

運輸省港湾技術研究所

# 港湾技術研究所 報告

---

---

REPORT OF  
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH  
INSTITUTE

MINISTRY OF TRANSPORT

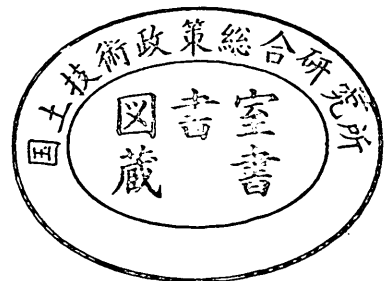
---

VOL. 23

NO. 2

JUNE. 1984

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



# 港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I)

第23巻 第2号 (Vol. 23, No. 2), 1984年6月 (June 1984)

## 目 次 (CONTENTS)

1. 直立消波ケーソンの上床版に働く揚圧力 (第2報)  
——現地観測波圧データの解析——……………高橋重雄・谷本勝利…………… 3  
(Uplift Forces on a Ceiling Slab of Wave Dissipating Caisson with  
a Permeable Front Wall (2nd Report)—Field Data Analysis—  
……………Shigeo TAKAHASHI and Katsutoshi TANIMOTO)
2. 三次元の経験的固有関数による深淺図解析法……………加藤一正・吉松 晃……………27  
(A New Method of Three-Dimensional Empirical Eigenfunction Analysis for  
Contour Maps ……………Kazumasa KATOH and Akira YOSHIMATSU)
3. 海域底泥中のリンの挙動モデルについて……………堀江 毅・細川恭史……………49  
(Modelling of the Behaviors of Phosphorus in Sea Mud  
……………Takeshi HORIE and Yasushi HOSOKAWA)
4. 砂地盤における地中杭の横抵抗に関する実験的研究……………荘司喜博……………75  
(Experimental Study on Lateral Resistance of a Pile with Embedded  
Head in Sand ……………Yoshihiro SHOJI)
5. 波の繰返しを受ける防波堤基礎地盤の安定性に関する研究 (第1報)  
——過剰間隙水圧の挙動解析——……………善 功企…………… 181  
(Study on the Stability of Subsoil under Breakwaters Subjected to Cyclic  
Wave Loading (1st Report)  
—Analysis on Wave-Induced Excess Pore Water Pressure—  
…………… Kouki ZEN)
6. 連続水ジェットによる岩盤掘削機構……………岩崎峯夫・秋園純一…………… 207  
(A Consideration of Rock Excavation Mechanism with Water Jets  
…………… Mineo IWASAKI and Junichi AKIZONO)

## 2. 三次元の経験的固有関数による深浅図解析法

加 藤 一 正\*  
吉 松 晃\*\*

### 要 旨

長年にわたり、港湾周辺の海底地形が繰り返し測量され深浅図として蓄積されている。この深浅図データを基に、過去の海底地形変化の実態を三次元的に把握するための経験的固有関数による解析法を検討した。

まず最初に、三次元の経験的固有関数による解析は、原理的には従来の方法で行えることを示した。しかしながら、従来の方法では、 $(n_x \times n_x)$ の行列計算( $n_x$ :測点数)を行う必要があるため、三次元地形データの場合、計算機容量、計算時間ともに多大となり、実際に解析することがほとんど不可能である。

本報告では、従来と逆の方法により経験的固有関数が計算できることを示した。この新しい方法では、 $(n_t \times n_t)$ の行列計算( $n_t$ :測量回数)を行う。三次元地形データの場合、一般に  $n_t \ll n_x$  であるので、行列計算のための計算機容量、計算時間は新しい方法のほうが圧倒的に少なくてすむ。

新しい方法による三次元の経験的固有関数解析を、実際の深浅図データについて行った。その結果、過去の海底地形変化の実態を三次元的に把握できることが明らかになり、本方法が深浅図の解析にきわめて有効であることが示された。

---

\* 水工部 高潮津波研究室長

\*\* 研修生 (日本港湾コンサルタント)

## 2. A new method of three-dimensional empirical eigenfunction analysis for contour maps

Kazumasa KATO\*

Akira YOSHIMATSU\*\*

### Synopsis

Sea bottom topographies around ports and harbours have been surveyed for a long time and those results are stored in the forms of contour maps and digital data on the magnetic tapes. In this paper, a new method of analyzing these digital data by means of empirical eigenfunction is shown in order to understand the real conditions in the past.

At first it is shown that a three-dimensional analysis can be done by means of a usual method of empirical eigenfunction. In the usual method, however, the computer capacity required for the analysis will become very large and it would take a long time to analyze the data of three-dimensional topographies, because we must calculate a matrix of  $(n_x \times n_x)$ , where  $n_x$  is a number of measured points. That is, the usual method will not be applicable to these cases.

Secondly it is shown that the empirical eigenfunction can be easily calculated by a reverse method of the usual one. In the new method, a matrix we have to calculate is that of  $(n_t \times n_t)$ , where  $n_t$  is a number of surveyed times. Since  $n_t$  is generally much smaller than  $n_x$  in the data of three-dimensional topographies, the computer capacity and computation time required will become considerably smaller and shorter in the new method than in the usual one.

Finally the new method of empirical eigenfunction is applied to the actual digital data of contour maps. The result shows that the new method is very useful one for analyzing the contour maps.

---

\* Chief of Storm Surge and Tsunami Laboratory, Hydraulic Engineering Division.

\*\* Trainee, (Japan Port Consultants, Co. Ltd.)

## 目 次

要 旨	27
1. はじめに	31
2. 従来の経験的固有関数	31
2.1 経験的固有関数の考え方	31
2.2 解析方法	32
3. 三次元の経験的固有関数	33
3.1 三次元解析について	33
3.2 三次元解析の方法	34
4. 三次元の経験的固有関数による深淺図解析例	35
4.1 解析データの概要	35
4.2 三次元解析結果	37
5. おわりに	44
参考文献	45
付録A 理論式の詳細	46

## 1. はじめに

港湾関係者にとって、深浅測量による海底地形の確認は、港湾および航路維持の上で重要な調査業務の一つであり、古くより継続されてきている。この継続的な深浅測量成果は、海底地形変化を確認する唯一の資料であるため、

- イ) 深浅測量成果の永年保存管理をすること
- ロ) 深浅測量成果の迅速な解析整理を可能とすること
- ハ) 特定な港湾周辺における地形変化に関する永続的な監視を確実に専門的立場から行うこと

等を主目的として、深浅図のデジタル化を含む複数の保存形態による深浅図ライブラリーの整備<sup>1)</sup>が港湾技術研究所、および各港湾建設局で進められている。

本報告は、現在整備されつつある深浅図ライブラリーの有効な活用を図るための手法の一つとして、磁気テープに記録されているデジタルデータをもとに統計的手法により地形変化の実態を把握する方法を検討したものである。

沿岸地形の時系列データを、最初に統計的手法によって解析したのは Winant, Inman および Nordstrom<sup>2)</sup>である。その手法は、経験的固有関数による解析と称されており、地形を時間および空間に対応する関数の線型重ね合せとして表現するものである。これは、主成分分析の一種ではあるが、取り扱うのが地形データであり、しかも時系列データであることのために、独自の発達をとげ、その有効性が認められている<sup>3)-16)</sup>。さらにこの手法は、地形データの解析だけでなくとどまらず波のスペクトルデータの解析<sup>11), 17), 18)</sup>、波の遡上データの解析<sup>19), 20)</sup>にまで適用されている。

しかしながら、経験的固有関数による地形変化の解析は、Winantら<sup>2)</sup>がそうであったように、ほとんどが直線状の測線に沿った地形すなわち海底の断面形状の変化を対象とした二次元的なものである。さらにこの手法を進展させ、深浅図のような平面的広がりをもつ地形データの解析も行われている<sup>21)-24)</sup>が、これは Winantら<sup>2)</sup>が意図した『地形を時間および空間に対応する関数の線型重ね合せとして表現する』ものとはなっていない。

三次元的な解析が行われなかった理由の一つは、海底地形データがアナログデータである深浅図としては保存されていたが、計算機処理が可能なデジタルデータとしての保存・蓄積が十分でなかったことである。もう一つの理由は、従来の経験的固有関数の解析手法を三次元地形データに適用した場合、計算機容量、計算時間ともにきわめて大きくなるためである。

本報告は、経験的固有関数による解析を三次元地形データまで取り扱えるようにしたものである。その方法は、3.で詳述するように、経験的固有関数を従来とは逆の考え方に基づいて求めるもので、計算機容量、計算時間がともに大幅に低下する実用的なものである。また、三次元の経験的固有関数を用いた深浅図解析が、三次元的地形変化を立体的に把握するのにいかに有効であるかは、4.において、実際の深浅図を用いた解析例によって示してある。

## 2. 従来の経験的固有関数

### 2.1 経験的固有関数の考え方

経験的固有関数による解析は、フーリエ解析に似たところがあるので、海岸工学の分野ではきわめてなじみ深い波のエネルギースペクトルの基本的考え方を引用しつつ、この解析の考え方について説明する。

図-1は、上段の5個の正弦波(成分波)を重ね合わせると、一番下のように不規則な波ができることを示したものである<sup>25)</sup>。言い換えると、一番下の不規則な波は上段の5個の成分波に分解される。このことを、さらに発展させて実際の不規則な波を解析するのがスペクトル解析である。

図-1を、式で表現すると

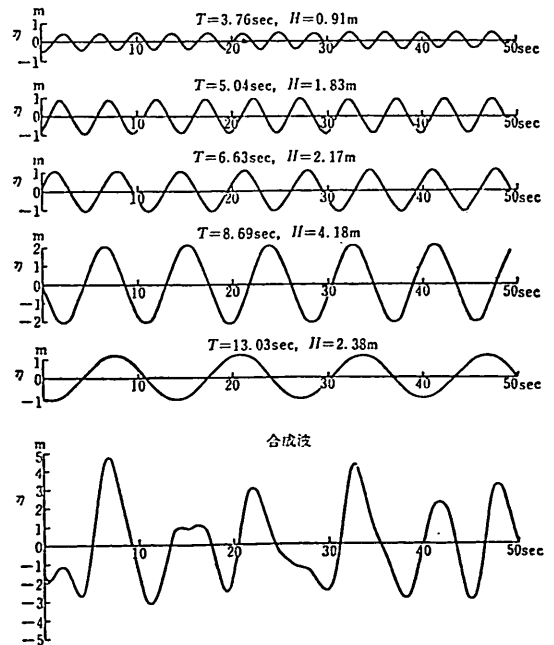


図-1 成分波の合成による不規則波の発生<sup>25)</sup>

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{n=1}^5 \frac{H_n}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_n}t + \varepsilon_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^5 \left(a_n \cos \frac{2\pi}{T_n}t + b_n \sin \frac{2\pi}{T_n}t\right) \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここに、 $H_n$ ,  $T_n$ ,  $\varepsilon_n$  は  $n$  番目の成分波の波高、周期、位相差である。また、 $a_n$ ,  $b_n$  は  $n$  番目の成分波を余弦波、正弦波に分解したときのそれぞれの振幅である。

さて、図-1に示された不規則波形は、ある時刻  $\tau = \tau_1$  のものである。時刻が異なる ( $\tau = \tau_2, \tau_3, \dots$ ) と異なる不規則な波形が現れるであろうが、それらの不規則波形も式(1)のように5個の成分波(10個の余弦波、正弦波)の重ね合せになっているものとする。そうすると、時刻の異なる不規則波形は同一の基本成分波を用いて波高と位相差 ( $H_n$ ,  $\varepsilon_n$ ) あるいは振幅 ( $a_n$ ,  $b_n$ ) を変えるだけで表現できる。このことを式で表現すると

$$\eta(t, \tau) = \sum_{n=1}^5 \left\{ a_n(\tau) \cdot \cos \frac{2\pi}{T_n}t + b_n(\tau) \sin \frac{2\pi}{T_n}t \right\} \quad (2)$$

となる。

今まで、図-1下段を不規則な波形と考えてきた。今度は、見方を変えて、ちょっと不自然な形状ではあるが、海底の断面形状と考えることにする。海底勾配がないことは、平均海底地形からのずれを示したものであると見なせばよい。そうすると横軸は時間ではなく場所を表す変数  $x$  となり、式(2)は

$$\eta(x, \tau) = \sum_{n=1}^5 \left\{ a_n(\tau) \cdot \cos \frac{2\pi}{L_n}x + b_n(\tau) \cdot \sin \frac{2\pi}{L_n}x \right\} \quad (3)$$

と書き替えられる。ここに、 $L_n$  は地形成分波形の波長である。

はたして、式(3)のようにして、不規則な断面地形を表現することは正しいであろうか。

波の場合には、ポテンシャル理論である微小振幅波理論によって単一波の基本解が正弦波形によって表されるというしっかりした裏付けがあるので、不規則な波形を正弦波の重ね合せで表現することの妥当性がきわめて高い。しかしながら、断面地形についてはその基本モードが正弦波形であるという保障はどこにもない。すなわち、式(3)は断面地形を何ら地形的に意味を持たない三角関数の重ね合せで表現しているので正しいとは言えない。

そこで、三角関数の代りに地形的に意味を持つ基本的なモード関数の重ね合せにより海底断面地形を表現する

ことを行う。すなわち、地形的に意味を持つ基本的モード関数を  $e_n(x)$  とし、 $a_n(\tau)$ ,  $b_n(\tau)$  の振幅を統一して  $c_n(\tau)$  とすると、式(3)は次式のように書き替えられる。

$$\eta(x, \tau) = \sum_n c_n(\tau) \cdot e_n(x) \quad (4)$$

ただし、三角関数がそうであるように、式(4)のような表現が可能であるためには、 $e_n(x)$  がお互に直交する関数<sup>注)</sup>でなければならないという制約がある<sup>26)</sup>。

式(4)のように、海底断面地形を時間および空間に対応する関数の線型重ね合せとして表現するのが経験的固有関数による解析である。フーリエ解析では、直交関数として前もって三角関数を与えるのであるが、式(4)の場合は、対象とする海底断面に固有な直交関数が未知である。そこで、この解析では  $e_n(x)$  をデータをもとに経験的に見つけるのである。これが  $e_n(x)$  を経験的固有関数と称するゆえんである。

なお、三角関数は連続関数であるが、経験的固有関数は、取り扱う地形データが離散的であるので、離散的な数値の集合で表現される関数となる。

## 2.2 解析方法

Winant ら<sup>2)</sup> が経験的固有関数を求めた解析方法を以下に示す。

ある測線に沿った海底断面の測点を順番に1, 2, ...,  $n_x$  と番号を付し、この測点において  $n_t$  回断面測量が繰り返されているとする。 $x$  は測点番号、 $t$  は測量年月を表す整数値とする。そして、 $x$  番目の測点の七回目の深浅測量時の水深を  $h(x, t)$  で表す。前節で述べたように、経験的固有関数の解析は、 $h(x, t)$  を次のように表現するものである。

$$h(x, t) = \sum_n c_n(t) \cdot e_n(x) \quad (5)$$

経験的固有関数を求めるには、まず水深データから、

$$a_{ij} = \frac{1}{n_x \cdot n_t} \sum_{t=1}^{n_t} h(i, t) \cdot h(j, t) \quad (6)$$

( $1 \leq i \leq n_x, 1 \leq j \leq n_x$ )

を要素とする実対称相関マトリックス  $A$  を計算する。

式(5)の  $e_n(x)$  は、マトリックス  $A$  の固有ベクトルとして求まる。すなわち、

$$\begin{aligned} A e_n &= \lambda_n e_n \\ 1 &\leq n \leq n_x \end{aligned} \quad (7)$$

の関係を満たす。ここに、 $\lambda_n$  は固有値である。式(5)の  $e_n(x)$  と式(7)の  $e_n$  が同一であることの厳密な証明は、主

注) 式(9)で表される関数。

成分分析に関する成書を参照されたい。<sup>27)~29)</sup>。なお、ベクトル  $e_n$  と関数  $e_n$  の概念が等価であることは参考文献 26) に説明されている。

フーリエ解析では、成分波を周波数の順番にならべるが、この解析では  $e_n(x)$  が対象海岸ごとに異なるので、固有値  $\lambda_n$  の大きい順にならべる。すなわち

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n_x} \geq 0 \quad (8)$$

である。

$e_n(x)$ ,  $\lambda_n$  については、それぞれ次のような関係式が成立する。

$$\sum_{x=1}^{n_x} e_n(x) \cdot e_m(x) = \delta_{n,m} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i &= T_r A = \sum_{i=1}^{n_x} a_{ii} \\ &= -\frac{1}{n_x \cdot n_t} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{t=1}^{n_t} h^2(i, t) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 $\delta_{n,m}$  はクロネッカーのデルタであり、 $n=m$  のとき  $\delta_{n,m}=1$ 、 $n \neq m$  のとき  $\delta_{n,m}=0$  の値をとる。

また、各  $e_n(x)$  の重要度を示すパラメータとしてそれに対応する固有値  $\lambda_n$  により寄与率が次のように定義されている。

$$\text{寄与率} = \lambda_n / \sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i \quad (11)$$

式(5)の  $c_n(t)$  は、 $e_n(x)$  の直交性を利用して式(5)から次のように求まる (付録一A参照)。

$$c_n(t) = \sum_{x=1}^{n_x} h(x, t) \cdot e_n(x) \quad (12)$$

### 3. 三次元の経験的固有関数

#### 3.1 三次元解析について

深浅図の時系列水深データは、一般に

$$h = h(x, y, t) \quad (13)$$

と表される。ここに、 $x$  は沿岸方向測線番号、 $y$  は岸沖方向測点番号、 $t$  は測量年月を表す整数値である。

三次元の経験的固有関数の解析は、式(13)を次のように表現しようとするものである。

$$h(x, y, t) = \sum_n c_n(t) \cdot e_n(x, y) \quad (14)$$

このことは、1点で波を測定した場合のスペクトル解析を、さらに拡張して進行方向が異なる微小振幅の成分波の重ね合せにより平面的な波の場を表現して、波の方向スペクトルへと発展させたのとよく似ている。したがって、式(14)のように三次元の海底地形を場所と時間に対応

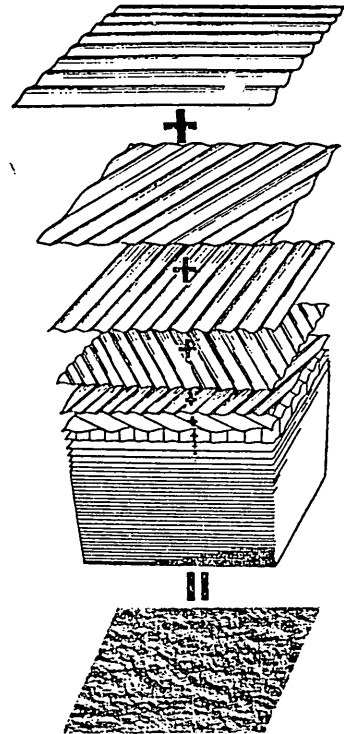


図-2 Pierson-Neumann-James による成分波の重ね合せによる切れ波の生成の概念図<sup>25)</sup>

する関数の線型重ね合せとして表現するイメージは、図-1と同様に図-2でとらえることが出来よう。もちろん、式(14)の  $e_n(x, y)$  は、図-2の成分波(三角関数)ではなく、対象とする海岸に固有のモードであり、データから経験的に得られるものである。

次に、式(14)の解析は前節で述べた方法と、まったく同じ方法で計算し得ることを示す。

図-3(a)は、解析対象とする海岸に格子を設定し、格子交点の水深によって海底地形を表現するときの座標系を示している。この場合、各格子交点の位置は  $x$  軸、 $y$  軸の格子番号により  $(x, y)$  と表される。図-3(b)は、同じ座標系の各格子交点の位置を通し番号 ( $x'$ ) で表現したものである。すなわち、格子交点の位置について、

$$(x, y) \longrightarrow (x') \quad (15)$$

の変換ができる。これは、有限要素法において三角要素の平面位置を通し番号で表現することと似ている。そうすると、ある時刻  $t$  におけるある格子点の水深は、次のように書き替えられる。



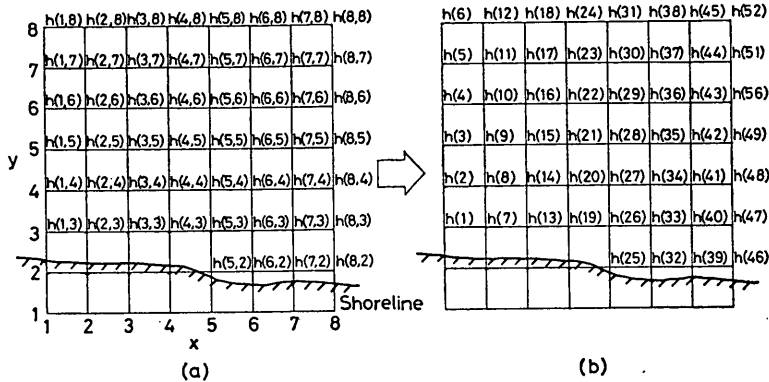


図-3 三次元解析における測点のナンバリング

$$h(x,y,t) = h(x',t) \tag{16}$$

こうなると、式(16)の右辺は前章に述べた方法によって、

$$h(x',t) = \sum_n c_n(t) \cdot e_n(x') \tag{17}$$

と表現することが可能である。こうして解析された  $e_n(x')$  に、今度は座標値変換(15)の逆変換

$$(x') \rightarrow (x,y) \tag{18}$$

を施して  $e_n(x,y)$  を得る。すなわち、一連の式で表現すると、

$$\begin{aligned} h(x,y,t) &= h(x',t) = \sum_n c_n(t) e(x') \\ &= \sum_n c_n(t) e_n(x,y) \end{aligned} \tag{19}$$

となる。

以上のように考えると、三次元の経験的固有関数による解析は、2.2で述べた二次元解析と同じように取り扱える。しかしながら、これを従来の経験的固有関数解析方法で行おうとすると、実際上ほとんど不可能となる。例えば、沿岸方向10km、岸沖方向2kmの範囲に、沿岸方向100m、岸沖方向20m 間隔の長方形格子を設定した場合、測点総数は  $n_x = 100 \times 100 = 10,000$  となる。このデータを用いて、2.2の解析を行う場合、式(6)で明らかなように、途中の計算で10,000行10,000列 (=100,000 Kwords) の行列計算をしなければならない。すなわち、計算機の記憶容量として膨大なものが必要となり、同時に計算時間も実行不可能なほど長くなる。

### 3.2 三次元解析の方法

従来の解析方法では、実際の三次元解析が困難であるので、ここでは実用的な三次元解析の方法について検討

する。なお、前節において三次元解析は座標値変換により二次元解析として取り扱えることが示されたので、ここでの検討は二次元解析についておこなう。

式(7)の関係は、次式のようにも表現できる。

$$\sum_{j=1}^{n_x} a_{xj} \cdot e_m(j) = \lambda_m e_m(x) \tag{20}$$

式(20)を用いると、Winant ら<sup>2)</sup> が指摘しているように、 $e_n(x)$  だけでなく  $c_n(t)$  もお互いに直交関数となっていることが示される (付録-A参照)。すなわち、

$$\sum_{i=1}^{n_x} c_m(t) \cdot c_n(t) = n_x \cdot n_t \cdot \lambda_m \cdot \delta_{m,n} \tag{21}$$

である。

したがって、ここで、 $c_n^*(t)$  を

$$c_n^*(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \cdot n_x \cdot n_t}} c_n(t) \tag{22}$$

で定義すると、 $c_n^*(t)$  は正規直交関数になる。

この  $c_n^*(t)$  は、次式で計算される  $b_{ij}$  を要素とする実対称マトリックス  $B$  の固有ベクトルになっていることが証明できる (付録-A参照)。

$$b_{ij} = \frac{1}{n_x \cdot n_t} \sum_{x=1}^{n_x} h(x,i) \cdot h(x,j) \tag{23}$$

すなわち、

$$\sum_{j=1}^{n_t} b_{ij} \cdot c_n^*(j) = \lambda_n \cdot c_n^*(i) \tag{24}$$

あるいは、

$$\begin{aligned} B \cdot c_n^* &= \lambda_n c_n^* \\ 1 \leq n \leq n_t \end{aligned} \tag{25}$$

が成立する。ここで、式(23)の  $b_{ij}$  は、 $t=i$  と  $j$  時の空間的相関係数であり、式(6)の  $a_{ij}$  は  $x=i$  と  $j$  点における水深変化の相関係数であることを注意されたい。

式(24)、(25)の固有値は式(7)で求まる固有値と同一であることは、付録-Aに示されている式(24)の誘導を参照すれば明らかである。一般に、マトリックスAは $(n_x \times n_x)$ であるので $n_x$ 個の固有値が存在し、一方マトリックスBは $(n_i \times n_i)$ であるので $n_i$ 個の固有値が存在することになり、上述の結果と矛盾が生じるような気がする。しかしながら、マトリックスAの階数(rank)は、マトリックスBの階数と同じであることが証明される(付録-A参照)。すなわち、AとBの零でない固有値(実対称マトリックスであるので正值である)の数が一致しているのである。

さらに、マトリックスBのトレース(trace: 主対角線要素の総和)は、

$$T_r B = \sum_{i=1}^{n_i} b_{ii} = \frac{1}{n_i \cdot n_x} \sum_{x=1}^{n_x} \sum_{i=1}^{n_i} h^2(x, t) \quad (26)$$

であるので、式(10)より

$$T_r B = T_r A \quad (27)$$

が成立する。したがって、固有値 $\lambda_n$ を用いて定義される寄与率(式(11))についても、

$$\frac{\lambda_n}{T_r B} = \frac{\lambda_n}{T_r A} \quad (28)$$

が成立する。

以上の検討結果を言い換えると、2.2で示したマトリックスAから最終的に求められる $c_n(t)$ と、本節で示した式(24)を要素とするマトリックスBの固有ベクトル(関数) $c_n^*(t)$ には式(24)の関係が成立する。すなわち、 $c_n^*(t)$ を求めれば、 $c_n(t)$ は容易に式(24)で計算できる。

一般に、深淺測量回数は、1年に2回の割合で20年間継続されたとしても40回(=n<sub>i</sub>)であり、測点数に較べて圧倒的に少ない数である。したがって、マトリックスA( $n_x \times n_x$ )について行列計算を行うよりもマトリックスB( $n_i \times n_i$ )について演算をおこなう方が、計算容量・時間上きわめて有利である。

マトリックスBより三次元の経験的固有関数解析を行う手順は次のとおりである。

- (a) 測点の平面的な位置を通し番号で表現する。
- (b) 式(24)で計算される $b_{ij}$ を要素とする実対称相関マトリックスBを求める。
- (c)  $T_r B$ を式(26)で計算する。
- (d) マトリックスBの固有値 $\lambda_n$ 、固有ベクトル(関数) $c_n^*(t)$ を計算する。
- (e)  $c_n(t)$ を次式で計算する。

$$c_n(t) = \sqrt{\lambda_n \cdot n_x \cdot n_i} \cdot c_n^*(t) \quad (29)$$

- (f) 経験的固有関数 $e_n(x)$ を次式で計算する(付録-A)

$$e_n(x) = \frac{1}{\lambda_n \cdot n_x \cdot n_i} \sum_{t=1}^{n_i} c_n(t) \cdot h(x, t) \quad (30)$$

- (g)  $e_n(x)$ について、通し番号で表現された平面的な位置を $(x, y)$ で表現する((a)の逆操作)。
- (h) なお、最終的に得られた $e_n(x, y)$ については平面的広がりをもっているもので、深淺図のように等高線で表示するか、三次元的立体表示をする必要がある。

#### 4. 三次元の経験的固有関数による深淺図解析例

##### 4.1 解析データの概要

三次元の経験的固有関数による深淺図解析の有効性を示すために、A海岸で深淺測量によって得られたデータをもとにして解析を試みる。

A海岸の深淺測量は、沿岸方向8.3km、岸沖方向2.0kmの範囲で実施されており、そのデータは、沿岸方向100m、岸沖方向50m間隔の格子交点水深として磁気テープに記録されている。現在、デジタル化されている深淺データの測量年月は、表-1に示すように、1974年6月から1981年10月までであり、計12回実施されている。

図-4は、磁気テープに記録されているデジタルデータをもとに、計算機を使用して12回測量された海底地形を平均して、等深線図化出力したものである。また、図-5は、図-4に矢印で示す沖側上方より見たときの平均海底地形を立体図化出力したものである。立体図化出力では、参考文献(30)に掲載されているプログラムを当所の計算機用に修正して用いた。

表-1 解析対象海岸の測量年月(デジタル化されているもの)

	測量年	月
1	1974	6
2	1974	9
3	1975	2
4	1977	8
5	1977	12
6	1978	10
7	1979	2
8	1979	9
9	1980	1
10	1980	10
11	1981	3
12	1981	10

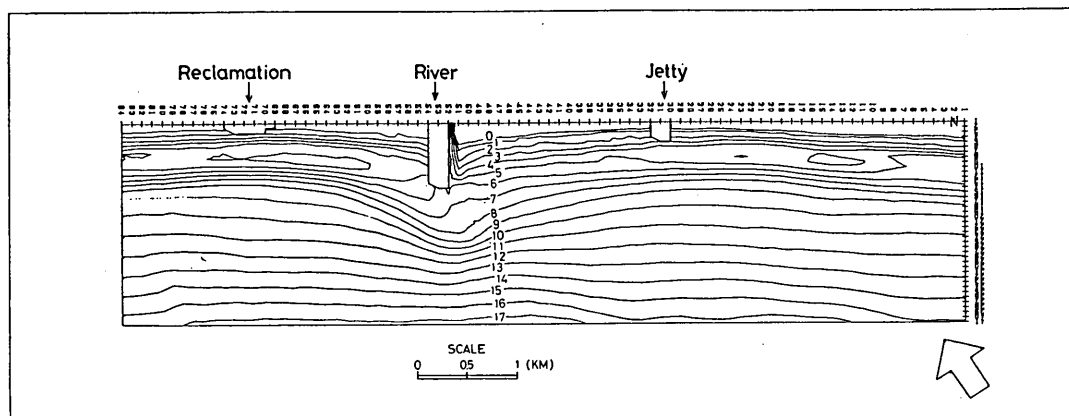


図-4 解析対象海岸の平均地形深浅図

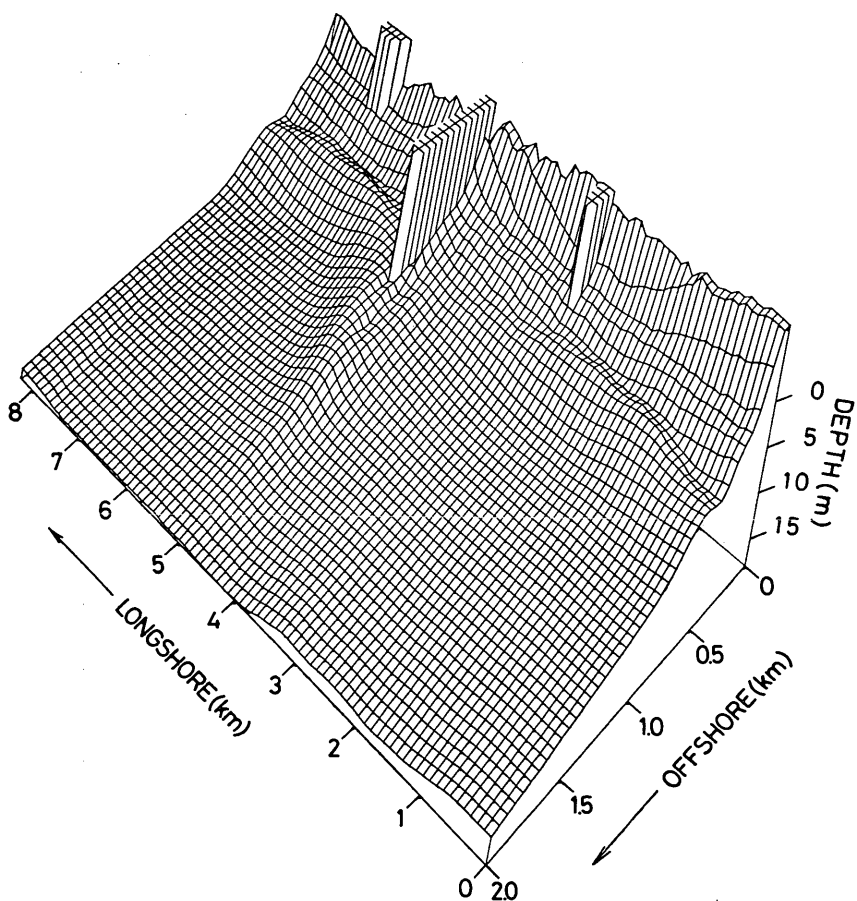


図-5 解析対象海岸の平均地形立体図

解析対象としたA海岸には、図-4、5に見られるように、沿岸方向の中央付近に一級河川であるB川が流入している。B川は、流域面積2,000km<sup>2</sup>以上の大河川である<sup>31)</sup>。図中では、格子間隔および図化出力の関係で1本の大突堤が海に突き出しているように見えるが、実際には河口導流堤が2本建設されている。この河川前面海底は、河川からの流出土砂が堆積していることが等深線の沖への張り出し状況よりわかる。また、河口導流堤の左右海岸には、一段の沿岸砂州が形成されていることがわかる。なお、左海岸中央付近の小突堤、および右海岸中央の埋め立ては、1981年10月の深浅データ(表-1)に記録されているものである。以下の経験的固有関数の解析では、過去の深浅データからこの地域のデータを削除した。

深浅デジタルデータは、水深値をD.L.基準で下方を正として磁気テープに記録されているので、以下の解析において、水深値が小さくなるのは堆積、大きくなるのは侵食をそれぞれ意味する。

#### 4.2 三次元解析結果

表-1に示される深浅データに対して三次元の経験的固有関数の解析を行った。対象海岸の沿岸方向測線数は84、岸沖方向の測点数は41であるので、総測点数は $n_x = 84 \times 41 = 3,444$ であり、また測定回数 $n_t = 12$ である。このデータに対して、2.2で述べた従来の方法を用いると、マトリックスAとして $n_x \times n_x = 11,862$ wordsの記憶容量を必要とし、実際計算では外部記憶を用いる必要がある。一方、3.の従来とは逆の方法による解析では、マトリックスBはわずかに $n_t \times n_t = 144$ wordsの記憶容量となり簡単に計算できる。

まず最初に、各格子点の12回の平均水深を次式で計算し、

$$\bar{h}(x, y) = \frac{1}{n_t} \sum_{t=1}^{n_t} h(x, y, t) \quad (31)$$

次に、各格子点の水深を平均水深からの変化量

$$\Delta h(x, y, t) = h(x, y, t) - \bar{h}(x, y) \quad (32)$$

として表した。 $\bar{h}(x, y)$ については、図-4、5に示されるとおりである。

三次元の経験的固有関数による解析は、式(32)の $\Delta h(x, y, t)$ について行い、モード2まで求めた。ここでは平均水深をさし引いてあるので、モード2は従来の平均水深をさし引かない解析<sup>2)</sup>のモード3に対応する。寄与率は、それぞれモード1が $e_1(x, y)$ で45.5%、モード2が $e_2(x, y)$ で17.3%である。

なお、最終的に得られる $e_n(x, y)$ は三次元量であるので、図-4、5と同様にコンターによる表示と、立体表示をおこなった。以下に解析結果について述べる。

(a)  $e_1(x, y)$  について

図-6は、 $e_1(x, y)$ をコンター表示したものであり、 $e_1(x, y) > 0$ の範囲は斑点を付けてある。図-7は、 $e_1(x, y)$ を立体表示したものであり、そのながめる方向は図-5と同じである。これらを見比べると、視覚的には立体表示のほうが全体の状況を把握し易いように思える。ただし、経験的固有関数は、後述するように、正の値の範囲と負の値の範囲の区別が重要な意味を持つので、図-7の表示のままでは、どこが正の範囲でどこが負の範囲か十分に区別できない。そこで、図-7の立体図を $e_1(x, y) = 0$ の平面で水平に切断し、 $e_1(x, y) \geq 0$ の範囲だけを

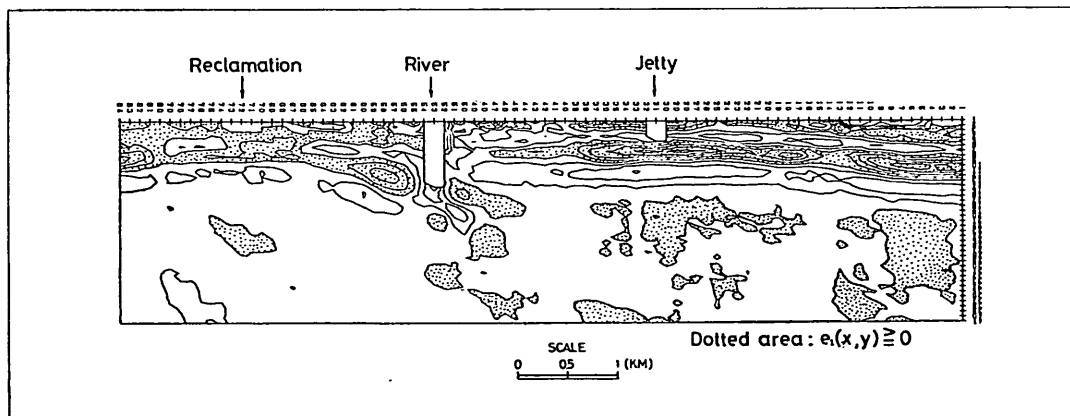


図-6  $e_1(x, y)$  のコンター図

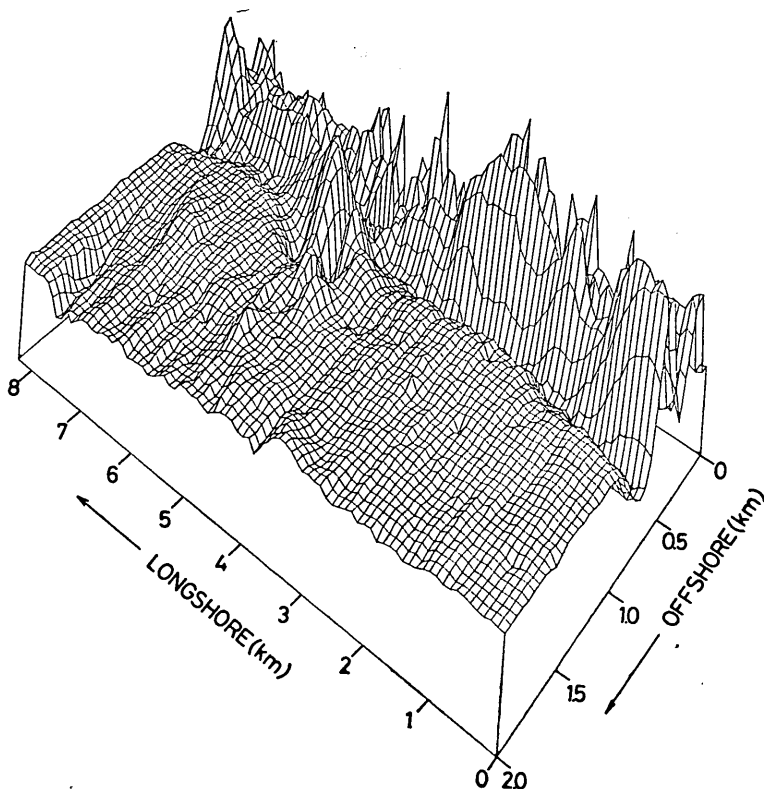


図-7  $e_1(x, y)$  の立体図

図-8に示してある。一方、 $e_1(x, y) < 0$  の範囲はそのまま立体図に描くと若干見にくいので、ここでは、上下をひっくり返して  $|e_1(x, y)|$  として図-9に表示してある。したがって、図-9を上下逆転させ、図-8を重ねると、図-7の立体図と同じになる。

図-10は、 $c_1(t)$  の変化を示したものである。 $c_1(t)$  は1974年から1981年の間に、途中わずかに増減するものの、全体としては直線的に正の値から負の値に変化する。

水深変化量を三次元の経験的固有関数で解析することは、式(4)と同様に、水深変化量を、

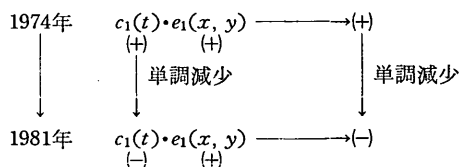
$$\Delta h(x, y, t) = \sum_n c_n(t) \cdot e_n(x, y) \quad (3)$$

で表現するものである。ここで、この解析結果から水深変化を調べるためには、 $e_n(x, y)$  と  $c_n(t)$  を別々に検討するのではなく、それらの積としてみなければならない。

i)  $e_1(x, y) \geq 0$  の領域の変化

$e_1(x, y) \geq 0$  の領域についての  $c_1(t) \cdot e_1(x, y)$  の変化は

次のようになる。



すなわち、 $c_1(t) \cdot e_1(x, y)$  は、単調に減少している。このモードは、 $\Delta h$  が単調に減少することを意味している。水深の定義（下方を正にとってある）より、 $\Delta h$  の減少は堆積を意味する。したがって、 $e_1(x, y) \geq 0$  の領域を示す図-8は、1974年から1981年の間に単調に堆積が生じた範囲を示している。堆積したところは、汀線近くの沿岸砂州が存在するところと、B川前面の飛び石のような細長い範囲である。ただし、B川から真直ぐに沖方向に延びているのではなく、沖では左海岸方向にずれている。全体に堆積の範囲は狭い。

ii)  $e_1(x, y) < 0$  の領域の変化

$e_1(x, y) < 0$  の領域についての  $c_1(t) \cdot e_1(x, y)$  の変化は次のようになる。

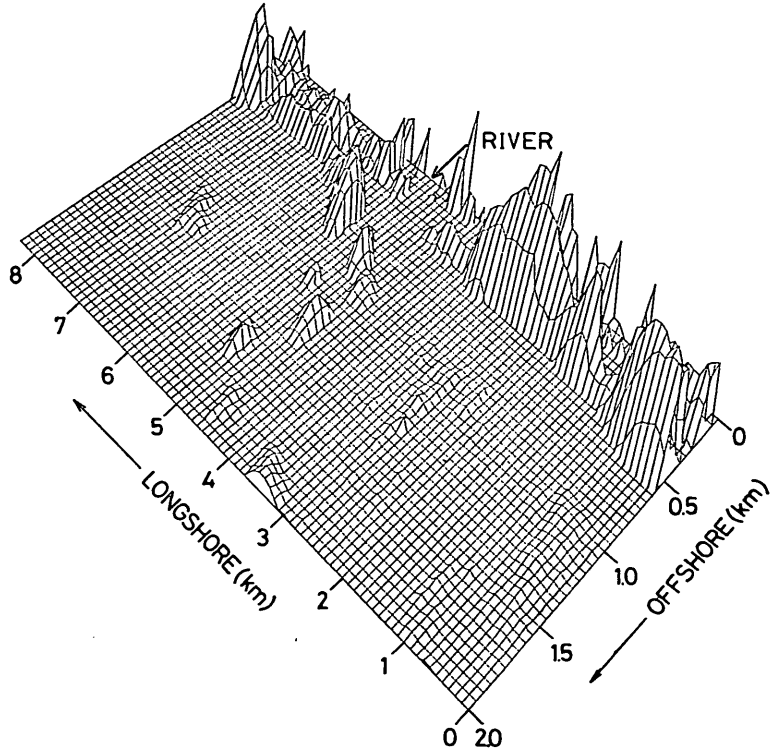


図-8  $e_1(x, y) \geq 0$  の範囲の立体図

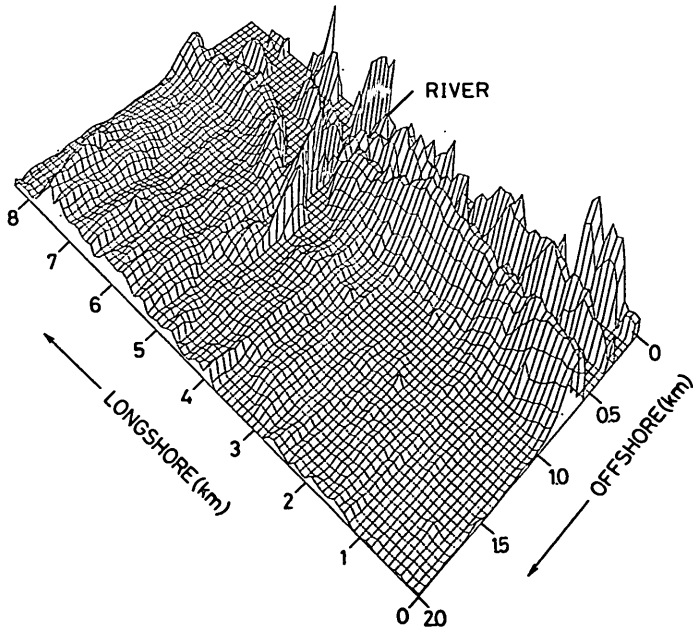


図-9  $e_1(x, y) < 0$  の範囲の立体図 (ただし  $|e_1(x, y)|$  を立体図化してある)

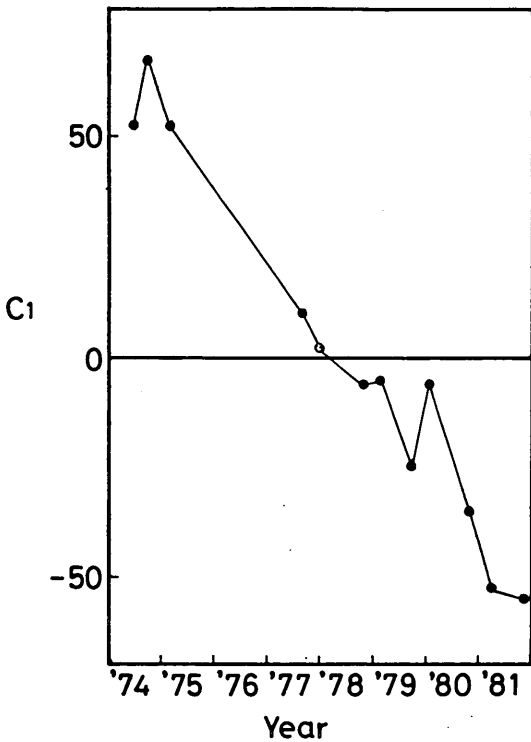
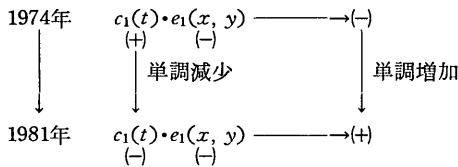


図-10  $c_1(t)$  (モード1の時間関数)



この結果は  $\Delta h$  が単調に増加していることを意味し、 $e_1(x, y) < 0$  の領域を示す図-9は、解析対象期間内に侵食を受けた範囲となる。

侵食範囲は、図-8の堆積範囲よりも広くまた量的にも大きい。特に侵食傾向の著しいところは、2ヶ所ある。その一つは、B川河口導流堤の左海岸の汀線近くで沿岸砂州の存在するところである。この範囲の侵食は沿岸方向に連なった状態で生じている。また、その位置は、図-8に認められる沿岸砂州位置での堆積範囲の沖側である。もう一つの範囲は、河口導流堤の右海岸の沖側の海底である。ここでは、侵食傾向の大きいところが岸沖方向に連なった状態になっている。残りの範囲、すなわち河口導流堤の左海岸の沖側と、右海岸の汀線近くでの侵食傾向はやや弱い。

図-8、9を比較しても明らかなように、A海岸は全体

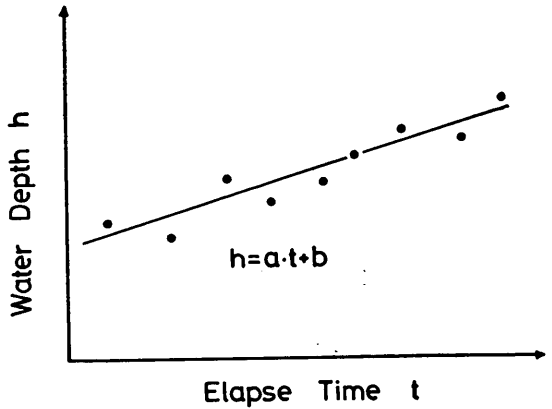


図-11 各測点における水深変化の直線近似

に侵食傾向にある範囲が広く量的にも大きい。しかもその変化は一定速度で単調に進行しているということが図-10の  $c_1(t)$  の変化からわかる。このような単調な変化が存在する場合の地形変化は特殊な状況であり、必ずしも三次元の経験的固有関数による解析でなくても、別の解析でとらえることができる。そのことを示すため、ここでは次のように水深変化のトレンドを計算してみた。

トレンド計算は、図-11に示すようにある測点の水深変化を最小自乗法による直線近似として

$$h(x, y, t) = a(x, y) \cdot t + b(x, y) \quad (94)$$

で表現するものである。水深の定義（下方を正にとってある）より、 $a \geq 0$  のときは侵食傾向、 $a < 0$  のときは堆積傾向をそれぞれ表す。 $a$ の絶対値が大きいことは、その傾向が強いことを意味する。

式94のトレンド計算をすべての測点について行い、求まった  $a(x, y)$  を立体表示したものが、図-12の  $a < 0$  (堆積範囲)、図-13の  $a \geq 0$  (侵食範囲)である。これらの結果を、 $e_1$ について表示した図-8、9と比較すると、微妙な違いはあるが、ほとんど一致していることが認められる。

今回のケースでは、たまたま卓越した地形変化が直線的であったので、以上のように別の解析方法でもその状況をとらえることができるが、変化がもう少し複雑になると、トレンド計算では十分実態を把握できないであろう。

(b)  $e_2(x, y)$  について

モード2の  $e_2(x, y)$  についてコンター表示したものが図-14、 $e_2(x, y) \geq 0$  の立体表示が図-15、 $e_2(x, y) < 0$  の

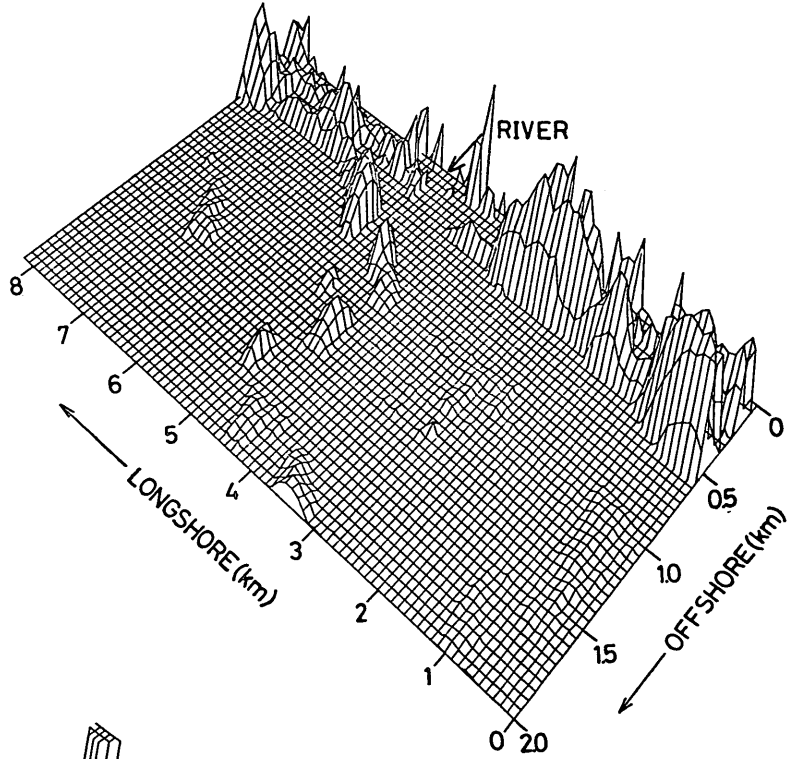


圖-12 水深变化傾向  $a < 0$  (堆積範圍)

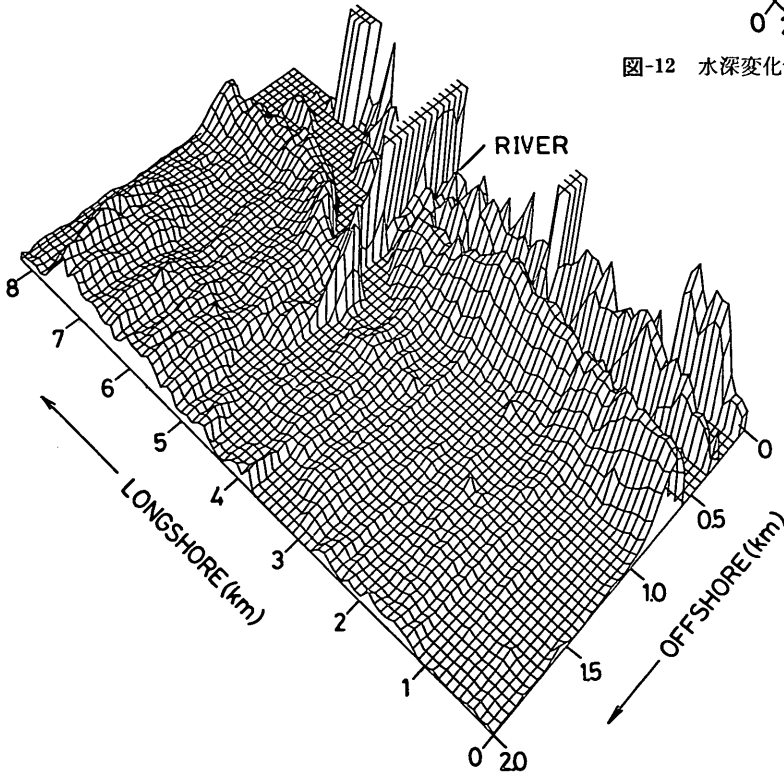


圖-13 水深变化傾向  $a \ge 0$  (侵食範圍)



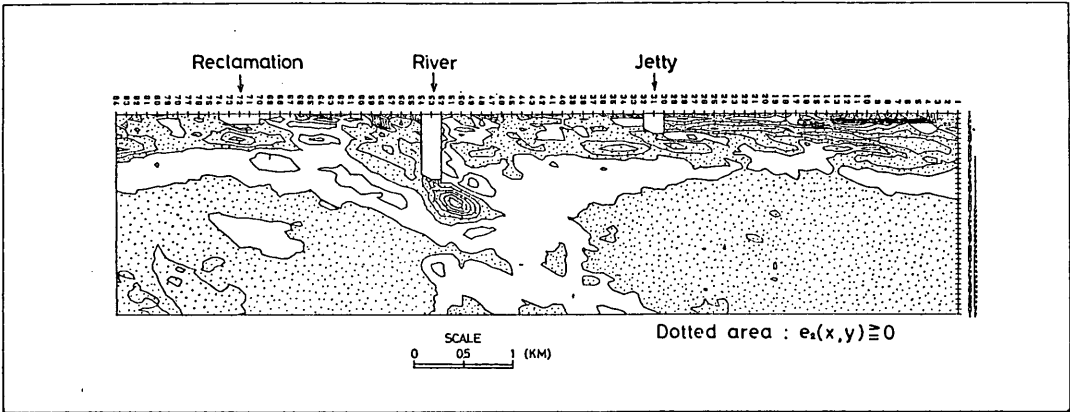


図-14  $e_2(x, y)$  のコンター図

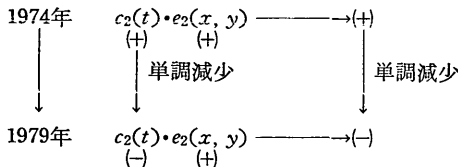
立体表示が図-16である。

図-17は、 $c_2(t)$  の変化を示したものである。ただし、この図では深淺測量の間隔が長くなっている1975年2月～1977年8月の間については破線で結んである。 $c_2(t)$  は、1974年から1979年の間に正の値から負の値に単調に減少する。その後1981年まで、逆に単調増加し負の値から再び正の値にもどる。

ここでも、やはり  $c_2(t) \cdot e_2(x, y)$  の積の型として水深変化特性を検討しなければならない。この場合、図-17で明らかのように、 $c_2(t)$  の変化傾向が1979年を境にして前後で異なるので、 $c_2(t) \cdot e_2(x, y)$  の検討は、前半(1979年まで)と後半(1979年以降)とに分けるのが適切であろう。

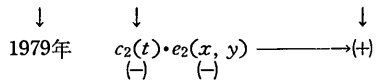
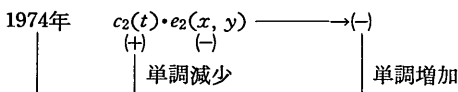
i) 前半(1979年まで)の変化特性

$e_2(x, y) \geq 0$  の領域についての  $c_2(t) \cdot e_2(x, y)$  の変化は次のようになる。



すなわち、 $e_2(x, y) \geq 0$  (図-15) の範囲は、前半に堆積が生じたところを示している。その傾向の最も目立つところは、B川河口導流堤前面の河口より細長く伸びた地域である。

一方、 $e_2(x, y) < 0$  の領域についての  $c_2(t) \cdot e_2(x, y)$  の変化は次のようになる。



すなわち、 $e_2(x, y) < 0$  (図-16) の範囲は、前半に侵食が生じたところを示している。図-16によると、侵食範囲は、ちょうど図-15に認められる河口前面の細長い堆積範囲を取り囲むように存在している。

以上をとりまとめると、1979年までは、B川河口前面に細長く伸びた地域で堆積が生じ、それを取り囲む広い範囲で侵食が生じたと言える。

ii) 後半(1979年以後)の変化特性

図-17に示されるように、後半には前半の変化とは逆に、 $c_2(t)$  は負の値から正の値に変わる。したがって、後半の地形変化は、前半の地形変化と逆になる。すなわち、B川河口前面に細長く伸びた地域で侵食が生じ、それを取り囲む広い範囲で堆積が生じたと言える。

図-17には、 $c_2(t)$  の変化とともにB川の年平均流下流量<sup>33)</sup>の変化も合わせて示してある。年平均流量は、1976年と1980年にピークを有する変化をしている。このうち、1976年のピーク流量年は、ちょうど深淺測量実施間隔が長くなっているため細かく地形変化傾向を知ることが出来ないし、またピーク流量も1980年のものと比較すると少ないこともあって、ここでは度外視すると、 $c_2(t)$  と流量の変化には次のような関係がありそうである。すなわち、流量の少ない期間中は、 $c_2(t)$  が減少し、流量が増加するとやや遅れて  $c_2(t)$  が増加する。この関係を地形変化について言い換えると、河川流量の少ない期間中は、河口前面で堆積、それを囲む広い範囲で侵食が生じる。また河川流量が多いと、その逆の変化が起る。

河口周辺海底の同様な地形変化について、著者ら<sup>32)</sup>は

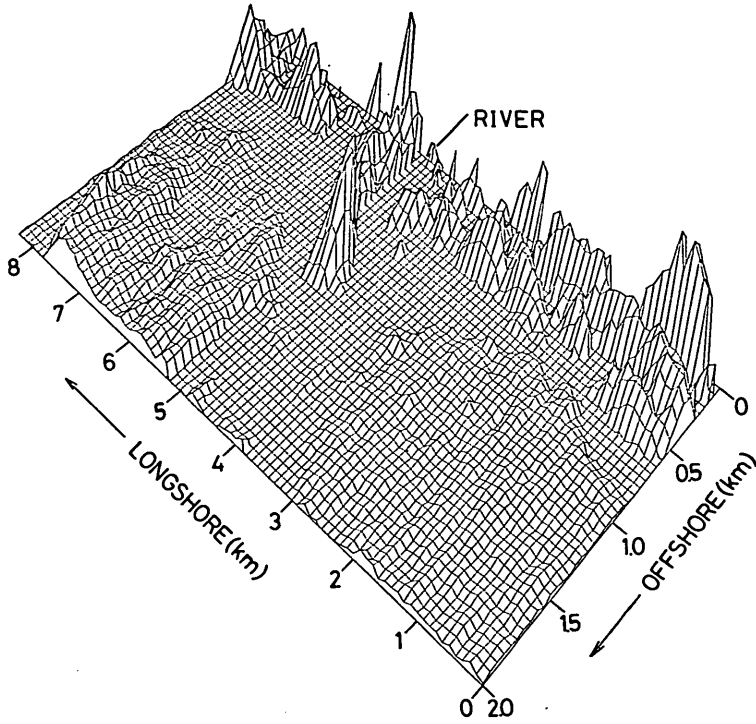


図-15  $e_2(x, y) \geq 0$  の範囲の立体図

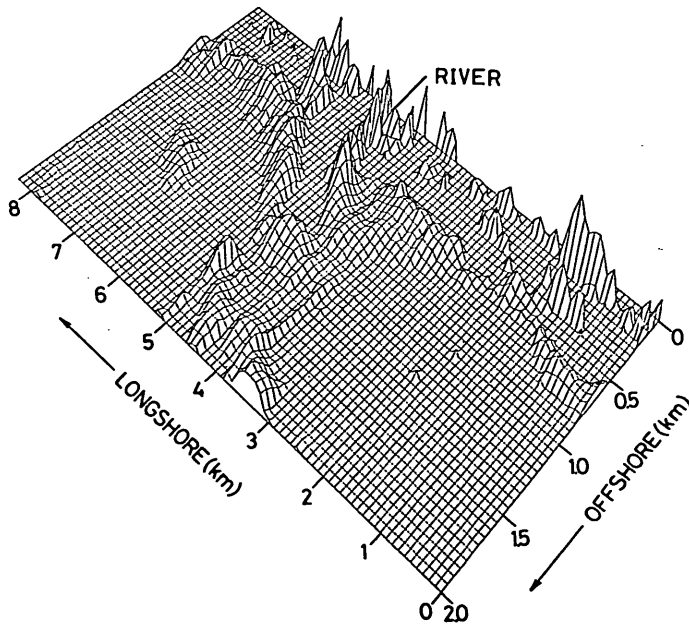


図-16  $e_2(x, y) < 0$  の範囲の立体図 (ただし  $|e_2(x, y)|$  を立体図化してある)

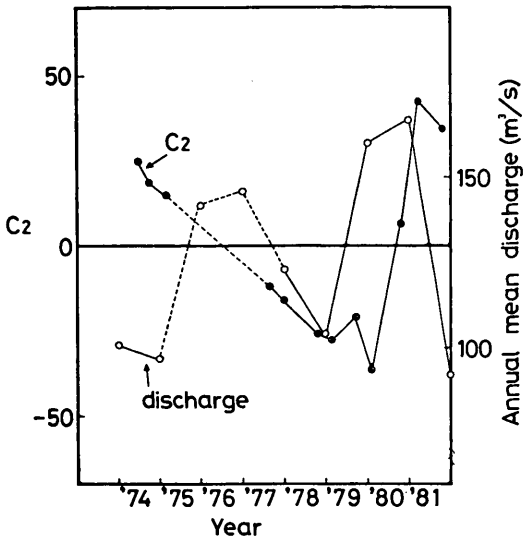


図-17  $C_2(t)$  (モード2の時間関数)

調べたことがあるので、それをここで引用する。

図-18は、1976年9月に発生した吉野川の記録的大出水時の河口周辺地形変化を、ちょうどその前後で実施された深浅測量結果から計算して示したものである。この水深変化図によると、洪水によって吉野川河口左岸沿いに細長く沖へ伸びる著しい侵食が生じていることが認められる。同時に、その侵食地域をとり囲むように周辺

には広く堆積が生じている。この変化は、A海岸の後半の河口周辺地形変化に対応している。

図-19は、1976年9月洪水後から1980年までの大きな洪水の発生がなかった4年間の地形変化を等変化量線で示したものである。洪水時に侵食を受けた河口前面の細長い地域は、その後の波の作用によって、埋めもどされるように堆積が生じている。一方、その周辺の洪水時に堆積があった地域は侵食傾向にあることが認められる。すなわち、この地形変化のパターンはA海岸の前半の河口周辺のそれと一致している。

もちろん、海浜変形には波浪の状況もきわめて重要な要因であるから、 $c_2(t)$  の変化には当然その影響が含まれる。しかし、ここでは、三次元の経験的固有関数の解析例を示すのが目的であるのでこれ以上は述べない。ただ、A海岸についてはさらに検討しているので、まとも次第報告する予定である。

## 5. おわりに

Winant ら<sup>2)</sup> が初めて試みて以来、沿岸地形を経験的固有関数によって解析する有効性が多くの研究者によって確認されている。この方法は原理的には、平面的な三次元地形についての解析も可能である。

しかし、実際に従来の方法によって、三次元地形変化の解析を行うことは、測点数が多いため、計算機容量、計算時間ともに膨大になり、ほとんど不可能である。

そこで、本資料では、従来と逆の方法により経験的固

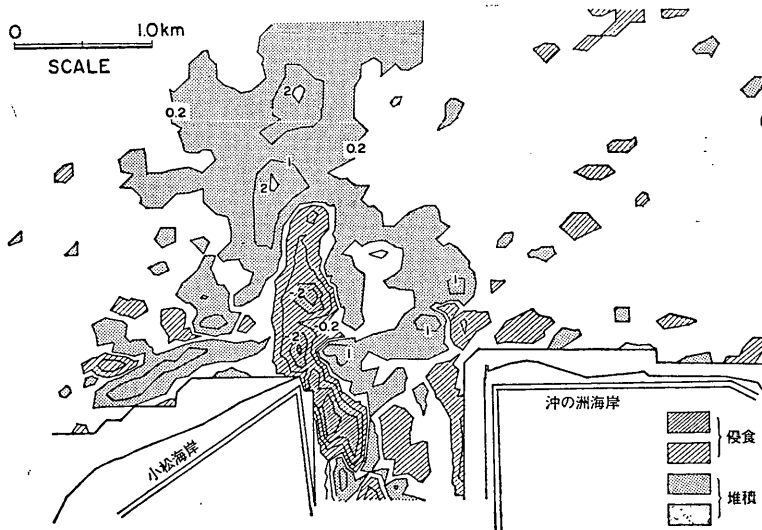


図-18 吉野川河口周辺の海底地形変化 (洪水時)<sup>32)</sup>

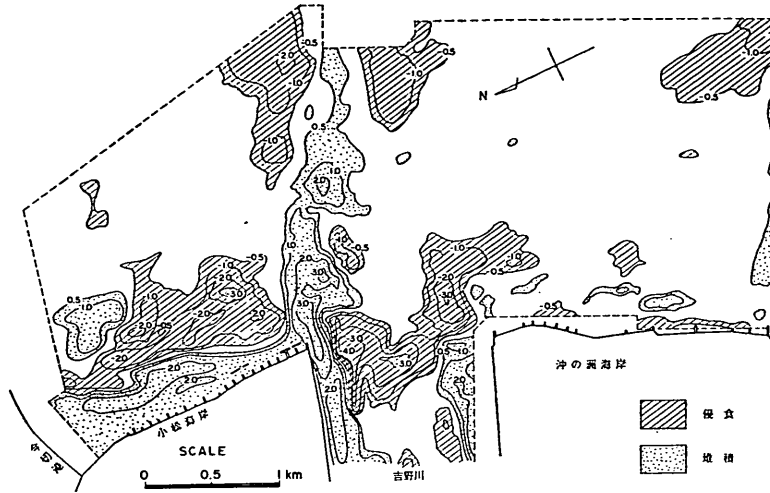


図-19 吉野川河口周辺の海底地形変化(洪水後)<sup>32)</sup>

有関数が計算できることを示した。この方法によると、 $(n_t \times n_i)$  の行列計算 ( $n_t$ : 測量回数) を行うことになる。従来の方法では  $(n_x \times n_x)$  の行列計算 ( $n_x$ : 測点数) の必要があるが、深浅図の場合一般に  $n_t \ll n_x$  であるので、今回示した方法のほうが、計算機容量、計算時間ともに圧倒的に少なくてすむ。なお、具体的計算フローは 3.2 に示してある。

沿岸の地形変化を知る唯一の資料である深浅図の解析は古くより試みられてきた。しかし、何枚かの深浅図をながめて、そこから地形変化の実態を把握することは、相当の経験とかなりの時間を要する複雑な作業であった。このような感覚的解析の対象であった深浅図データに対して、三次元の経験的固有関数の解析を行うと、地形変化の実態を容易に知ることが可能であることを 4. の解析例は示している。しかも、経験的固有関数を 4. のように立体表示すると、視覚的にとらえることができる。

すなわち、ここでの解析例について述べると、

- (i) 解析対象海岸全域で一定割合の侵食傾向にある。
- (ii) 河口導流堤の右海岸の沖合いで侵食傾向が強い。
- (iii) 河口導流堤の左海岸の汀線近くで侵食傾向が強い。
- (iv) 侵食の顕著な地域は、沖合では岸沖方向に、汀線近くでは沿岸方向に存在する。
- (v) 河口前面地域とその周辺地域の地形変化は逆位相で生じている。

等の実態が明らかにされた。

最後に強調しておきたいことは、三次元の経験的固有関数の解析は、最終的な解析ではなく、地形変化の実態を知るだけの解析であるということである。上述 i) ~ v) のように実態が明らかにされれば、それぞれについて、「では、……なのはなぜか。」という疑問を持つことによって、次の検討が始まり、さらには、「今後、海浜はどのように変化していくであろうか。」という方向に発展していかなければならない。

この観点から、A 海岸とともに今までデジタル化されている海岸についても三次元の経験的固有関数による解析を進めている。これらについては、まとも次第報告する予定である。

ここでの解析は当所的大型電子計算機 (TOSBAC, ACOS-1000) を使用した。経験的固有関数をモード 3 まで計算し、それらすべてを立体図化するのに要した CPU 時間は 2 分弱であった。

なお、本報告の理論検討ならびに執筆は加藤が行い、解析プログラムの開発は吉松が行った。また、当所高潮津波研究室橋本典明技官との議論は 2.1 をとりまとめるのに非常に有益であった。そして、適用例の計算および図化出力は漂砂研究室寺崎賢次技官が行った。ここに記して謝意を表する。 (1984年3月31日受付)

#### 参考文献

- 1) 田中則男・加藤一正・柳島慎一: 深浅図ライブラリーの整備について、一深浅図の集中保存、管理、解析システム一、港湾技研資料, No. 203, 1975, 33p.
- 2) Winant, D.C., D.L. Inman and C.E. Nordstrom: Description of seasonal beach changes using

- empirical eigenfunction, J.G.R., Vol. 80, No. 15. 1975, pp. 1979~1986.
- 3) 田中則男・加藤一正・柳島慎一：阿賀野川河口近傍海岸の海底地形変化について(1962年~1973年), 港湾技術研究所報告, 第16巻, 第2号, 1976, pp. 89-165.
  - 4) 田中則男・加藤一正：阿賀野川東海岸における沿岸砂州の特性について, 第23回海岸工学講演会論文集, 1976, pp. 274-278.
  - 5) 橋本 宏・宇多高明：阿字ヶ浦における 海浜過程 (第1報), 第23回海岸工学講演会論文集, 1976, pp. 245-249.
  - 6) Winant, C.D. and D.G. Aubrey : Stability and impulse response of empirical eigenfunctions, Proc. 15th Conf. on Coastal Eng., 1976, pp. 1312-1325.
  - 7) 橋本 宏・宇多高明：阿字ヶ浦における 海浜過程 (第2報), 第24回海岸工学講演会論文集, 1977, pp. 216-220.
  - 8) 橋本 宏・宇多高明：阿字ヶ浦における 海浜過程 (第3報), 第25回海岸工学講演会論文集, 1978, pp. 269-273.
  - 9) Hashimoto, H. and T. Uda : Analysis of profile changes at Ajigaura by empirical eigenfunctions, Coastal Eng. in Japan, Vol. 22, pp. 47-57, 1979.
  - 10) Aubrey, D. G. : Seasonal patterns of onshore/offshore sediment movement, J. G. R., Vol. 84, No. C10, 1979, pp. 6347-6354.
  - 11) Aubrey, D. G., D. L. Inman and C. D. Winant : The statistical prediction of beach changes in Southern California, J. G. R., Vol. 85, No. C6, 1980, pp. 3264-3276.
  - 12) 橋本 宏・宇多高明：経験的固有関数による海浜地形の変化の解析, 土木学会論文報告集, 第305号, 1981, pp. 59~72.
  - 13) 橋本 宏・宇多高明：海浜地形と外力の動的応答関係について, 土木学会論文報告集, 第310号, 1981, pp. 77-88.
  - 14) 野田英明：因子分析法による海岸地形変化の解析, 第28回海岸工学講演会論文集, 1981, pp. 276-279.
  - 15) 服部昌太郎・井崎嘉幸：平均水位変動下での岸沖漂砂と海浜地形, 第28回海岸工学講演会論文集, 1981, pp. 202-206.
  - 16) 加藤一正・田中則男・灘岡和夫：前浜の二次元的地形変化と潮位・波について, 第28回海岸工学講演会論文集, 1981, pp. 207-211.
  - 17) Vincent, C.L. and D.T. Resio : An eigenfunction parameterization of a time sequence of wave spectra, Coastal Eng., Vol. 1, 1977, pp. 185-205.
  - 18) 広瀬宗一・高橋智晴：スペクトル時系列の統計解析, 第28回海岸工学講演会論文集, 1981, pp. 173-177.
  - 19) 加藤一正・灘岡和夫・田中則男：Empirical eigenfunction によるエッジ波の解析, 第27回海岸工学講演会論文集, 1980, pp. 178-182.
  - 20) Katoh, K : Analysis of edge waves by means of empirical eigenfunction, Report of the Port and Harbour Research Institute, Ministry of Transport, Vol. 20, No. 3, 1981, pp. 3-51.
  - 21) 橋本 宏・宇多高明：経験的海浜変形モデルの小川原湖海岸への適用, 第26回海岸工学講演会論文集, 1979, pp. 215-219.
  - 22) 橋本 宏・宇多高明・竹淵 勉：経験的海浜変形モデルによる構造物周辺の地形変化予測, 第28回海岸工学講演会論文集, 1981, pp. 300-304.
  - 23) 橋本 宏・宇多高明・竹淵 勉：離岸堤周辺の海浜地形変化と沿岸漂砂量の岸沖分布について, 第29回海岸工学講演会論文集, 1982, pp. 284-288.
  - 24) 水口 優・岡田一郎・森 寿文：砂浜海岸における三次元地形変化予測に関する研究, 第29回海岸工学講演会論文集, 1982, pp. 323-327.
  - 25) 合田良実・佐藤昭二：海岸・港湾, 新訂版, わかりやすい土木工学講座17, 1981, pp. 88~93.
  - 26) 日野幹雄：スペクトル解析, 朝倉書店, 1977, pp. 95-101.
  - 27) 柳井晴夫・高根芳雄：多変量解析法, 朝倉書店, 1977, 210p.
  - 28) 浦 昭二・竹並輝之訳：多変量解析の基礎, サイエンス社, 1972, 160p.
  - 29) 浅野長一郎：因子分析法通論, 共立出版, 1971, 481p.
  - 30) 森 正武：曲線と曲面, 計算機による作図と追跡, 新しい応用の数学5, 教育出版, 1974, pp.70-144.
  - 31) 東京天文台編纂：理科年表, 丸善, 1981.
  - 32) 加藤一正・田中則男・木村久雄・赤石正廣：大河川河口部周辺の移動床模型実験, 一吉野川河口周辺地形変形について一, 港湾技術研究所報告, 第22巻, 第2号, 1983, pp. 3-87.
  - 33) 建設省河川局編・日本河川協会：流量年表

付録一A, 理論式の詳細

ここでの式番号は本文中の式番号に対応している。

1. 式(12)の誘導

式(5)の両辺に  $e_m(x)$  を乗じ, 両辺について  $x=1$  から  $n_x$  までの和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{n_x} \{h(x,t) \cdot e_m(x)\} &= \sum_{x=1}^{n_x} \{(\sum_{n=1}^{n_x} c_n(t) \cdot e_n(x)) \cdot e_m(x)\} \\ &= \sum_{n=1}^{n_x} c_n(t) \cdot \sum_{x=1}^{n_x} e_n(x) \cdot e_m(x) \end{aligned}$$

式(9)より

$$= c_m(t) \quad (A \cdot 1)$$

2. 式(2)の証明

式 (A.1) より

$$\sum_{i=1}^{n_x} c_n(t) \cdot c_m(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{n_t} \left\{ \sum_{x=1}^{n_x} h(x,t) \cdot e_n(x) \right\} \left\{ \sum_{y=1}^{n_x} h(y,t) \cdot e_m(y) \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_t} \sum_{x=1}^{n_x} \sum_{y=1}^{n_x} h(x,t) \cdot h(y,t) \cdot e_n(x) \cdot e_m(y) \\
 &= \sum_{x=1}^{n_x} \sum_{y=1}^{n_x} \{ e_n(x) \cdot e_m(y) \} \sum_{i=1}^{n_t} h(x,t) \cdot h(y,t)
 \end{aligned}$$

式(6)より

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{x=1}^{n_x} \sum_{y=1}^{n_x} \{ e_n(x) \cdot e_m(y) \cdot a_{xy} \cdot n_x \cdot n_t \} \\
 &= n_x n_t \sum_{x=1}^{n_x} e_n(x) \sum_{y=1}^{n_x} a_{xy} \cdot e(y)
 \end{aligned}$$

式(2)より

$$= n_x n_t \lambda_m \sum_{x=1}^{n_x} e_n(x) \cdot e_m(x)$$

式(9)より

$$= n_x n_t \lambda_m \delta_{n,m} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

### 3. 式(4)の誘導

$$\sum_{j=1}^{n_t} b_{i,j} \cdot c_n^*(j)$$

式(2), (3)より

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{n_t} \left\{ \frac{1}{n_t \cdot n_x} \sum_{x=1}^{n_x} h(x,i) \cdot h(x,j) \right\} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \cdot n_x \cdot n_t}} c_n(j) \right\}
 \end{aligned}$$

式(2)より

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n n_x^3 n_t^3}} \sum_{j=1}^{n_t} \sum_{x=1}^{n_x} h(x,i) \cdot h(x,j) \times \\
 &\quad \times \sum_{y=1}^{n_x} h(y,j) \cdot e_n(y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n n_x^3 n_t^3}} \sum_{x=1}^{n_x} \sum_{y=1}^{n_x} h(x,i) \cdot e_n(y) \times \\
 &\quad \times \sum_{j=1}^{n_t} h(x,j) \cdot h(y,j)
 \end{aligned}$$

式(6)より

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n n_x n_t}} \sum_{x=1}^{n_x} \sum_{y=1}^{n_x} h(x,i) \cdot e_n(y) \cdot a_{xy} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n n_x n_t}} \sum_{x=1}^{n_x} h(x,i) \sum_{y=1}^{n_x} a_{xy} e_n(y)
 \end{aligned}$$

式(2)より

$$= \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n n_x n_t}} \sum_{x=1}^{n_x} h(x,i) \cdot e_n(x)$$

式(2)より

$$= \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n n_x n_t}} c_n(i)$$

式(2)より

$$= \lambda_n c_n^*(i) \quad (\text{A} \cdot 3)$$

### 4. 式(8)の誘導

式(5)の両辺に  $c_m(t)$  をかけて  $t=1 \sim n_t$  の和をとると、

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n_t} c_m(t) \cdot h(x,t) &= \sum_{i=1}^{n_t} c_m(t) \cdot \sum_{n=1}^{n_x} c_n(t) \cdot e_n(x) \\
 &= \sum_{n=1}^{n_x} e_n(x) \sum_{i=1}^{n_t} c_m(t) \cdot c_n(t)
 \end{aligned}$$

式(2)より

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{n_x} e_n(x) n_x \cdot n_t \cdot \lambda_m \delta_{n,m} \\
 &= e_m(x) n_x \cdot n_t \cdot \lambda_m \quad (\text{A} \cdot 4)
 \end{aligned}$$

よって、次式を得る。

$$e_n(x) = \frac{1}{\lambda_m \cdot n_x \cdot n_t} \sum_{i=1}^{n_t} c_n(t) \cdot h(x,t) \quad (\text{A} \cdot 5)$$

### 5. マトリックス $A$ の階数とマトリックス $B$ の階数が等しいことの証明。

二次元の場合について考える。

本文中では水深を  $h(x,t)$  と表現したが、ここでは、 $h(x,t)$  を要素とするマトリックス  $H$  を用いる。この場合、マトリックス  $H$  は  $(n_x \times n_t)$  となる。そうすると、式(6)は次のように書き改められる。

$$A = \frac{1}{n_x \cdot n_t} H \cdot {}^t H \quad (\text{A} \cdot 6)$$

ここに、 ${}^t H$  はマトリックス  $H$  の縦横を逆にした、 $H$  の転置マトリックスである。一方、式(2)も同様に次のように表現される。

$$B = \frac{1}{n_x \cdot n_t} {}^t H \cdot H \quad (\text{A} \cdot 7)$$

したがって、

$$\text{rank}(A) = \min\{\text{rank}(H), \text{rank}({}^t H)\} \quad (\text{A} \cdot 8)$$

$$\text{rank}(B) = \min\{\text{rank}({}^t H), \text{rank}(H)\} \quad (\text{A} \cdot 9)$$

となる。ここに、 $\min\{a, b\}$  は  $a$  または  $b$  のいずれか小さい方の値である。そして

$$\text{rank}(H) = \text{rank}({}^t H) \leq \min\{n_x, n_t\} \quad (\text{A} \cdot 10)$$

の関係が成立する。すなわち、 $A$  と  $B$  の階数は同じであり、 $n_t < n_x$  のとき、それは  $n_t$  以下であると言える。