

運輸省港湾技術研究所

港湾技術研究所 報告

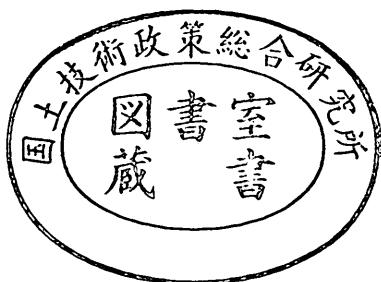
REPORT OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH
INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT

VOL. 23

NO. 3

SEPT. 1984

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I)

第23卷 第3号 (Vol. 23, No. 3) 1984年9月 (Sept. 1984)

目 次 (CONTENTS)

1. Multiple Longshore Bars Formed by Long Period Standing Waves Kazumasa KATOH 3
(反射定常波による多段沿岸砂州の形成 加藤一正)
2. 防波堤直立部に働く不規則波力に関する実験的研究 谷本勝利・高橋重雄・明瀬一行 47
(Experimental Study of Random Wave Forces on Upright Sections of Breakwaters Katsutoshi TANIMOTO, Shigeo TAKAHASHI and Kazuyuki MYOSE)
3. 共振振動三軸試験装置の開発と混合土の動的変形特性 善功企・梅原靖文・大根田秀明・樋口嘉章 101
(Development of Resonant-cyclic Triaxial Testing Apparatus and Dynamic Deformation Characteristics of Mixtures Kouki ZEN, Yasufumi UMEHARA, Hideaki OHNEDA and Yoshiaki HIGUCHI)
4. 波の繰り返し載荷を受ける粘性土地盤の安定性に関する実験的研究 大根田秀明・梅原靖文・樋口嘉章・入澤一明 127
(Experimental Studies on Model Clay Ground Subjected to Cyclic Wave Loading Hideaki OHNEDA, Yasufumi UMEHARA, Yoshiaki HIGUCHI and Kazuaki IRISAWA)
5. 水中の剛構造物の地震時滑動と動水圧の実験的研究 上部達生・檜垣典弘 153
(An Experimental Study on Sliding Block in Water during Earthquake Tatsuo UWABE and Norihiro HIGAKI)
6. 座標式工程表による工程計画手法の開発 奥山育英・佐藤恒夫 187
(Time Space Scheduling Model Yasuhide OKUYAMA and Tsuneo SATO)

7. 港湾経済効果の計測手法（第3報）——利用効果の帰属——

.....稻村 肇..... 235

(Measuring the Economic Benefits of Port Development

.....Hajime INAMURA)

8. 港湾工事の産業連関分析

.....稻村 肇・米澤 朗・高橋 淳弘..... 251

(The Economical Impact Analysis of Port Construction Works by Input-Output

Analysis.....Hajime INAMURA, Akira YONEZAWA and Atsuhiro TAKAHASHI)

3. 共振振動三軸試験装置の開発と混合土の動的変形特性

善 功企*・梅原靖文**
大根田秀明***・樋口嘉章****

要 旨

広範囲のせん断ひずみ振幅 ($10^{-6} \sim 10^{-2}$) に対する粘性土の動的変形定数を測定するために、従来から用いられている共振円柱試験装置と振動三軸試験装置を組み合わせた共振振動三軸試験装置を開発し、その適用性およびそれを用いた実験手法について調べた。次に、人工的に作成した6種類の混合土(塑性指数0～45.8)の動的変形定数に関する室内実験を行い、動的変形定数に影響を及ぼすいくつかの要因について調べた。本研究の結果得られた主要な結論は以下のとおりである。

(1) 広範なせん断ひずみ振幅に対する土の剛性率を測定するために開発した共振振動三軸試験装置の有用性が確認された。

(2) 試験手法として、供試体に大きさの異なるせん断ひずみ振幅を段階的に加える段階載荷試験を用いることができる。

(3) 段階載荷試験では、せん断ひずみ振幅が $(2 \sim 5) \times 10^{-3}$ 以下、もしくは、間隙水圧比が0.15以下の場合には、繰り返し波数の影響を無視してよい。

(4) 微小ひずみを受ける粘性土の剛性率を求める Hardin-Black の経験式は、混合土に適用できず、塑性指数による補正が必要である。

(5) 間隙比が未知の場合を想定し、塑性指数および平均有効主応力とせん断ひずみ振幅 10^{-6} における剛性率 G_0 との関係を調べた結果、一定平均有効主応力下では、塑性指数と剛性率の間にある関係が存在することが明らかとなった。

(6) せん断ひずみ振幅 10^{-6} における剛性率に及ぼす圧密時間の影響は、塑性指数に比例して大きくなる。

(7) 平均有効主応力が $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線に及ぼす影響は、塑性指数が9.4以上の場合には、ほとんどみられない。

(8) せん断ひずみ振幅が 10^{-4} 以上の場合、 $h \sim \gamma$ 曲線は平均有効主応力の影響を受けないと考えてよい。

(9) 同一せん断ひずみ振幅における減衰比は、塑性指数が45.8以下では、塑性指数が大きくなるほど小さくなる。

(10) せん断ひずみ振幅が 10^{-2} における減衰比 h_0 で、任意のせん断ひずみ振幅に対する減衰比 h を除した値のひずみ依存性を表す $h/h_0 \sim \gamma$ 曲線は、塑性指数が異なってもある狭い範囲内におさまる傾向にある。

* 土質部 効土質研究室長

** 土質部 部長

*** 土質部 主任研究官

**** 前土質部 効土質研究室(第2港湾建設局 企画課)

3. Development of Resonant-cyclic Triaxial Testing Apparatus and Dynamic Deformation Characteristics of Mixtures

Kouki ZEN*

Yasufumi UMEHARA**

Hideaki OHNEDA***

Yoshiaki HIGUCHI****

Synopsis

A resonant-cyclic testing apparatus is developed to measure the dynamic deformation constants of cohesive soils for the wide range of shear strain amplitude of 10^{-6} to 10^{-2} . This apparatus is made up of the existing cyclic triaxial testing and Hardin-type resonant-column testing devices.

The applicability of the new apparatus and the testing technique are studied experimentally with Honmoku clay and Kawasaki clay.

The dynamic deformation characteristics of 6 types of mixtures with the plasticity index of 0 to 45.8, artificially prepared by mixing grinded Toyoura sands with Honmoku clay, are also tested in the laboratory.

The main findings of this study are as follows;

(1) The validity of the newly developed resonant-cyclic triaxial testing apparatus is confirmed in the wide range of shear strain amplitude.

(2) The stage-test which apply various amplitudes of shear strain to the specimen can be adopted as an useful testing technique.

(3) The effect of the number of cyclic waves on shear modulus may be negligible in case of the shear strain amplitude being less than $(2 \text{ to } 5) \times 10^{-3}$ or the pore water pressure ratio being less than 0.15.

(4) The empirical equation proposed by Hardin-Black to estimate the shear modulus for low shear strain amplitude is not applicable to mixtures but needs some modification with the plasticity index.

(5) A correlation between the shear modulus G_0 at shear strain amplitude of 10^{-6} and the plasticity index is found under constant mean effective principal stresses.

(6) The time effect on the shear modulus G_0 increases as the plasticity index becomes larger.

(7) The effect of the mean effective principal stress on the $G/G_0-\gamma$ curves is very small when the plasticity index is more than 9.4.

(8) The effect of the mean effective principal stress on the $h-\gamma$ curves is not observed in case of the shear strain amplitude being more than 10^{-4} .

(9) The damping ratio h at identical shear strain amplitude decreases as the plasticity index becomes larger.

(10) The $h/h_0-\gamma$ curves of different types of mixtures are drawn within a narrow range, irrespective of the difference of the plasticity index.

* Chief of Soil Dynamics Laboratory, Soils Division.

** Director of Soils Division.

*** Senior Research Engineer, Soils Division.

**** Ex-member of Soil Dynamics Laboratory, Soils Division.

目 次

要 旨	101
1. まえがき	105
2. 共振振動三軸試験装置の開発	105
2.1 開発の背景	105
2.2 共振振動三軸試験装置の原理	105
2.3 共振振動三軸試験装置	108
2.4 試験方法	110
3. 共振振動三軸試験装置の粘性土への適用性	112
4. 混合土の動的変形特性	115
4.1 土の動的変形特性に及ぼす影響要因	115
4.2 試 料	115
4.3 試験方法	116
4.4 実験結果および考察	116
5. 結 論	125
参 考 文 献	125
付 錄	126

1. まえがき

地震時における地盤の応答解析などでは、動的な載荷を受ける土の変形特性に関する入力が必要である。土の動的変形特性は、土が受けるひずみ振幅に大きく依存することが知られており¹⁾、従来、動的試験においては、ひずみ振幅の大きさに対応した複数の試験装置が用いられてきた²⁾。しかしながら、このような試験方法では、おのおのの試験に対して、供試体が別個に必要であり、特に原地盤から採取された乱さない試料を用いる場合には、経済的、労力的、時間的にも必ずしも好ましいとはいえない。このような難点を解決するために、1個の供試体を用いて、広範囲($10^{-6} \sim 10^{-2}$)のせん断ひずみ振幅に対する土の動的変形特性を測定する共振振動三軸試験装置を開発した。

共振振動三軸試験装置は、従来の共振円柱試験装置と振動三軸試験装置を組み合わせたものであるが、両方法による土の動的変形定数の測定原理は異なっており、前者は供試体にねじり振動を、後者は軸ひずみを繰り返し載荷する装置である。このような測定原理の異なる個々の装置を一体化した本装置が、粘性土の動的変形特性を求める試験に適用可能であるかを調べるために、本牧粘土および川崎粘土を用いて実験を行い、本装置による実験手法および本装置の適用限界などについて検討を加えている。次に、室内において人工的に作成した塑性の異なる6種類の混合土(塑性指数0～45.8)を用いて、剛性率および減衰比を測定している。供試体は、混合土をあらかじめ 0.5kgf/cm^2 で予圧密したブロックサンプルから、直径50mm、高さ125mmに切り出したものを用いているので、乱さない試料の場合に比べ、サンプリング時の試料の乱れの可能性が全くない。このような試料を用いて測定された剛性率および減衰比について、それらに影響を及ぼす間隙比、平均有効主応力、塑性指数、圧密時間などいくつかの要因との相関性について報告する。

2. 共振振動三軸試験装置の開発

2.1 開発の背景

室内試験により土の要素から動的変形特性を求める場合には、対象とするせん断ひずみ振幅が 10^{-4} 程度以下の比較的小な領域においては共振試験による方法、せん断ひずみ振幅が 10^{-4} 程度以上の比較的大な領域においては動的三軸試験や単純せん断試験およびねじり単純せん断試験などによる方法が用いられている。せん断ひずみ振幅の大きさを広範囲に変えて、粘性土の動的変形特性を測定しようとする場合、上述のように、せん断

ひずみ振幅に対応した試験方法によると、おのおのの方法に対して供試体がそれぞれ別個に必要であり、供試体の本数が、少なくとも倍以上必要となる。このことは試料採取、供試体作成、圧密時間などの観点から、特に、原地盤から採取された乱さない試料を用いる場合には、経済的、労力的、時間的に必ずしも好ましいとはいえない。したがって、両方法による試験が1本の供試体に関して連続的に実施可能であれば、対象とするせん断ひずみ振幅によって装置を変更する必要がなくなり、より効率的な実験を行うことができる。また、実際の地震時ににおける地盤中の土の要素は、小さなひずみから大きなひずみまでを連続的に受けることになるので、全応力にもとづく解析法などでは、このような状態に少しでも近い形での実験が望ましいものと思われる。

このような背景から、広範なひずみレベルに対応可能な試験装置を開発することは、充分意義のあることであると考えられ、筆者³⁾らや国生⁴⁾らによって、広範なひずみレベルに対応できる試験装置の開発が行われている。筆者らの装置は、共振法の機能と振動三軸法の機能を一つの装置に組み込んだものであり、国生らの装置は、振動三軸法における計測精度を向上させ、広範なひずみ振幅に対応できるようにした装置である点に相違がみられる。筆者らの方法は、原理的に全く異なった2つの方法を組み合わせているので、この装置の適用にあたっては、測定原理の違いが試験結果に及ぼす影響について調べておく必要があり、以下にその詳細について述べるとともに、新たに開発された共振振動三軸試験装置およびその適用性について報告する。

2.2 共振振動三軸試験装置の原理

新たに開発された共振振動三軸試験装置は、従来の共振円柱試験装置と、振動三軸試験装置を組み合わせた装置であり、個々の機能はそのまま維持しながら1本の試験体について広範なひずみを載荷しうるようにしたものである。以下に、共振円柱試験装置および振動三軸試験装置による動的変形特性の測定原理について述べる。

(1) 共振試験法の原理

共振試験法は、一端固定他端自由な丸棒のねじり振動と同じ状態を考え、力の釣り合い式、運動方程式、両端における境界条件式を利用して、供試体の剛性率を求める方法である。

いま、下端固定、上端自由な供試体を考え、供試体の下端から x だけ離れた位置のトルクを $T(x,t)$ 、回転角を $\theta(x,t)$ とすると、力の釣り合い式は、次式で与えられる。

$$T(x,t) = GI_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} + \mu I_p \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t \partial x} \quad (1)$$

ここに, G ; 供試体の剛性率

I_P ; 供試体の断面の極慣性モーメント

x ; 下端から供試体の軸上方への距離

μ ; 供試体の粘性係数

また, ねじり振動をしている供試体の運動方程式は, 供試体を速度非依存性の減衰をもつ Voigt モデルで表し, 密度を ρ とすると,

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial t \partial x^2} + \left(\frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \quad (2)$$

で表される。

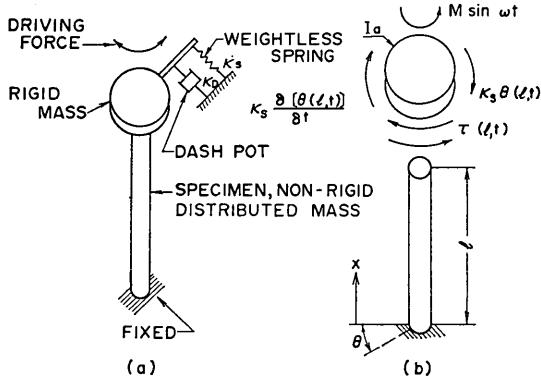


図-1 供試体一装置系のモデル化 (Hardin, 1965)

Hardin-Music⁵⁾は, 加振部の振動特性を図-1(a)に示すばね係数 K_s , 粘性減衰係数 K_D , 供試体上部剛性マスの慣性モーメントを I_a により表し, これに 図-1(b)に示すトルク $M \sin \omega t$ が作用するときの供試体上端における境界条件を次式で与えている。

$$x=0; \quad \theta(0, t)=0 \quad (3)$$

$$x=l; \quad T(l, t)=-I_a \frac{\partial^2 \theta(l, t)}{\partial t^2}-K_D \frac{\partial \theta(l, t)}{\partial t} \\ -K_s \theta(l, t)+M \sin \omega t \quad (4)$$

式(1)~(4)から, 定常振動に対する一般解を,

$$\theta(x, t)=u(x) \cos \omega t+v(x) \sin \omega t \quad (5)$$

において, 供試体上端における回転角を求めるとき,

$$\theta(l, t)=u(l) \cos \omega t+v(l) \sin \omega t \\ =\theta_a \sin(\omega t-\delta) \quad (6)$$

となる。

θ_a は, 供試体上端における回転角の応答振幅, δ は応答振幅の位相差で次式により与えられる。

$$\theta_a=[\{u(l)\}^2+\{v(l)\}^2]^{1/2} \quad (7)$$

$$\tan \delta=\frac{u(l)}{v(l)} \quad (8)$$

ここに, $u(l), v(l)$ は付録に示す式で与えられる。

また, 静的なトルク M が供試体上端に作用したときの回転角 θ_s は,

$$\theta_s=\left(\frac{Ml}{GI_P}\right) \quad (9)$$

である。

ここで, 供試体上端における回転角の増幅率 R を求めると, 式(7), 式(9)より, Q をある関数として

$$R=\frac{\theta_a}{\theta_s}=Q(G, \mu, K_s, K_D, l, \rho, I_P, I_a, \omega) \quad (10)$$

で表される。 R は, 動的および静的にトルク M が作用したときの供試体上端の回転角の比である。

次に, 供試体を減衰のない弾性体としたときの固有円振動数 ω_0 を用いて, 円振動数を ω を無次元パラメータ $-F$ で表すと,

$$F=\omega / \omega_0=\frac{2}{\pi} \frac{l}{V_s} \omega=\frac{2}{\pi} \frac{l}{\sqrt{G / \rho}} \omega \quad (11)$$

となる。ここに, V_s はせん断波の伝播速度である。

式(11)の F を用いると式(10)は,

$$R=Q(G, \mu, K_s, K_D, l, \rho, I_P, I_a, F) \quad (12)$$

となり, 式(12)より, R と F の関係を描くと, たとえば

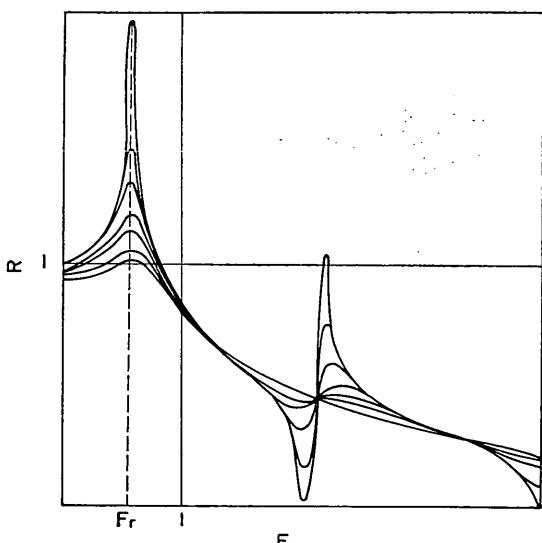


図-2 無次元パラメータ R と F の関係例

図-2のような応答曲線が得られるが、減衰が小さい場合には、 R が最大となるときの F の値、すなわち、共振時の F の値 F_r は振動系の減衰特性によらず、ほぼ一定の値とみなしてよい。ただし、式(11)をみると、 F は G の関数となっており、供試体の剛性率により F_r は異なる値をとる。したがって、測定結果から G を算定するためには、以下の手順による繰り返し計算が必要である。

まず、任意の $G=G_1$ 、 $\mu=\mu_1$ を仮定して、既に実測されている $K_s, K_D, l, \rho, I_p, I_a$ とともに式(12)に代入し、 R が最大となるときの F すなわち F_r を求める。次に、求まった F_r 、既知の l, ρ および測定された一次の共振振動数 f_r から $\omega=2\pi f_r$ により求められる ν などを式(11)に代入して G を計算する。このときの G を G_2 とすると、 $G_1=G_2$ となるような G_1 の値が供試体の正しい剛性率を与えることになる。上述の計算では、 μ を任意の値 μ_1 に仮定したが、共振試験により剛性率を求める場合には、粘性係数が剛性率に与える影響はほとんど無視できることが明らかにされており⁵⁾、剛性率を求める繰り返し計算では、一律に $\mu\omega/G=0.025$ が用いられている。

なお、供試体のせん断ひずみ振幅 γ は、

$$\gamma_{av} = \frac{2}{3}\gamma_d \quad (13)$$

により求められる。ここに、 γ_{av} は平均ひずみ、 γ_d は供試体周辺のひずみである。

つぎに、減衰比の測定法について述べる⁶⁾。共振状態にある供試体に対し、強制加振力を瞬間に停止させ、自由振動の記録より減衰比 h が決定される。すなわち、減衰記録より、装置及び供試体を含めたシステムの対数減衰率 δ_s 、装置の対数減衰率 δ_A が式(14)で与えられる。

$$\delta_s = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right), \quad \delta_A = \ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \quad (14)$$

ただし、 $a_n, a_{n+1}, b_n, b_{n+1}$ ：自由振動記録の $n, n+1$ 番めの振幅である。

供試体自体の対数減衰率 D 及び δ_s, δ_A の間には式(15)の関係がある。

$$D = \delta_s(1+S) - \delta_A S \quad (15)$$

ただし、 S はシステムエネルギー比とよばれ次式で与えられる。

$$S = \frac{32K_s l}{\pi C_m G d^4} \quad (16)$$

ここに、 d ：供試体の直径、 C_m ：モードファクターで、算定図が与えられている。

対数減衰率 D より減衰比 h は式(17)で与えられる。

$$h = \frac{D}{2\pi} \quad (17)$$

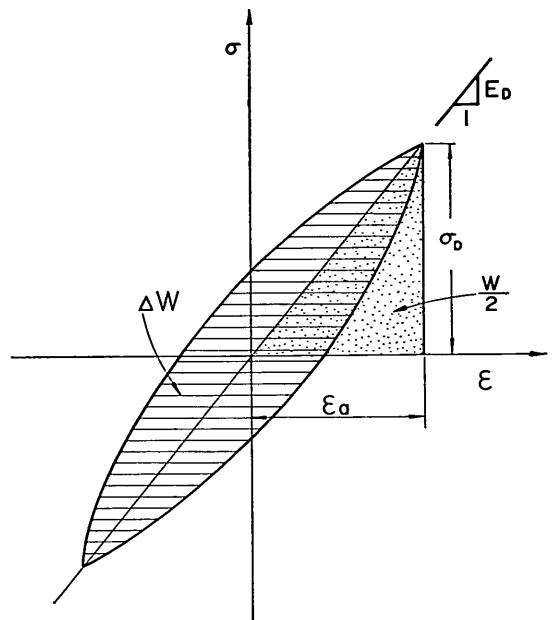


図-3 等価線形モデルにおける変形定数

(2) 振動三軸試験法の原理

振動三軸試験法により、土の剛性率や減衰比を求める方法は、土の等価線形モデルを基本にしている。すなわち、図-3に示すように、あるひずみレベルにおける土の応力へひずみ履歴曲線をもとに、ひずみと応力のピークを結ぶ直線からヤング率を求め、履歴曲線のエネルギーの蓄積および消費から減衰比を求めるものである。この方法では、供試体に加わる動的な外力方向は、供試体の軸方向であることから、直接、供試体の剛性率を測定することは不可能であるが、供試体を等価線形体として、ポアソン比 ν を与えることにより、次式により剛性率、せん断ひずみ振幅 γ を求めている。

$$E_D = \sigma_D / \varepsilon_a \quad (18)$$

$$G = E_D / 2(1+\nu) \quad (19)$$

$$\gamma = \varepsilon_a(1+\nu) \quad (20)$$

ここに、 E_D はヤング率、 σ_D は軸応力振幅、 ε_a は軸ひずみ振幅である。

また、減衰特性については、図-3に示すように減衰比 h を次式で表しているが、このなかには粘性による減衰と履歴による減衰の両者が含まれているものと考えられる。

$$h = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (21)$$

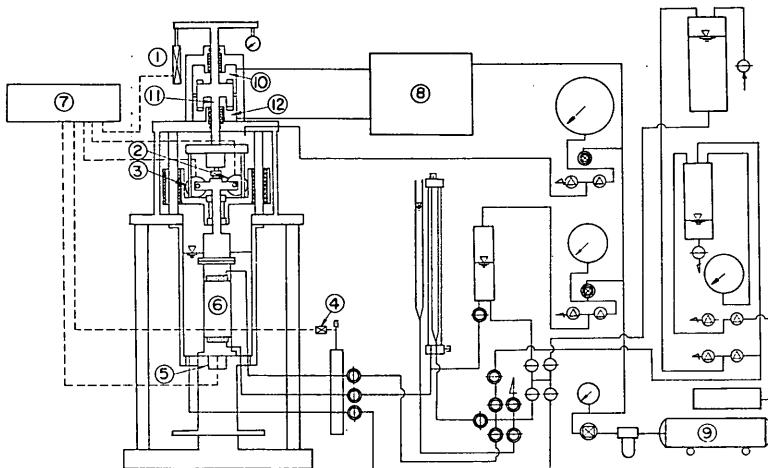


図-4 共振振動三軸試験装置全体図

式(18)～式(21)において、軸ひずみ振幅 ε_a および軸応力 σ_a は測定により求められるが、土のポアソン比を三軸セル内で精度よく測定するのは、かなり困難をともなうので、ある適当な値を仮定している。石原¹⁾は、飽和土の非排水変形時におけるポアソン比を近似的に、

$$\nu = \frac{1}{2}(1 - G n C_l) \quad (22)$$

で与えている。ここに n ；間隙率（式(22)では 100 で除した値を用いる）、 C_l ；水の圧縮率である。式(22)によれば、 ν は、 G 、 n が大きくなるほど小さくなるが、一般的の粘性土では、 G は 10^3 kgf/cm^2 のオーダー以下であり、また港湾地域の飽和性土の n はだいたい $0.3 \sim 0.9$ であることから、 $C_l = 48 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kgf}$ として ν を求めてみると、 ν は 0.5 に非常に近い値となる。

2.3 共振振動三軸試験装置

本装置は、図-4に示すように、供試体をセットする三軸セル部、ねじり振動および軸力を載荷するための振動・軸力載荷部、三軸セル内および供試体に水、空気を供給、制御するための水・空圧制御部、振動入出力の制御・計測・記録部から構成される。

(1) 三軸セル部

供試体⑥をセットするための下部ペデスタルは直径 50mm で、その下部に圧力変換器が設置されており、供試体底部において軸荷重を測定する。間隙水圧の測定は、下部ペデスタルのボラーストーンを通して間隙水圧計④で行い、排水およびバックプレッシャーの負荷は、上部ペデスタルを通して行われる。

(2) ねじり振動・軸力載荷部

図-4の②、③に示される 2 個の振動子が、180°の角度で取り付けられており、そのうち 1 個は、ねじり振動を加える発振子である。発振子の特性は、加振力 1.0 kgfG 、最大両振幅 5 mm 、最大加速度 30 G 、可動部の重量 30 g である。変位、速度または加速度を求めるための受振子は、最大両振幅 2 mm 、感度 200 mV/kine である。図-5 は、ねじり振動を加える加振部をより詳細に示したもので、振動子①または②により加えられたねじり振動は、加振アーム④、加振軸⑤を通して供試体に伝達される。加振軸⑥はボールベアリングを用いて上部ピストン軸⑨と切り離されている。加振アームには、板ばね③が取り付けられており、また振動子が取り付けられている剛な底板⑦は、軸荷重、もしくは軸変位を載荷する場合に上下方向の移動が必要であるが、ねじり振動を加える場合にはねじり方向の変位が発生しないようにしなければならないので⑧のペアリングを取り付けることにより、この問題を解決している。加振部全体は耐圧セル⑥の内部に収納されており、三軸セル内と同じ空気圧が加わる。

振動三軸試験による方法では、供試体軸方向の載荷を行なうが、図-4の⑧で示された空圧式の動的圧力発生装置から供給される正弦波形の空気圧を、ペロフラムシリンダーの上部シリンダー⑩に送り、ピストン軸⑪を変位させることによって軸力を加える。ピストン軸の変位は、図-5のピストン軸⑨を通して剛棒⑪に伝達され、さらに加振軸⑥を通して供試体上部に加えられる。この場合、上述のように底版⑦は上下方向に移動する。変位は図-4 の変位形①により計測される。図-4の下部シリンダー⑫

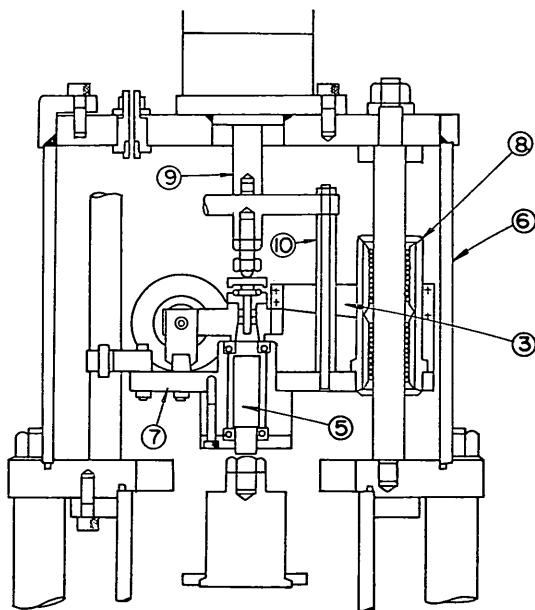
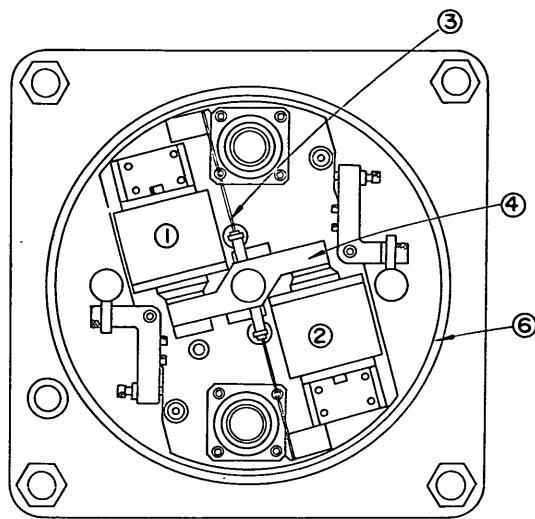


図-5 共振振動三軸試験装置加振部詳細図

は、載荷部の自重を平衡に保つための空気圧が供給される。

以上のように、共振試験法と振動三軸試験法のための載荷方式は全く異なっているが、載荷方式の違いが相互に影響を及ぼさないように互いに独立した機構が取り入れられている。

(3) 入出力制御計測記録部

図-4の入出力制御部⑦は、振動数可変コントローラである。

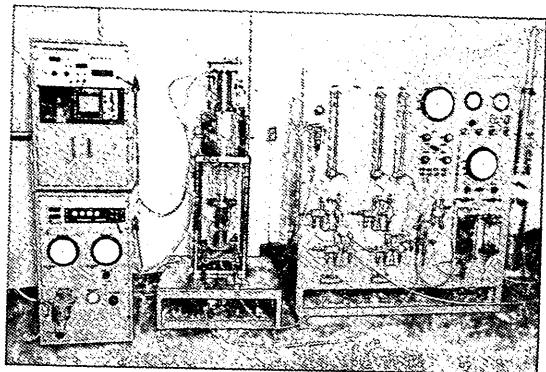


写真-1 装置全景

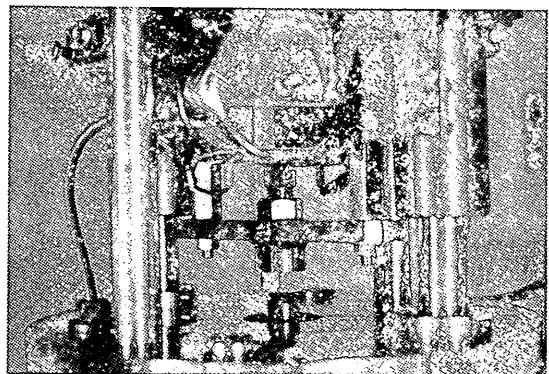


写真-2 ねじり振動加振部

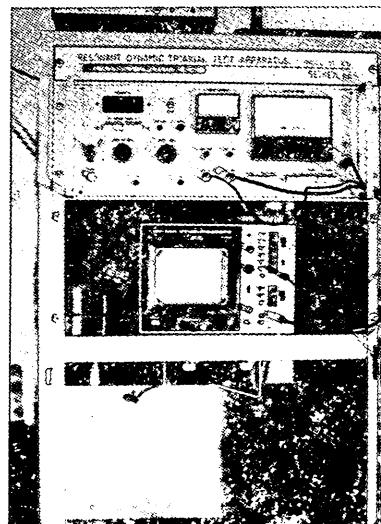


写真-3 入出力制御計測部

より振動数デジタル表示板、振動子より出力される速度およびその微分値としての加速度、積分値としての変位を求める切替スイッチ、それらの表示メータ、出力電流メータ、入力レベル可変コントローラ、ブラウン管オッショスコープから成る。

写真-1、写真-2、写真-3に、それぞれ装置全景、ねじり振動加振部、入出力制御計測部を示す。

2.4 試験方法

(1) 試験手順

供試体の寸法は、直径 50mm、高さ 125mm を標準としている。この寸法に成形された試料をペデスタル上にセットし、水浸したペーパードレーンを供試体周面にまいた後、ゴムスリーブをかぶせ、ペデスタル下部より脱気水を供給し、ゴムスリーブと供試体の空気を除去する。載荷部の自重を空気圧により平衡させ、供試体上面に上部ペデスタルを密着させて O リングによりゴムスリーブを閉じる。所定の側圧、軸圧、バックプレッシャーを加えて圧密を開始する。圧密期間中は、間隙水圧、排水量を測定するが、間隙水圧が 0 に到達したときをもって、一次圧密終了とし、測定を開始するのを標準としているが、圧密の影響を調べる場合には、圧密過程においても測定を行う。載荷は、まず共振法により、ひずみが 10^{-4} 程度に相当するまで段階的に行い、1 次の共振振動数とそのときの加振速度を測定し記録する。共振法終了後、直ちに振動三軸法により軸方向載荷を開始する。このとき用いる波形は、動的試験で最も広く一般に用いられている正弦波で、振動数は、1 Hz である。繰り返し波数は 10 波を基準としているが、実験の目的によっては 500 波程度加える場合もある。載荷方式は荷重制御方式とし、供試体底部において軸応力、載荷軸上端において軸変位を測定し、X-Y レコーダに記録する。また、この間は、非排水状態で実験を行い間隙水圧を記録する。

(2) 共振振動数の測定

供試体の共振を判定するためには、ブラウン管オッショスコープを利用して次のように行う。すなわち、振動子の一方から、速度 $v_1 = v_{01} \sin \omega t$ なる振動を加えたとき、振動子のもう一方では、 $v_2 = v_{02} \sin(\omega t - \delta)$ の振動が受信される。いま、ブラウン管オッショスコープ画面の Y 軸に入力信号、X 軸に出力信号をとり、 ωt を消去すると、

$$\left(\frac{Y}{v_{01}}\right)^2 + 2\left(\frac{X}{v_{02}}\right)\left(\frac{Y}{v_{01}}\right)\cos\delta + \left(\frac{X}{v_{02}}\right)^2 = \sin^2\delta \quad (23)$$

となり、画面上には橢円形のリサージュ图形が描かれる。共振時には位相角 δ が 0 になるから、式(23)で、 $\delta = 0$ とすると、

$$\frac{Y}{v_{01}} = \pm \frac{X}{v_{02}} \quad (24)$$

となり、リサージュ図は直線となるので、このときを供試体系の共振と判断することができる。

(3) 共振法における加振部の換算ばね係数 K_s 、慣性モーメント I_a の較正

剛性率の測定にあたっては、式(4)に示されたように、加振部の換算ばね係数 K_s 、換算減衰係数 K_D 、慣性モーメント I_a が必要である。換算ばね係数は、減衰のない場合の加振部のみの自由振動を考え、このとき得られる共振振動数を f_a 、慣性モーメントを I_a とする、

$$2\pi f_a = \sqrt{K_s/I_a} \quad (25)$$

で表せる。よって、式(25)より K_s を求めると、

$$K_s = (2\pi f_a)^2 I_a \quad (26)$$

となる。また、加振部に慣性モーメント I_t の既知な物体を取り付けたときの共振振動数 f_t を測定すると、式(26)と同様にして、

$$K_s = (2\pi f_t)^2 (I_a + I_t) \quad (27)$$

が得られる。式(26)、式(27)より、 K_s 、 I_a を求めると次式が得られる。

$$K_s = (2\pi f_t)^2 I_t / \{1 - (f_t/f_a)^2\} \quad (28)$$

$$I_a = (f_t/f_a)^2 I_t / \{1 - (f_t/f_a)^2\} \quad (29)$$

実際には、式(28)、式(29)を利用して K_s 、 I_a を求めるが、較正の方法は次のとおりである。まず、装置に供試体をセットしない状態で振動子を加振させて、リサージュ図をブラウン管オッショスコープ上に描かせ、リサージュ図が直線になるときの振動数から加振部の 1 次の共振振動数 f_a を測定する。

振動子への入力速度を変えて、各入力に対する共振振動数を求めておく。次に、加振部の一部である上部ペデスタルに慣性モーメント I_t の既知な付加重量を取り付け、同様な測定を行うことにより 1 次の共振振動数 f_t を求める。図-6 は、このようにして測定した f_a 、 f_t と加えた速度から求めた変位振幅を示したものである。変位振幅の増大に対して、 f_a 、 f_t ともやや減少するが、これらの測定値から式(27)、式(28)を用いて求められる換算ばね係数 K_s は、

$$K_s = 2.60 \times 10^5 \sim 3.30 \times 10^5 \text{ gf} \cdot \text{cm}/\text{rad}$$

である。上記 K_s の差異が剛性率の計算結果に与える影響については、3.(1)で検討されており、ほとんど影響が

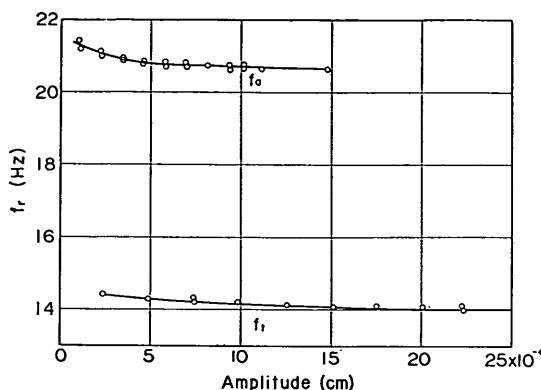


図-6 一次の共振振動数と変位振幅

ないことが示されている。実際の剛性率の計算では、

$$K_s = 3.00 \times 10^5 \text{ gf} \cdot \text{cm}/\text{rad}$$

が用いられている。

加振部の慣性モーメント I_a については、式(29)より算定され、

$$I_a = 20.76 \text{ gf} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^2$$

が得られている。

(4) 共振法における加振部の換算減衰係数 K_D の較正

加振部をある質量をもつVoigt モデルで表し、自由振動を考えると、このときの限界減衰定数 C_c 、減衰比 h は、

$$C_c = 2 \sqrt{K_s I_a} \quad (30)$$

$$h = K_D / C_c \quad (31)$$

で表される。

対数減衰率 δ_s は、

$$\delta_s = 2\pi h / \sqrt{1-h^2} \quad (32)$$

であるから、式(30)、式(31)、式(32)より、

$$K_D = 2\delta_s \sqrt{K_s I_a} / \sqrt{\delta_s^2 + 4\pi^2} \quad (33)$$

が得られる。式(33)において、 $\delta \ll 1$ となる場合には、

$$K_D = \frac{\delta_s}{\pi} \sqrt{K_s I_a} \quad (34)$$

となる。実際の K_D の較正方法は以下のとおりである。

加振部の振動子を振動させた状態から、瞬間に入力を切り、加振部を自由振動させる。そのとき減衰曲線を電磁オシロに記録すると図-7のようになるので、振動波数と加速度振幅をプロットし、図-8が得られる。

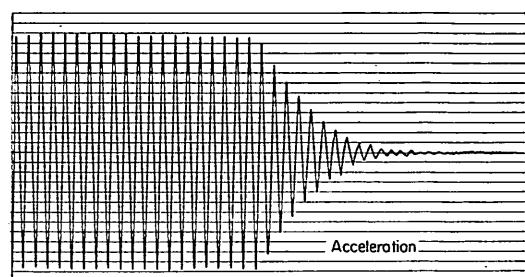


図-7 入力停止後の加速度の減衰記録（供試体なし）

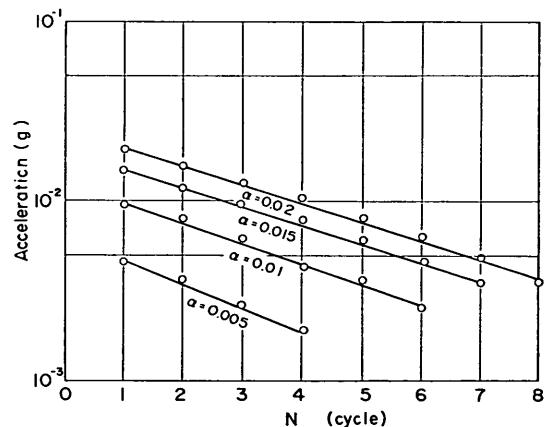


図-8 波数と加速度振幅

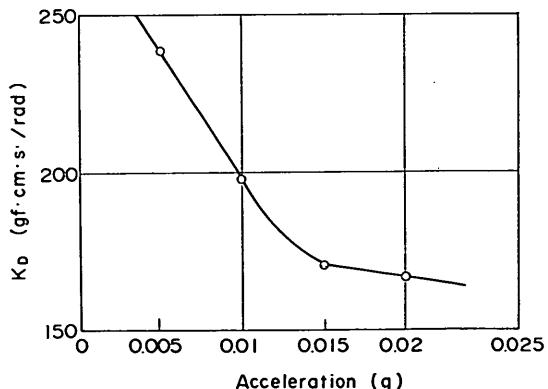


図-9 換算減衰係数と加速度振幅

このとき加振部の対数減衰率は、直線の勾配で表され、波数 N 、第1波めの振幅 a_1 、第 N 波めの振幅 a_N とすると、

$$\delta_s = \frac{1}{N+1} \log(a_1/a_N) \quad (35)$$

で算定される。 δ_s を式(34)に代入して、求まった K_D の値を加速度振幅に対して示したものが図-9である。図-9では、加速度振幅が増大すると、 K_D は減少する傾向を示し一定値とはならないが、 K_D の変化が剛性率の測定結果に与える影響については、ほとんどないことが3.2で明らかにされている。実際に使用する K_D の値は、

$$K_D = 2.00 \times 10^2 \text{ gf} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec} / \text{rad}$$

とした。

3. 共振振動三軸試験装置の粘性土への適用性

(1) 換算ばね係数

換算ばね係数は、供試体上部に取り付けられているねじり振動載荷部に対するもので、振動時に供試体の変位に対する抵抗力を規定する定数である。換算ばね係数は、2.4(3)で述べたように、試験を実施する前に較正をとってあらかじめ求めておくが、載荷した速度振幅により K_s の値にやや差があるので、換算ばね定数の相違が計算により求められる剛性率にどの程度の影響を及ぼすかについて調べておく。図-10は、較正により求められた換算ばね係数の最大、最小および中間値を用いて得られた剛性率を供試体のせん断ひずみに対して示している。換算ばね係数の最大値と最小値の差は27%であるが、各ひずみレベルでの影響度は、ほぼ一定で、ひずみ 10^{-4} で

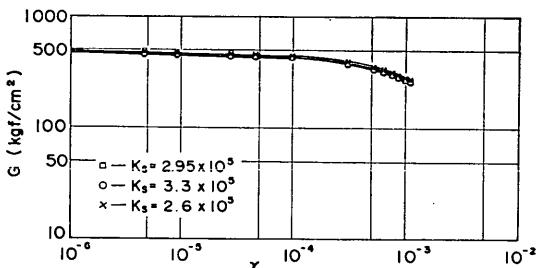


図-10 換算ばね係数が剛性率に及ぼす影響

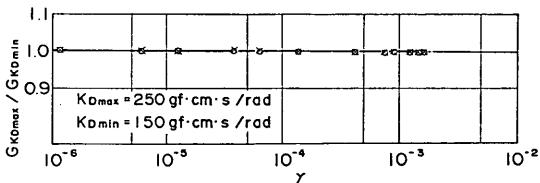


図-11 換算減衰係数が剛性率に及ぼす影響

の最大、最小値に対する剛性率の差は約3%となっている。したがって、較正により求まる平均値に対する剛性率の誤差は±1.5%の範囲内に収まることになり、実用上は無視することができる。

(2) 換算減衰係数

換算減衰係数は、振動載荷部の減衰特性を規定するものであるが、換算ばね係数の場合と同様に、較正で求められた最大、最小値を用いて剛性率に与える影響を調べた結果を図-11に示す。最大値と最小値の差は30%あるが、この程度の差が剛性率に及ぼす影響はほとんどないとみてよい。

(3) せん断ひずみ振幅算定方法

中実供試体を用いた共振試験では、供試体上端にはねじりが加えられ、供試体の下端は固定されている。このような状態における供試体内部のせん断ひずみは一様ではなく、供試体の中心軸ではひずみは0であり、周面で最大となる。供試体に加えられたせん断ひずみ振幅を規定する方法として、一般には、ひずみ振幅として供試体内部の平均せん断ひずみが用いられている。これは、供試体上端において半径の2/3の位置におけるひずみに相当する。図-12は、練り返した本牧粘土（液性限界 $w_L = 96.7\%$ 、塑性限界 $w_P = 41.5\%$ 、塑性指数 $I_P = 55.2$ ）に対する測定結果を用いて、せん断ひずみ振幅の算定を半径の1、2/3、1/2倍の位置において行ったときの剛性率とひずみの関係を示しているが、半径50mmの供試体では、ひずみレベル 2×10^{-4} 以下においては3方法ともほぼ同じ $G \sim \gamma$ 関係を与えていている。これはひずみレベルの微小な場合には、剛性率のひずみ依存性が小さいことに起因する。一方、せん断ひずみ振幅が 2×10^{-4} 以上では、ひずみ算定位置により $G \sim \gamma$ 関係がやや異なっているが、共振法により求まる G は、供試体の平均的な値であることを考慮すると、せん断ひずみ振幅についても平均値を採用することが妥当であろう。したがって、供試

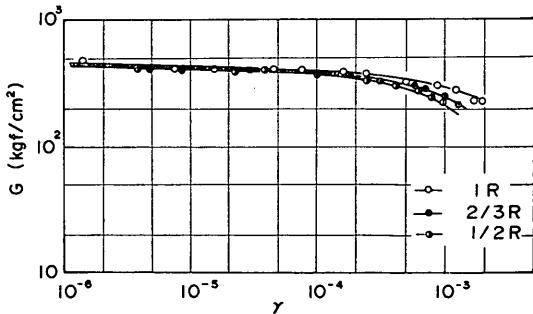


図-12 ひずみ振幅算定位置の $G \sim \gamma$ 曲線に及ぼす影響

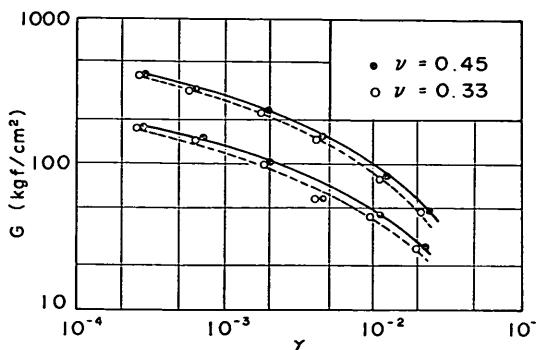


図-13 ポアッソン比の影響

体に加わるせん断ひずみ振幅として供試体半径の $2/3$ の点におけるせん断ひずみ、すなわち、平均ひずみをもつて供試体に作用するひずみを代表させることができるものと考えられる。振動三軸法では、既に2.2(2)で述べたように、ポアッソン比 ν を仮定して、剛性率を求める。ポアッソン比の値は地盤の数値解析などでは、一般に、 $\nu=0.3\sim0.5$ が用いられていることからポアッソン比を 0.33 、および 0.45 と仮定し式(9)、(10)を用いて剛性率とせん断ひずみ振幅を求めて比較してみる。実測されたヤング率 E 、軸ひずみ振幅 ε_a から、 $\nu=0.33$ を仮定して、 G 、 γ を求めた場合に対し、 $\nu=0.45$ を仮定した場合には、 G は 8% 減少し、 γ は 9% 増加することがわかる。また、2.2(2)で、 $\nu=0.5$ に近い値であることを述べたが、 $\nu=0.5$ を用いた場合と、 $\nu=0.45$ を用いた場合を比較してみると、後者の場合、前者に比較して G は 3% 小さく、 γ は 3% 大きくなり、両者の違いはそれほど大きくない。図-13は、 $\nu=0.33$ および $\nu=0.45$ として求まる G と γ の関係を示したものであるが、 $G\sim\gamma$ 関係に与える両者の違いによる影響はほとんど実験誤差内に含まれるようである。以上のようにポアッソン比の違いが剛性率に与える影響は ν が 0.5 に近い値だとするとほんの数%程度であり、 $G\sim\gamma$ 関係に与える影響についてもせん断ひずみ振幅 $\gamma=10^{-4}\sim10^{-2}$ にわたってほとんど無視しうる程度と考えてよい。

(4) 繰り返し波数

共振試験法では、供試体上端に変位または速度などのある一定の振動外力を加えて共振振動数を測定するが、このとき、供試体には、高周波の繰り返し力が作用することになる。しかしながら、この方法の適用は、ひずみレベルが 10^{-4} 程度以下の微小な範囲に限定されるため供試体は弾性的挙動を示し、外力の繰り返しが応力へひずみ履歴曲線に及ぼす影響はほとんど無視することができ

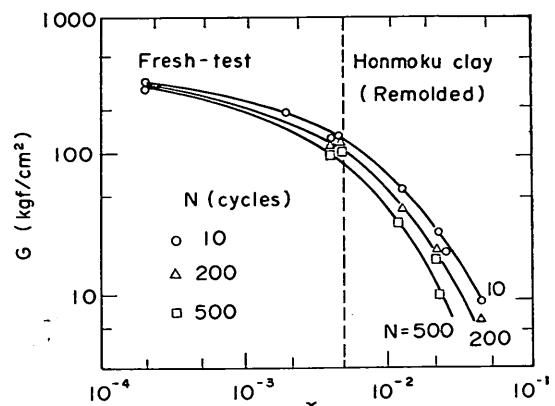


図-14 繰り返し波数の影響

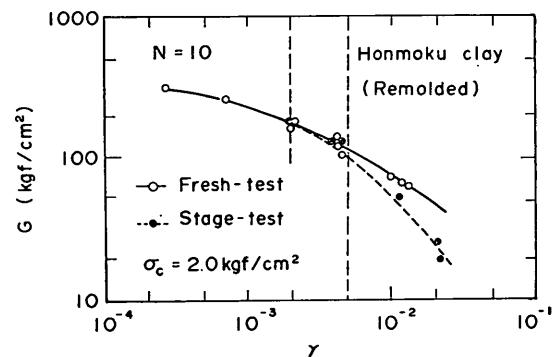


図-15(a) Fresh-test と Stage-test による剛性率の相違

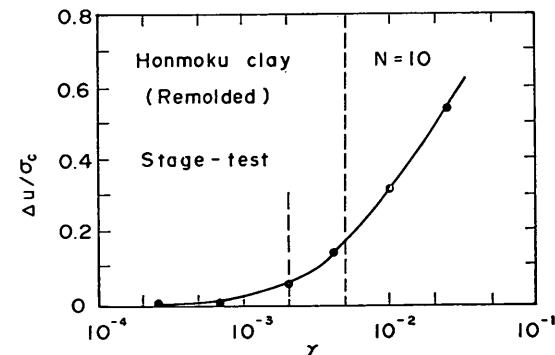


図-15(b) Stage-test における過剰間隙水圧比

る。一方、振動三軸試験法では、適用するひずみレベルが大きいため、供試体の応力へひずみ履歴曲線は非線形性を示すようになり、同一のひずみレベルにおいても、繰り返し波数の影響が無視できなくなる。図-14は、本

牧粘土の7個の供試体にそれぞれ1種類のせん断ひずみ振幅を加えたとき(Fresh-test)の剛性率を、繰り返し波数Nが10波、200波、500波に対して示したものであるが、波数が大きくなると、同一ひずみレベルでも明らかに剛性率は低下している。また波数の影響は、ひずみが小さい場合にはそれほど大きくないが、ひずみが大きくなるほど大きく表れてくる。すなわち、せん断ひずみ振幅 γ が 5×10^{-3} においては、波数 $N=10$ 波のGに対して $N=200$ 波および $N=500$ 波のときのGはそれぞれ17%，および30%低下している。この理由は、繰り返しにより供試体を構成する粒子の骨格構造の変化およびそれとともに過剰間隙水圧の発生、すなわち、有効応力の減少によるものと思われる。図-15(a)は、1個の供試体に1種類のせん断ひずみ振幅を加えた(Fresh-test)場合と、1個の供試体に数種類のせん断ひずみ振幅を段階的に加えた(Stage-test)場合を比較したものである。ただし、図-15(a)においては、繰り返し波数が10波のときの結果を示しているが、Stage-testでは、各ひずみごとに200波ずつ繰り返し載荷を行っているので、あるひずみにおける全波数は、それ以下のひずみで与えた波数の合計に10波を加えたものとなる。このようにStage-testでは繰り返し波数が累積していくことになるが、図-15(a)より明らかなように、せん断ひずみ振幅が $(2\sim 5) \times 10^{-3}$ 以下においては、Fresh-testとStage-testの結果はほぼ等しいとみなされる。このことは、せん断ひずみ振幅が $(2\sim 5) \times 10^{-3}$ 以下においては、供試体はほぼ弾性的な挙動を示し、波数の影響がほとんど表れないと考えてよいことを意味する。これはまた、Hardin-Drnevich⁷⁾が行った8種類の乱さない粘性土に対して得た結果とも一致する。図-15(b)は、Stage-testにおいて測定された間隙水圧比とせん断ひずみ振幅の関係を示しているが、Fresh-testでは $\Delta u/\sigma_c = 0$ とみなされるので両方法により求まるGの相違は、供試体内に発生する間隙水圧に起因するものと考えられる。図-15(b)によると $\Delta u/\sigma_c \leq 0.15$ では実用上、両方法によるGは等しいとみなしてもよいようである。図-16は、乱さない川崎粘土(液性限界 $w_L = 97.9\%$ 、塑性限界 $w_p = 45.6\%$ 、塑性指数 $I_p = 52.4$)についてG～ γ 関係を示したものである。図-16中の実線はFresh-testにより得られるもの、破線はStage-testによる結果である。この場合においても、 $\gamma = (2\sim 5) \times 10^{-3}$ 以下においては、波数の影響がみられないことがわかる。

以上のように、繰り返し波数が剛性率に与える影響については、加えたせん断ひずみ振幅が $(2\sim 5) \times 10^{-3}$ 以下では、実用上ほとんどないとみなしてよいが、Stage-

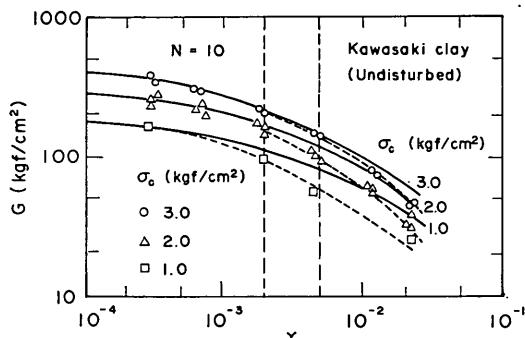


図-16 乱さない川崎粘土に対する Fresh-test と Stage-test の比較

testの場合には、供試体内に発生する間隙水圧と拘束圧から求まる間隙水圧比 $\Delta u/\sigma_c$ が0.15以上になると、波数の影響が顕著となることに留意すべきである。また、間隙水圧の発生量は、供試体の種類により異なることが予想され、波数の影響が表れるせん断ひずみ振幅の大きさもそれによって異なることが考えられるので、Stage-testを採用する場合には、供試体の間隙水圧を測定し、間隙水圧の発生量が大きくなった場合には、それ以後のせん断ひずみ振幅に対する剛性率には繰り返し波数の影響が含まれていることに注意すべきであり、波数の影響を除去したい場合にはFresh-testによる方法を採用すべきであろう。なお、この場合には、間隙水圧比0.15を一応の目安にすることができる。

(5) 同一せん断ひずみ振幅における剛性率の比較

図-17は、共振試験法(RC-Test)と振動三軸試験法(DT-Test)により求まる剛性率をせん断ひずみ振幅の同じ範囲において比較したものである。このときのせん断ひずみ振幅は、3.3で述べたように、共振法では平均

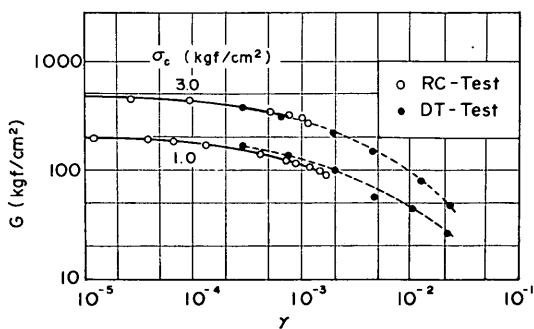


図-17 せん断ひずみ振幅が同じ場合の共振法と振動三軸法の比較

せん断ひずみ振幅、振動三軸法ではポアソン比0.45を用いて算定したせん断ひずみ振幅である。また、図-17のDT-Testでは $N=10$ 波における値を用いている。両法による結果がオーバーラップするひずみレベル ($\gamma = 2 \times 10^{-4} \sim 2 \times 10^{-3}$)について比べてみると、両法の結果はうまく一致しており、測定手法の異なる2つの方法により剛性率を求めて、せん断ひずみ振幅が等しければ同じ結果を与えることを表している。なお、ここで比較したひずみレベルにおいて、繰り返し波数の影響がほとんど無視されることは既に、3.4で示したとおりである。以上の結果は、測定手法の異なる共振試験法と振動三軸試験法を組み合わせた共振振動三軸試験装置が広範なせん断ひずみレベルに対して適用可能なことを示すものである。なお、図-17は、本牧粘土の練り返し試料に対するものであるが、乱さない試料についても同様な結果が得られることが確認されている。^{8), 9)}

4. 混合土の動的変形特性

4.1 土の動的変形特性に及ぼす影響要因

地盤の地震応答解折では、繰り返し外力を受ける土の応力～ひずみ関係が必要であり、種々の応力～ひずみモデルが提案されている。それらのなかで、比較的一般に用いられているものの1つとして等価線形モデルがある。等価線形モデルで基本的に必要とされるパラメータは、剛性率と減衰比である。これらのパラメータに影響する要因として、Hardin-Black¹⁰⁾、Hardin-Drnevich¹¹⁾は、せん断ひずみ振幅、平均有効主応力、間隙比、載荷波数、飽和度、過圧密比、有効破壊包絡線、(原文ではEffective strength envelop)、八面体せん断応力、載荷振動数(0.1Hz以上)、時間効果(チキソトロッパーなど)、粒子特性(寸法、形状、粒度、鉱物組成)、骨格構造、せん断による体積変化(0.5%以下のひずみ)をあげている。これらの影響要因のなかで、特に、せん断ひずみ振幅、平均有効主応力、間隙比、載荷波数などが重要な要素である。

因である。粘性土については、この他、時間効果^{12)～15)}がかなり重要な影響要因であることがわかっている。これらの要因による影響度は、砂と粘性土の場合では異なることが明らかであるが、粘性土に分類される土のなかでも、種類によっては、これらの要因の及ぼす影響度が異なることが予想されることから、以下、人工的に作成した特性の異なる6種類の粘性土に対して実施した実験結果^{16), 17)}について示すものとする。なお、実験結果の考察にあたっては、せん断ひずみ振幅がほぼ 10^{-6} における動的変形特性について述べ、次に、せん断ひずみ振幅が 10^{-6} 以上の場合について示すことにする。

4.2 試料

実験に用いた試料は、横浜本牧地区で採取された本牧粘土と豊浦標準砂を人工的に混合して作成したいわゆる混合土である。混合土の作成にあたっては、できるだけ天然の土の粒度分布、物理的特性をもつように配慮し、まず、豊浦標準砂を粉碎機にかけて細粒化したものを数種類準備した後、これらを適当な割合で本牧粘土と混合調整することにより6種類の混合土を作成した。混合にあたっては、所要の塑性指数が得られるよう予備試験を行って配合割合を決めている。混合土の物理的特性を表-1に示す。図-18および図-19は、実験に用いた6種類の混合土の粒度分布、塑性図を示したものであるが、人

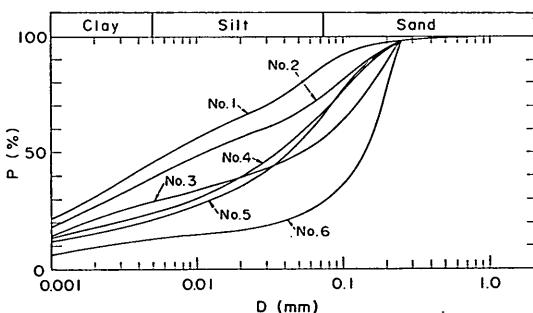


図-18 混合土の粒径過積曲線

表-1 試料の物理的特性

Sample No.	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6
Symbol	○	●	▲	◆	▼	■
G_s	2.712	2.704	2.700	2.665	2.668	2.659
w_L (%)	84.6	71.3	50.4	39.9	31.4	26.9
w_P (%)	38.8	33.4	25.3	23.7	22.0	N.P.
I_p	45.8	37.9	25.1	16.2	9.4	N.P.
Sand (%)	10.2	22.1	40.9	32.3	32.4	69.2
Silt (%)	44.1	38.9	30.4	43.7	46.5	17.8
Clay (%)	45.7	39.0	28.7	24.0	21.1	13.0

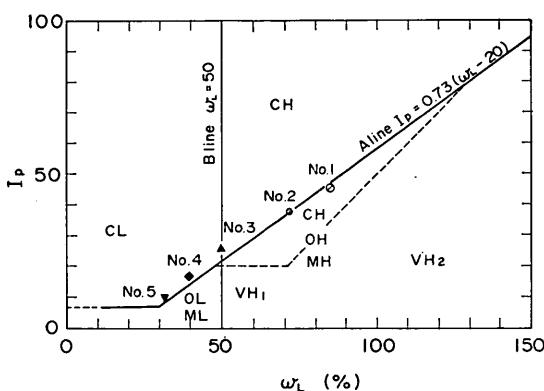


図-19 混合土の塑性図

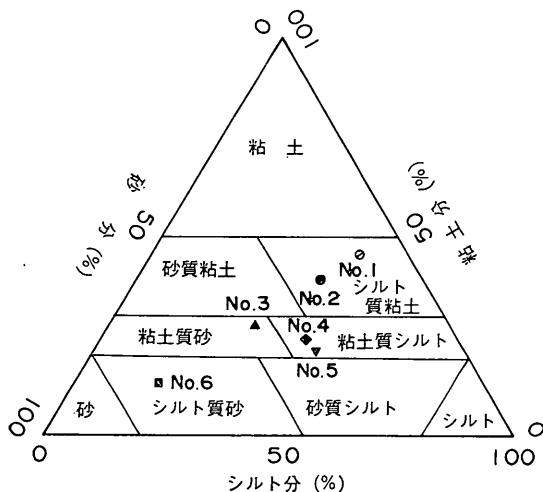


図-20 三角座標（ミシシッピ河管理委員会方式）

工的に作成したこれらの混合土は、その物理的な特性からみて自然の粘性土と特に異なるものではないことがわかる。図-20は、参考までに、ミシシッピ河管理委員会の三角座標による土質分類を示したものである。

4.3 試験方法

試験の方法は、2.4に述べた方法によっている。すなわち、ひずみ振幅の小さな範囲では共振法を、ひずみ振幅の大きな範囲では振動三軸法によっている。ただし、ここで述べる混合土に対する一連の試験では、圧密過程中の動的特性の変化も調べるために、共振法と振動三軸法で、同一の試料からそれぞれに1個ずつの供試体を作成して使用している。供試体は、室内において 0.5 kgf/cm^2 で予圧密されたブロックサンプルから、直径50mm、高

さ125mmの寸法に成形した中実供試体を用いている。供試体周面にはペーパードレーンをまき、バックプレッシャー 1.0 kgf/cm^2 を加えて、圧密圧力 $1.0, 2.0, 3.0 \text{ kgf/cm}^2$ で等方圧密した。共振法では、一次圧密過程、一次圧密終了時（過剰間隙水圧が0に等しくなったときとした）および圧密開始から24時間後に載荷を行った。振動三軸法では、供試体が破壊に至るまで載荷を行うので、一次圧密終了時のみを試験の対象としている。載荷は、ひずみ振幅を数段階に分けて増大させていく段階載荷を用いている。共振法において、共振振動数およびその測定時間から求まる高周波の繰り返し波数は、 10^3 のオーダーであった。一方、振動三軸法では、周期1Hzの正弦波を用いているが、繰り返し波数10波における値を用いている点に留意すべきである。なお、共振法におけるひずみ振幅は、供試体半径の $2/3$ の点で求めた平均ひずみ振幅を、振動三軸法では、ポアソン比を0.45と仮定して、軸ひずみ振幅から弾性論にもとづいて求めたせん断ひずみ振幅を用いている。

4.4 実験結果および考察

(1) 微小せん断ひずみ ($\gamma = 10^{-6}$)における剛性率

a) 間隙化

微小ひずみ $\gamma = 10^{-6}$ における粘性土の剛性率 G_0 は、経験的に式(36)～式(37)で表されるといわれている¹⁰⁾。

$$G_0 = A \cdot F(e) \cdot (\sigma'm)^n \quad (36)$$

$$F(e) = \frac{(2.973 - e)}{1 + e} \quad (37)$$

ここに、

e ；間隙比

n ；実験定数、0.5

A ；実験定数、330

この式は、元来、Hardin-Richart¹⁸⁾により、角ばった砂に対して提案されたもので、その後、Hardin-Blackにより粘性土へ拡張して適用されることが示されたものである。したがって、式(36)には、間隙比と平均有効主応力が同時にパラメータとして含まれており、間隙比と平均有効主応力の間に一義的な関係が成立する正規圧密状態の粘性土では、どちらか一方のパラメータで剛性率を表されるものと考えられる。図-21は、間隙比と剛性率の関係を一次圧密終了時において比較したもので、上述のように、個々の供試体ごとにみると、間隙比と剛性率の間に直線関係が存在している。直線の勾配についてみると、塑性指数の小さな試料ほど勾配は急になっており、わずかの間隙比の変化で剛性率が大きく異なってくることがわかる。これは、種類の異なる混合土について個々

共振振動三軸試験装置の開発と混合土の動的変形特性

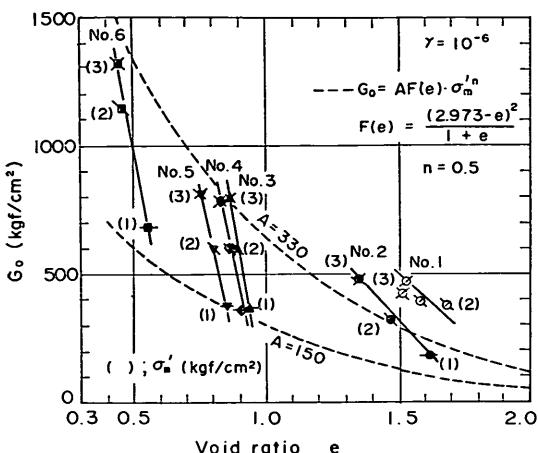


図-21 間隙比と剛性率

にみた場合であるが、これらを全体的にみて、剛性率を経験的に間隙比と平均有効主応力の関数で表したもののが式(36)～式(37)と考えられ、この関係を $\sigma_m' = 1.0 \text{ kgf/cm}^2$ の場合について図-21 中に破線で示している。これを実験値と比較してみると、経験式と実験値は、必ずしも良い一致を示さず、個々の粘性土の剛性率を式(36)～式(37)に示した経験式で表現することにはやや無理があるようみえる。しかしながら、実用的な見地からみた場合、粘性土の剛性率を土の種類に無関係に間隙比および平均有効主応力のある種の関数として表すものとして、土の種類の違いを実験定数 A で補正するという考え方を採用することも可能である。この立場から、定数 A について調べた結果を示すと図-22 のようになる。図-22 の縦軸 A は、剛性率、平均有効主応力、間隙比から、 $A = G/F(e) \cdot (\sigma_m')^{0.5}$, $F(e) = (2.973 - e)^2 / (1 + e)$ により求めた値で

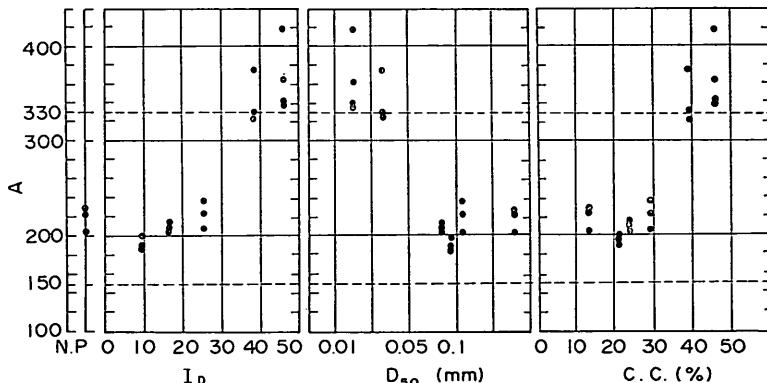


図-22 係数 A と塑性指数、平均粒径、粘土含有量の関係

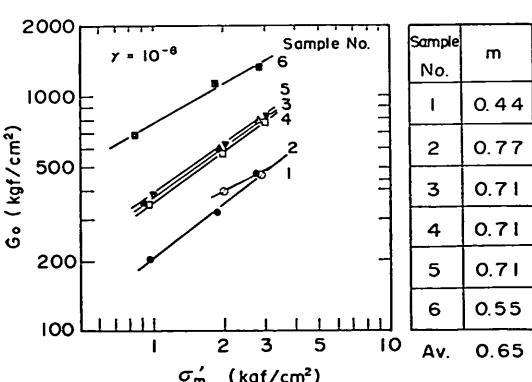


図-23 平均有効主応力 σ_m' と剛性率 G_0 (係数 m)

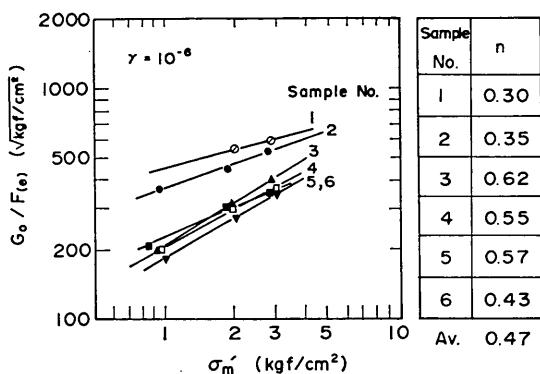
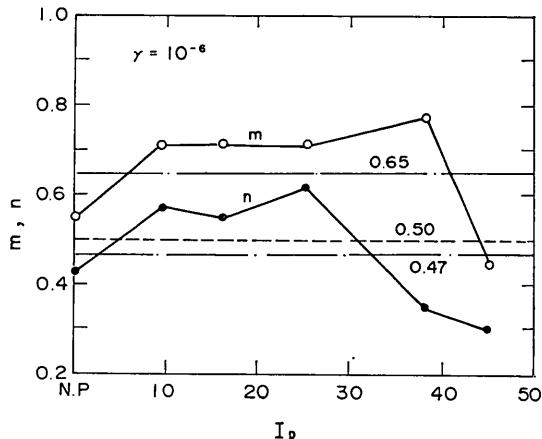
ある。また、横軸には、混合土の物理的特性を表す指標の1つである塑性指数 I_p 、平均粒径 D_{50} 、粘土分含有量をとっている。図-22 より明らかなように、厳密には定数 A は、土の種々により異なり、混合土の塑性が大きくなるにしたがって A の値は大きくなっている。また、 $A = 330$ となるのは、塑性指数 $I_p = 40$ に対する値であることがわかる。

以上のことから、 G_0 を式(36)～式(37)で求めようとする場合には、実験定数 A の値を土の種類によって適切な値に変える必要があることが明らかであろう。

b) 平均有効主応力

ある間隙比のもとで剛性率 G_0 は σ_m' の 0.5 乗に比例するといわれている。すなわち、

$$G_0 \propto (\sigma_m')^m, \quad m=0.5 \quad (38)$$

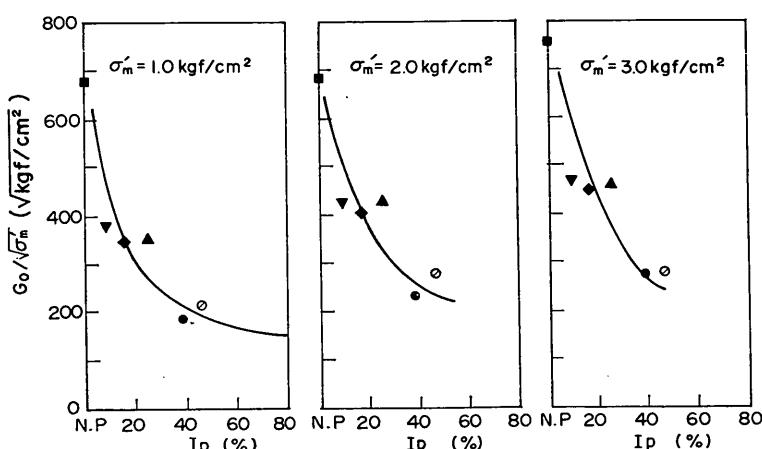
図-24 平均有効主応力 $\sigma'm$ と剛性率 G_0 (係数 n)図-25 塑性指数 I_p と係数 m, n

と表せることになる。このような関係が、特性の異なる6種類の粘性土についても成立するかを確認するために、一次圧密終了時の平均有効主応力 $\sigma'm'$ と剛性率の関係を示したものが図-23である。図-23より明らかなように、せん断ひずみ振幅が 10^{-6} における剛性率と平均有効主応力の関係は、必ずしも $m=0.5$ とはならず、 $m=0.44 \sim 0.77$ 、平均 0.65 となる。このことは、平均有効主応力 $\sigma'm'=1.0, 2.0, 3.0 \text{ kgf/cm}^2$ に対応する間隙比が必ずしも同一でないことに起因するものと考えられることから、 G_0 を式(3)で表される $F(e)$ で除した値と平均有効主応力の関係を示したもののが図-24である。この場合の n は、図-24に示されるように、 $0.30 \sim 0.62$ 、平均 0.47 となり、 $n=0.5$ とみなすことができる。

図-25は、 m, n と塑性指数の関係を示したものである。塑性指数の相違による m, n の変化傾向はあまり明らかでないが、平均的には、 $m=0.65, n=0.5$ とみなしでもよいように思われる。以上のように式の経験式(3)の適用にあたっては、式(3)で表される $F(e)$ の関数で剛性率を除した値 $G_0/F(e)$ が平均有効主応力の 0.5 乗に比例することに留意すべきである。

c) 塑性指数

粘性土の剛性率が、平均有効主応力、間隙比、および土の種類による定数で表されることについて述べたが、平均有効主応力と間隙比の間に一義的な関係が成り立つとすると、剛性率は平均有効主応力、もしくは、間隙比のどちらか一方の関数として表すことができる。また、土の種類による実験定数 A については、図-22に示したように、塑性指数、平均粒径、粘土分などの土の物理的特性と関連がある。さらに、粘性土の間隙比と塑性指数

図-26 塑性指数と $G_0/\sqrt{\sigma'm'}$ の関係

の間には、統計的に $I_p = 2.9e - 12$ なる相関性が存在することも知られている¹⁹⁾。したがって、混合土の塑性指数を剛性率に影響する要因の1つとして取りあげてみると、 A および $F(e)$ はある関数 $H(I_p)$ で表されるので剛性率は、

$$G_0 = H(I_p) \cdot (\sigma'_{\text{m}})^{0.5} \quad (39)$$

で表現できる。

図-26,(a), (b), (c)は、式(39)にもとづき $H(I_p) = G_0 / (\sigma'_{\text{m}})^{0.5}$ として $H(I_p)$ を求め、塑性指数と $H(I_p)$ の関係を示したものである。 $H(I_p)$ のディメンジョンは無次元ではなく、なお応力の平方根のディメンジョンを有することから、図-26には、平均有効主応力 1.0, 2.0, 3.0kgf/cm²についてそれぞれ $H(I_p) \sim I_p$ の関係を示しているが、 I_p が大きくなるにつれて、 $H(I_p)$ は小さくなる傾向がある。

d) 時間効果

微小せん断ひずみ振幅に対する剛性率は、平均有効主応力、間隙比がほとんど変化しない場合でも、一次圧密終了後も三軸セル内に放置しておくと、放置時間の増大とともに徐々に増加することが知られている。これはいわゆる時間効果とよばれるものである。図-27は、圧密時間による剛性率の変化状況を示したものであるが、混合土についても、このような時間効果がみられており、一次圧密終了後においても、剛性率は時間の log スケールに対してほぼ直線的に変化している。また、増加率は異なるが24時間経過後のすべての試料において剛性率の増加がみられる。図-28は一次圧密終了後の剛性率で圧密時間24時間における剛性率を除して求めた増加率を塑性指数、平均粒径、粘土含有率に対して調べたもので、時間効果としては、24時間圧密では、一次圧密終了時の剛性率の8~16%大きな剛性率となる。また、図-28では I_p , C.C. が大きくなるほど、また、 D_{50} が小さくなるほど時間効果も増大する傾向がうかがえる。図-28では一次圧密終了時と24時間経過後の増加率

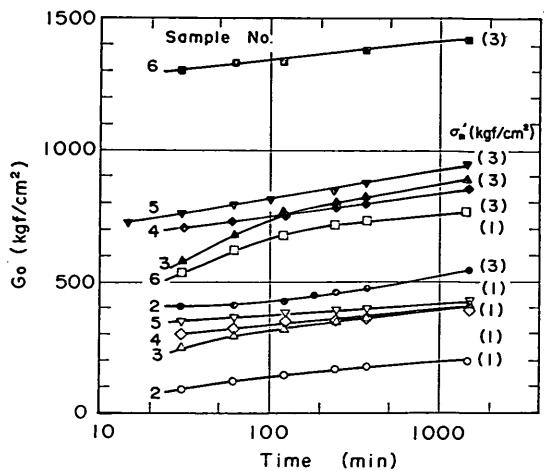


図-27 圧密時間と剛性率 G_0

を比較したものであるが、室内試験で求まる剛性率から、原位置における長期的な剛性率の変化を予測しようとする場合は、剛性率が一次圧密終了後、時間の log スケールに対して直線的に増加することを示した図-27を利用して、その勾配を時間の log スケールの1サイクルについて読み取り、ある基準となる圧密時間に対する剛性率の増加率を求めたほうが都合がよい。Afifi-Richart¹³⁾, Anderson-Woods¹⁴⁾, Kokusho⁹⁾らは、この基準となる圧密時間として1,000分を用いているが、同じ粘性土でも、種類が異なれば一次圧密終了時間が異なることから、一次圧密終了時間が1,000分に対応する場合には問題ないが、そうでなければ圧密時間1,000分における剛性率を基準として増加率を求めたのでは、一次圧密終了後の時間のlogスケールの1サイクルに対する剛性率の増分 ΔG は一定であるとしているので、基準となる剛性率が異なると公正な増加率が得られない。そこで基準となる圧密時間を一次圧密終了時にとり、そのときの剛性率を用いて増加率を求めた結果が図-29である。ただ

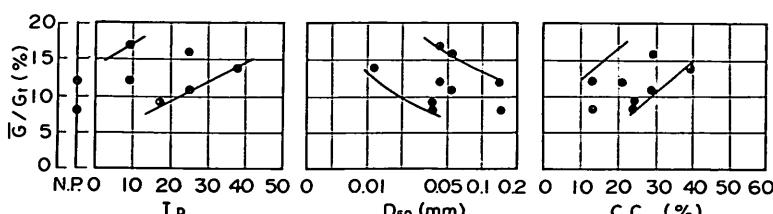
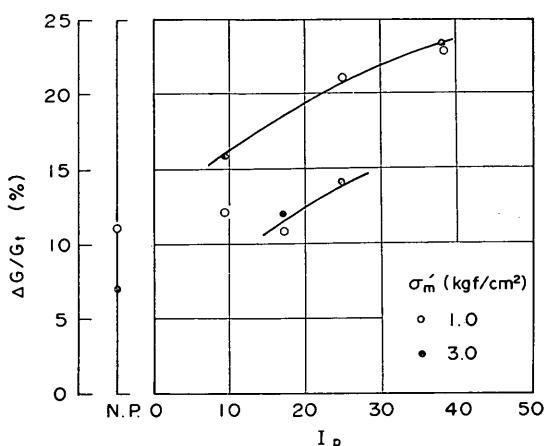


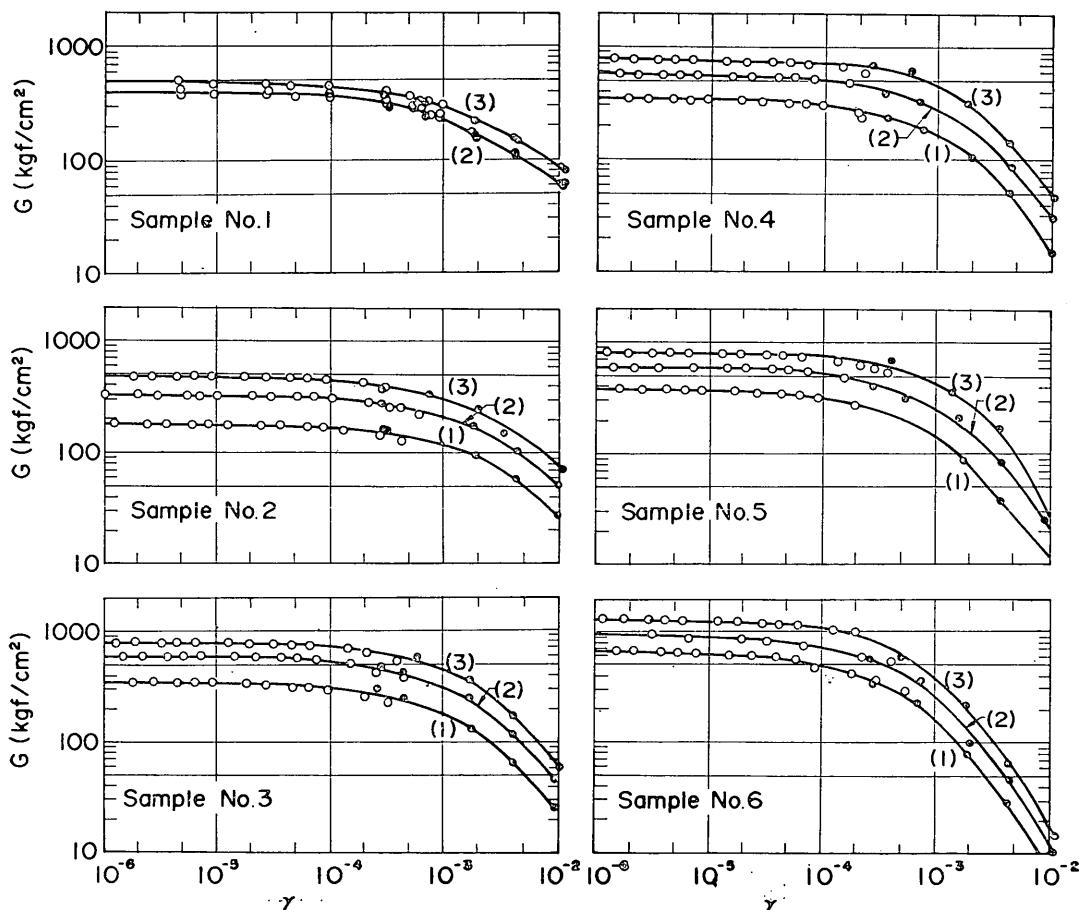
図-28 剛性率の増分 \bar{G}/G_0 と塑性指数、平均粒径、粘土含有量の関係

図-29 剛性率の増加率 $\Delta G/G_0$ と塑性指数

し、この場合の増加率は、剛性率が一次圧密終了後時間の log スケールに比例して増加するとの前提にたっていことに注意すべきである。図-29 では、横軸に塑性指数を用いているが、これは、粘性土の分類などにおいても塑性指数が採用されており、粘性土の特性を代表する指標として、平均粒径や粘土含有量よりも塑性指数のほうがより重要であるとの考えによる。Kokusho⁹⁾ らは、平均粒径および塑性指数の両者によるデータの整理を行い、塑性指数を用いたほうがデータのばらつきが少ないことを示している。図-29 より塑性指数が増加すると、増加率も増大していることが明らかである。また、平均有効主応力 $1.0, 3.0 \text{ kgf/cm}^2$ では、両者に顕著な差はみられないことがわかる。

(2) 中～大ひずみ領域における剛性率

a) せん断ひずみ振幅に対する依存性

図-30 $G \sim \gamma$ 曲線の実測値

共振振動三軸試験装置の開発と混合土の動的変形特性

4.4.(1)では、供試体に加わるせん断ひずみ振幅が 10^{-6} 程度の微小な場合に限定して、そのときの剛性率に及ぼすいくつかの影響要因について調べたが、土の剛性率は、加えられるせん断ひずみ振幅の大きさに著しく影響を受けることが知られていることから、混合土の剛性率のひずみ依存性を調べたものが図-30である。せん断ひずみ振幅が増大すると剛性率が低下することおよび平均有効主応力が大きくなると剛性率が大きくなることは、従来の知見と一致する。また、図-30において、印は共振法、印は振動三軸法による結果であるが、3.(5)で述べたと同様に、両法における測定結果は、せん断ひずみ振幅が等しいところではよく一致している。

b) 平均有効主応力と $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線

図-31は、個々のせん断ひずみ振幅 γ において測定された剛性率 G をせん断ひずみ振幅 10^{-6} における剛性率で除した値 G/G_0 と γ の関係を示したものである。 G/G_0

は剛性率のせん断ひずみ振幅に対する依存性を表す無次元量であり、原位置において得られる G_0 をもとに任意のせん断ひずみ振幅に対する剛性率を推定するさいに利用される。この $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線に与える平均有効主応力の影響について調べた結果が図-31であるが、図-31によると、塑性指数の大きい試料では平均有効主応力の影響がみられないのに対して、塑性指数が小さくなるにつれて、平均有効主応力の影響が表れてくる傾向を示している。しかしながら、平均主応力の相違が $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線に与える影響は、きれいな砂の場合²⁰⁾に比較すると非常に小さいことがわかる。

c) 塑性指数と $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線

図-32は、 $G/G_0 \sim \gamma$ の曲線が、混合土の塑性指数 I_p によりどのように異なるかを示したものである。図-32から明らかなように、 $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線は、塑性指数が大きくなるにつれて、図の右上方に移動しており、せん断

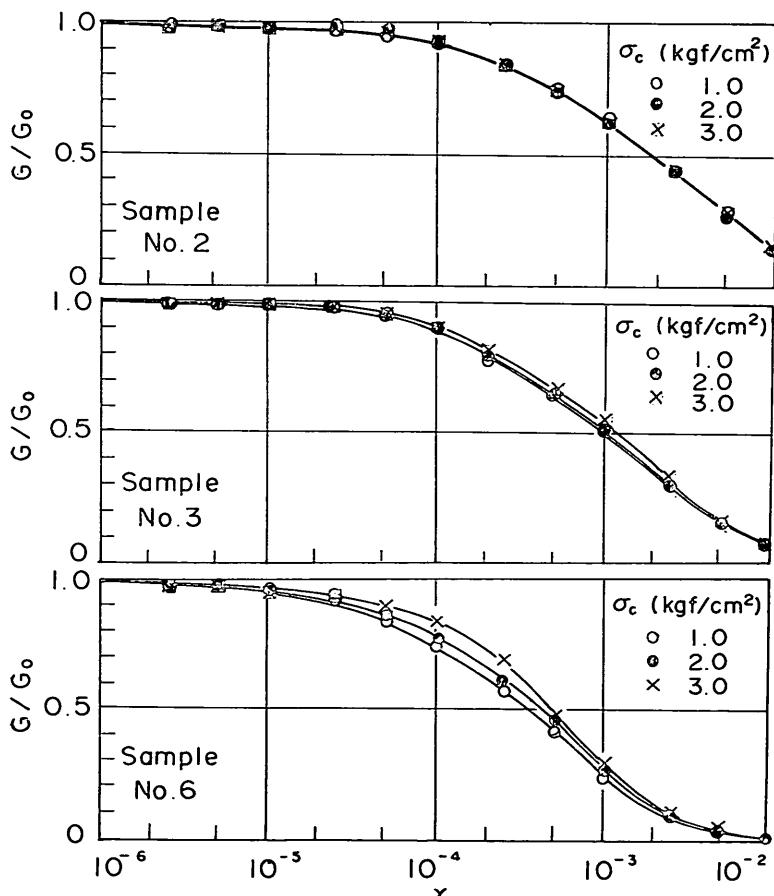


図-31 $G \sim \gamma$ 曲線に及ぼす平均有効主応力の影響

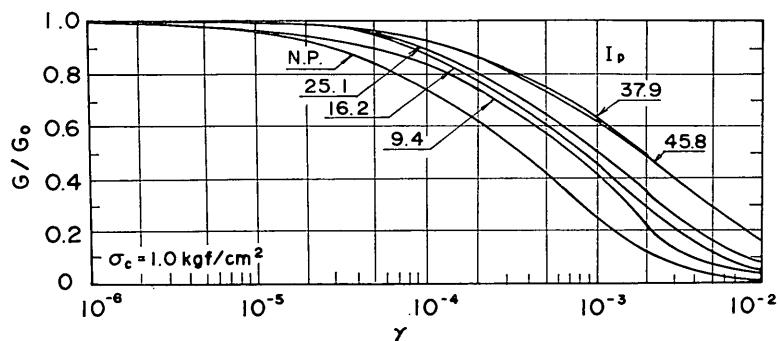


図-32 $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線に及ぼす塑性指数の影響

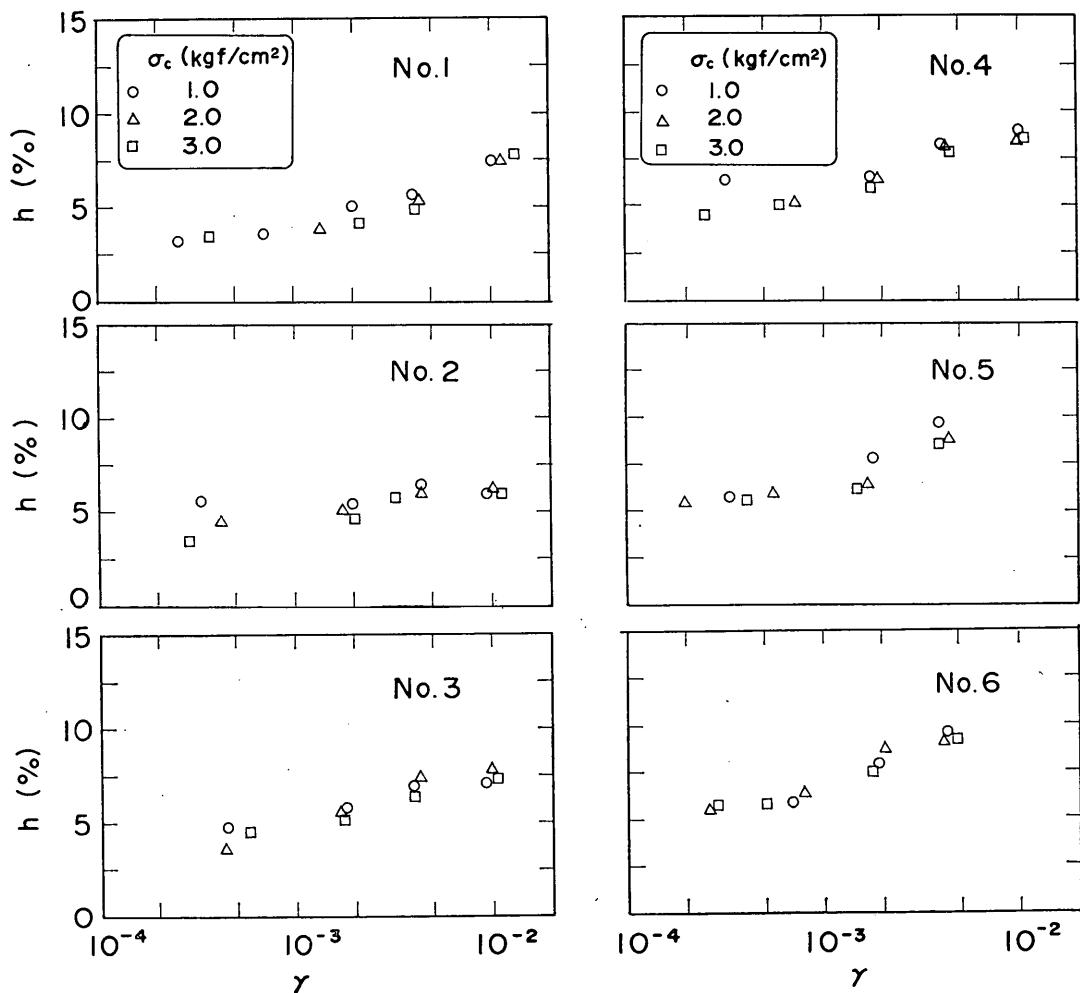


図-33 減衰比に及ぼす平均有効主応力の影響

共振振動三軸試験装置の開発と混合土の動的変形特性

ひずみ振幅 $\gamma = 10^{-6}$ における剛性率 G_0 に対する任意のせん断ひずみ振幅に対する剛性率 G の低減率は、 I_P が大きくなるにつれて小さくなることがわかる。また、塑性指数 I_P が約40以上になると $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線に与える影響度は、著しく小さくなる傾向にあり、 $I_P = 37.9 \sim 52.4$ ではほとんど同じ $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線となっている。

(3) 中～大ひずみ領域における減衰比

a) 拘束圧

図-33 は、振動三軸法により求まる応力～ひずみ曲線から、式(2)を用いて得られる減衰比 η を平均有効主応力 $1.0, 2.0, 3.0 \text{ kgf/cm}^2$ について示したものである。

試料 No. 1 ～ 6 のすべての試料について、平均有効主応力の相違による減衰比の違いはみられないことがわかる。

b) 間隙比

粘性土の場合、圧密圧力に対して間隙比が一義的に決まるので、個々の試料に対して前述のように拘束圧の影響がなければ、間隙比の影響もないと考えてよい。ただし、土の種類が異なると、同じ圧密圧力でも間隙比の値

は異なることから、単に間隙比のみをとりあげて、4段階のせん断ひずみ振幅に対して減衰比を示したものが図-34 である。図-34において、各ひずみレベルに対して曲線は左上がりとなっており、間隙比の小さな土ほど減衰比は大きくなる傾向がある。

c) 繰り返し波数

図-35 は、供試体に加えた波数 $N = 10$ 波と $N = 200$ 波における減衰比を比較したものである。せん断ひずみ振幅が 2×10^{-3} までは、波数の影響はあまりみられないが、 2×10^{-3} 以上になると、せん断ひずみ振幅が大きくなるにつれて波数の影響がより大きく表れてくる。ただし、塑性指数 $I_P = 16.2$ の試料 No. 4 についてみると、せん断ひずみ振幅が 10^{-2} における $N = 200$ 波の減衰比は $N = 10$ 波の減衰比よりも絶対値で 1.5% 程度の差がある。試料 No. 5, No. 6 の場合には、せん断ひずみ振幅 4×10^{-3} で 200 波繰り返しを加えると、供試体内的間隙水圧が上昇するとともに応力ひずみ曲線がいびつな形となり、減衰比も 10 波の場合よりもかなり小さくなる。このような場合には、以後の試験結果に及ぼす波数の影響が大きい。

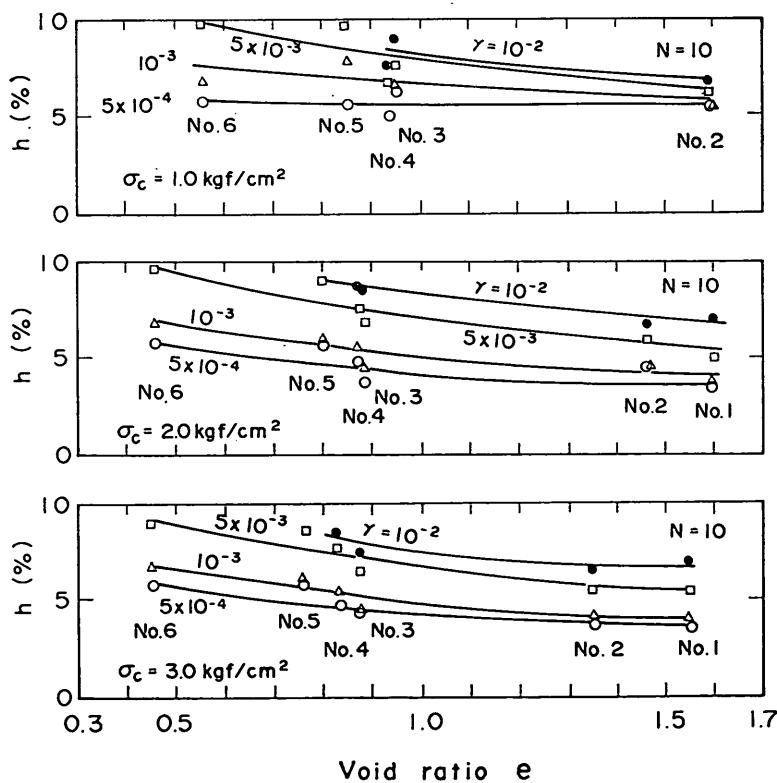


図-34 減衰比と間隙比

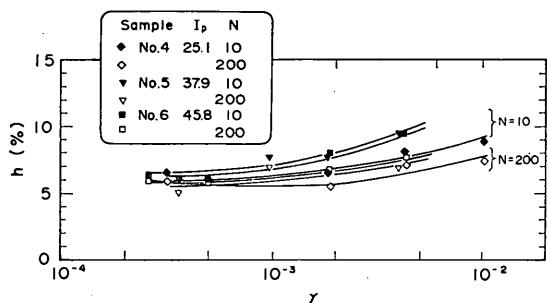


図-35 減衰比に及ぼす繰り返し波数の影響

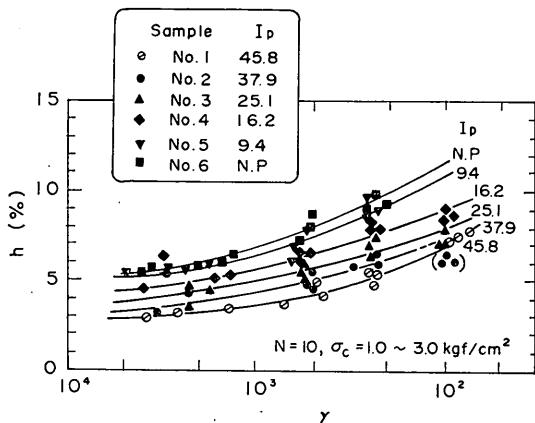


図-36 減衰比に及ぼす塑性指数の影響

ことから、載荷を打切り、試験を終了している。せん断ひずみ振幅を段階的に増加させる、いわゆる段階載荷試験法にもとづいて試験を行った結果から、 $N=10$ 波および $N=200$ 波に対する減衰比について比較したが、粘性土に対する波数の影響については、著しく大きな間隙水圧が発生しないようなせん断ひずみ振幅の範囲内においてはそれほど大きくなないように思われる。なお、混合土を用いた実験では、著しく大きな間隙水圧の発生するせん断ひずみ振幅は、塑性指数により異なるが 5×10^{-3} ～ 10^{-2} 程度であった。

d) 塑性指数

図-36は、減衰比 h とせん断ひずみ振幅 γ の関係に及ぼす塑性指数の影響を調べたものであるが、 $h \sim \gamma$ 曲線は、塑性指数が大きなものほど下側に位置しており、せん断ひずみ振幅が同じであれば、塑性指数が大きいほど減衰比が小さくなることを表している。図-37は、上述のことをより明確にみるために減衰比と塑性指数の関係

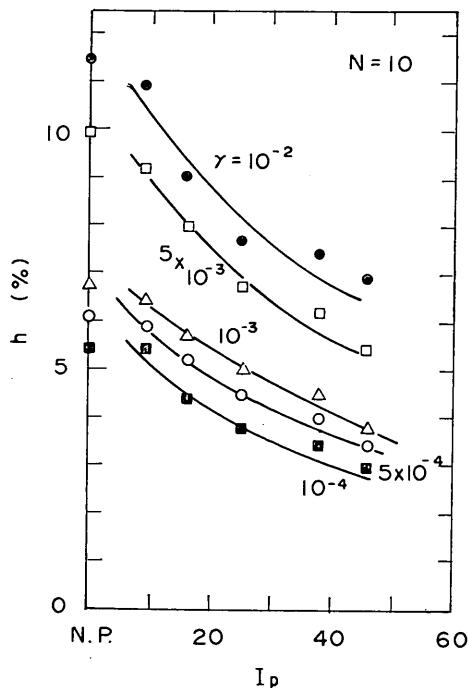
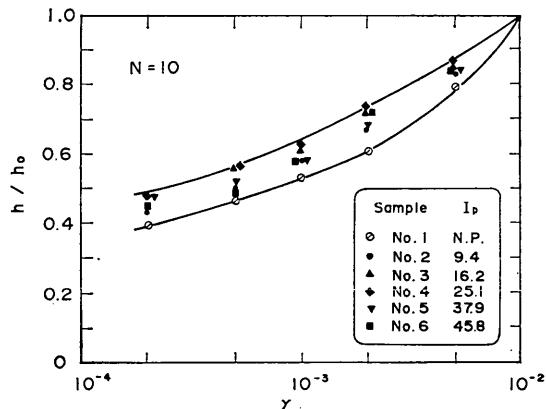


図-37 各ひずみレベルにおける塑性指数の影響

図-38 $h/h_0 \sim \gamma$ 曲線に及ぼす塑性指数の影響

を、各せん断ひずみ振幅に対して示したものである。塑性指数が45.8以上のデータは得られていないが、少なくとも45.8以下の土については、せん断ひずみ振幅に無関係に、塑性指数が大きくなるほど減衰比は減少することがわかる。図-38は、せん断ひずみ振幅が 10^{-2} における減衰比 h_0 で各せん断ひずみ振幅における減衰比 h を除した値のひずみ依存性を示したものである。図-38では、

塑性指数の影響については明確ではないが、 $I_p \leq 45.8$ 以下の混合土については、 $h/h_0 \sim \gamma$ 曲線は比較的せまい範囲内におさまっていることがわかる。

5. 結論

共振振動三軸装置の開発および混合土の動的変形特性に関する実験結果から以下の結論が得られた。

(1)せん断ひずみ振幅が 10^{-6} から、破壊ひずみに至るまでの広範囲のせん断ひずみ振幅に対する剛性率を求める装置として、共振円柱試験装置と振動三軸試験装置を組み合わせた共振振動三軸試験装置が有用である。

(2)試験手法として、供試体に大きさの異なる数段階のせん断ひずみ振幅を加え、そのときの動的変形特性を測定する段階載荷試験を用いることができる。

(3)段階載荷試験では、供試体に加える繰り返し波数の影響が問題となるが、せん断ひずみ振幅が $(2 \sim 5) \times 10^{-3}$ 以下の場合には、繰り返し波数の影響はほとんど無視することができる。なお、繰り返し波数の影響が現れはじめるとときの間隙水圧比は0.15程度であることから、試験中に供試体内に発生する間隙水圧から波数の影響を判断することも可能である。

(4)混合土を用いた実験では、Hardin-Blackの剛性率を求める経験式は適用できず、土の種類の違いに対する補正が必要である。

(5)室内において準備された混合土の再圧密試料では、原位置から採取された試料のようにサンプリング時の乱れの可能性がなく、このような状態の試料を用いて求めたせん断ひずみ振幅 10^{-6} における剛性率から、Hardin-Blackの経験式を試料の塑性指数により補正する方法を示した。

(6)原地盤の間隙比が未知の場合を想定し、塑性指数および平均有効主応力と、せん断ひずみ振幅 $\gamma \approx 10^{-6}$ における剛性率の関係を調べた結果、一定平均有効主応力下では、塑性指数と剛性率の間にある関係があることが明らかとなった。

(7)微小せん断ひずみレベルにおける剛性率の時間効果を、一次圧密終了時の剛性率 G_0 を基準として、それ以後の経過時間のlogスケールの1サイクルにおける剛性率の増分 ΔG との比 $\Delta G/G_0$ で表し、塑性指数との関係をみると、塑性指数が大きくなると時間効果も増大することが明らかとなった。

(8)剛性率のせん断ひずみ振幅依存性を表す $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線は、塑性指数が大きくなるほど、平均有効主応力の影響を受けなくなる。今回行った混合土に対する試験では、塑性指数が9.4以上の場合には、 $G/G_0 \sim \gamma$ 曲線に

及ぼす平均有効主応力の影響はないとみなされる。

(9)せん断ひずみ振幅が 10^{-4} 以上の場合、 $h \sim \gamma$ 曲線は平均有効主応力の影響を受けないと考えてよい。

(10)同一せん断ひずみ振幅における減衰化は、塑性指数が45.8以下では、塑性指数が大きくなるほど小さくなる。

(11)せん断ひずみ振幅が 10^{-2} における減衰比 h_0 で、任意のせん断ひずみ振幅に対する減衰比 h を除した値のひずみ依存性を表す $h/h_0 \sim \gamma$ 曲線は、塑性指数が異なってもある狭い範囲内におさまる傾向にある。

参考文献

- 1) 石原研而(1976)：動土質力学の基礎、鹿島出版会、pp.1~6.
- 2) 梅原靖文(1981)：土の動力学特性の評価に関する二・三の問題、昭和56年度港湾技術研究所講演会講演集、pp.79~124.
- 3) 善功企、梅原靖文、浜田浩二(1978)：共振振動三軸試験装置の試作と粘性土への適用性、第33回土木学会年次学術講演会概要集、第3部門、pp. 120~121.
- 4) 国生剛治、桜井彰雄、江刺靖行(1979)：三軸試験装置を用いた微少ひずみから大ひずみまでの土質動的試験法の開発と砂の物性試験への適用、電力中央研究所報告、研究報告 No.379002.
- 5) Hardin, B.O. and Music, J. (1965) : "Apparatus for Vibration of Soil Specimens during the Tri-axial Test", Symposium on Instrumentation and Apparatus for Soils and Rocks, STP 392, American Society of Testing and Materials, pp.27~42.
- 6) Hardin, B.O.(1970) : "Suggested Methods of Test for Shear Modulus and Damping of Soils by the Resonant Column", Special Procedures for Testing Soil and Rock for Engineering Purposes, 5th Edition, ASTM, STP 479, pp.516~528.
- 7) Hardin, B.O. and Drnevich, V. P. (1972): "Shear Modulus and Damping in Soils : Measurement and Parameter Effects", Proc. of ASCE, Vol. 98, SM 6, pp.603~624.
- 8) Umehara, Y., Zen, K., Higuchi, Y. and Ohneda, H.(1982) : "Laboratory Tests and In-situ Seismic Survey on Vibratory Shear Moduli of Cohesive Soils", Proc. of 9th Japan Earthquake Engineering Symposium, pp.577~584.
- 9) Kokusho, T., Yoshida, Y. and Esashi, Y. (1982): "Dynamic Properties of Soft Clay for Wide Strain Range", Soils and Foundations, Vol. 22, No.4, pp.1~18.
- 10) Hardin, B.O. and Black, W. L. (1968) : "Vibration modulus of normally consolidated clay", Proc. of ASCE, Vol.94, SM2, pp.353-369.

- 11) Afifi, S. S. and Woods, R.D.(1971) : "Long Term Pressure Effects on Shear Modulus of Soils", *Proc. of ASCE*, Vol.97, SM 10, pp.1445~1460.
- 12) Marcuson, W.F. and Wahls, H.E.(1972) : "Time effects on dynamic shear modulus of clays", *Proc. of ASCE*, Vol.98, SM12, pp. 1359~1373.
- 13) Afifi, S.S. and Richart, F.E. (1973) : "Stress-history effects on shear modulus of soils", *Soils and Foundations*, Vol.13, No.1, pp.77~95.
- 14) Anderson, D.G. and Woods, R.D.(1976) : "Time-dependent increase in shear modulus of clay," *Proc. of ASCE*, Vol. 102, GT5, pp.525~537.
- 15) Marcuson, W.E. and Wahls, H.E.(1978) : "Effects of time on damping ratio of clays", *Dynamic Geotechnical Testing, ASTM STP 654*, pp. 126~147.
- 16) 梅原靖文, 善 功企, 浜田浩二(1978) : 塑性の異なる混合土の動的変形定数のヒズミ依存性, 第13回土質工学研究発表会講演集, pp.581~584.
- 17) Zen, K. Umehara, Y. and Hamada, K.(1978) : "Laboratory Tests and In-situ Seismic Survey on Vibratory Shear Modulus of Clayey Soils with Various Plasticities", *Proc. of 5th Japan Earthquake Engineering Symposium*, pp.721~728.
- 18) Hardin, B. O. and Richart, F.E., Jr. (1963) : "Elastic Wave Velocities in Granular Soils," *Proc. of ASCE*, Vol. 89, SM1, pp.33~65.
- 19) 小川富美子, 松本一明(1978) : 港湾地域における土の工学的諸係数の相関性, 港湾技術研究所報告, 第17巻, 第3号, pp.3~89.
- 20) 石原研而, 国生剛治(1982) : 土の動的性質, 土質工学ハンドブック, 第10章, 土質工学会, pp. 345~388.

付 錄

式(8), 式(9)における $u(l)$, $v(l)$ は次式により与えられる。

$$u(l) = A \sinh(ql) \cos(lp) + B \cosh(ql) \sin(pl)$$

$$v(l) = -A \cosh(ql) \sin(lp) + B \sinh(ql) \cos(pl)$$

$$A = \theta s \left\{ \frac{-D}{\alpha \beta (C^2 + D^2)} \right\}$$

$$B = \theta s \left\{ \frac{-C}{\alpha \beta (C^2 + D^2)} \right\}$$

$$\alpha = \left[1 + \left(\frac{\mu \omega}{G} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\beta = \left(\frac{\omega l}{V_s} \right)$$

$$C = \overline{m} a_1 + m a_2 + I_3 a_3 + I_2 a_4$$

$$D = m a_1 - \overline{m} a_2 - I_2 a_3 + I_3 a_4$$

$$\overline{m} = \left\{ \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2} \right\}^{1/2}$$

$$m = \left\{ \frac{\alpha + 1}{2\alpha^2} \right\}^{1/2}$$

$$q = \frac{\overline{m} \omega}{V_s}$$

$$p = \frac{m \omega}{V_s}$$

$$a_1 = \cosh(ql) \cos(pl)$$

$$a_2 = \sinh(ql) \sin(pl)$$

$$a_3 = \cosh(ql) \sin(pl)$$

$$a_4 = \sinh(ql) \cos(pl)$$

$$I_2 = \frac{\beta}{\alpha} \left[\left(\frac{I_a}{I} \right) - \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{K_s}{K_{sp}} \right) \right]$$

$$I_3 = \frac{1}{\alpha \beta} \left(\frac{\mu \omega}{G} \right) \frac{K_D}{\left(\frac{\mu I_P}{l} \right)}$$

$$K_{sp} = \left(\frac{GI_P}{l} \right)$$

$$I = \rho I_P l$$