

運輸省港湾技術研究所

港湾技術研究所 報告

REPORT OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH
INSTITUTE

MINISTRY OF TRANSPORT

VOL. 26 NO. 4 DEC. 1987

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第26巻 第4号 (Vol. 26, No. 4), 1987年12月 (Dec. 1987)

目 次 (CONTENTS)

1. ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定
—入・反射波共存場を対象として—……………橋本典明・小舟浩治…… 3
(Estimation of Directional Spectra from a Bayesian Approach in
Incident and Reflected Wave Field
…………… Noriaki HASHIMOTO and Koji KOBUNE)
2. 逆流中での風波の発達特性……………鶴谷広一・中野 晋・柳嶋慎一・松延嘉國…… 35
(Development of Wind Waves Generated on Adverse Current
……………Hiroichi TSURUYA, Susumu NAKANO,
Shin-ichi YANAGISHIMA and Yoshikuni MATSUNOBU)
3. 海域の物質循環過程のモデル化と浄化効果の予測手法について……………堀江 毅…… 57
(Nutrient Cycle Model and Its Application to the Prediction of
Seawater and Sediment Improvement …………… Takeshi HORIE)
4. 海底地盤の波浪による液状化および高密度化……………善 功企・山崎浩之・渡辺 篤… 125
(Wave-induced Liquefaction and Densification in Seabed
…………… Kouki ZEN, Hiroyuki YAMAZAKI and Atsushi WATANABE)

1. ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定

——入・反射波共存場を対象として——

橋本典明*・小舟浩治**

要 旨

海の波の基本的性質を表示するために、波のエネルギーが周波数および方向角に対して分布している状態を表示する方向スペクトルが用いられる。方向スペクトルを推定する方法としては、既にいくつかの方法が提案されており、これまでも海洋波浪の特性を調査する目的等で、種々の方法が実際に適用されている。

一方、方向スペクトル観測の応用の一つとして、構造物による反射波の検出がある。従来、方向スペクトル観測は波浪の特性を解明する上で欠かせないものと考えられ、工学的な面からも防波堤や岸壁などによる反射波の検出に効果的であると考えられて来た。しかしながら、構造物の前面において入射波と反射波を分離するために方向スペクトルを測定する場合には、互いに対をなす入・反射波の位相がランダムでないために、従来の方向スペクトル推定法に問題が生じることになる。したがって構造物前面など入・反射波共存場で方向スペクトルを測定するためには、入・反射波の位相干渉を考慮した修正が必要となる。

本論文では、まず、反射率を既知とした場合を対象として、上記の位相干渉を考慮したベイズ型モデルを用いた入・反射波の分離計算法 (MBM) について報告している。またその際に、既知として設定されたいくつかの反射率の中で、より妥当な反射率を選択する方法についても報告している。次いで、ベイズ型モデルを用いた入・反射波の方向スペクトルの分離計算法を拡張し、反射率をも未知変数として推定し得る方法 (EMBM) について報告している。これらの方法の推定精度や適用性は、それぞれ数値シミュレーションにより検討されている。

得られたおもな結果は以下のとおりである。

- 1) MBM は 4 個以上の任意の観測波動量の組み合わせに、EMBM は 6 個以上の任意の観測波動量の組み合わせに適用可能である。
- 2) 4 個の観測波動量をもとに、MBM により入・反射波の方向スペクトルの分離計算を実施する場合、反射率を幾つか仮定して分離計算を実施し、それらの計算結果の中で ABIC が最小となる反射率を採択する。また、その際に算出される入・反射波の方向スペクトル推定値の推定精度は、従来の入・反射波の方向スペクトルの推定法に比べて、一般に良い。
- 3) 6 個以上の観測波動量をもとに、EMBM により入・反射波の方向スペクトルの分離計算を実施する場合、EMBM は入・反射波の方向スペクトルのみならず、反射率をも、周波数 f および方向角 θ の関数として、極めて高い精度で推定可能である。
- 4) MMLM により推定される入・反射波の方向スペクトルおよび反射率は、一般にはほぼ妥当な推定値を推定可能であるものの、観測機器の配置やクロススペクトルの推定誤差の影響を受けやすく、場合によっては異常な推定値が推定される場合がある。これに対して、MBM および EMBM では、これらの影響を受けにくく、安定した推定値を推定可能である。

* 水工部 主任研究官 (波浪統計解析担当)

** 水工部 海象観測研究室長

1. Estimation of Directional Spectra from a Bayesian Approach in Incident and Reflected Wave Field

Noriaki HASHIMOTO*

Koji KOBUNE**

Synopsis

The directional spectrum represents the energy distribution in wave direction, so that in principle the incident and the reflected wave energies can be separated by measuring the directional spectrum near a structure and then the reflection coefficient can be determined. However, the existing methods of estimating the directional spectrum are not valid because the phase lag between the incident and the reflected waves is not random. Therefore, these methods should be modified for the analysis of a wave field where the incident and the reflected waves are exist by taking account of the phase interaction.

In this paper, two different methods for estimating directional spectrum in incident and reflected wave field are proposed. These methods are developed by modifying or extending the BDM. (BDM is the new method proposed by the authors for estimating directional spectra with the use of Bayesian Model, and has the highest resolution power of all the existing methods.)

The one method (MBM), which is developed by modifying the BDM, can be applied for the case where the reflection coefficient is known, and the other method (EMBM), which is developed by extending the MBM, can be applied if the reflection coefficient is not known.

Each of the methods is also examined for numerical simulation data, and validity of the methods is discussed in this report.

The major conclusions are as follows:

- 1) MBM and EMBM can be applied for arbitrary mixed instrument array measurement.
- 2) MBM can be applied for more than four-sensor array, and has higher resolution power for estimating the incident and the reflected directional wave spectra than other methods if the correct reflection coefficient is given.
- 3) EMBM can be applied for more than six-sensor array, and of all the proposed methods, it has the highest resolution power for estimating not only the incident and the reflected directional wave spectra but also the reflection coefficient as a function of wave frequency and wave propagation direction.

* Senior Research Engineer, Hydraulic Engineering Division.

** Chief of the Coastal Observation Laboratory, Hydraulic Engineering Division.

目 次

要 旨	3
1. ま え が き	7
2. 入・反射波共存場における方向スペクトルとクロスベクトルの関係	7
3. 既往の研究	9
4. 反射率をモデルを規定するパラメータと見なした場合の 入・反射波の方向スペクトルの分離計算法	10
4.1 理論的背景	10
4.2 理論式の定式化	11
4.3 数値計算法	13
4.4 数値シミュレーションによる検討	15
5. 方向スペクトルおよび反射率を未知変数とする場合の 入・反射波の方向スペクトルの分離計算法	22
5.1 理論式の定式化	22
5.2 数値計算法	25
5.3 数値シミュレーションによる検討	27
6. あとがき	31
参考文献	31
主要記号一覧表	32

1. まえがき

海の波の基本的性質を表示するために、波のエネルギーが周波数および方向角に対して分布している状態を表示する方向スペクトルが用いられる。方向スペクトルの推定方法としては、これまでにいくつかの方法が提案されている。この内、波高計群、流速計、波浪観測ブイなどの定点観測法により得られたデータをもとに方向スペクトルを推定する方法として、直接フーリエ変換法(DFT法)¹⁾、パラメータ法²⁾、分布関数あてはめ法³⁾、最ゆう法(MLM)⁴⁾、拡張最ゆう法(EMLM)⁵⁾、最大エントロピー原理法(MEP)⁶⁾、およびベイズ型モデルを用いた方法(BDM)⁷⁾などがある。

上記の方法の内、波高計群による観測データに適用可能なMLMおよびこれを任意の波動量に適用可能な形に拡張したEMLMは、比較的簡単な演算により分解能の良い方向スペクトルの推定値が得られるため、現地波浪データ解析に広く適用されるようになって来た。しかしながら、MLM、EMLMを種々の場合に適用してみると、エネルギーピーク付近で激しい振動が生じる場合や推定値が無限大に発散する場合などがあり、また、エネルギーピーク付近ではやや低めのエネルギーを与える等、いくつかの問題点も指摘されるようになって来た。このため著者らは、これらの問題点を解消し、さらに推定精度の良い方向スペクトルの推定方法として、3成分観測データに適用可能なMEP、任意の波動量に適用可能なBDMを提案した。

一方、方向スペクトル観測の応用の一つとして、構造物による反射波の検出がある。従来、方向スペクトルの観測は波浪の特性を解明する上で欠かせないものと考えられ、工学的な面からも防波堤や岸壁などによる反射波の検出に効果的であると考えられて来た。上床ほか⁸⁾は実際に奈多海岸(福岡)で構造物の反射率の観測を試みている。

しかしながら、合田⁹⁾は構造物の前面において入射波と反射波を分離するために方向スペクトルを測定する場合には、互いに対をなす入・反射波の位相がランダムでないために、従来の方向スペクトル推定法に問題が生じることを指摘した。この問題に対して、磯部ら¹⁰⁾は入・反射波共存場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係式を修正し、入・反射波共存場におけるクロススペクトルとして、入・反射波に対応する波浪系が独立に存在する場でのクロススペクトルに、位相干渉項が加わった基礎式を誘導した。また、この基礎式をもとにMLMに反射波が含まれることを前提とした修正を行い

(修正最ゆう法: MMLM)、数値シミュレーションによりMMLMの入・反射波共存場での方向スペクトルの推定精度の検討を行っている。しかしながら、MMLMはMLMを修正したものであり、当然のことながらMLMやEMLMに見られた問題点はMMLMにも同様に内包している。

したがって、著者らは、MMLMに見られる問題点を解消し、さらに推定精度の良い入・反射波共存場での方向スペクトルの推定法を開発することを目的として、著者らが先に提案したベイズ型モデルを用いた方法(BDM)を修正し、数値シミュレーションによりその適用性について検討することとした。

本報告では、まず、ここで述べる入・反射波共存場での新しい方向スペクトル推定法と従来の方法との比較のために、特に既往の推定理論としてMMLMを対象として、その推定理論の概略および問題点について概説する。

次に、先に提案したベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定理論に若干の修正を行い、反射率をモデルで規定するパラメータと見なして、種々の反射率を与えて入・反射波の方向スペクトルの分離計算を行い、それらの結果の中で最適な反射率および入・反射波の方向スペクトルを与える解を選出する方法について、理論式の定式化および数値シミュレーションによりその妥当性について検討した結果等を述べる。

さらに、反射率および方向スペクトルの両方を未知変数として、入・反射波共存場での方向スペクトルの推定理論を定式化し、入・反射波の方向スペクトルの分離計算と同時に反射率をも算定する方法を述べるとともに、数値シミュレーションによりその妥当性について検討した結果等を述べる。

2. 入・反射波共存場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係

入・反射波共存場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係は磯部ら¹⁰⁾により導かれている。磯部らは、まず、波高計群のみから得られるクロススペクトルを対象として入・反射波共存場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係式を導いており、その後、これとは別に反射波の存在しない波浪場を対象として、水面変動を含む任意の波動量、例えば水面勾配、水面曲率、水粒子速度、圧力変動などを含む一般波動量相互間のクロススペクトルと方向スペクトルの関係を表す基礎式を導いている⁵⁾。

ここでは、後の便宜のために、上記の2つの基礎式を組み合わせた式を示し、これにしたがって解説して行くこ

ととする。すなわち、入・反射波共存場における水面変動を含む任意の波動量相互間のクロススペクトルと入射波の方向スペクトルの関係は、磯部ら^{5),10)}によれば次式で表される。

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\sigma) = & \int_k H_m(k, \sigma) H_n^*(k, \sigma) S(k, \sigma) \\ & \times \exp\{-ik(x_n - x_m)\} dk \\ & + \int_k H_m(k, \sigma) H_n^*(k, \sigma) r^2 S(k, \sigma) \\ & \times \exp\{-ik(x_{nr} - x_{mr})\} dk \\ & + \int_k H_m(k, \sigma) H_n^*(k, \sigma) r S(k, \sigma) \\ & \times [\exp\{-ik(x_n - x_{mr})\} \\ & + \exp\{-ik(x_{nr} - x_m)\}] dk \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

ここに、 $\Phi_{mn}(\sigma)$ は平面座標 $x = x_m$ および x_n において計測された任意の波動量間のクロススペクトル、 σ は角周波数、 k は波数ベクトル、 $S(k, \sigma)$ は入射波の波数・周波数スペクトル、 i は虚数単位、 $*$ は共役複素数、 x_{mr} は x_m の反射面に対して面対象な平面座標であり、図-1のような関係にある。 r は反射率であり、一般に反射波高 H_R と入射波高 H_I の比として次式で定義される。

$$r = \frac{H_R}{H_I} \dots\dots\dots(2)$$

また、 $H_m(k, \sigma)$ は水面変動から任意の波動量への伝達関数であり、一般に次のように表すことができる。

$$H_m(k, \sigma) = h_m(k, \sigma) \cos \alpha_m \sin \beta_m \theta \dots\dots(3)$$

式(3)中の h_m, α_m, β_m を主な波動量に対して示したものが表-1である⁵⁾。

式(1)は定点計測によって得られた複数の波動量の同

表-1 主な波動量の水面変動に対する伝達関係 (文献⁵⁾より抜粋)

項目	記号	$h(k, \sigma)$	α	β
水面変動	η	1	0	0
水圧変動	p	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kd}$	0	0
水面鉛直加速度	η_{tt}	$-\sigma^2$	0	0
水面勾配(x)	η_x	ik	1	0
" (y)	η_y	"	0	1
水粒子速度(x)	u	$\sigma \frac{\cosh kz}{\sinh kd}$	1	0
" (y)	v	"	0	1
" (z)	w	$-i\sigma \frac{\sinh kz}{\sinh kd}$	0	0

k : 波数、 σ : 角周波数、 d : 水深、 x : 底面からの高さ、 ρ : 流体の密度、 g : 重力加速度

時計測データを用いて、入・反射波共存場における入射波の波数・周波数スペクトルを推定する際の基礎式である。すなわち、式(1)を満たし、かつ0以上の値を取る関数 $S(k, \sigma)$ が求められれば、これが入・反射波共存場における入射波の波数・周波数スペクトルである。

波数・周波数表示ではわかりにくいので、次式で表される分散関係式

$$\sigma^2 = (2\pi f)^2 = gk \tanh kd \dots\dots\dots(4)$$

を用いて、周波数 f と方向角 θ で式(1)を表現すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(f) = & \int_0^\pi H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) S(f, \theta) \\ & \times [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] d\theta \\ & + \int_0^\pi H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) r^2 S(f, \theta) \\ & \times [\cos\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\}] d\theta \\ & + \int_0^\pi H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) r S(f, \theta) \\ & \times [\cos\{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} \\ & + \cos\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\}] d\theta \dots\dots(5) \end{aligned}$$

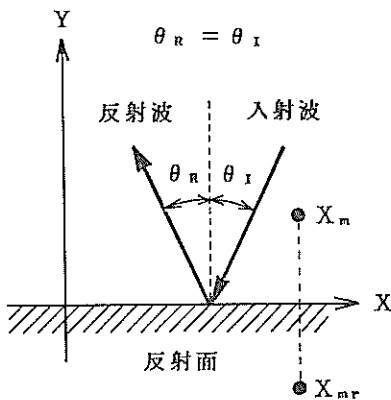


図-1 入・反射波共存場での諸量の定義

ここに、

$$\left. \begin{aligned} x_{mn} &= x_n - x_m, & y_{mn} &= y_n - y_m \\ x_{mnr} &= x_{nr} - x_{mr}, & y_{mnr} &= y_{nr} - y_{mr} \\ x_{mrn} &= x_n - x_{mr}, & y_{mrn} &= y_n - y_{mr} \\ x_{mnr} &= x_{nr} - x_m, & y_{mnr} &= y_{nr} - y_m \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

であり、 θ は波の来襲する方向、 f は周波数、 k は波数、 $S(f, \theta)$ は方向スペクトルであり、波数・周波数スペクトル $S(k, \sigma)$ とは分散関係式(式(4))により、 σ から波数の絶対値 k が一義的に決定されることにより、互いに変換できる関係にある。

式(1)および式(5)の右辺第1項は入射波に対応する波浪系が独立に存在する場でのクロススペクトルを表し、第2項は反射波に対応する波浪系が独立に存在する場でのクロススペクトルを表している。また、第3項は入射波と反射波の位相干渉項である。

磯部ら¹⁰⁾は、波高計群が反射面から遠ければ、波向きが反射面に直角で波のエネルギーの方向集中度が高い場合を除き、位相干渉項の影響は小さいと報告している。磯部ら¹⁰⁾の試算によれば、エネルギーの方向集中度パラメータ S が $S=100$ の場合に、反射面から2波長以上離れた位置に波高計群を設置すれば、位相干渉項は無視し得るようである。

しかしながら、構造物の前面で入・反射波の方向スペクトルの分離計算を実施しようとする場合、対象とする構造物の設置水深は一般に浅い場合が多く、また、周辺構造物や周辺の地形の影響のために、波高計群を設置した広い範囲に渡って波浪場の構造が均一であるとは限らない。このため、対象とする構造物から離れた位置に波高計群を設置すれば、観測されたクロススペクトルには対象とする構造物による入・反射波以外の様々な影響が混入する場合もあり得る。したがって、一般に構造物の前面で入・反射波の分離計算を行う場合には、位相干渉項を考慮した計算が必要となる場合が多い。

既往の研究には、この位相干渉項を考慮した入・反射波の方向スペクトルの分離計算法としては、磯部らにより提案された修正 MLM (MMLM)¹⁰⁾以外にはない。次節においては、後の便宜のために、この MMLM について概説すると共に、その問題点について検討することとする。

3. 既往の研究

ここでは後の便宜のために、特に、磯部らにより開発された MMLM¹⁰⁾ および EMLM⁹⁾ を組み合わせた入・反射波の方向スペクトルの分離計算法を対象として、その推定理論の概要および問題点等について解説する。

なお、以下では便宜的に MMLM および EMLM を組み合わせた方法を MELM (修正拡張最尤法) と呼称する。MELM の誘導の概略は以下のとおりである^{9),10)}。

まず、波数・周波数スペクトルの推定値を式(1)の形から類推して、形式的にクロススペクトルの線形結合で表されるものとして、

$$S(k, \sigma) = \sum_m \sum_n \alpha_{mn}(k) \Phi_{mn}(\sigma) \dots\dots(7)$$

のように置く。上式を式(1)に代入して整理すると、

$$\hat{S}(k, \sigma) = \int_{k'} S(k', \sigma) w(k, k') dk' \dots\dots(8)$$

ここに、

$$\begin{aligned} w(k, k') &= \sum_m \sum_n \alpha_{mn}(k) H_m(k', \sigma) H_n^*(k', \sigma) \\ &\times \{\exp(ik'x_m) + r \exp(ik'x_{mr})\} \\ &\times \{\exp(-ik'x_n) + r \exp(-ik'x_{nr})\} \end{aligned} \dots\dots(9)$$

が得られる。上式によれば、波数・周波数スペクトルの推定値は真の波数・周波数スペクトルにウィンドウ $w(k, k')$ がかかったものであることがわかる。したがって、ウィンドウ $w(k, k')$ をデルタ関数に近づけることにより波数・周波数スペクトルの推定値を真の波数・周波数スペクトルに近づけることができる。

磯部らはウィンドウ $w(k, k')$ をデルタ関数に近づける操作を近似的に行い、入・反射波共存場の入射波の方向スペクトルの推定値として、次式を導いている。

$$\begin{aligned} \hat{S}(k, \sigma) &= \frac{\alpha}{\lambda_{\max}} \\ &= \alpha \left[\sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1}(\sigma) H_m^*(k, \sigma) H_n(k, \sigma) \right. \\ &\times \{\exp(-ikx_m) + r \exp(-ikx_{mr})\} \\ &\times \{\exp(ikx_n) + r \exp(ikx_{nr})\} \left. \right]^{-1} \dots\dots(10) \end{aligned}$$

ここに、 λ_{\max} は $k=k'$ におけるウィンドウ w の値を一定に保ち、式(8)による \hat{S} の値を最小にするために構成された固有方程式の最大固有値であり、 $\Phi_{mn}^{-1}(\sigma)$ は $\Phi_{mn}(\sigma)$ から構成される行列の逆行列の mn 成分である。また、 α は比例定数であり、次式

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\sigma) &= \int_k H_m(k, \sigma) H_n^*(k, \sigma) S(k, \sigma) \\ &\times [1 + r^2 + 2r \cos \{k(x_m - x_{mr})\}] dk \dots\dots(11) \end{aligned}$$

を満たすように、最小自乗法を用いて決定される。ただし、積分は入射波の波数ベクトルの範囲について行う。

ところで、式(10)を用いるためには、反射率が与えられなければならない。磯部らは、1成分波にノイズ成分が含まれる場合を考え、ノイズ成分が0に近づいた極限において、正しい反射率を与えるものとして、

$$\frac{d\lambda_{\max}}{dr} = 0 \dots\dots(12)$$

によって、便宜的に反射率を決定している。この場合、

反射率は式(10)より、

$$r = - \left[\sum_m \sum_n \phi_{mn}^{-1}(\sigma) H_m^*(k, \sigma) H_n(k, \sigma) \right. \\ \left. \times \left[\exp\{ik(x_n - x_{mr})\} + \exp\{ik(x_{nr} - x_m)\} \right] \right] \\ / \left[2 \sum_m \sum_n \phi_{mn}^{-1}(\sigma) H_m^*(k, \sigma) H_n(k, \sigma) \right. \\ \left. \times \exp\{ik(x_{nr} - x_{mr})\} \right] \dots\dots\dots(13)$$

で与えられる。

MELM は EMLM と同様に、簡単な演算により比較的精度の良い推定値が得られ、また、任意の観測波動量に適用可能という汎用性の面からも、今後、現地波浪データ解析に広く適用されるものと思われる。

しかしながら、前報⁷⁾でも報告したように、EMLM あるいは MELM では、その推定式の誘導において、独立な制約条件の数(式(1))と推定式(式(7))に現われる未知係数の数が同じことから、観測値に依存して一義的にその未知係数が特定される点に問題がある。すなわち、MELM は結果としては、何らかの関数(パラメトリック・モデル)を観測値に当てはめて、一義的に方向スペクトルの推定値を特定しているにすぎず、観測波動量の種類や数によっては、その関数形に依存して、分解能や安定性などの面で、固有の長所、短所が現れることになる。このような方法はパラメータの少ない低次のモデルでデータの構造を表現しきれないときに、次数の上昇を行った結果、推定値を不安定にするばかりでなく、パラメトリック・モデル固有のくせを持ち込む点において、一般の統計モデルに共通した問題点が生じる。

なお、MELM の定式化においては、あらかじめ反射率が与えられたものとして方向スペクトルの推定式を定式化し、その定式化の中で巧みな方法により反射率をも算定し得る点に特徴がある。すなわち、方向スペクトルおよび反射率の両方を未知の物理量として定式化すれば、理論的には入射波のエネルギーが存在しない領域では反射率は定義し得ないはずである。しかしながら、MELM ではあらかじめ構造物による反射率が与えられているものとして定式化し、MELM により推定される入射波の方向スペクトルの推定値が、真の入射波の方向スペクトルに近づく極限として反射率を逆推定しているため、構造物前面に入射波のエネルギーが存在しない領域が存在していても、実際には MELM の適用上の制約はない。

また、MELM では入射波の方向スペクトルとして、形式的に式(7)のように仮定することにより導かれている。前報⁷⁾でも述べたように、方向スペクトルとクロススペクトルの関係は逆フーリエ変換の関係にあるもの

の、有限個の観測値を対象とする場合に、これを形式的に有限個のクロススペクトルの線形結合で表示することは、数学的な厳密さの上で問題があるほか、観測装置の配置や数によっては、このような形式的定式化ではもとの物理現象をよく再現し得ない場合があり得る。MELM で推定される反射率は、このような形式的な仮定のもとに推定される入射波の方向スペクトルの推定値を、より真の方向スペクトルに近づけるように算定される反射率であり、方向スペクトルを推定するためのパラメータ的な意味を持つ反射率と解釈される。数値シミュレーションにより、MELM を種々の入・反射波共存場に適用する場合、推定される反射率に負値が現れる場合があるが、このような不合理が生じる原因は上述の数学的な形式的方法がもとの物理現象を十分に再現し得ないことに起因しているものとも考えられる。

4. 反射率をモデルを規定するパラメータと見なした場合の入・反射波の方向スペクトルの分離計算法

限られた少数の波動量の同時計測記録から方向スペクトルを推定する場合には、多くの不確定な要素が存在する。方向スペクトルの推定問題のように、限られた少数の情報から複雑すぎる現象をとらえる問題では、数学的な形式的方法は、3.でも述べたように、ある場合にはその物理現象をよく表現し得ない場合がある。換言すれば、方向スペクトルの推定問題において、われわれの得ることのできる情報は、その物理現象が持つ本来の物理構造の一部分の観測結果にすぎず、このような一部分のみの情報から、数学的な形式的方法により、その構造の全体を把握しようとするところに、従来の方向スペクトルの推定理論の問題点があると考えられることである。

したがって、このような問題に対しては、その物理現象の真の構造をも含むであろう、自由度の大きな、柔軟な物理的モデルを想定し、そのモデルの中から真の構造に近いものを模索するというベイズ統計学的な推定方法が良い結果を生むであろうと期待される。

本章では、反射率を未知変数とはせずに、方向スペクトルを推定するための統計モデルを規定するパラメータ(既知パラメータ)と見なして、ベイズ型モデルを適用することにより入・反射波の方向スペクトルを分離する方法、および設定されたいくつかの反射率の中で、妥当な反射率を選択する方法について述べる。以下ではその理論的背景、理論式の定式化および数値シミュレーションによりその妥当性について検討した結果等を述べることとする。

4.1 理論的背景

ベイズ統計学の基礎的考え方および赤池¹¹⁾により導入された ABIC (赤池のベイズ型情報量基準) 最小化法を用いたベイズ型モデルの概略については前報⁷⁾ で解説した。ここでは ABIC 最小化法の概略を紹介することとする^{12), 13)}。

ベイズの方法とはベイズの定理から導かれる次の関係式に基づいて推論する方法である。

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} \dots\dots\dots(14)$$

すなわち、式(14)は x を既知として θ について推論する際に有効な式であり、いま、 x をデータ、 θ を母数とすれば、 $p(x|\theta)$ はモデル分布、 $p(\theta)$ は事前分布、 $p(\theta|x)$ は事後分布の確率密度関数と呼ばれる。事前分布は実験あるいは観測によってデータ x を得る前の知識を反映し、事後分布は事前の知識に加えてデータ x により学習した知識を反映する¹³⁾。

モデル分布 $p(x|\theta)$ は x が既知で θ の関数と見なすとき、 θ のゆらぎを示すゆらぎ関数 $L(\theta|x)$ となる。 x を既知とし、事後分布 $p(\theta|x)$ において、 θ に関係しない項を除くと、

$$p(\theta|x) \propto L(\theta|x)p(\theta) \dots\dots\dots(15)$$

と表される。これがベイズの推論方法の本質的部分である。なお、式(14)を一般化して記述すると、

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int p(x|\theta)p(\theta)d\theta} \dots\dots\dots(16)$$

と表される。

モデル分布 $p(x|\theta)$ が与えられた場合に、ベイズの方法を実現するためには、 θ の事前分布 $p(\theta)$ が必要である。問題は、事前分布 $p(\theta)$ の選択にまつわる主観性である。赤池は、この問題を次のように解決した¹²⁾。

いま、事前分布 $p(\theta)$ の決定が難しいという事実を認め、可能な $p(\theta)$ として $p_1(\theta)$, $p_2(\theta)$, \dots , $p_K(\theta)$ を考える。 $p_k(\theta)$ の何れを最終的に取るべきかが不確かな状態にあることの表現として、 $p_k(\theta)$ のそれぞれに確率 $p(k)$ を考える。ここで $p(1)+p(2)+\dots+p(K)=1$ である。もちろん $p(k)$ をどう選ぶかが再び問題となるが、ここでは単にある $p(k)$ が与えられたとして考える。この場合、 θ の事前分布 $p(\theta)$ は、最も確からしい値として、

$$p(\theta) = \sum_{k=1}^K p_k(\theta)p(k) \dots\dots\dots(17)$$

によって推定される。これを用いると

$$p(\theta|x) = \sum_{k=1}^K p_k(\theta|x)p(k|x) \dots\dots\dots(18)$$

という表現が得られる。ただし $p_k(\theta|x)$ は $p(x|\theta)$ と

$p_k(\theta)$ とで定まる k 番目のモデルに関する θ の事後分布であり、 $p(k|x)$ は

$$p(k|x) = \frac{p(x|k)p(k)}{\sum_{k=1}^K p(x|k)p(k)} \dots\dots\dots(19)$$

で与えられる k の事後分布を示す。ただし、

$$p(x|k) = \int p(x|\theta)p_k(\theta)d\theta \dots\dots\dots(20)$$

である。式(19)に見るように、 k の事後分布 $p(k|x)$ が事前分布 $p(k)$ と $p(x|k)$ とから定まることから、式(16)と対比して、 $p(x|k)$ を k 番目のベイズ型モデルのゆらぎと呼ぶことが適当であることがわかる。このような見方はより一般に k 番目のモデルがモデル分布 $p_k(x|\theta(k))$ とパラメータ $\theta(k)$ の事前分布 $p(\theta(k))$ とによって与えられる場合にそのまま適用することができる。

赤池は¹²⁾上の結果は、ゆらぎ $p(x|k)$ の大きいモデルは、ベイズの方法に従って θ の事後分布 $p(\theta|x)$ を求めようとする場合に無視できず、中でも一つの k に対するゆらぎ $p(x|k)$ が他のもののゆらぎよりも際立って高い場合には、事前分布 $p(k)$ に関する特別な制約がない限り、事前分布が確定されない状況では、このモデルを採用して推論を進めることが合理的だと述べている。なお、実際にベイズ型モデルを適用する際には、式(20)の代わりに、次式で表される ABIC (赤池のベイズ型情報量基準)¹¹⁾

$$ABIC = -2 \ln \int p(x|\theta)p_k(\theta)d\theta \dots\dots\dots(21)$$

の最小化によって事前分布 $p_k(\theta)$ を決定している。

以上のような背景から、いま、入・反射波共存場を対象として、式(5)から入射波と反射波の方向スペクトルを分離するためのモデルをベイズ型モデルにより定式化する場合、ABIC 最小化法がモデルのパラメータ θ を最ゆう法によって決める方法であること、および ABIC の定義式にモデルのゆらぎ $p(x|\theta)$ が含まれていることから、式(5)に含まれる反射率として種々の反射率が与えられる場合には、正しい反射率が与えられる場合に、式(21)で与えられる ABIC は最小値を示すものと期待される。

4.2 理論式の定式化

4.1 で述べた背景のもとに、ここでは、入・反射波共存場を対象として、式(5)から入射波と反射波の方向スペクトルを分離するための理論をベイズ型モデルにより定式化する。なお、ここでの定式化は前報⁷⁾で報告したベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定理論と、基礎式(5)、および入射波の方向に関する定義域の違いによる端条件が異なるほかは、ほぼ前報⁷⁾と同様の定式

化である。

以下では、式の誘導の便宜上、式(5)の2次元表示式 (m 番目の波動量と n 番目の波動量のクロススペクトルを $\Phi_{mn}(f)$ と表示する方式) を、1次元表示式 ($\Phi_i(f)$ と表示する方式) に再構成して取り扱う。なお、 $\Phi_{mn}(f)$ から構成される行列 $\Phi(f)$ がエルミート行列を構成することを考慮し、 $\Phi(f)$ の上三角の部分のみを用いることとする。このとき、式(5)の方程式の数は、 M を観測波動量の数として、

$$N = M \times (M+1)/2 \quad \dots\dots\dots(22)$$

であり、式(5)は次式のように表される。

$$\Phi_i(f) = \int_0^\pi H_i(f, \theta) S(f, \theta) d\theta \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$(i=1, \dots, N)$$

ここに、

$$H_i(f, \theta) = H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta)$$

$$\times \left[\begin{aligned} &\cos \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ &-i \sin \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ &+r^2 [\cos \{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\} \\ &-i \sin \{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\}] \\ &+r [\cos \{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} \\ &-i \sin \{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} \\ &+ \cos \{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\} \\ &-i \sin \{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\}] \end{aligned} \right] \dots\dots\dots(24)$$

である。なお、式(23)中の $S(f, \theta)$ のは入射波の方向スペクトルであり、0 または正の値を取る関数である。また方向角 θ に関する定義域は反射面を 図-1 のようにとり、 $[0, \pi]$ としている。ここでは、反射率 r は既知としているので、式(24)に含ませて取り扱うこととした。

そこで、いま、入射波の方向スペクトルの定義域 $[0, \pi]$ を十分大きな数 K で等分割する ($K \Delta\theta = \pi$)。また、入射波の方向スペクトル $S(f, \theta)$ は等分割された各微小区間内では離散的な一定値関数であるとする。これは波浪の数値シミュレーション等で周波数および方向角の異なる成分波を重ね合わせることと同じであり、分割数 K を大きく取れば波浪の線形性を表示する意味で妥当な仮定である。また、方向スペクトル $S(f, \theta)$ は0 または正の値を取る関数であるが、エネルギーが0の領域でも、限りなく0に近い正值であると仮定することは、物理的にはそれほど不合理ではない。そこで、新しい変数 $x_k(f)$ を

$$x_k(f) = \ln S(f, \theta_k), \quad (k=1, \dots, K) \quad \dots\dots\dots(25)$$

と置くと、方向スペクトルは次式のように近似される。

$$S(f, \theta) \doteq \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} I_k(\theta) \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$I_k(\theta) = \begin{cases} 1 & : (k-1)\Delta\theta \leq \theta < k\Delta\theta \\ 0 & : \text{その他} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$(k=1, \dots, K)$$

である。式(26)を式(23)に代入すると、

$$\Phi_i(f) = \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} \times \int_0^\pi H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \quad \dots\dots\dots(28)$$

となる。右辺の積分は K が十分大きいとき、

$$\int_0^\pi H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta = \int_{(k-1)\Delta\theta}^{k\Delta\theta} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \doteq H_i(f, \theta_k) \Delta\theta \doteq \alpha_{ik}(f) \quad \dots\dots\dots(29)$$

ここに、 $\theta_k = (2k-1)\Delta\theta/2$ である。

いま、 $\Phi_i(f)$ および $\alpha_{ik}(f)$ は複素数であり、取り扱いが不便である。そこで、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \text{Real}\{\Phi_i(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \Phi_{N+i} &= \text{Imag}\{\Phi_i(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \alpha_{i,k} &= \text{Real}\{\alpha_{i,k}(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \alpha_{N+i,k} &= \text{Imag}\{\alpha_{i,k}(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

と正規化して分離し、すべてを実数の式として取り扱う。なお、式(30)の左辺は周波数 f の関数であるが、省略して記述した。以後、特別な場合を除き、便宜的に周波数 f は省略して扱うこととする。このとき、式(29)および式(30)より、結局、式(28)は次式のように表される。

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \quad \dots\dots\dots(31)$$

$$(i=1, \dots, 2N)$$

式(31)は正の未知係数 $\exp(x_k)$ を持つ0次のスプライン表現である。より高次のスプラインを用いて表現することも可能であるが、波の線形性からは自然な形の近似であり、ここではそのまま取り扱う。

式(31)を観測値に当てはめる場合、観測値には誤差が含まれることが一般である。そこで誤差項も考慮して式(31)を再記すると次式となる。

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) + \varepsilon_i \quad \dots\dots\dots(32)$$

$$(i=1, \dots, 2N)$$

ここに、 ε_i ($i=1, \dots, 2N$) は互いに独立であり、平均0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。

このとき、 Φ_i ($i=1, \dots, 2N$) が与えられれば、 x_k ($k=1, \dots, K$)、 σ^2 に関するゆう度は

$$L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-N}$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{2N} \left(\phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{ik} \exp(x_k)\right)^2\right] \quad \dots\dots(33)$$

で与えられる。

以上の展開では方向スペクトル $S(f, \theta)$ は区分的一定値関数として近似した。この際、各微小区間ごとのエネルギーの相関については何ら考慮されていない。波の線形性からは各微小区間ごとのエネルギー分布はそれぞれ独立であると見なされるが、方向角 θ について不連続的なエネルギー分布をしているとは考えにくい。また、一般に方向スペクトルは滑らかな連続関数と見なされている。

したがって、方向スペクトル $S(f, \theta)$ が方向角 θ に対して滑らかであるという仮定の表現として、系列 $\{x_k\}$ が局所的には k の1次式でよく表現されるべきであると考える。この場合 x_k の2次の階差

$$x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \quad \dots\dots\dots(34)$$

は0に近いと想定される。すなわち、

$$\sum_{k=3}^K \{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}\}^2 \quad \dots\dots\dots(35)$$

を考えると、式(35)の値が小さいほど、方向スペクトルの推定値 $\hat{S}(f, \theta)$ は滑らかになると考えられる。したがって、方向スペクトルの推定値 $\hat{S}(f, \theta)$ としては、式(35)をあまり大きくしない範囲で、ゆり度、式(33)の大きいものが望ましい。これを定式化すると、適当なパラメータ（超パラメータ） u^2 を用いて、

$$\ln L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) - \frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \quad \dots\dots\dots(36)$$

を最大化する (x_1, \dots, x_K) を求めればよい。式(36)の最大化は、式(36)を指数とする指数関数を対象として考えるならば、

$$L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) \times \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2\right\} \quad \dots\dots(37)$$

の最大化にはかならないことがわかる。これは式(15)の関係において、 $x = (x_1, \dots, x_K)$ の事前分布として、

$$p(x|u^2, \sigma^2) = \left(\frac{u}{\sqrt{2}\pi\sigma}\right)^{K-2} \times \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2\right\} \quad \dots\dots(38)$$

を想定したことにかならない。

データが与えられたときの事後分布は、

$$p_{\text{post}}(x|u^2, \sigma^2) \propto L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) \quad \dots\dots(39)$$

で与えられるから、事後分布のモードを推定値とすればよい。 u^2 を与えれば式(37)を最大化する x は σ^2 に無関係に決まり、

$$\sum_{i=1}^{2N} \left\{ \phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{ik} \exp(x_k) \right\}^2 + u^2 \left\{ \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \quad \dots\dots\dots(40)$$

を最小化することにより得られる。

u^2 の決定と σ^2 の推定は次式で表される ABIC（赤池のベイズ型情報量基準）¹¹⁾

$$\text{ABIC} = -2 \ln \int L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) dx \quad \dots\dots(41)$$

の最小化によればよい。

なお、式(23)では入射波の方向スペクトルの定義域が $[0, \pi]$ であるため、式(35)の総和の範囲は $k=3$ から K までとなっている。前報⁷⁾では、方向スペクトルの定義域が $[0, 2\pi]$ であったため、 $x_0 = x_K, x_{-1} = x_{K-1}$ の関係があり、総和の範囲を $k=1$ から K として、特に問題はなかった。ここでの端条件の設定方法、妥当性については、別途、検討する必要があるが、種々の数値シミュレーションによる検討の結果、総和の範囲を $k=3$ から K とした場合でも、ほぼ妥当な推定値が推定し得るため、この端条件を用いることとした。

4.3 数値計算法

前節で述べた方法を用いて方向スペクトルを推定する場合、式(40)の最小化および式(41)の積分と最小化を実行しなければならない。しかしながら、今の場合それらを解析的に行うことは不可能である。そこで、ここでは、前報⁷⁾と同様に石黒^{14), 15)}あるいは坂元¹⁶⁾に従って、以下の方法により数値計算を行うこととした。

説明の便宜上、以下では方程式をすべて行列表示して取り扱う。この場合、式(40)を再記すると次式で表される。

$$J(x) = |A F(x) - B|^2 + u^2 |D x|^2 \quad \dots\dots(42)$$

ここに、

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2N,1} & \dots & \alpha_{2N,K} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(43)$$

$$B = (\phi_1, \dots, \phi_{2N})^t \quad \dots\dots\dots(44)$$

$$F(x) = \{\exp(x_1), \dots, \exp(x_K)\}^t \quad \dots\dots(45)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots(46)$$

である。

式(42)の右辺第1項は x に関して非線形である。そこで、いま、 x_0 が x の推定値 \hat{x} に十分近いものとして $F(x)$ を x_0 のまわりで Taylor 展開すると、次式となる。

$$F(x) \doteq F(x_0) + E(x_0)(x - x_0) \quad \cdots(47)$$

ここに、

$$E(x) = \begin{bmatrix} \exp(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(x_K) \end{bmatrix} \quad \cdots(48)$$

である。

式(47)を式(42)に代入して整理すると、

$$J(x) = |\tilde{A}x - \tilde{B}|^2 + u^2 |Dx|^2 \quad \cdots(49)$$

ここに、

$$\tilde{A} = AE(x_0) \quad \cdots(50)$$

$$\tilde{B} = B - AF(x_0) + AE(x_0)x_0 \quad \cdots(51)$$

である。

したがって、適当な初期値 x_0 および u^2 が与えられると、式(49)~式(51)をもとに最小自乗法により、 x_1 が算出される。次に、 x_1 を式(49)~式(51)の x_0 に置き換えて、 x_2 を算出する。この演算を繰り返して、適当な収束条件を満たす解 \hat{x} を求め、これを与えられた u^2 に対する推定値 \hat{x} とする。

式(42)を式(49)のように線形近似し、推定値 \hat{x} が求められた場合、式(41)の ABIC は以下のように求められる。

いま、 x の推定値 \hat{x} を求める際に算出した \tilde{A} 、 \tilde{B} を \hat{A} 、 \hat{B} で表すと、事後分布は

$$\begin{aligned} L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^N \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} |\hat{A}x - \hat{B}|^2\right\} \\ &\times \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{K-2} \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2} |Dx|^2\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^N \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{K-2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left|\begin{pmatrix} \hat{A} \\ uD \end{pmatrix} \hat{x} - \begin{pmatrix} \hat{B} \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2\right\} \end{aligned} \quad \cdots(52)$$

である。したがって、その積分は、

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^N \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{K-2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left|\begin{pmatrix} \hat{A} \\ uD \end{pmatrix} \hat{x} - \begin{pmatrix} \hat{B} \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2\right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left|\begin{pmatrix} \hat{A} \\ uD \end{pmatrix} (x - \hat{x})\right|^2\right\} dx \end{aligned} \quad \cdots(53)$$

となる。ここで、積分公式

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left|\begin{pmatrix} \hat{A} \\ uD \end{pmatrix} (x - \hat{x})\right|^2\right\} dx \\ &= (\sqrt{2\pi}\sigma)^K \{\det(\hat{A}^t \hat{A} + u^2 D^t D)\}^{-1/2} \end{aligned} \quad \cdots(54)$$

を用いると、式(53)の積分は、

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} L(x, \sigma^2) p(x|\sigma^2, u^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N-1} u^{K-2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \{|\hat{A}\hat{x} - \hat{B}|^2 + u^2 |D\hat{x}|^2\}\right] \{\det(\hat{A}^t \hat{A} + u^2 D^t D)\}^{-1/2} \end{aligned} \quad \cdots(55)$$

で与えられる。したがって、ABIC は

$$\begin{aligned} \text{ABIC} &= -2 \ln \int_{-\infty}^{\infty} L(x, \sigma^2) p(x|\sigma^2, u^2) dx \\ &= 2(N-1) \ln(2\pi\sigma^2) - (K-2) \ln(u^2) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2} \{|\hat{A}\hat{x} - \hat{B}|^2 + u^2 |D\hat{x}|^2\} \\ &\quad + \ln \{\det(\hat{A}^t \hat{A} + u^2 D^t D)\} \end{aligned} \quad \cdots(56)$$

となる。ABIC を最小化する σ^2 の推定値は式(56)を σ^2 で微分して 0 とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\text{ABIC})}{\partial\sigma^2} &= \frac{2(N-1)}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^4} \{|\hat{A}\hat{x} - \hat{B}|^2 + u^2 |D\hat{x}|^2\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad \cdots(57)$$

より、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2(N-1)} \{|\hat{A}\hat{x} - \hat{B}|^2 + u^2 |D\hat{x}|^2\} \quad \cdots(58)$$

で与えられる。したがって、ABIC は最終的に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{ABIC} &= 2(N-1) \ln(2\pi\hat{\sigma}^2) + 2(N-1) \\ &\quad - (K-2) \ln(u^2) + \ln \{\det(\hat{A}^t \hat{A} + u^2 D^t D)\} \end{aligned} \quad \cdots(59)$$

式(49)の最小自乗法の解法としては、後に示す理由により、Householder 法¹⁷⁾を用いて計算した。これは以下のように行われる。

式(49)を書き換えると、

$$J(x) = \left\| \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ uD \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \dots\dots\dots(60)$$

である。したがって、

$$Z = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \dots & \dots \\ uD & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 2N \\ \downarrow \\ K-2 \\ \downarrow \end{matrix} \dots\dots\dots(61)$$

と、Householder 変換（鏡映変換を繰り返して任意の行列を上三角行列に変換する方法）を適用する。

Householder 変換によって、

$$UZ = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1,K+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & S_{K+1,K+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \dots\dots\dots(62)$$

が得られたものとする。このとき、

$$\begin{aligned} & \left\| U \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ uD \end{pmatrix} x - U \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1K} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & S_{KK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{1,K+1} \\ \dots \\ S_{K+1,K+1} \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1K} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & S_{KK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{1,K+1} \\ \dots \\ S_{K,K+1} \end{pmatrix} \right\|^2 + S_{K+1,K+1}^2 \end{aligned} \dots\dots\dots(63)$$

であり、右辺第 2 項は x と無関係な定数であることから、式(49)あるいは式(60)の最小自乗推定値 \hat{x} は

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1K} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & S_{KK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,K+1} \\ \dots \\ S_{K,K+1} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(64)$$

の解として容易に求められる。なお、式(58)で与えられる残差分散は Householder 変換の結果を用いて、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{K+1,K+1}^2}{2(N-1)} \dots\dots\dots(65)$$

で与えられる。

また、式(59)で表わされる ABIC の右辺第 4 項の行列式および対数変換の数値計算は Householder 変換の結果を用いて、

$$\ln \{ \det(\hat{A}^t \hat{A} + u^2 D^t D) \} = \sum_{k=1}^K \ln S_{k,k}^2 \dots\dots\dots(66)$$

により算出される。

超パラメータ u^2 の決定は正確には式(59)の ABIC を最小にする非線形最適化によらなければならない。しかしながら、今の場合、これは困難であり、また u^2 の推

定を目的とする限り式(59)を厳密に最小化する必要はない¹⁶⁾。したがって、ここでは u の与え方として石黒¹⁴⁾、¹⁵⁾、坂元¹⁹⁾と同様に格子探索法を用いることとし、

$$u = ab^m \quad (m=1, 2, \dots) \dots\dots\dots(67)$$

として、 a, b に適当な値を代入し、 m を変えることにより、種々の u の値を用いて上記の計算を実施した。

以上に述べた数値計算法により得られた結果の内、最小の ABIC を与える u を最適な \hat{u} として決定した。

以上の数値計算法をまとめると、以下のようになる。

- 1) 適当なお u および x の初期値 x_0 を与えて、式(49)より、与えられた u に対応する x の推定値 \hat{x} および σ^2 の推定値 $\hat{\sigma}^2$ を算出する。
- 2) 1) で得られた結果を用いて、式(59)より、与えられた u に対応する ABIC を算出する。
- 3) u の値を種々に変えて、1), 2) の計算を繰り返す。
- 4) 1)~3) の計算結果のうち、最小の ABIC を与える \hat{u} , $\hat{\sigma}^2$ および \hat{x} を最適な推定値とする。

4.4 数値シミュレーションによる検討

数値シミュレーション手法を利用して、4.2~4.3で述べた入・反射波共存場における入射波と反射波の方向スペクトルの分離計算法の妥当性、適用性などの検討を行った。

(1) 数値シミュレーション法

方向スペクトルは周波数 f および方向角 θ の関数として波のエネルギー分布を表示するものであるが、線形理論の成立する範囲では、そのエネルギー分布は周波数 f および方向角 θ に対してそれぞれ独立であると見なされる。したがって、ここでは任意の周波数 f に着目したとして、方向角 θ に関する分布のみについて検討した。数値シミュレーションの具体的な手順は以下のとおりである⁵⁾。

- 1) 入射波の方向スペクトル形として次式のような関数を与える。

$$S(\theta) = \sum_i \alpha_i \cos^2 S_i \left(\frac{\theta - \theta_i}{2} \right) \dots\dots\dots(68)$$

二つの波群から構成されるような双峯型の方向スペクトルを対象とする場合には、式(68)の α_i, S_i, θ_i の値を変えた 2 種類の方向スペクトルを重ね合わせて与えることとする。

- 2) 1) で与えた方向スペクトルおよび適当に設定された反射率をもとに、式(5)によりクロススペクトルを算出する。
- 3) 2) で得られたクロススペクトルをもとに、4.3

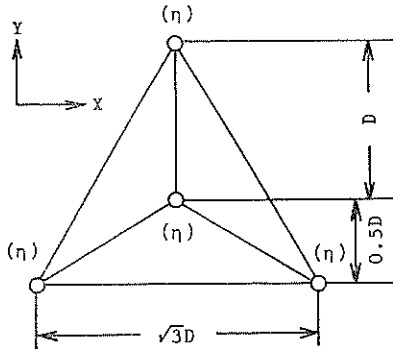


図-2 数値シミュレーションに用いたアレイ配置 (星型配置)

で述べた方法により方向スペクトルの推定を行い、真の方向スペクトル、すなわち式(68)で与えられる方向スペクトルと比較する。なお、ここでは任意の波動量の組み合わせから方向スペクトルの分離計算を実施することを目的としているため、既往の方向スペクトルの分離計算法として MELM を用いて解析し、両者の比較を行うこととした。

(2) 数値シミュレーションによる検討

以下では、波浪観測条件として、図-2に示す星型アレイ配置を用い、波高計間距離 D と波長 L の比を $D/L = 0.2$ とし、反射面から波高計アレイまでの最短距離を波長の 0.2 倍の位置に設置した場合を対象として数値シミュレーションを実施した結果を示す。ここで星型アレイ配置を用いたのは、前報⁷⁾で述べたように、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定法では、式(32)でクロススペクトルの誤差を考慮しているため、推定精度の良い方向スペクトルを推定するためには、最小限4個以上の観測波動量が必要なためである。

なお、式(49)の繰り返し計算を実施するに際しては、ここでは便宜的に、 $x_0 = (x_1, \dots, x_K)$ の初期値として、MELM により推定された方向スペクトルの推定値 $\hat{S}_{MELM}(\theta)$ を用いて、

$$x_k = \ln \{ \hat{S}_{MELM}(\theta_k) \} \dots\dots\dots(69)$$

$$(k=1, \dots, K)$$

として与えることとした。

また、式(49)~式(51)の繰り返し計算の収束基準としては、 $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1} と n ステップ目の推定値 x_n の差を $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1} で正規

化した値の標準偏差 σ_{e_n} が

$$|\sigma_{e_n}| \leq 10^{-3} \dots\dots\dots(70)$$

となった場合に収束したと見なして推定値 \hat{x} を算出した。

超パラメータ u の設定に際しては、事前に種々の試算を実施し、式(67)中の a, b, m として

$$a=256, b=0.5, m=1\sim 20 \dots\dots\dots(71)$$

を与えて格子探索法を実施した。

なお、ここでは、式(69)の方向スペクトルの方向分割数として、 $K=90$ として数値計算を実施している。

図-3は真の反射率を方向角 θ に対して一定として $r_{TRUE} = 0.7$ とし、ベイズ型モデルによる分離計算のためのモデルの反射率 r_{MBM} に種々の反射率を与えた場合の入射波と反射波の方向スペクトルの分離計算結果を示したものである。波浪条件としては $\theta = 45^\circ$ の方向から $S = 10$ の一方向波浪が来襲する条件を与えている。なお、図-3では、入・反射波の方向スペクトルの値はそれぞれ入射波の真の方向スペクトルのエネルギーピーク値で正規化して描いている。図-3中の TRUE は真の方向スペクトルを、MBM はベイズ型モデルにより推定された方向スペクトルを、MELM は修正最ゆう法により推定された方向スペクトルを示している。なお、ここでは反射率 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と MELM の推定精度を比較するために、便宜的に、図-3(1)~(8)のすべてに MELM の同じ計算結果を示している。図-3に見られるように、MBM はモデルの反射率 r_{MBM} が真の反射率 r_{TRUE} に近づくにつれて、真の方向スペクトル (TRUE) に近づいて行く。また、図-3中に示す ABIC の値を見ると、図-3(5)に見られるように、モデルの反射率が真の反射率と一致したときに最小 ABIC の値 ($ABIC = -276.87$) を示している。

一方、MELM で推定された方向スペクトルと反射率を見ると、図-3の例では反射率および方向スペクトルのいずれもほぼ妥当な推定値を示しているものの、方向スペクトルには3つのピークが現れており、また、反射率にも TRUE には見られない0の領域が現れている。これは、MELM では計算上、反射率に負値が現れるという不合理が発生するが、図-3では反射率に負値が現れる場合には、反射率を0に置き換えて描いているためである。

図-4は、真の反射率 r_{TRUE} を方向角 θ の関数として $r_{TRUE}(\theta) = 0.7 \sin \theta$ とし、モデルの反射率 r_{MBM} も方向角 θ の関数として、種々の反射率を与えた場合の入・反射波の方向スペクトルの分離計算結果を示したものである。図-4(6)に見られるように、モデルの反射率として

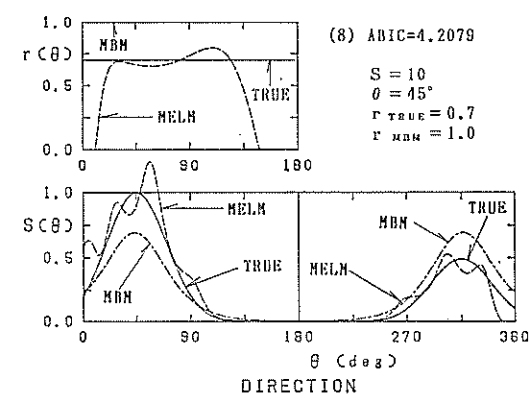
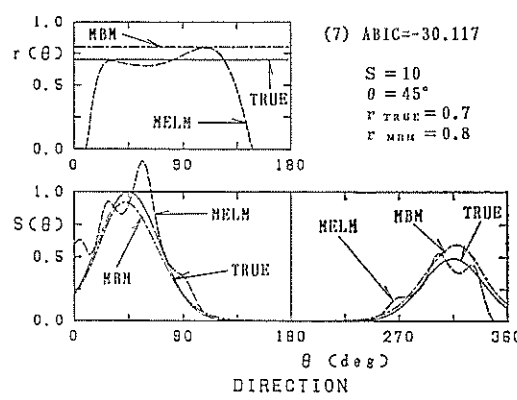
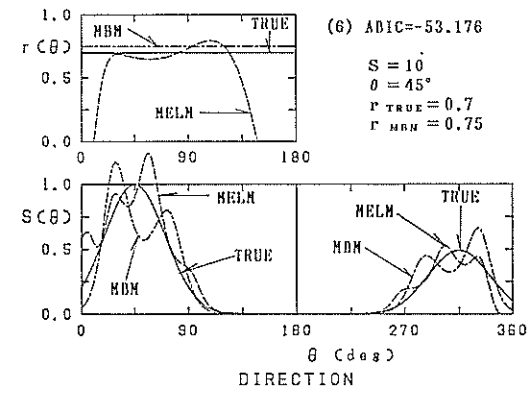
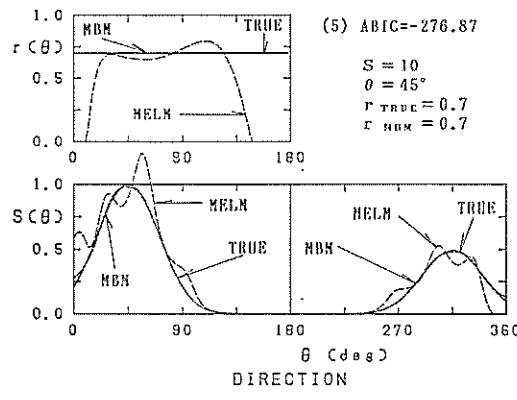
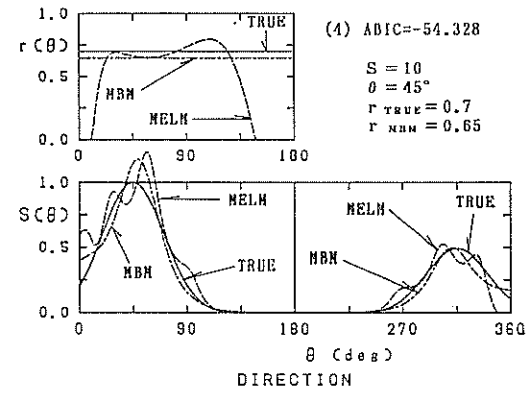
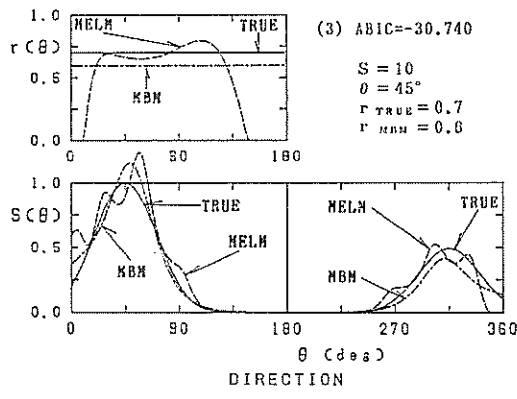
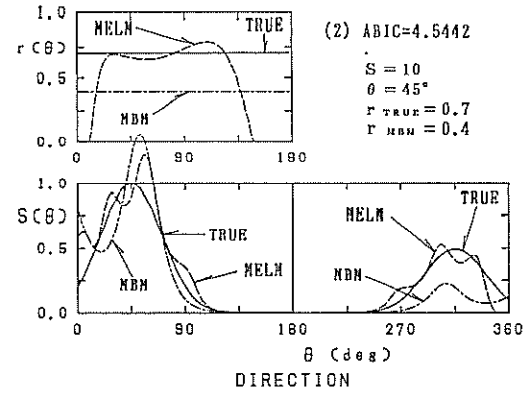
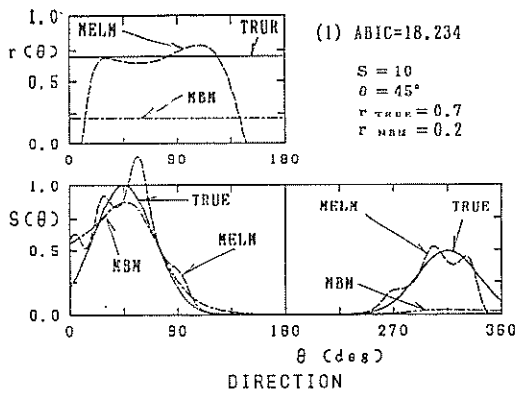


図-3 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と ABIC との関係 (一方向波浪, r_{TRUE} =一定)

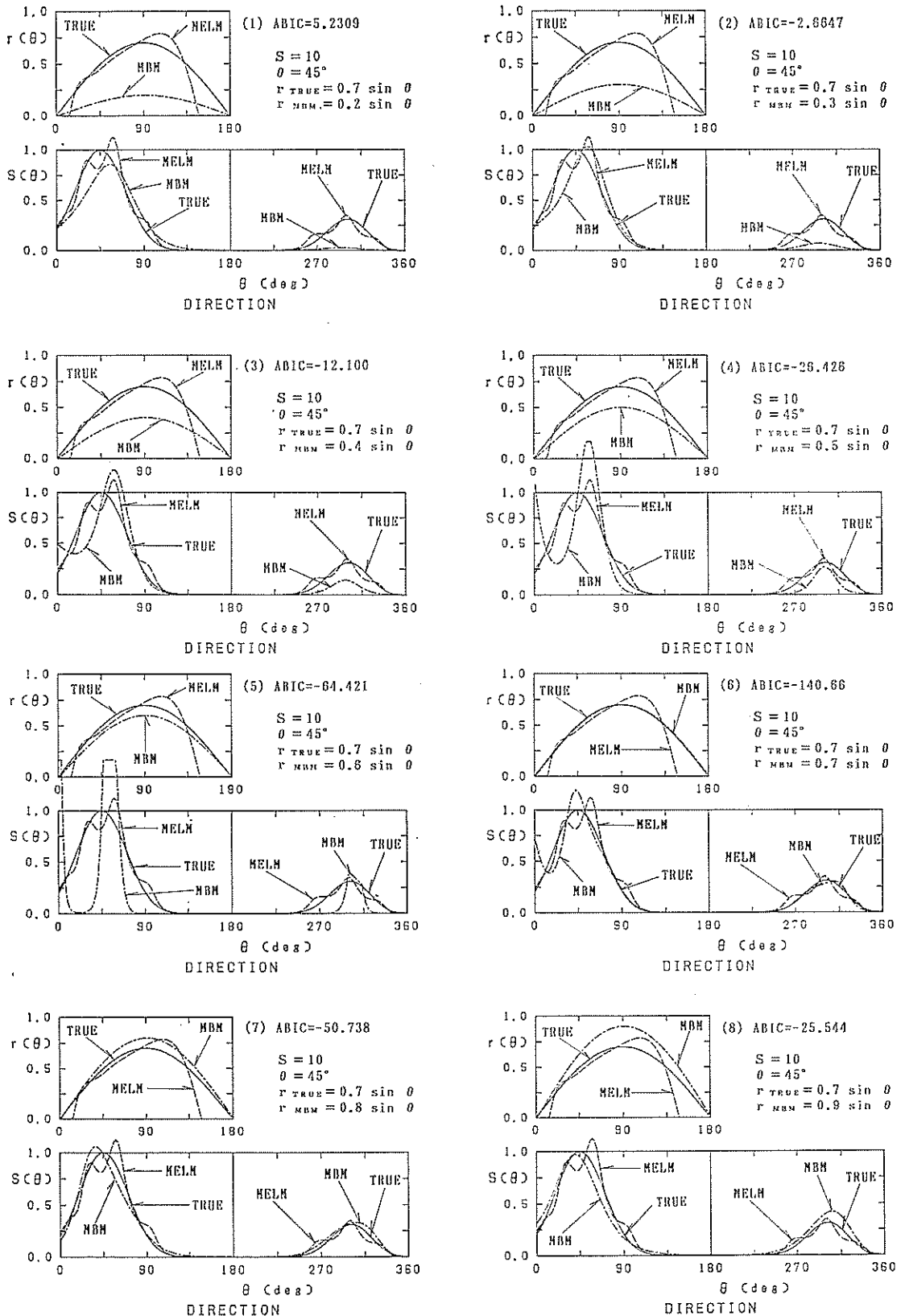


図-4 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と ABIC との関係 (一方向波浪, $r_{TRUE} = r(\theta)$)

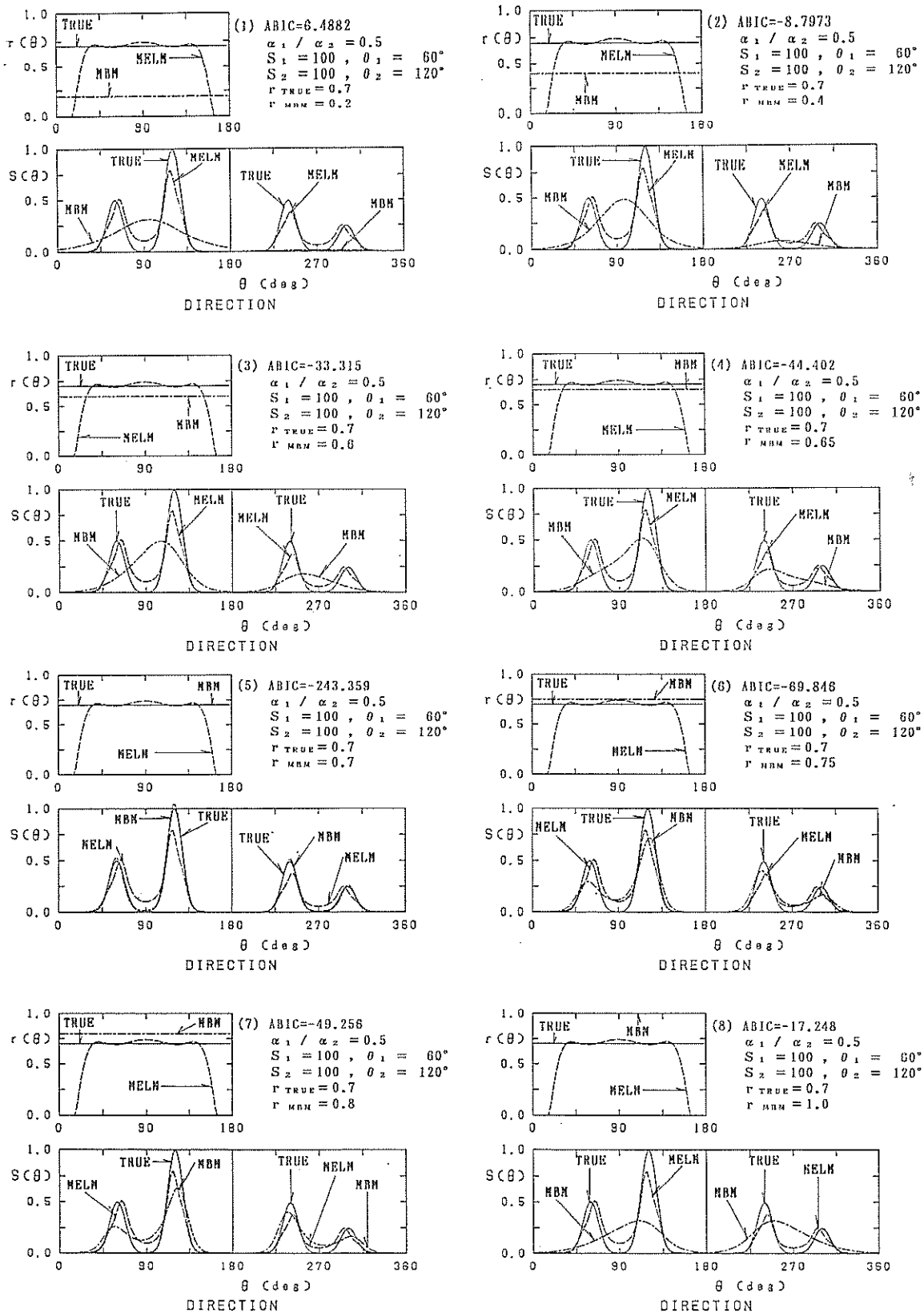


図-5 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と ABIC との関係 (二方向波浪, r_{TRUE} =一定)

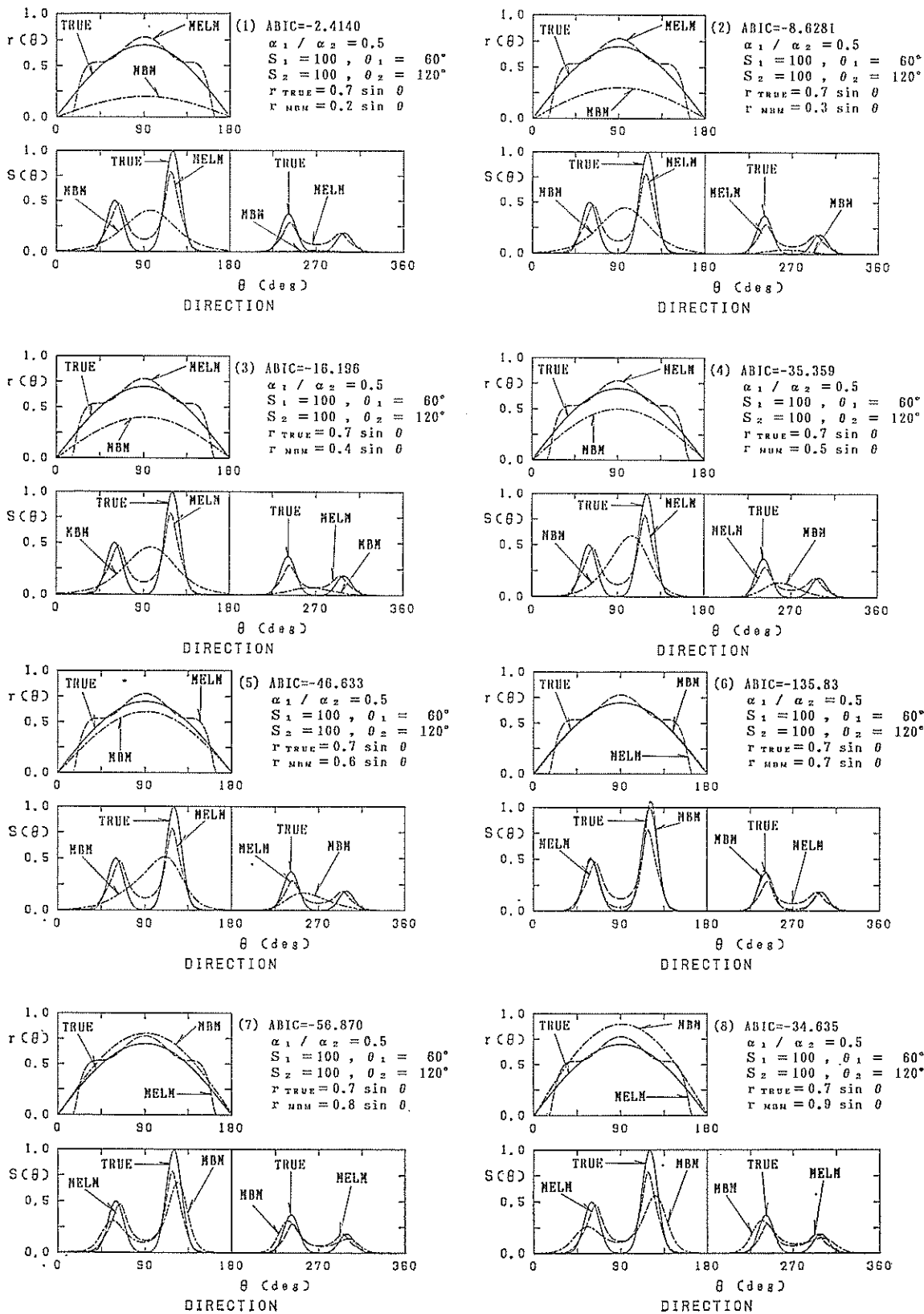


図-6 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と ABIC との関係 (二方向波浪, $r_{TRUE} = r(\theta)$)

ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定

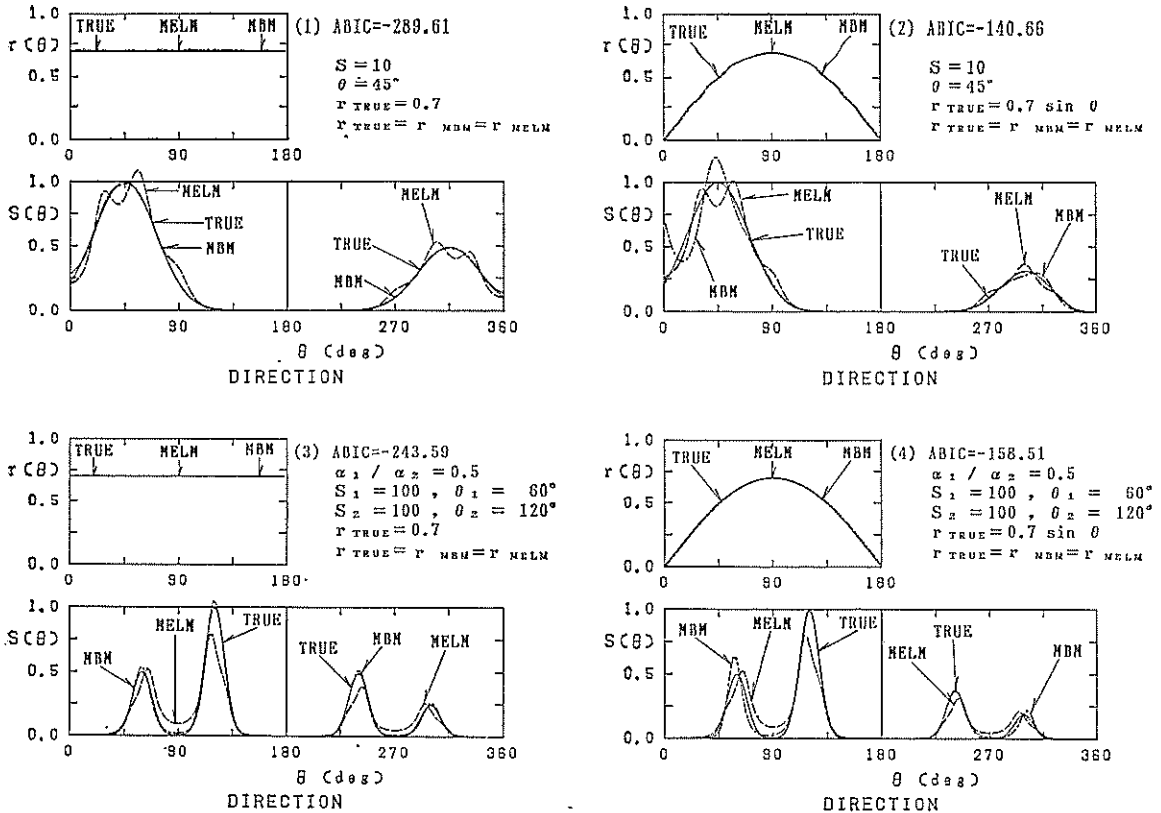


図-7 MBM および MELM の反射率として真の反射率 r_{TRUE} を用いた場合の MBM と MELM の推定精度の比較

真の反射率を与えた場合に、 $ABIC = -140.66$ となり、最小 $ABIC$ 値を示すことがわかる。しかしながら、入・反射波の方向スペクトル形状を見ると、最小 $ABIC$ 値を示すケース(6)は入射波の方向スペクトルの端 ($\theta = 0^\circ$ 近傍) で、MBM と TRUE との差が大きく、むしろ図-4(7)あるいは図-4(8)のケースの方が、より TRUE に近い推定値を示しているように思われる。これは式(35)で導入した方向スペクトルが滑らかであるという条件式の端条件の決め方に問題があるものと思われる。すなわち、式(35)では総和の範囲を、便宜的に、 $k=3$ から K までとしたが、この影響が端での方向スペクトルの推定値にずれを生じさせ、さらにその影響が内部にも及んでいるためである。しかしながら、同じ波浪条件を用いた図-3では、このような影響はそれほど明確ではないことから、端条件の影響は入射波の方向スペクトル形状のみならず、反射率の形状にも依存するものと思われる。いずれにせよ、式(35)の端条件の設定方法については、今後、より詳細に検討する必要がある。

一方、図-4中の MELM により推定された結果を見ると、方向スペクトルおよび反射率は、ほぼ妥当な推定値

を示しているものの、反射率は方向スペクトルのエネルギーの卓越した領域付近でのみ妥当な推定値を示しており、それ以外の領域では、真値と推定値とのずれは大きいようである。

図-5、図-6は二方向波浪を対象として、反射率としてそれぞれ図-3、図-4と同一の値を用いた場合の数値シミュレーション結果を示したものである。図-3、図-4と同様に、モデルの反射率 r_{MBM} が真の反射率 r_{TRUE} に一致したときに、最小 $ABIC$ 値を示している。なお、図-4と同じ反射率を用いた図-6では、MBM と入射波の真の方向スペクトル (TRUE) との端でのずれは生じていない。図-4で方向スペクトル推定値の端でのずれが生じた原因は、図-4では、端 ($\theta = 0^\circ$ 近傍) でエネルギーの変化率が大きいためと思われる。

以上、図-3～図-6の例では、推定精度の良否の問題は別にして、いずれの場合にもモデルの反射率 r_{MBM} が真の反射率 r_{TRUE} に一致した場合に、 $ABIC$ の値は最小 $ABIC$ 値を示した。また、モデルの反射率 r_{MBM} が真の反射率 r_{TRUE} に近いほど、 $ABIC$ は小さな値を示している。したがって、4.1 でも述べたように、いま、いく

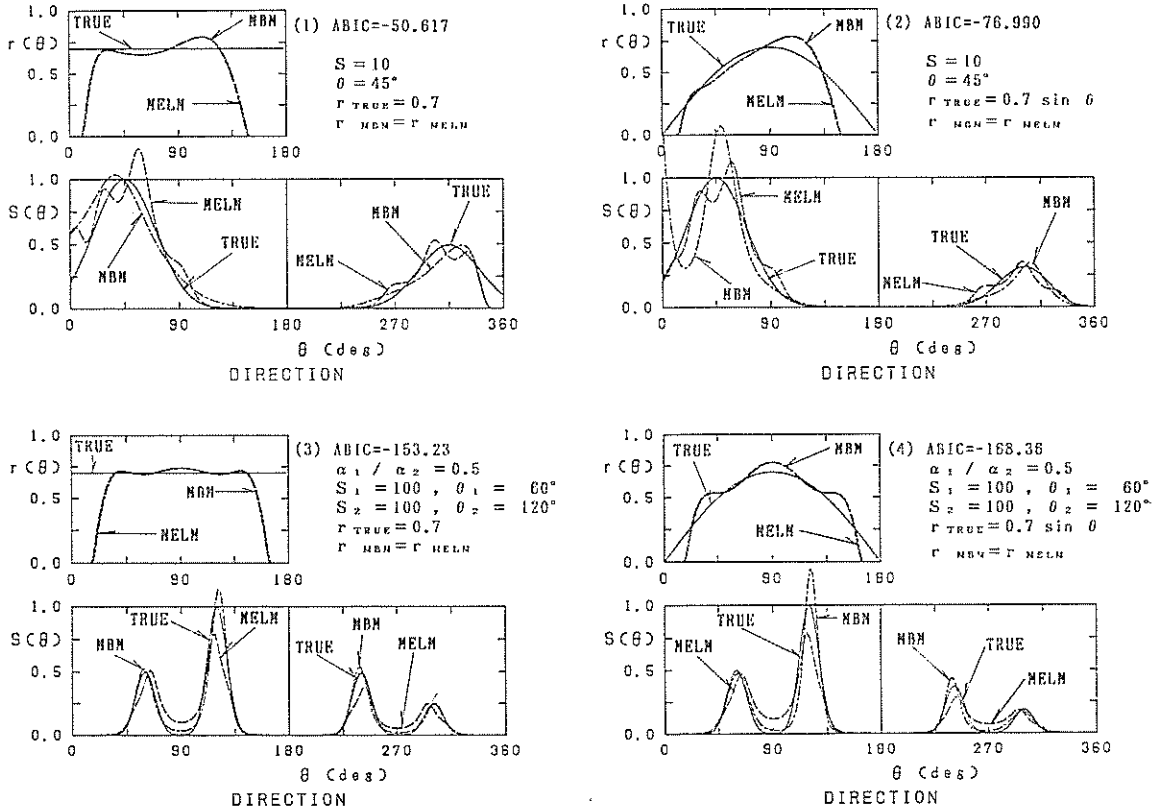


図-8 MBM および MELM の反射率として MELM で推定された反射率 r_{MELM} を用いた場合の MBM と MELM の推定精度の比較

つかの反射率が想定されている場合には、その何れがより妥当な反射率かを判断する場合に、ABIC の値は良い基準を与えるものと期待される。

図-7 は MBM および MELM の反射率として、両者に真の反射率 r_{TRUE} を与えて、入・反射波の方向スペクトルの分離計算を実施した結果を示したものである。また、図-8 は MBM および MELM の反射率として、両者に MELM で推定された反射率 r_{MELM} を与えて、入・反射波の方向スペクトルの分離計算を実施した結果を示したものである。

図-7 に見られるように、MELM では反射率として真の反射率を与えた場合でも、図-8 に比べて推定精度はほとんど改善されておらず、必ずしも、より推定精度の良い方向スペクトルの推定値を与えるとは限らない。

一方、MBM では反射率として真の反射率を与えた場合には、図-7(2) の左端での推定値のずれを除き、極めて TRUE に近い推定値を示している。しかしながら、図-8 に見られるように、モデルの反射率として MELM で推定された反射率を用いる場合には、MBM は MELM よりも推定精度の良い推定値を示す場合 (図-8(3), (4))

もあれば、推定精度が劣る場合 (図-8(1), (2)) もあり、一概に、推定精度の良否の判断はできない。これについては、今後、更に種々のシミュレーションを実施して検討する必要がある。いずれにせよ、真の反射率が与えられる場合には、MBM は MELM に比べて優れた推定法であると言える。

5. 方向スペクトルおよび反射率を未知変数とする場合の入・反射波の方向スペクトルの分離計算法

前章では反射率をモデルを規定するパラメータと見なし、反射率を既知として設定する場合の入・反射波の分離計算法について述べた。また、設定されたいくつかの反射率の内でも妥当な反射率を選択する方法についても述べた。しかしながら、前章の方法では恣意的に幾つかの反射率を与えて計算せねばならず、取り扱いが不便である。そこで、ここでは方向スペクトルおよび反射率の両方を未知変数として定式化し、方向スペクトルのみならず反射率をも同時に推定する方法について述べることにする。

5.1 理論式の定式化

ここでの定式化は、4. で述べた方法に反射率をも未知変数とする修正を追加することにより行われる。なお、以下では反射率は周波数 f および方向角 θ の関数として一般的に取り扱うこととする。

以下では、式 (23) と同様に、式の誘導の便宜上、式 (5) の 2 次元的表示式 (m 番目の波動量と n 番目の波動量のクロススペクトルを $\Phi_{mn}(f)$ と表示する方式) を 1 次元的表示式 ($\phi_i(f)$ と表示する方式) に再構成して取り扱う。ただし、ここでは反射率 r も未知変数であるため、式 (5) を次式のように表示して取り扱うこととする。

$$\begin{aligned} \phi_i(f) = & \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{0i}(f, \theta) S(f, \theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{1i}(f, \theta) r(f, \theta) S(f, \theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{2i}(f, \theta) r^2(f, \theta) S(f, \theta) d\theta \dots\dots(72) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} H_{0i}(f, \theta) = & H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ & \times [\cos \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ & - i \sin \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] \dots\dots(73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{1i}(f, \theta) = & H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ & \times [\cos \{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} \\ & - i \sin \{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} \\ & + \cos \{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\} \\ & - i \sin \{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\}] \dots\dots(74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{2i}(f, \theta) = & H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ & \times [\cos \{k(x_{mrnr} \cos \theta + y_{mrnr} \sin \theta)\} \\ & - i \sin \{k(x_{mrnr} \cos \theta + y_{mrnr} \sin \theta)\}] \dots\dots(75) \end{aligned}$$

である。

いま、反射率 r の値域は $0 \leq r \leq 1$ であり、また、入射波の来襲する範囲 $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ で定義される。そこでいま、反射率の方向角に関する定義域 $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ を十分大きな数 K で等分割する ($K\Delta\theta = \theta_{\max} - \theta_{\min}$)。また、等分割した微小区間内では、反射率は区分的一定値関数であるとする。さらに、反射率の値域を便宜的に $0 < r < 1$ と仮定し、次式で定義される新しい変数

$$\begin{aligned} y_k(f) = & \ln \frac{r(f, \theta_k)}{1 - r(f, \theta_k)} \dots\dots(76) \\ & (k=1, \dots, K) \end{aligned}$$

を導入する¹⁶⁾。このとき、反射率は次式のように近似される。

$$r(f, \theta) \approx \sum_{k=1}^K \frac{\exp\{y_k(f)\}}{1 + \exp\{y_k(f)\}} I_k(\theta) \dots\dots(77)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} I_k(\theta) = & \begin{cases} 1 : (k-1)\Delta\theta \leq \theta < k\Delta\theta \\ 0 : \text{その他} \end{cases} \dots\dots(78) \\ & (k=1, \dots, K) \end{aligned}$$

である。式(26)および式(77)を式(72)に代入すると、

$$\begin{aligned} \phi_i(f) = & \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{0i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{\exp\{x_k(f) + y_k(f)\}}{1 + \exp\{y_k(f)\}} \\ & \times \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{1i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{\exp\{x_k(f) + 2y_k(f)\}}{[1 + \exp\{y_k(f)\}]^2} \\ & \times \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{2i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \dots\dots(79) \end{aligned}$$

となる。右辺の積分は K が十分大きいとき、

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{0i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ & = \int_{(k-1)\Delta\theta}^{k\Delta\theta} H_{0i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ & \doteq H_{0i}(f, \theta_k) \Delta\theta \doteq \alpha_{ik}(f) \dots\dots(80) \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{1i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ & \doteq H_{1i}(f, \theta_k) \Delta\theta \doteq \beta_{ik}(f) \dots\dots(81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{2i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ & \doteq H_{2i}(f, \theta_k) \Delta\theta \doteq \gamma_{ik}(f) \dots\dots(82) \end{aligned}$$

ここに、 $\theta_k = (2k-1)\Delta\theta/2$ である。

いま、 $\phi_i(f)$ および $\alpha_{ik}(f)$, $\beta_{ik}(f)$, $\gamma_{ik}(f)$ は複素数であり、取り扱いが不便である。そこで、

$$\begin{aligned} \phi_i & = \text{Real}\{\phi_i(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \phi_{N+i} & = \text{Imag}\{\phi_i(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \alpha_{i,k} & = \text{Real}\{\alpha_{i,k}(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \alpha_{N+i,k} & = \text{Imag}\{\alpha_{i,k}(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \beta_{i,k} & = \text{Real}\{\beta_{i,k}(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \beta_{N+i,k} & = \text{Imag}\{\beta_{i,k}(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \gamma_{i,k} & = \text{Real}\{\gamma_{i,k}(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \\ \gamma_{N+i,k} & = \text{Imag}\{\gamma_{i,k}(f)\} / \sqrt{\Phi_{mm}(f)\Phi_{nn}(f)} \end{aligned} \dots\dots(83)$$

と正規化して分離し、すべてを実数の式として取り扱う。なお、式(83)の左辺は周波数 f の関数であるが、省略して記述した。以後、特別の場合を除き、便宜的に周波数 f は

省略して扱うこととする。このとき、式(80)～式(82)および式(83)より、結局、式(79)は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \phi_i = & \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \\ & + \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} \frac{\exp(x_k + y_k)}{1 + \exp(y_k)} \\ & + \sum_{k=1}^K \gamma_{i,k} \frac{\exp(x_k + 2y_k)}{\{1 + \exp(y_k)\}^2} \dots\dots\dots(84) \end{aligned}$$

($i=1, \dots, 2N$)

式(84)を観測値に当てはめる場合、観測値には誤差が含まれることが一般である。そこで誤差項も考慮して式(84)を再記すると次式となる。

$$\begin{aligned} \phi_i = & \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \\ & + \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} \frac{\exp(x_k + y_k)}{1 + \exp(y_k)} \\ & + \sum_{k=1}^K \gamma_{i,k} \frac{\exp(x_k + 2y_k)}{\{1 + \exp(y_k)\}^2} + \varepsilon_i \dots\dots\dots(85) \end{aligned}$$

($i=1, \dots, 2N$)

ここに、 ε_i ($i=1, \dots, 2N$) は互いに独立であり、平均0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。

このとき、 ϕ_i ($i=1, \dots, 2N$) が与えられれば、 x_k, y_k ; ($k=1, \dots, K$)、 σ^2 に関するゆう度は、

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_K; \sigma^2) = & (2\pi\sigma^2)^{-N} \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \right. \right. \\ & - \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} \frac{\exp(x_k + y_k)}{1 + \exp(y_k)} \\ & \left. \left. - \sum_{k=1}^K \gamma_{i,k} \frac{\exp(x_k + 2y_k)}{\{1 + \exp(y_k)\}^2} \right\}^2\right] \dots\dots\dots(86) \end{aligned}$$

で与えられる。

以上の展開では方向スペクトル $S(f, \theta)$ は区分的一定値関数として近似した。この際、各微小区間ごとのエネルギーの相関については何ら考慮されていない。波の線形性からは各微小区間ごとのエネルギー分布はそれぞれ独立であると見なされるが、方向角 θ について不連続的なエネルギー分布をしているとは考えにくい。また、一般に方向スペクトルは滑らかな連続関数と見なされている。

一方、反射率 $r(f, \theta)$ も同様に方向角 θ について滑らかな連続関数であると仮定すると、方向スペクトル $S(f, \theta)$ および反射率 $r(f, \theta)$ が方向角 θ に対して滑らかであるという仮定の表現として、系列 $\{x_k\}$ および $\{y_k\}$ が局所的には k の1次式でよく近似されるべきであると考えられる。この場合 x_k, y_k の2次の階差

$$x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \dots\dots\dots(87)$$

および

$$y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2} \dots\dots\dots(88)$$

は0に近いと想定される。すなわち、

$$\sum_{k=3}^K \{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}\}^2 \dots\dots\dots(89)$$

および

$$\sum_{k=3}^K \{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}\}^2 \dots\dots\dots(90)$$

を考えると、式(89)が小さいほど方向スペクトル $S(f, \theta)$ が、式(90)が小さいほど反射率 $r(f, \theta)$ が滑らかになると考えられる。したがって、方向スペクトルの推定値 $\hat{S}(f, \theta)$ および反射率の推定値 $\hat{r}(f, \theta)$ としては、式(89)および式(90)をあまり大きくしない範囲で、ゆう度(式(86))の大きいものが望ましい。これを定式化すると、適当なパラメータ(超パラメータ) u^2 および v^2 を用いて、

$$\begin{aligned} \ln L(x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_K; \sigma^2) \\ - \frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \\ - \frac{v^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})^2 \dots\dots\dots(91) \end{aligned}$$

を最大化する (x_1, \dots, x_K) および (y_1, \dots, y_K) を求めればよい。式(91)の最大化は式(91)を指数とする指数関数を対象として考えるならば、

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_K; \sigma^2) \\ \times \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2\right\} \\ \times \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})^2\right\} \dots\dots\dots(92) \end{aligned}$$

の最大化にほかならないことがわかる。これは式(15)の関係において、 $x=(x_1, \dots, x_K)$ および $y=(y_1, \dots, y_K)$ の事前分布として

$$\begin{aligned} p(x, y | u^2, v^2, \sigma^2) = & p(x | u^2, \sigma^2) p(y | v^2, \sigma^2) \\ = & \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{K-2} \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right. \\ & \times \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \\ & \times \left(\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{K-2} \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right. \\ & \left. \times \sum_{k=3}^K (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})^2\right\} \dots\dots\dots(93) \end{aligned}$$

を想定したことにほかならない。

データが与えられたときの事後分布は

$$\begin{aligned} p_{\text{post}}(x, y | u^2, v^2, \sigma^2) \propto & L(x, y, \sigma^2) \\ & \times p(x, y | u^2, v^2, \sigma^2) \dots\dots\dots(94) \end{aligned}$$

で与えられるから、事後分布のモードを推定値とすればよい。 u^2 および v^2 を与えれば式(91)を最大化する x および y は σ^2 に無関係に決まり、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2N} \left[\phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{ik} \exp(x_k) - \sum_{k=1}^K \beta_{ik} \frac{\exp(x_k+y_k)}{1+\exp(y_k)} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^K \gamma_{ik} \frac{\exp(x_k+2y_k)}{\{1+\exp(y_k)\}^2} \right]^2 \\ & + u^2 \left\{ \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \\ & + v^2 \left\{ \sum_{k=3}^K (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})^2 \right\} \dots\dots\dots(95) \end{aligned}$$

を最小化することにより得られる。

u^2 および v^2 の決定と σ^2 の推定は次式で表される ABIC (赤池のベイズ型情報量基準)¹¹⁾

$$ABIC = -2 \ln \int L(x, y, \sigma^2) p(x, y | u^2, v^2, \sigma^2) dx dy \dots\dots\dots(96)$$

の最小化によればよい。

5.2 数値計算法

前節で述べた方法を用いて、方向スペクトルおよび反射率を推定する場合、式(95)の最小化および式(96)の積分と最小化を実行しなければならない。しかしながら、いまの場合それらを解析的に行うことは不可能である。そこで、4.3 と同様に、石黒^{14),15)}あるいは坂元¹⁶⁾に従って以下の方法により数値計算を行うこととした。

まず、 u^2 および v^2 が与えられたときに、式(95)の最小化を行う方法について述べる。なお、説明の便宜上、以下では方程式をすべて行列表示して取り扱う。この場合、式(95)を再記すると次式で表される。

$$J(x, y) = |AF_0(x) + BF_1(x, y) + CF_2(x, y) - Z|^2 + u^2 |Dx|^2 + v^2 |Dy|^2 \dots\dots\dots(97)$$

ここに、

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2N,1} & \dots & \alpha_{2N,K} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(98)$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \dots & \beta_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{2N,1} & \dots & \beta_{2N,K} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(99)$$

$$C = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \dots & \gamma_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{2N,1} & \dots & \gamma_{2N,K} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(100)$$

$$Z = (\phi_1, \dots, \phi_{2N})^t \dots\dots\dots(101)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(102)$$

$$F_0(x) = \{\exp(x_1), \dots, \exp(x_K)\}^t \dots\dots\dots(103)$$

$$F_1(x, y) = \left\{ \frac{\exp(x_1+y_1)}{1+\exp(y_1)}, \dots, \frac{\exp(x_K+y_K)}{1+\exp(y_K)} \right\}^t \dots\dots\dots(104)$$

$$F_2(x, y) = \left[\frac{\exp(x_1+2y_1)}{\{1+\exp(y_1)\}^2}, \dots, \frac{\exp(x_K+2y_K)}{\{1+\exp(y_K)\}^2} \right]^t \dots\dots\dots(105)$$

である。

式(97)の右辺第1項は x および y に関して非線形である。そこでいま、 x_0 が x の推定値 \hat{x} に、 y_0 が y の推定値 \hat{y} に十分近いものとして、 $F_0(x)$ を x_0 のまわりで、 $F_1(x, y)$ および $F_2(x, y)$ を (x_0, y_0) のまわりで Taylor 展開して x および y の1次の項まで取ると、次式となる。

$$F_0(x) \doteq F_0(x_0) + E_0(x_0)(x-x_0) \dots\dots\dots(106)$$

$$F_1(x, y) \doteq F_1(x_0, y_0) + E_1^x(x_0, y_0)(x-x_0) + E_1^y(x_0, y_0)(y-y_0) \dots\dots\dots(107)$$

$$F_2(x, y) \doteq F_2(x_0, y_0) + E_2^x(x_0, y_0)(x-x_0) + E_2^y(x_0, y_0)(y-y_0) \dots\dots\dots(108)$$

ここに、

$$E_0(x) = \begin{bmatrix} \exp(x_1) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \exp(x_K) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(109)$$

$$E_1^x(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\exp(x_1+y_1)}{1+\exp(y_1)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{\exp(x_K+y_K)}{1+\exp(y_K)} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(110)$$

$$E_1^y(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\exp(x_1+y_1)}{\{1+\exp(y_1)\}^2} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{\exp(x_K+y_K)}{\{1+\exp(y_K)\}^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(111)$$

$$E_1^x(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\exp(x_1+2y_1)}{\{1+\exp(y_1)\}^2} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\exp(x_K+2y_K)}{\{1+\exp(y_K)\}^2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(112)$$

$$E_2^y(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2\exp(x_1+2y_1)}{\{1+\exp(y_1)\}^3} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{2\exp(x_K+2y_K)}{\{1+\exp(y_K)\}^3} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(113)$$

である。

式(106)~式(108)を式(97)に代入して整理すると次式となる。

$$J(x, y) = |\tilde{A}x + \tilde{B}y - \tilde{C}|^2 + u^2|Dx|^2 + v^2|Dy|^2 \quad \dots\dots(114)$$

ここに、

$$\tilde{A} = AE_0(x_0) + BE_1^x(x_0, y_0) + CE_2^y(x_0, y_0) \quad \dots\dots(115)$$

$$\tilde{B} = BE_1^y(x_0, y_0) + CE_2^x(x_0, y_0) \quad \dots\dots(116)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C} = & Z - AF_0(x_0) - BF_1(x_0, y_0) - CF_2(x_0, y_0) \\ & + AE_0(x_0)x_0 + BE_1^x(x_0, y_0)x_0 + BE_1^y(x_0, y_0)y_0 \\ & + CE_2^x(x_0, y_0)x_0 + CE_2^y(x_0, y_0)y_0 \quad \dots\dots(117) \end{aligned}$$

である。

したがって、適当な初期値 x_0, y_0 が与えられると、式(114)~式(117)をもとに最小自乗法により、 x_1, y_1 が算出される。次に x_1, y_1 を式(114)~式(117)の x_0, y_0 に置き換えて、 x_2, y_2 を算出する。この演算を繰り返して、適当な収束条件を満たす解 \hat{x}, \hat{y} を求め、これを与えられた、 u^2, v^2 に対する推定値 $\hat{\sigma}^2$ とする。

このとき、式(96)で与えられる ABIC は、 x および y の推定値 \hat{x} および \hat{y} を求める際に算出した $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ を $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ で表すと、4.3 で述べた方法と同様にして、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & -2\ln \int L(x, y, \sigma^2) p(x, y | u^2, v^2, \sigma^2) dx dy \\ = & 2(N-2)\ln(2\pi\sigma^2) - (K-2)\ln(u^2v^2) \\ & + \frac{1}{\sigma^2} \{ |\hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{y} - \hat{C}|^2 + u^2|D\hat{x}|^2 \\ & + v^2|D\hat{y}|^2 \} + \ln[\det\{(\hat{A}, \hat{B})^t(\hat{A}, \hat{B}) \end{aligned}$$

$$+ u^2D^tD + v^2D^tD)] \quad \dots\dots(118)$$

また、 σ^2 の推定値 $\hat{\sigma}^2$ は式(118)を σ^2 で微分して 0 と置くことにより得られ、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2(N-2)} \{ |\hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{y} - \hat{C}|^2 + u^2|D\hat{x}|^2 + v^2|D\hat{y}|^2 \} \quad \dots\dots(119)$$

で与えられる。したがって、ABIC は最終的に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & 2(N-2)\ln(2\pi\hat{\sigma}^2) + 2(N-2) - (K-2) \\ & \times \ln(u^2v^2) + \ln[\det\{(\hat{A}, \hat{B})^t(\hat{A}, \hat{B}) \\ & + u^2D^tD + v^2D^tD\}] \quad \dots\dots(120) \end{aligned}$$

なお、式(114)の最小自乗法の解法としては、4.3 と同様に Householder 法を用いて計算した。このとき、式(61)に対応する行列 Z は次式で与えられる。

$$Z = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} \\ uD & 0 & 0 \\ 0 & vD & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 2N \\ \downarrow \\ \uparrow \\ K-2 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ K-2 \\ \downarrow \end{matrix} \quad \dots\dots(121)$$

Householder 変換によって、

$$UZ = \begin{bmatrix} S_{1,1} & \dots & S_{1,K} & \dots & S_{1,2K+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & S_{K,K} & \dots & S_{K,2K+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & S_{2K+1,2K+1} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(122)$$

が得られたとき、式(114)の最小自乗推定値 \hat{x}, \hat{y} は

$$\begin{bmatrix} S_{1,1} & \dots & S_{1,K} & \dots & S_{1,2K} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & S_{K,K} & \dots & S_{K,2K} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & S_{2K,2K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \\ y_1 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,2K+1} \\ \vdots \\ S_{2K,2K+1} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(123)$$

の解として与えられる。また、式(119)の残差分散は、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{2K+1,2K+1}^2}{2(N-2)} \quad \dots\dots(124)$$

で与えられる。また、式(120)で与えられる ABIC の第 4 項の行列式と対数変換の計算は Householder 変換の結果を用いて、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \ln[\det\{(\hat{A}, \hat{B})^t(\hat{A}, \hat{B}) + u^2D^tD + v^2D^tD\}] \\ = \sum_{k=1}^{2K} \ln S_{kk}^2 \quad \dots\dots(125) \end{aligned}$$

最後に、 u^2 および v^2 の決定について述べる。 u^2 および v^2 の決定は正確には式(120)の ABIC を最小にする非線形最適化によらなければならない。しかしながら、今の場合これは困難であり、また、 u^2 および v^2 の推定を目的にする限り、式(120)を厳密に最小にする必要はない¹⁶⁾。したがって、ここでも 4.3 と同様に、 u および v の与え方として、格子探索法を用いることとし、

$$u = ab^m \quad (m=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots(126)$$

$$v = cd^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots(127)$$

として、 a, b, c, d に適当な値を代入し、 m, n を変えることにより、種々の u および v の値を用いて上記の計算を実行した。

以上に述べた数値計算法により得られた結果の内、最小の ABIC を与える \hat{u}, \hat{v} を最適な \hat{u}, \hat{v} として決定した。

以上の数値計算法をまとめると、以下のようになる。

- 1) 適当な u, v および x, y の初期値 x_0, y_0 を与えて、式(114)より、与えられた u, v に対応する x, y の推定値 \hat{x}, \hat{y} を算出する。
- 2) 1) で得られた結果を用いて、式(120)より、与えられた u, v に対応する ABIC を算出する。
- 3) u, v の値を種々に変えて、1), 2) の計算を繰り返す。
- 4) 1)~3) の計算結果の内、最小の ABIC を与える $\hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}^2$ および \hat{x}, \hat{y} を最適な推定値とする。

5.3 数値シミュレーションによる検討

数値シミュレーション手法を利用して、5.1~5.2で述べた入・反射波共存場における反射率の推定および入射波と反射波の方向スペクトルの分離計算法の妥当性、適用性などの検討を行った。

数値シミュレーション法は 4.4(1) で述べた方法と同じ方法により実施した。なお、5.1~5.2で述べた方法の適用範囲は、式(72)で示されるように、入射波の来襲する範囲 $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ でのみ適用可能であるが、数値シミュレーションを実施するに際しては、あらかじめ $[0, \pi]$ の全範囲に微小のエネルギーを加えておき、入射波のエネルギーが厳密に 0 になる領域を無くすことにより、便宜的に適用範囲を $[0, \pi]$ として数値計算を実施した。実際の観測データに本方法を適用する場合、観測誤差やクロススペクトルの推定誤差などのため、入射波のエネルギーが厳密に 0 になる領域が存在することは、ほとんどないと思われるが、エネルギーが 0 の領域が存在する場合には、上記のようなくふうが必要である。

波浪観測条件としては、図-9に示す「星型配置+傾斜計」または図-10に示す「Haubrich 型配置」を用い、

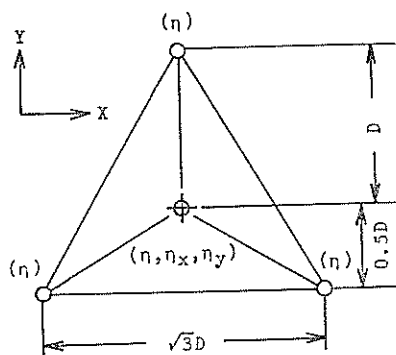


図-9 数値シミュレーションに用いたアレイ配置 (星型配置+傾斜計)

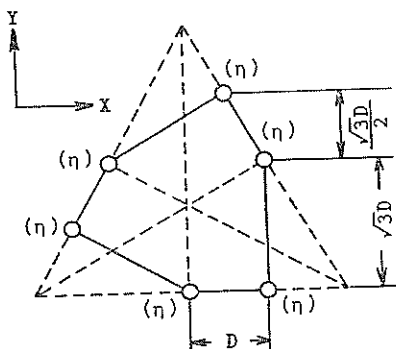


図-10 数値シミュレーションに用いたアレイ配置 (Haubrich 型配置)

波高計間距離 D と波長 L の比を $D/L=0.2$ とし、反射面から観測アレイまでの最短距離を波長の 0.2 倍の位置に設置した場合を対象として数値シミュレーションを実施した。ここで、「星型配置+傾斜計」または「Haubrich 型配置」を用いたのは、5.で述べた入・反射波の分離計算法は、反射率をも未知変数としているため、4.で述べた入・反射波の分離計算法に比べて 2 倍の未知要素を含んでおり、また、方向スペクトルの推定において 6 個の観測波動量から得られる情報量 (クロススペクトル) は、4 個の観測波動量から得られる情報量に比べて、約

2倍の情報量を持っているためである。実際、図-2に示す星型配置を対象として、5.1~5.2の推定法の試算を実施したが、この場合には、式(114)の繰り返し計算の収束解は得られなかった。

なお、ここでは、式(114)の繰り返し計算の初期値 $x_0=(x_1, \dots, x_K)$, $y_0=(y_1, \dots, y_K)$ として、便宜的に、MELMにより推定された方向スペクトル $S_{MELM}(\theta)$ および反射率 $r_{MELM}(\theta)$ の推定値を用いて、

$$x_k = \ln \{S_{MELM}(\theta_k)\} \dots\dots\dots(128)$$

$$y_k = \ln \left\{ \frac{r_{MELM}(\theta_k)}{1-r_{MELM}(\theta_k)} \right\} \dots\dots\dots(129)$$

($k=1, \dots, K$)

として与えることとした。

また、式(114)の繰り返し計算の収束基準としては、4.4と同様に、 n ステップ目の推定値 x_n, y_n と $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1}, y_{n-1} の差を $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1}, y_{n-1} で正規化した値の標準偏差 $\sigma_{x_n}, \sigma_{y_n}$ が

$$|\sigma_{x_n}| \leq 10^{-3} \dots\dots\dots(130)$$

かつ

$$|\sigma_{y_n}| \leq 10^{-3} \dots\dots\dots(131)$$

となった場合に収束したと見なして推定値 \hat{x}, \hat{y} を算出した。

超パラメータ u, v の設定に際しては、事前に種々の試算を実施し、式(126)の a, b, m として、

$$a=0.0125, b=0.5, m=1\sim 10 \dots\dots\dots(132)$$

を与えて格子探索法を実施した。また、式(127)の c, d, n としては、反射率を方向角 θ に対して一定とする場合には、

$$c=1000, d=0.5, n=1\sim 10 \dots\dots\dots(133)$$

とし、反射率を方向角 θ の関数として \sin 型 (式(135)) を与える場合には、

$$c=0.1, d=0.5, n=1\sim 10 \dots\dots\dots(134)$$

として格子探索法を実施した。

なお、ここでは、式(128)の方向スペクトルおよび式(129)の反射率の方向分割数として、 $K=45$ として数値計算を実施している。

図-11は真の反射率 r_{TRUE} を方向角 θ に対して一定とし、 $r_{TRUE}=0.7$ として、種々の波浪条件を用いて数値計算を実施した結果を示したものである。図-11(1)~(6)は「星型配置+傾斜計」を観測条件とした場合を、図-11(7), (8)は、それぞれ(5), (6)と同じ波浪条件のもとに「Haubrich型配置」を観測条件とした場合の結果を示している。図-11中の TRUE は真の方向スペクトルおよび反射率を、MELM は修正最ゆう法により推定された

方向スペクトルおよび反射率を、EMBMは5.1~5.2で述べたベイジ型モデルにより推定された方向スペクトルおよび反射率を示している。なお、図-11では、それぞれの推定法により推定された入・反射波の方向スペクトルの推定値を真の入射波の方向スペクトルのエネルギーピーク値で正規化して描いている。

図-11に見られるように、EMBM はいずれの場合にも極めて高い推定精度で入・反射波の方向スペクトルおよび反射率を推定している。特に反射率は、ほぼ完全に真の反射率と一致しており、図-11からはその差をほとんど識別できない。一方、MELMを見ると、「星型配置+傾斜計」を対象とした図-11(1)~(6)では、反射率は、両端 ($\theta=0^\circ$ および 180° 近傍) を除いてほぼ妥当な推定値を示しているものの、方向スペクトルの推定値は真値とのずれが大きく、特に方向スペクトルの形状が先鋭な形状の場合には、真値に比べてかなり小さな値を推定するようである。図-11(5), (6)と同じ波浪条件のもとに「Haubrich型配置」を用いた図-11(7), (8)では、MELMの方向スペクトルの推定精度は(5), (6)に比べて大差はないが、反射率の推定精度は(5), (6)に比べてかなり低下している。EMBMでは、図-11(5), (6)と(7), (8)との推定精度の相違はほとんど見られないことから、MELMはEMBMに比べて、計測器の配置の影響を強く受けるようである。

図-12(1)~(8)は、それぞれ、図-11(1)~(8)と同じ観測条件、同じ波浪条件を用いて、反射率 r_{TRUE} のみを方向角 θ の関数として、

$$r_{TRUE}(\theta)=0.1+0.8 \sin \theta \dots\dots\dots(135)$$

とした場合の数値シミュレーション例を示したものである。「星型配置+傾斜計」を用いた図-12(1)~(6)では、EMBMおよびMELMのいずれも高い推定精度で反射率を推定している。しかしながら、図-11で見られたのと同様に、MELMでは両端 ($\theta=0^\circ$ および 180° 近傍) で反射率の推定値と真値とのずれが大ききようである。また、EMBMの反射率も、その両端 ($\theta=0^\circ$ および 180° 近傍) で、反射率の推定値と真値との差が認められるものの、その差は極めて微小である。

一方、EMBMの方向スペクトルの推定結果を見ると、例えば、図-12(1)と図-7(2)は同じ波浪条件を用いているにもかかわらず、図-12(1)では図-7(2)で見られた端 ($\theta=0^\circ$ 近傍) での方向スペクトルの推定値と真値との明瞭な誤差は認められない。4.4ではこの誤差が生じる原因の一つとして、式(35)を導入した際の端条件に問題があると述べたが、図-12(1)に見られるように、観測波動量の増大により、この問題もある程度、回避し得るよう

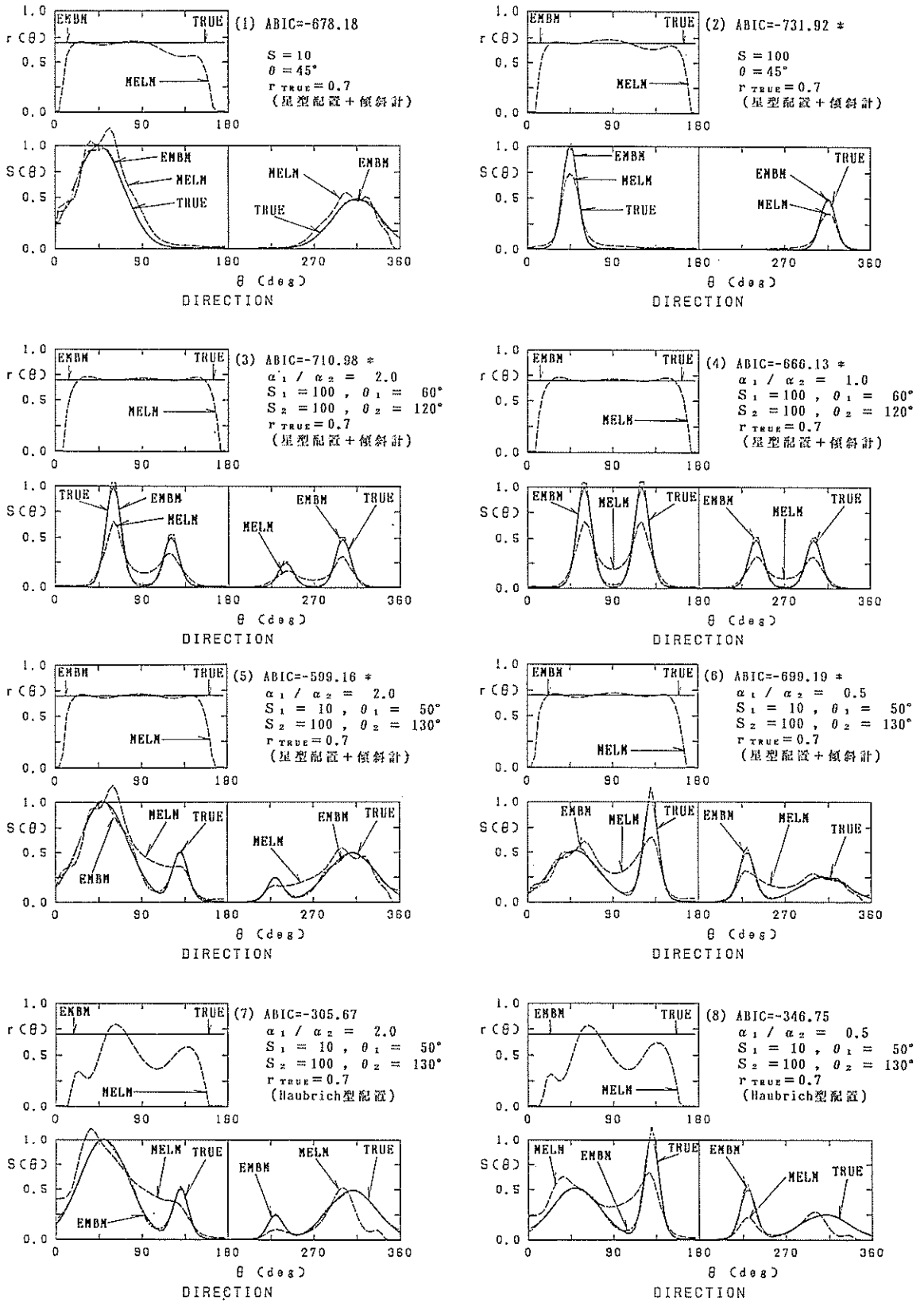


図-11 反射率を r_{TRUE} =一定とした場合の EMBM と MELM の推定精度の比較

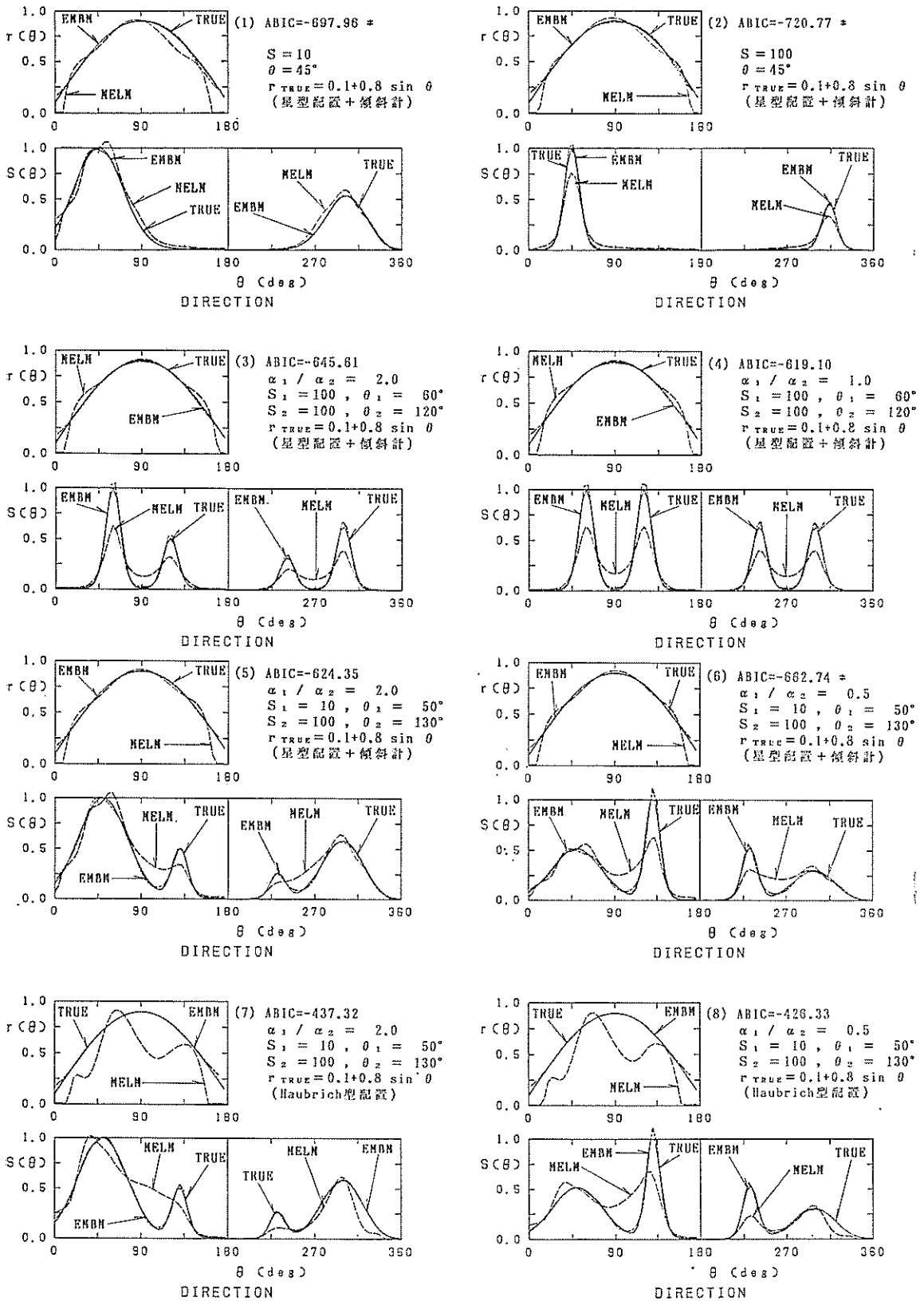


図-12 反射率を $r_{TRUE} = r(\theta)$ とした場合の EMBM と MELM の推定精度の比較

ある。すなわち、図-12では、「星型配置+傾斜計」を用いることにより、反射面に沿う方向から来襲するエネルギーを、図-7(2)に比べてよりの確に推定し得たために、端 ($\theta=0^\circ$ 近傍) での方向スペクトルの推定誤差が小さくなったものと思われる。

「Haubrich 型配置」を用いた図-12(7), (8)では、図-11(7), (8)と同様に、MELM は方向スペクトルおよび反射率のいずれも、EMBM にくらべて推定精度が劣っている。なお、図-11(7), (8)と図-12(7), (8)は反射率が異なっているにもかかわらず、MELM で推定される反射率は両者が極めて類似している点が興味深い。

図-11および図-12中に示された ABIC の値を見ると、いずれの場合にも極めて小さな ABIC 値を示しているが、例えば、図-11(5)と(7)を見ると、同じ波浪条件であるにもかかわらず、図-11(5)の方が(7)に比べて、より小さな ABIC 値を示している。これは、ここで用いた波浪条件をベイズ型モデルを用いた推定法で推定する場合に、「星型配置+傾斜計」の方が「Haubrich 配置」に比べて、より優れていることを示しているものと思われる。なお、図-11および図-12中の ABIC 値に*が付してあるものは、ここに示した推定例以外にも、より推定精度の良い推定値が存在する可能性があることを示したものである。すなわち、式(132)~式(134)の条件で超パラメータ u, v を種々に変えて 5.2 で述べた格子探索法を実施したが、計算の途中で ABIC 値がある基準値よりも小さくなった場合には、この場合でもかなり推定精度の良い推定値を与えるものとして、計算を打ち切り、*を付したものである。

6. あとがき

以上、入・反射波共存場を対象としたベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定法について述べた。

4.では、反射率を既知として想定し、モデルを規定するパラメータと見なした場合の入・反射波の方向スペクトルの分離計算法(MBM)を示し、また、想定されたいくつかの反射率の内、より妥当な反射率を ABIC 最小化法により選択し得ることを示した。

5.では、MBM よりもさらに便利な方法として、反射率および方向スペクトルの両方を未知変数として定式化し、入・反射波の方向スペクトルの分離計算と同時に、反射率をも推定し得る方法(EMBM)について示し、その妥当性についても検討した。

MBMは4個以上の観測波動量が与えられている場合に適用可能であり、また、与えられた反射率が真値に近い場合には優れた推定精度で入・反射波の方向スペクト

ルの分離計算が可能である。しかしながら、かなり大きな波のエネルギーが反射面に沿う方向から来襲し、かつ、反射面に沿う方向の近傍で方向角 θ に対するエネルギーの変化率が大きい場合には、端(反射面に沿う方向)で方向スペクトルの推定値と真値との誤差が大きくなるなどの問題点も明らかとなった。

一方、EMBM は大規模な入・反射波の観測を実施する場合(例えば6個以上の観測波動量が計測される場合)に適用可能であり、この場合には入・反射波の方向スペクトルのみならず反射率 r をも周波数 f および方向角 θ の関数としてかなり高い推定精度で推定可能である。

なお、ここでは特に示さなかったが、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法は、もともと、その高い推定精度のみならず、観測波動量の観測誤差やクロススペクトルの推定誤差の影響を受けにくく、安定した方向スペクトルの推定値を推定し得る方法として提案したものである。ここで示した MBM および EMBM のいずれの方法もこれと同様の性質を持っており、この点においても、従来の推定法にはない大きな利点を持っている。

前報⁷⁾でも述べたように、方向スペクトルの推定理論は、数少ない有限の情報から、無限に複雑な海洋波浪の特性を推定する方法であると言える。この意味では、ここで述べた方法も、あくまで便宜的な推定法であるにすぎない。しかしながら、我々の物理現象に対する認識、期待は、一見、極めて複雑に見える物理現象も、実際には単純な法則により支配されていると考えることであり、この認識のもとにさまざまな物理現象に対する調査・研究が実施されている。ベイズ型モデルを用いた推定法は、この立場に立った物理的推定法であり、対象としている物理現象の先験的知識をその推定理論に繰り込み、かつ客観的立場に立って推定する推定法であると言える。この意味では、今後の海洋波浪の研究の進展に伴う先験的知識の深化により、ここで示した方法も、より正しい推定法として今後さらに発展し続けて行くものと期待される。

(1987年9月30日受付)

謝 辞

本研究をとりまとめるにあたっては、港湾技術研究所合田良実所長、浅田忠則水工部長、後藤智明水工部主任研究官、および、九州大学応用力学研究所光島恒教授には、種々適切な助言、御指導を頂いた。ここに記して深甚の謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Barber, N. F.: The directional resolving power of an array of wave detectors, Ocean wave Spectra, Prentice Hall, Inc., 1961, pp. 137-150.
- 2) Panicker, N. N. and Borgman, L. E.: Enhancement of directional wave spectrum estimate, Proc. 14th Coastal Engg. Conf., Copenhagen, 1974, pp. 258-279.
- 3) 山口正隆: 方向スペクトル観測装置の分解能について(1)—3成分流速計による方法—, 愛媛大学紀要, 第三部(工学), 第9巻, 第3号, 1978年, pp. 225~234.
- 4) Capon, J.: High-resolution frequency-wave-number spectrum analysis, Proc. IEEE, vol. 57, 1969, pp. 1408~1418.
- 5) 磯部雅彦, 近藤浩右, 堀川清司: 方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張, 第31回海岸工学講演会論文集, 1984年, pp. 173~177.
- 6) 橋本典明, 小舟浩治: 最大エントロピー原理(MEP)を用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 第24巻, 第3号, 1985年, pp. 123~145.
- 7) 橋本典明: ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 第26巻, 第2号, 1987年, pp. 97~125.
- 8) 上床隆彦, 湯村やす: 砕波帯の波の研究(3)—佐賀ノ関海岸の例—, 第23回海岸工学講演会論文集, 1976年, pp. 308~312.
- 9) 合田良実: 波高計群による方向スペクトルを用いた反射波推定法の検討, 港湾技術研究所報告, 第19巻, 第3号, 1980年, pp. 37~70.
- 10) 磯部雅彦, 近藤浩右: 入・反射波の共存場における方向スペクトルの推定法, 第30回海岸工学講演会論文集, 1983年, pp. 44~48.
- 11) Akaike, H.: Likelihood and Bayes procedure, Bayesian Statistics (Bernardo, J. M., De Groot, M. H., Lindley, D. U. and Smith, A. F. M. eds.) University Press, Valencia, 1980, pp. 143~166.
- 12) 林知己夫, 鈴木達三, 赤池弘次: 統計学特論, 放送大学教材, 日本放送出版協会, 1986年, 236p.
- 13) 繁舛算男: ベイズ統計入門, 東京大学出版会, 1985年, 225p.
- 14) 石黒真木夫, 荒畑恵美子: ベイズ型スプライン回帰, 統計数理研究所彙報, 第30巻, 第1号, 1982年, pp. 29~36.
- 15) Ishiguro, M.: On the Use of Multiparameter Models in Statistical Measurement Technique, Doctoral Dissertations, Tokyo University, 1984.
- 16) 坂元慶行: カテゴリカルデータのモデル分析, 共立出版株式会社, 1985年, 221p.
- 17) 坂元慶行, 石黒真木夫, 北川原四郎: 情報量統計学, 共立出版株式会社, 1983年, 236p.

主要記号一覧表

a : 格子探索法のきざみ幅
 ABIC : 赤池のベイズ型情報量規準

A : 説明変数の行列
 \tilde{A} : 説明変数の行列の修正値
 \hat{A} : 説明変数の行列の収束値
 b : 格子探索法のきざみ幅
 B : 説明変数または目的変数のベクトル
 \tilde{B} : 説明変数または目的変数のベクトルの修正値
 \hat{B} : 説明変数または目的変数のベクトルの収束値
 c : 格子探索法のきざみ幅
 C : 説明変数または目的変数のベクトル
 \tilde{C} : 説明変数または目的変数のベクトルの修正値
 \hat{C} : 説明変数または目的変数のベクトルの収束値
 d : 格子探索法のきざみ幅または水深
 D : 波高計間の最小距離
 D : 何らかの作用行列
 $E(x)$: 未知ベクトルから x 構成される行列
 $E_i(x, y)$: 未知ベクトル x, y から構成される行列
 $E_j(x, y)$: 未知ベクトル x, y から構成される行列
 f : 周波数
 $F(x)$: 未知ベクトル x から構成されるベクトル
 $F(x, y)$: 未知ベクトル x, y から構成されるベクトル
 g : 重力加速度
 $h_m(k, \sigma)$: 水面変動から m 番目の波動量への伝達関数
 $H_i(f, \theta)$: 伝達関数
 $H_m(k, \sigma)$: 水面変動から m 番目の波動量への伝達関数
 i, j : 序数
 i : 虚数単位
 $I_k(\theta)$: 一種のデルタ関数
 k, l : 序数
 k : 波数
 k : 波数ベクトル
 K : 方向分割数
 L : 波長
 $L(\cdot)$: 尤度関数
 m, n : 序数
 M : 観測波動量の数
 N : 方程式の数
 $p(\cdot)$: 括弧内の変数の確率密度関数
 $p(\cdot | \cdot)$: 条件付確率密度関数
 $p(\cdot, \cdot)$: 同時確率密度関数
 r : 反射率

ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定

r_{TRUE}	: 真の反射率	\tilde{y}	: 未知ベクトルの推定値
\hat{r}_{MELM}	: MELM で推定された反射率	\hat{y}	: 未知ベクトルの収束値
\hat{r}_{MBM}	: MBM の推定に用いた反射率	Z	: Householder 変換を実施するために構成された行列またはクロススペクトルから構成されるベクトル
\hat{r}_{EMBM}	: EMBM で推定された反射率		
S	: 方向分布関数の集中度パラメータ	α	: 係数
$S(k, \sigma)$: 波数・周波数スペクトル	β	: 係数
$S(f, \theta)$: 方向スペクトル	γ	: 係数
\hat{S}_{MELM}	: MELM で推定された方向スペクトル	ϵ	: 誤差
\hat{S}_{MBM}	: MBM で推定された方向スペクトル	η	: 水面変動
\hat{S}_{EMBM}	: EMBM で推定された方向スペクトル	η_x	: 水面の x 方向の傾斜
S_{ij}	: Householder 変換後の行列の (i, j) 成分	η_y	: 水面の y 方向の傾斜
u	: 超パラメータ	θ	: 波の来襲する方向または統計モデルの母数
U	: 鏡映変換の作用行列	κ	: 比例定数
v	: 超パラメータ	σ	: 角周波数または標準偏差
$w(k, k')$: ウィンドウ	σ^2	: 分散
x	: 水平座標の一つまたは説明変数のベクトル	$\hat{\sigma}^2$: 分散の推定値
x_m	: m 番目の波動量を計測している位置ベクトル ($x_m = (x_m, y_m)$)	$\Phi_i(f)$: m 番目の波動量と n 番目の波動量のクロススペクトル
x_i	: 説明変数の一つ	$\Phi_{mn}(f)$: m 番目の波動量と n 番目の波動量のクロススペクトル
$x_k(f)$: K 分割された方向分布関数の対数変換値	$\Phi(f)$: クロススペクトル $\Phi_{mn}(f)$ から構成される行列
\tilde{x}	: 未知ベクトルの推定値	$*$: 共役複素数
\hat{x}	: 未知ベクトルの収束値		
y_i	: 説明変数の一つ		
y	: 説明変数のベクトル		
$y_k(f)$: K 分割された反射率の変数変換値		