行方向に対して島の裏側に位置しており、計算格子に比べ島が小さく、計算では島の影響を考慮していないことなどを考え合わせると、Hwang らの結果は一致しすぎるくらいがある。

最後に、演算時間について述べる。計算機としてはスーパーコンピュータ (SX-1) を用いている。5 分格子の線形長波理論による二次元伝播計算では 7 時間を再現するのに要した演算時間は 3 分 5 秒、線形 Boussinesq 理論では 11 分 24 秒であった。ベクトル演算機能およびプログラムのベクトル化率の向上により、従来の汎用大型計算機 (ACOS1000) を用いた計算に比べ 1/100 程度に演算時間を短縮することができている。

5. まとめ

本研究では遠地津波の外洋伝播計算に関して基礎的な検討を行った。得られた結果は次の通りである。

- ①簡単な理論解析から、非線形項は無視できるが、分散項、コリオリ項は無視できないことを確認した。
- ②計算の打ち切り誤差に起因する数値分散効果と物理分散効果が同程度となる条件を用いれば、比較的簡単な計算で済む線形長波理論を用いても実用上問題のない結果が得られることを明らかにした。
- ③所要の計算精度を得るための支配方程式および格子間隔の選定法として 図—3 および 図—5 を用いる方法を示した。津波初期波形として、主断層と副断層運動が重なった比較的複雑なアラスカ津波の代表断面を用いているため、この選定法の有効範囲はかなり広いと思われる。
- ④コリオリ力を考慮した線形長波理論と線形 Boussinesq 理論による二次元伝播計算を実施し、大領域、長時間にわたる計算でも安定かつ短時間に実施可能である

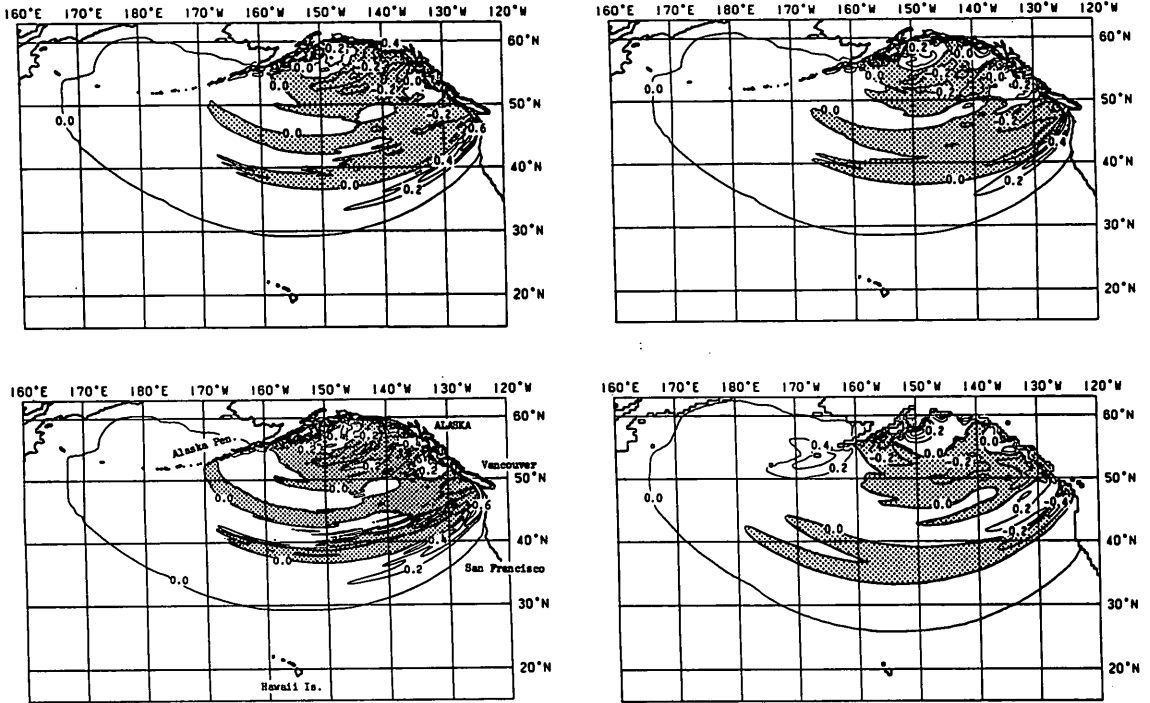


図一7 線形 Boussinesq 理論による計算例

(上) 津波発生後 2 時間

(中) 津波発生後 4 時間

(下) 津波発生後 6 時間



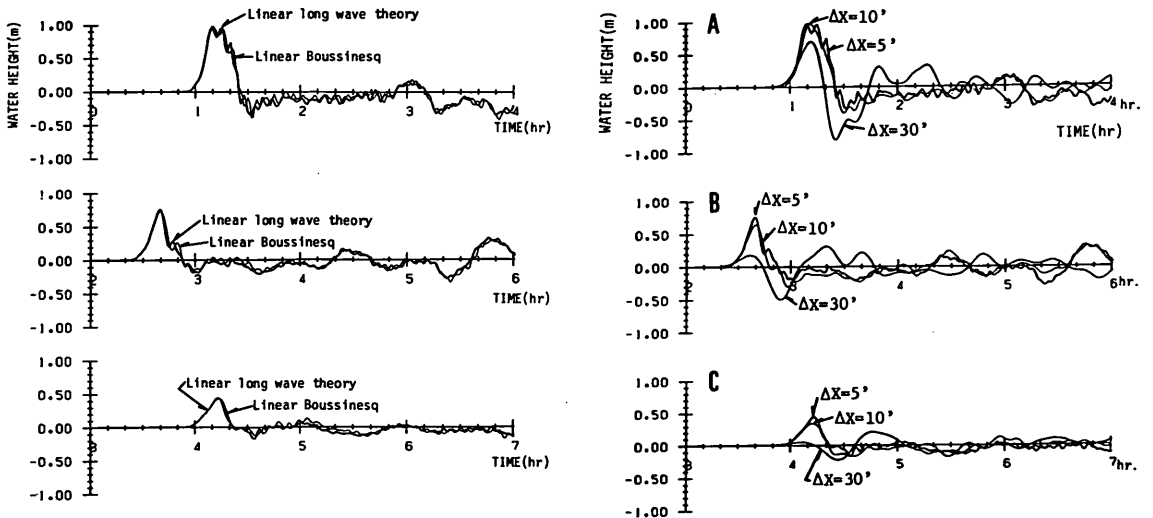
図—8 支配方程式と計算格子間隔の違いによる計算結果の差

(左上) 線形長波計算 ($\Delta\lambda = 5$ 分)

(左下) 線形長波計算 ($\Delta\lambda = 30$ 分)

(右上) 線形長波計算 ($\Delta\lambda = 10$ 分)

(右下) 線形 Boussinesq 計算 ($\Delta\lambda = 5$ 分)



図—9 支配方程式と計算格子間隔の違いによる経時変化の差

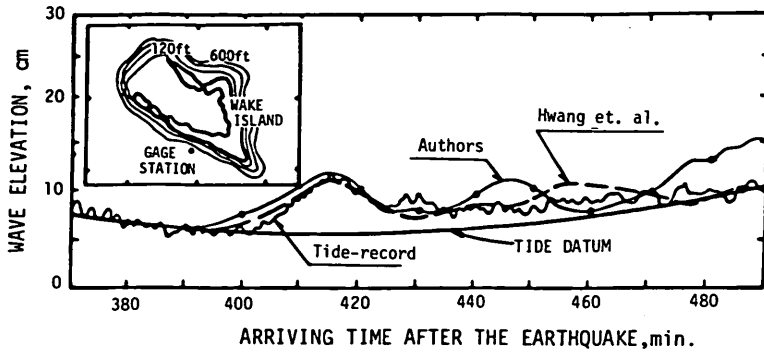


図-10 驗潮記録と計算結果の比較

ことを示した。また、本研究で扱った数値計算法を用いることにより遠地津波の外洋伝播計算が精度良く実施可能であることが明らかとなった。ただし、本計算では浅海域での津波の変形や局地特性を十分考慮することはできず、浅海計算への境界入力値を与えるものである。今後、浅海域と結合した計算を行い最終的な精度を検討する必要がある。

(1990年11月30日受付)

謝辞

水深データをアメリカ合衆国テキサス A & M 大学 Prof. Reid and Dr. Whiteker から提供していただいた。また、本研究の一部は著者のひとりが東北大学に在籍中に開始したものであり、研究成果は東北大学首藤教授グループとの共同研究による。

参考文献

- 1) Ueno, T. : Numerical computations for the Chilean earthquake tsunami, Oceanogr. Mag., 1965, 17, Vol.1-2, pp.86-94.
- 2) Hwang, L. and D. Divoky : A numerical model of the major tsunami, The great Alaska earthquake of 1964, Oceanography and Coastal Engineering, National Academy of Sciences, Washington, D.C., 1972, pp.191-210.
- 3) Hwang, L., H. Butler and D. Divoky : Generation and open-sea characteristics, Bull. Seism. Soc. Ame., 1972, Vol.62, pp.1579-1597.
- 4) 後藤智明 : アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, 1984, Vol.351/II-2, pp. 139-148.
- 5) 藤間功司, 後藤智明, 首藤伸夫 : 非線形分散波式の精度の検討, 土木学会論文集, 1986, Vol.369/II-5,

pp.223-232.

- 6) 長尾昌朋, 後藤智明, 首藤伸夫 : 非線形分散波の数値計算, 土木学会海岸工学講演会論文集, 1985, Vol. 32, pp.114-118.
- 7) Plafker, G. : Tectonics of the March 27, 1964, Alaska earthquake U.S. Geological Survey Professional Paper 543-1. Washington : Government Printing Office, 1969, 74p.
- 8) 矢嶋信夫, 野木達夫 : 発展方程式の数値解法, 岩波書店, 1977.
- 9) 今村文彦, 後藤智明 : 差分法による津波計算の打ち切り誤差, 土木学会論文集, 1986, Vol.375/II-6, pp. 241-250.
- 10) 佐山順二, 今村文彦, 後藤智明, 首藤伸夫 : 外海域における津波の高精度計算法に関する検討, 土木学会海岸工学講演会論文集, 1987, Vol.34, pp.31-35.
- 11) Aida, I. : Numerical experiments for tsunamis caused by moving deformation of the sea bottom, Bull. Earthq. Res. Inst., 1969, Vol.47, pp.849-862.
- 12) Van D. and G. William : Tsunamis, advances in hydroscience, 1965, pp.1-47.

付録 緯度・経度座標系の非線形分散波理論

地球を半径 R の球体と近似し、緯度および経度をそれぞれ λ , ϕ とする。 (λ, ϕ) 軸は静水面上にあるものとし、静水面から鉛直上方に z 軸をとる。 (λ, ϕ, z) 軸方向の流速を (u, v, w) , 静水面からの水位変動を η , 圧力を p , 静水深を h , 重力加速度を g , 密度を ρ とおき、津波の現象として非圧縮流体の非回転運動を考える。さらに、 z 軸方向のコリオリ力と地球の曲率効果を無視すると緯度・経度座標系で記述された連続および運動の式は下

記のようになる。

$$\frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (u \cos \lambda) + \frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Du}{Dt} + fv + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{Dv}{Dt} - fu + \frac{1}{R \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{Dw}{Dt} + g + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (4)$$

ここで、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{R \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial \psi} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (5)$$

であり、 f は地球の自転の各速度を ω としたときのコリオリ因子、

$$f = 2\omega \sin \lambda \quad (6)$$

を表す。

水表面は、

$$z = \eta \text{ で } p = 0 \quad (7)$$

および

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} + \frac{v}{R \cos \lambda} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = w \quad (8)$$

であり、水底の条件は、

$$z = -h \text{ で } \frac{u}{R} \frac{\partial h}{\partial \lambda} + \frac{v}{R \cos \lambda} \frac{\partial h}{\partial \psi} = -w \quad (9)$$

である。

まず、連続および運動の式を水表面と水底の境界条件を用いて z 軸方向に積分する。連続の式は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-h}^{\eta} u \cos \lambda dz + \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{-h}^{\eta} v dz \right] = 0 \quad (10)$$

となり、運動の式は、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-h}^{\eta} u^2 \cos \lambda dz \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{-h}^{\eta} uv dz \right] \\ & + \int_{-h}^{\eta} f v dz + \frac{g(h+\eta)}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \\ & = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-h}^{\eta} \int_{\eta}^z \frac{Dw}{Dt} dz dz + \frac{\partial h}{\partial \lambda} \int_{-h}^{\eta} \frac{Dw}{Dz} dz \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} v dz + \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-h}^{\eta} uv \cos \lambda dz \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{-h}^{\eta} v^2 dz \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-h}^{\eta} f u dz + \frac{g(h+\eta)}{R \cos \lambda} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \\ & = \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \int_{-h}^{\eta} \int_{\eta}^z \frac{Dw}{Dt} dz dz \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial h}{\partial \psi} \int_{-h}^{\eta} \frac{Dw}{Dz} dz \right] \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここに、

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{R \cos \lambda} \frac{\partial w}{\partial \psi} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (13)$$

$$w = -\frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-h}^z u \cos \lambda dz + \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{-h}^z v dz \right] \quad (14)$$

である。

いま、波高水深比と相対水深が共に小さくアーセル数が 1 のオーダーであるような長波の現象を考え、著者が提案した摂動展開⁴⁾を用いると、

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} w = & -\frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \{u(h+\eta) \cos \lambda\} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \psi} \{v(h+\eta)\} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

と近似することができ、緯度・経度座標系で記述された非線形分散波理論の連続および運動の式は下記のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (M \cos \lambda) + \frac{\partial N}{\partial \psi} \right] = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\bar{u} M \cos \lambda) + \frac{\partial}{\partial \psi} (\bar{v} M) \right] \\ & + f \bar{N} + \frac{g(h+\eta)}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \\ & = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{h^3 F_1}{3} + \frac{h^2 F_2}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial h}{\partial \lambda} \left(\frac{h^2 F_1}{2} + h F_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\bar{u} N \cos \lambda) + \frac{\partial}{\partial \psi} (\bar{v} N) \right] \\ & - f \bar{M} + \frac{g(h+\eta)}{R \cos \lambda} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \\ & = \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{h^3 F_1}{3} + \frac{h^2 F_2}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial h}{\partial \psi} \left(\frac{h^2 F_1}{2} + h F_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

ここに、 $\bar{u}, \bar{v}$ は (λ, ψ) 軸方向の断面平均流速を表し、 M, N は

$$M = \bar{u}(h+\eta), \quad N = \bar{v}(h+\eta) \quad (20)$$

で定義される流量フラックスであり,

$$F_1 = \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial \lambda} (\bar{u} \cos \lambda) + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t \partial \psi} \right] \dots\dots\dots(21)$$

$$F_2 = \frac{1}{R \cos \lambda} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{u} \cos \lambda \frac{\partial h}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{v} \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) \right] \dots\dots\dots(22)$$

である.