

運輸省港湾技術研究所

港湾技術研究所 報告

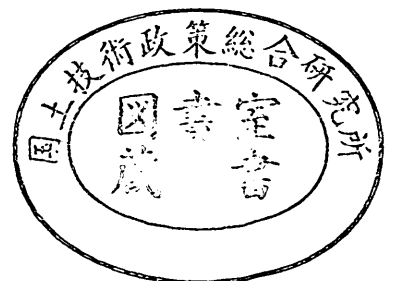
REPORT OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH
INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT

VOL. 23

NO. 1

MAR. 1984

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第23巻第1号 (Vol. 23, No. 1), 1984年3月(Mar. 1984)

目 次 (CONTENTS)

1. 重複波による防波堤前面での二次元的海底洗掘
——底質の移動機構に着目した研究——
……………入江 功・灘岡和夫・近藤隆道・寺崎賢次…… 3
(Two Dimensional Seabed Scour in Front of Breakwaters by Standing Waves
—A Study from the Standpoint of Bedload Movement—
……………Isao IRIE, Kazuo NADAOKA, Takamichi KONDO and Kenji TERASAKI)
2. 波力発電ケーソンに働く波力特性に関する実験
——波エネルギーに関する研究 第2報——
……………小島朗史・鈴木諭司……53
(Wave Forces on a Pneumatic-type Wave Power Extractor Utilizing Caisson
Breakwaters —A Study on Development of Wave Power 2nd Report—
……………Roushi OJIMA and Satoshi SUZUMURA)
3. 有限要素法による地盤の安定解析……………小林正樹……83
(Stability Analysis of Geotechnical Structures by Finite Elements
…………… Masaki KOBAYASHI)
4. 二重矢板式構造物の力学的特性に関する研究
……………大堀晃一・荘司喜博・高橋邦夫・上田 寛
原 道彦・川井 豊・塩田啓介…………… 103
(Static Behavior of Double Sheet Pile Wall Structure
……………Kouichi OHORI, Yoshihiro SHOJI, Kunio TAKAHASHI, Hiroshi UEDA,
Michihiko HARA, Yutaka KAWAI and Keisuke SHIOTA)
5. 大水深施工検査・海底探査技術の開発(第1報)
——捨石マウンド等施工面検測技術の開発研究——
……………木原純孝・白井一洋… 153
(Development of Ultrasonic Prospecting and Inspection Technics for Offshore
Underwater Constructions —Development of the Technics for Sounding Seafloor
Stone Mound— …………… Sumitaka KIHARA and Kazuhiro SHIRAI)

3. 有限要素法による地盤の安定解析

小林 正 樹*

要 旨

有限要素法によって安定解析を行う方法を開発した。この方法を用いて、地盤の支持力と斜面安定の問題を解析した。その結果によると、有限要素法による極限支持力は厳密解と非常に良く一致した。また、斜面安定においては、 $\phi=0$ の場合には有限要素法の値は Taylor の結果と良く一致したが、 $\phi \neq 0$ の場合には有限要素法による安全率の値が Taylor による値より大きな傾向がみられた。

今回開発した方法を用いることにより、これまでは解析が困難であった問題も計算可能となることを示すために、矢板のすべり防止効果の問題をとりあげた。この場合、矢板の根入れ長さ、矢板の剛性が地盤の安定性に及ぼす影響を評価できることが明らかになった。

実際の構造物に対して今回開発した方法を適用した。その結果によると、本方法によれば地盤が不均一な場合において、従来の方法では得られなかったような精度の高い解析が可能となることが示された。

* 土質部 土性研究室長

3. Stability Analysis of Geotechnical Structures by Finite Elements

Masaki KOBAYASHI*

Synopsis

Finite element analysis of the stability of geotechnical structures is developed.

The bearing capacity of strip footings is analysed by this method. The results agree with the classical bearing capacity equations.

The stability of simple slopes is analysed and is compared with conventional results by Taylor. The finite element method appears to give higher safety factors in frictional slopes, whereas it agrees favourably with the conventional method in cohesive slopes.

The effect of a sheetpile on the stability of a slope is analysed to show the versatility of the finite element method. The increase of the stability of a slope due to the existence of a sheet pile can be analysed. The effect of its flexural rigidity is also able to be evaluated.

It is applied to the stability analyses of an oil tank and a breakwater where the conventional slip circle analyses failed to give reliable results due to the nonuniform soil strata. It is shown that the finite elements are useful in practical problems.

* Chief of Soil Mechanics Laboratory, Soils Division

目 次

要 旨	83
1. ま え が き	87
2. 有限要素法による安定解析の手法	87
2.1 土の力学モデル	87
2.2 解析の手法	87
3. 地盤の支持力	88
3.1 有限要素法による支持力解析	88
3.2 解析範囲の影響	90
3.3 弾性係数とポアソン比の影響	91
3.4 支持力係数 N_c	91
3.5 支持力係数 N_q	91
3.6 支持力係数 N_r	92
4. 斜面の安定	92
4.1 せん断抵抗角 $\phi=0$ の場合	92
4.2 せん断抵抗角 $\phi \neq 0$ の場合	93
5. 矢板のすべり防止効果の解析	93
6. 実際問題の解析	94
6.1 油タンク基礎の安定解析例	94
6.2 防波堤の安定解析例	97
7. ま と め	98
参 考 文 献	99
付 録	99

1. まえがき

港湾施設は地盤が軟弱な地点に建設されることが多い。その際に最も重要な問題となるのは、地盤の破壊を防止することである。従来は、地盤の安定性を検討する場合において、古典的支持力理論や円弧すべり解析の結果を用いるのが一般的であった。円弧すべり計算は、一様な粘土地盤に対しては、過去の破壊例との対応も良く比較的信頼性の高い方法とされている。しかし、地盤が複雑で不均一な場合や荷重条件が偏心傾斜しているような際には、円弧すべり解析のような従来から行われてきている方法では安定解析が困難なことが多い。

このような地盤の安定解析における従来の方法の欠点を補うものとして、有限要素法の適用が考えられる。有限要素法を用いれば、どのような複雑な条件も解析可能となる。これまで、有限要素法は変形を求めるのには適しているが、地盤の支持力や斜面安定などの極限解析には適していないという意見が多かった。この原因は、これまでの有限要素法解析においては、計算手法自体の欠点によって極限状態での計算が不可能となっているためであると思われる。したがって、計算方法に十分な注意を払えば、有限要素法によっても極限解析が可能となる。このような有限要素法による地盤の安定解析が可能となれば、一般に用いられている強度定数 c と ϕ のみを用いて極限荷重や安全率の値を求めることができ、従来の安定解析との比較も容易である。しかも、この際 c と ϕ 以外に必要な定数である弾性係数とポアソン比は極限荷重や安全率にほとんど影響を及ぼさないことが示されている¹⁾。したがって、安定解析を行う場合には、一般の有限要素法解析のように定数決定に迷うこともなくなるという利点がある。本報告は、このような有限要素法の特長に注目し、有限要素法により安定解析を行う方法を紹介し、その精度及び適用性に関する検討を行うものである。

2. 有限要素法による安定解析の手法

2.1 土の力学モデル

地盤の安定解析を行う際には、土をモール・クーロンの破壊基準に従う材料として、強度定数 c および ϕ を用いるのが一般的である。したがって、有限要素法解析においても、モール・クーロンの破壊基準を採用する。ただし、従来の安定解析が剛塑性論に基づいているのに対して、有限要素法では弾塑性論を用いる。剛塑性論では、土の特性を表すものとして破壊基準式のみで十分である。しかし、弾塑性論を用いるためには、破壊基準の他

に塑性ポテンシャルと硬化条件式を規定しなければならない。この3条件が決定されれば、応力一ひずみ関係が自動的に求められることになる。

実際の土の挙動を詳しく調べてみると、土の塑性ポテンシャルは簡単な関数では表現できないとされている。しかし今回の解析では、途中段階での変形の値よりも最終状態の値あるいは、破壊がどの時点で生じるかを問題としている。したがって、塑性ポテンシャルとしてあまり複雑な関数を導入するよりも、従来の塑性論で仮定されている直交性を採用するのが簡便である。このようにして直交性を仮定すると塑性ポテンシャルは降伏関数、すなわち破壊基準式と一致する。

通常安定解析では、土の強度定数 c および ϕ は応力・ひずみによっては変化しないとすることが多い。このような場合には完全塑性条件となり、硬化条件式が不要となる。

このような仮定を行うと、有限要素法によって安定解析を行う際の降伏関数 F および塑性ポテンシャル Q は、モール・クーロンの破壊基準から付録Aに示すような形で与えられる。

なお、土の応力一ひずみ関係を求めるためには、弾性係数 E とポアソン比 ν が必要となる。すなわち、有限要素法による安定解析を行うためには、 c 、 ϕ 、 E 、 ν の4個の定数で必要十分となる。このうち、 E と ν は従来の安定解析では用いられない定数であり、決定するのが困難な点もある。しかし、後に示すように、 E と ν の値は安定解析の結果にはほとんど影響を及ぼさない。もちろん、変形の値は E と ν によって大きく変化するが、今回の解析の主目的は極限状態を求めることにあり、途中での変形の値は付加的なものと考えたほうがよい。したがって、 E と ν の2個の定数の決定に関してはあまり神経質になる必要はないといえる。

2.2 解析の手法

有限要素法によって安定解析を行う際には、破壊状態に近い条件で計算を行うために、計算が収束せずに発散する傾向が強くなる。有限要素法では、計算が収束しなくなる時点を地盤の破壊と対応させている。安定解析のような非線形解析においては、荷重を徐々に増加させながら、その荷重に対してくり返し計算を行う。その際、ある荷重に達すると、いくら計算をくり返しても収束せずに発散するようになる。有限要素法では、この時点を地盤の破壊とみなし、支持力解析の場合の極限荷重として、計算が収束する最後の荷重を採用する。また、斜面安定解析のように安全率を求めるためには、せん断強度に関して安全率を次式のように定義することになる。

$$F = \tau_f / \tau_m \quad (1)$$

ここに、 τ_f はせん断強度であり、 τ_m は発揮されているせん断応力である。

上式のような安全率の定義は、通常の円弧すべり解析のモーメントの比による安全率と異なるようにみえるが、実際には両者の安全率は一致することが示されている²⁾。実際の解析においては、せん断強度を徐々に低下させて計算を行い、計算が収束しない時点を破壊と考え、計算が収束する最大の強度低減率をもって安全率とする。例えば、強度を1/1.3倍にするまでは計算が収束するが、それ以上強度を低下させると計算が発散する場合の安全率は1.3となる。

このように、安定解析を行う際には、計算が発散を地盤の破壊とみなしている。したがって、手法を選択する場合には、十分に安定性のあるものを用いなければならない。つまり、計算法自体の欠点によって収束すべきときに発散するような手法は安定解析には適していない。今回の解析では、仮想的な弾・粘塑性理論によって弾塑性理論に基づくモデルの計算を行う方法を用いた³⁾。この方法は非常に安定性の高いものであり、安定解析に適している。この手法の詳細は付録Aを参照されたい。

3. 地盤の支持力

3.1 有限要素法による支持力解析

今回有限要素法で行う支持力解析は、一様な水平地盤上の帯基礎の鉛直等分布荷重に対するものを対象としている。鉛直等分布荷重に対する帯基礎の極限支持力は、次式のような支持力公式で与えられる。

$$q_u = cN_c + 0.5B\gamma N_\gamma + qN_q \quad (2)$$

ここに、

q_u : 極限の支持力

c : 土の粘着力

γ : 土の単位積重量

B : 基礎幅

q : 上載荷重

N_c, N_γ, N_q : 支持力係数

この支持力公式を求めるに当たっては、支持力係数 N_c, N_q, N_γ を別個に計算し、それらを重ね合わせている。厳密に塑性論的考察を行うと、このような重ね合わせは正しくないとされている。したがって、有限要素法による支持力解析の結果を従来得られている支持力理論と比較する際には、3個の支持力係数に対応するものを別個に求めるのが良いと考えられる。

このような観点から、支持力係数 N_c に対応するものを求めるために、図-1に示されるような要素分割を用いて帯基礎の有限要素解析を行った。この図に示されるよ

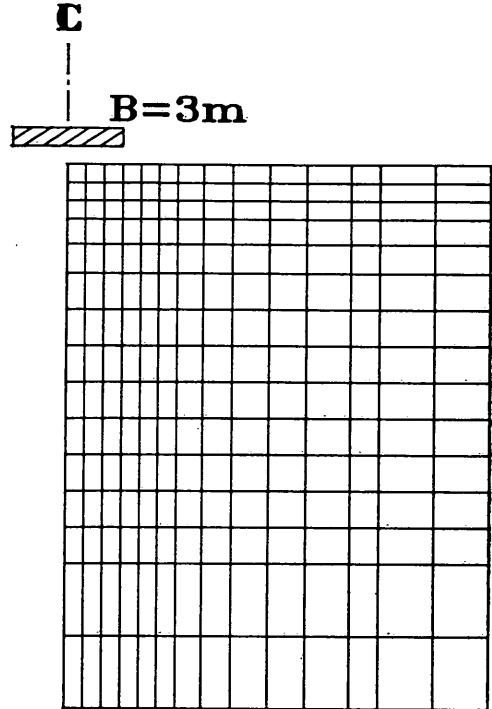


図-1 支持力解析の際の要素分割 (広領域)

うに、基礎幅 $B=3m$ とし、解析範囲は、深さ $15m$ 、幅 $11.5m$ とし、解析範囲の底面は完全固定、左右の境界では水平変位のみを零としている。基礎底面は完全に滑らかであり、土のせん断抵抗角 $\phi=0$ 、粘着力 $c=20 \text{ tf/m}^2$ 、

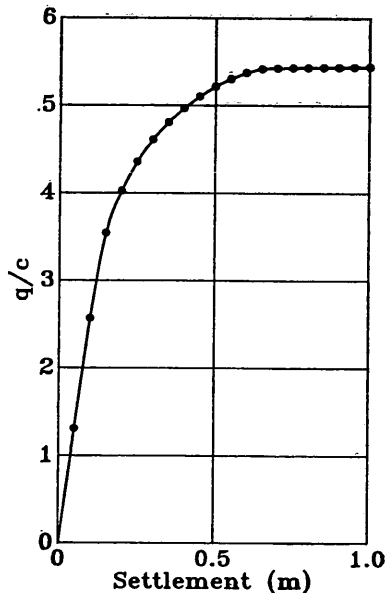


図-2 荷重一沈下曲線 ($\phi=\gamma=q=0$)

有限要素法による地盤の安定解析

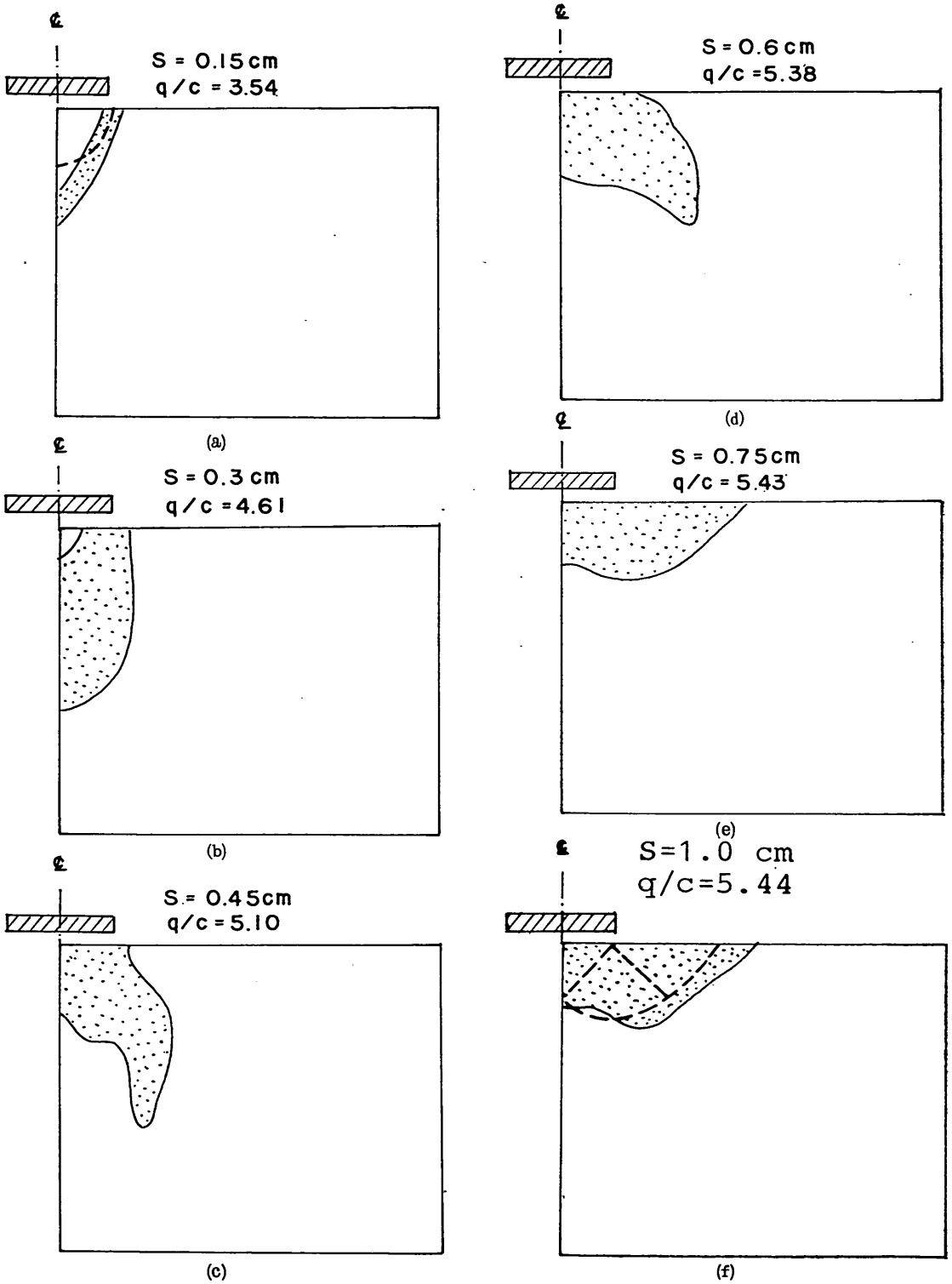


図-3 有限要素解析における塑性域の発生状況

弾性係数 $E=20,000\text{tf/m}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.35$ とした。支持力係数 N_c に対応するものを求めるために、土の自重、上載荷重はともに零としている。図-2は、このようにして計算した場合の荷重と沈下量の関係を示したものである。計算に際しては、基礎底面に対応する節点の鉛直変位を徐々に増加させ、そのときに生じる反力の合計値を荷重としている。この図に見られるように、初期段階では荷重強度は沈下にはほぼ比例して増加するが、ある荷重に近付くと荷重の増加が急減し、その後は変位の増加にもかかわらず、一定の荷重値が続いている。この最終段階での一定の荷重の値は極限支持力に対応するものと考えられる。

図-3は、有限要素法による計算の場合に生じる塑性域の発達の様子を荷重および変位との関係で示したものである。ただし荷重に関しては、荷重強度 q と粘着力 c の比を示している。この値は支持力係数 N_c に対応している。図-3(a)は、沈下量 $S=0.15\text{cm}$ 、荷重強度比 $q/c=3.54$ の場合の塑性域の発生を示したものである。この図に示されるように、沈下および荷重が小さい時には、塑性域は基礎端から中心線に向かって下向きに発生する。このような塑性域は、通常的支持力解析におけるすべり線の形状と大きく異なり、むしろ弾性計算における最大せん断応力の等値線に対応している。弾性計算によると、最大のせん断応力が生じるのは、基礎を直径とする半円である。この図には、比較のために、最大せん断応力を表す線を一点鎖線で示している。塑性域は、この線に近い位置から生じることが明確である。

図-3(b)は、沈下が図-3(a)の2倍になり、荷重比 q/c が4.61になった場合の塑性域を示したものである。この図よりわかるように、塑性域は沈下の進行とともに最大せん断応力線をほぼ中心として拡大していく傾向がみられる。

しかし、さらに沈下が進行し、沈下量 $S=0.45\text{cm}$ 、荷重比 $q/c=5.10$ となると塑性域の発生状況は変化し、図-3(c)のようになる。この図では荷重比が5.10であり、極限支持力に近い値となっている。この場合は、塑性域が基礎の外側にも拡大する傾向がみられ、しかも、基礎中心直下部分のように、図-3(b)で塑性化していたにもかかわらず、弾性域にもどる所もある。

図-3(d)は、沈下量 $S=0.6\text{cm}$ 、荷重比 $q/c=5.38$ の場合の塑性域を示したものである。この図より明らかなように、塑性域は基礎外側に拡大するが、深さ方向にはむしろ浅くなっていく傾向がある。

図-3(e)は、沈下量 $S=0.75\text{cm}$ 、荷重比 $q/c=5.43$ の場合の塑性域を示したものである。この図の塑性域は、

通常的支持力解析のすべり線の形状に近いと思われる。このような塑性域の範囲は、沈下がさらに進行し、 $S=1\text{cm}$ 、荷重比 $q/c=5.44$ となった場合にもほとんど変化せず、図-3(f)のような状態となる。図-3(e)と図-3(f)の間では沈下は進行しているが、荷重の値はほとんど変化していない。したがって、塑性域の変化も少ないと考えられる。図-3(f)には、Prandtl¹⁴⁾によるすべり線形状を示している。この図より明らかなように、有限要素法による塑性域の範囲は、Prandtlのすべり線とよく対応している。

図-3を総合的にみると、塑性域の発達は、弾性計算に対応するものから極限解析に対応するものへと変化しているといえる。すなわち、弾性計算の基礎を直径とする半円付近で発生した塑性域が、荷重の増加とともに、極限解析のすべり線に対応する範囲に変化していく。したがって、途中段階での塑性域の拡大は複雑な傾向を示している。

3.2 解析範囲の影響

基礎の支持力の計算を有限要素法によって行う場合には、あまり広い範囲を解析対象とすると、計算時間および計算容量が増大する。実際の計算において、どの程度までの範囲を解析すれば良いかを調べるために、図-1で示した解析範囲を縮小して、図-4のような要素分割で計

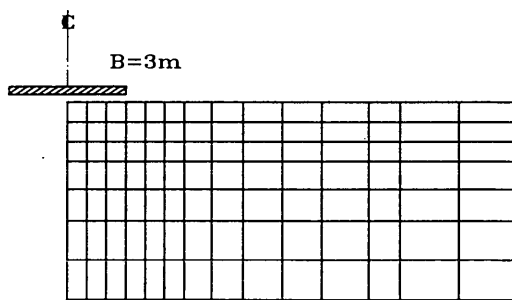


図-4 支持力解析の際の要素分割(狭領域)

算を行った。この場合の条件は、解析範囲を除いてはこれまでのものと同一であり、滑らかな基礎の $\phi=0$ の場合の支持力係数 N_c を求めている。

このようにして、領域を変化させて基礎底面が滑らかな場合の支持力係数 N_c の値を求めた結果によると、図-1の広い領域の場合の $N_c=5.41$ に対して、図-4の狭領域での $N_c=5.42$ となり、支持力係数 N_c の値には解析範囲による差はほとんど認められない。したがって、極限支持力を求めるためには、図-4のようなせまい範囲で十分であると考えられ、以後の計算においてはすべて図-4

のせまい範囲の要素分割を用いている。ただし、塑性域の発生状況に関しては、解析範囲の大小によって大きな差が見られた。この原因としては、図-4のような解析範囲を用いると、深さが十分でないために、基礎層があるような支持力の場合に対応して、下方に発生した塑性域が基礎層に達してしまうためであると考えられる。

3.3 弾性係数とポアソン比の影響

有限要素法による支持力解析では、通常の安定計算で用いる2個の定数、粘着力 c とせん断抵抗角 ϕ の他に、弾性係数 E とポアソン比 ν が必要となる。土の弾性係数とポアソン比を精度よく求めることは困難であるとされている。したがって、もしも有限要素法による極限支持力の値が弾性係数やポアソン比によって大きく変化するようなら、実際の問題に適用するのは困難であるといえる。

このような観点から、土の弾性係数 E とポアソン比 ν を種々に変化させて極限支持力の値を求めた結果を表-1

表-1 支持力係数 N_c に及ぼす弾性定数の影響

E	ν	N_c
200	0.35	5.42
20,000	0.35	5.42
2,000,000	0.35	5.42
20,000	0	5.41
20,000	0.45	5.44
20,000	0.499	5.54

に示す。この表は、せん断抵抗角 $\phi=0$ の場合であり、上載荷重、土の自重をともに無視しており、 $\phi=0$ の場合の N_c 値に対応している。この表よりわかるように、極限支持力の値は、弾性係数 E の値には全く影響を受けない。ポアソン比 ν が極限支持力に及ぼす影響も小さく、 $\nu=0\sim 0.45$ の範囲では極限支持力は変化しないと考えてもよいと思われる。

3.4 支持力係数 N_c

支持力係数 N_c を有限要素法によって求める際には、他の支持力係数 N_q および N_γ の影響をけすために、土の単位体積重量と上載荷重を零として計算を行った。

支持力係数 N_c はPrandtlによってせん断抵抗角 ϕ の関数として次式のような解析解が得られている。

$$N_c = \cot \phi \left[\exp(\pi \tan \phi) \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 1 \right] \quad (3)$$

Prandtlの求めた N_c の値は基礎底面が完全に粗の場合である。しかし、基礎底面と土の摩擦角によって、すべり面の形状は変化するが、極限支持力の値は同一となり、(3)式で与えられるとされている。

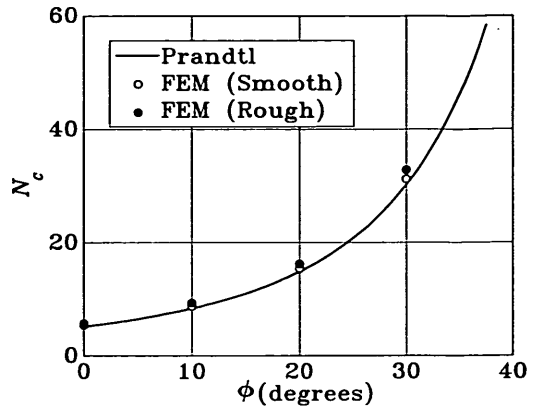


図-5 支持力係数 N_c とせん断抵抗角 ϕ の関係

図-5は、有限要素法によって今回求められた支持力係数 N_c とせん断抵抗角 ϕ の関係をPrandtlによる(3)式の値と比較したものである。この図には、有限要素法による結果のうち、基礎底面が滑らかなものを白丸で示し、基礎底面が完全に粗な場合を黒丸で示している。また、Prandtlによる解析解は実線で表されている。この図より明らかなように、有限要素法による N_c の値は、基礎底面が滑らかか粗かによってほとんど変化せず、しかもPrandtlによる値とよく一致している。

3.5 支持力係数 N_q

支持力係数 N_q を求める際には、土の粘着力 c と単位体積重量 γ を零として上載荷重のみを与え、他の支持力

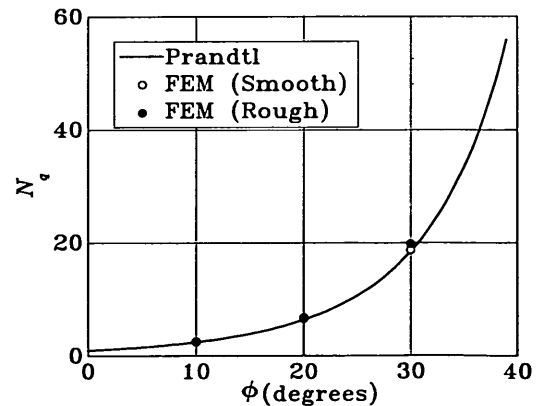


図-6 支持力係数 N_q とせん断抵抗角 ϕ の関係

係数 N_c と N_γ の影響を打ち消した。

支持力係数 N_q も N_c と同様に、Prandtlによって解析解が得られており、せん断抵抗角 ϕ の関数として次式に

よって与えられている。

$$N_q = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \exp(\pi \tan \phi) \quad (4)$$

支持力係数 N_q も基礎底面と土の摩擦角によらず、上式によって与えられる一定値をとるとされている。

図-6は、支持力係数 N_q とせん断抵抗角 ϕ の関係について、有限要素法による結果を Prandtl による解析解と比較したものである。この図では、支持力係数 N_q を調べた図-5と全く同様の比較を行っている。支持力係数 N_q の場合にも、有限要素法による結果は Prandtl の解析解と非常に良く一致していることが明らかである。

3.6 支持力係数 N_r

支持力係数 N_r を求める際には、土の粘着力と上載荷重を零とし、土の自重を考えて計算を行った。

支持力係数 N_r は、他の支持力係数 N_c や N_q と異なり、解析解が得られていない。基礎底面が滑らかな場合に対して Hill のすべり線形状を仮定した解と、基礎底面が粗な場合に対して Prandtl のすべり線形状を仮定した解⁹⁾ をとりあげて、有限要素法の解と比較したものが図-7で

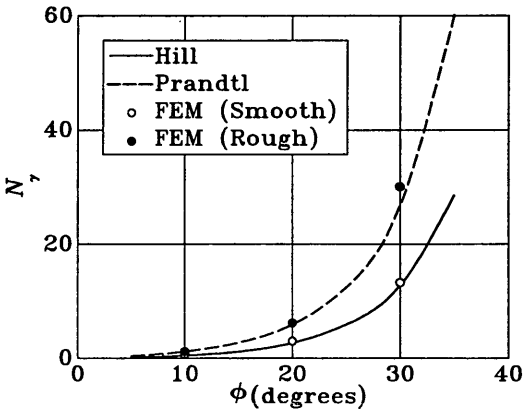


図-7 支持力係数 N_r とせん断抵抗角 ϕ の関係

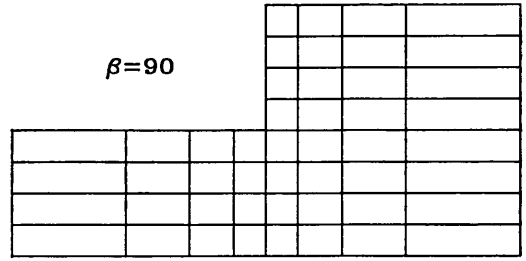
ある。この図に示されるように、有限要素法の結果のうち基礎底面が滑らかなものは Hill のすべり線形状を仮定した値に近く、基礎底面が粗な場合には Prandtl の機構による結果に近い傾向がある。

4. 斜面の安定

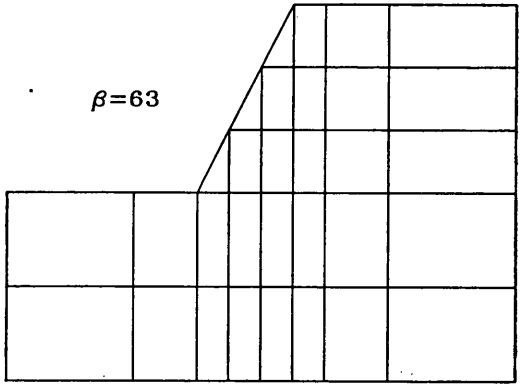
今回解析を行ったのは、均一な土層から構成される単純斜面の安定問題である。このような単純斜面に対しては、Taylor によって安定図表が整備されている⁹⁾。ここでは、有限要素法によって求めた安全率と Taylor の図表による結果を比較してみる。

4.1 せん断抵抗角 $\phi=0$ の場合

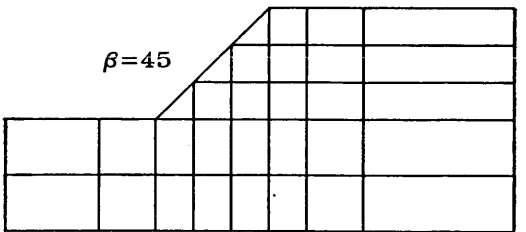
せん断抵抗角 $\phi=0$ の場合の斜面の安定解析を行うために、斜面の傾斜角 β を4段階に変化させ、図-8に示されるような要素分割を用いて有限要素解析を行った。図-8(a)は、傾斜角 $\beta=90^\circ$ に対応する直立斜面であり、図-8(b)は $\beta=63^\circ$ であり、のり勾配が2:1に対応す



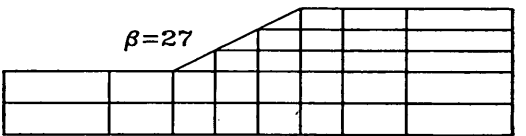
(a)



(b)



(c)



(d)

図-8 斜面安定解析における要素分割

る。図-8(c)は $\beta=45^\circ$ 、図-8(d)は $\beta=27^\circ$ で、のり勾配1:2に対応する。いずれの斜面も高さ $H=6\text{m}$ とし、粘着力 $c=20\text{tf/m}^2$ 、単位体積重量 $\gamma=1.0\text{tf/m}^3$ 、弾性係数 $E=20,000\text{tf/m}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。

Taylorによると、単純斜面の安定は、安定係数 N_s と斜面の傾斜角 β との関係で示されている。比較のために、有限要素解析の結果を安定係数と傾斜角の関係にまとめて示したものが図-9である。この図には、Taylor

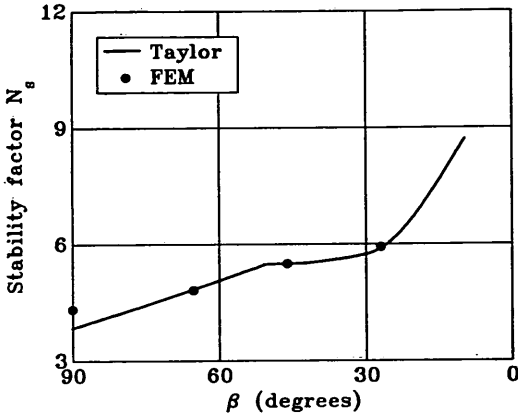


図-9 安定係数 N_s と斜面傾斜角 β の関係($\phi=0$)

による関係を実線で示し、有限要素法による結果を黒丸で示している。図よりわかるように、傾斜角 $\beta=90^\circ$ の場合には、差がみられるが、その他の場合には両者の結果は非常に良く一致している。

4.2 せん断抵抗角 $\phi \neq 0$ の場合

せん断抵抗角 $\phi \neq 0$ の場合にも、 $\phi=0$ の場合と同様にして、図-8に示されるような要素分割を用いて4種類の傾斜角度について有限要素法による計算を行った。ただし、 $\phi \neq 0$ の場合には、安定係数の値 N_s が ϕ の値によって変化する。Janbu²⁷⁾によると、 $\phi \neq 0$ の場合の安定係数を表すパラメーターとして、 $\lambda=c/\gamma H \tan \phi$ を用いると便利であるとされている。通常の解析で現れる λ の値としては、 $\lambda=0\sim 9$ 程度である。したがって、今回の解析においては、 $\lambda=1, 3, 8$ の3種類の値を採用し、それぞれの λ の値に対して安定計算を行った。実際の計算においては、斜面高さ $H=6\text{m}$ 、粘着力 $c=20\text{tf/m}^2$ 、せん断抵抗角 $\phi=20^\circ$ と、3個の定数を固定し、それぞれの λ の値に一致するように、単位体積重量 γ の値を変化させた。

図-10は、このようにして求めた安全率と斜面の傾斜角との関係を Taylor の図表による結果と比較したものである。この図には、3種類の λ の値に対応させて安全

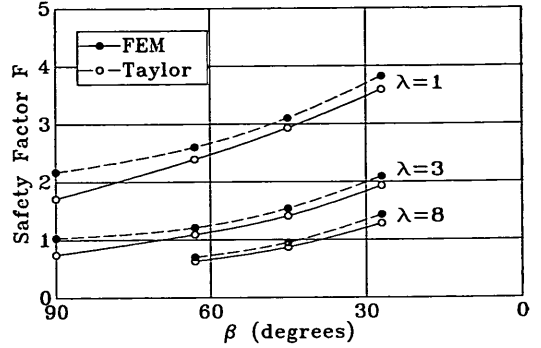


図-10 安全率 F と斜面傾斜角 β の関係($\phi \neq 0$)

率と傾斜角との関係をプロットしている。有限要素法による結果と Taylor の図表による結果を比較すると、有限要素法による安全率は常に Taylor によるものより大きな傾向がみられ、傾斜角が 90° の場合に両者の結果の差が最も大きい。

5. 矢板のすべり防止効果の解析

これまで述べてきた支持力解析や斜面安定解析では、従来の方法でも解析可能な問題を有限要素法で計算を行い、従来得られている結果と比較してきた。ここでは、従来の方法では解析が困難な例として、矢板のすべり防止効果の問題をとりあげ有限要素法で解析する。

今回解析を行うのは、図-11に示すような直立斜面に

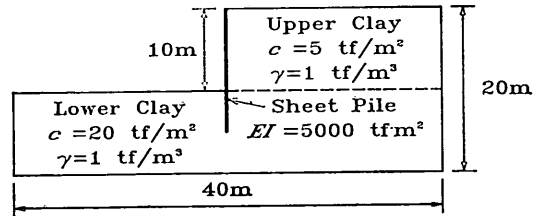


図-11 矢板のすべり防止効果の解析断面図

自立矢板を打設することにより、斜面安定の安全率がどのように増加するかという問題である。このような問題を従来の方法で解析するのは困難である。一般の設計においては、矢板を打設することによって斜面の安定性を増加させる方法を許していない。また、通常のパラメータ解析を用いようとすると、矢板下端以深を通過するような円弧しか計算ができず、安定性の検討が困難である。さらに、従来の安定計算では変形が考慮されていないため、矢板の剛性の影響は計算にはとり入れられな

い。実際には、矢板の剛性があまり小さいと、矢板の効果が減少するために、すべり防止には役立たないことになると考えられる。矢板の剛性を考える方法は、杭の設計には用いられている。しかし、杭の計算では強度定数 c , ϕ を用いず、地盤の破壊に対する安全率に関する情報を与えてくれない。

有限要素法を用いれば、このように困難な矢板と地盤の相互作用の問題も容易に解析することができる。ここでの計算は、図-11に示したように、せん断抵抗角 $\phi=0$ の粘土地盤とし、上層の粘土層と下層の粘土層で強度が異なり、上層では粘着力 $c=5\text{tf/m}^2$ 、下層では $c=20\text{tf/m}^2$ としている。斜面の高さは10mとし、自立矢板の根入長を変化させることにより、安全率がどのように変化するかを調べた。矢板は弾性体とし、曲げ剛性 $EI=5,000\text{tf}\cdot\text{m}^2$ とした。また、粘土の弾性係数 E は、上層で $10,000\text{tf/m}^2$ 、下層で $40,000\text{tf/m}^2$ とし、単位体積重量 γ は、上層、下層ともに 1tf/m^3 としている。なお、粘土のポアソン比 ν としては 0.49 を採用した。

要素分割を行う際には、地盤に対しては通常の二次元要素を用い、矢板には3節点のはり要素⁹⁾を用いた。このはり要素の詳細に関しては付録Bを参照されたい。また、矢板と地盤の間には摩擦が生じないとし、完全に滑らかなものとして計算を行った。実際の計算に当たっては、矢板の節点と地盤の部分の節点の水平変位が等しくなり、鉛直変位は異なるようにしている。

図-12は有限要素解析によって得られた安全率と矢板

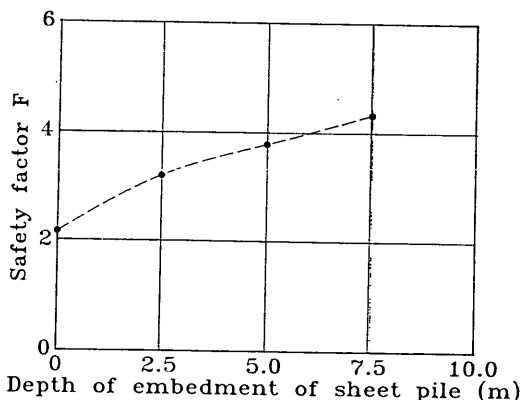


図-12 安全率 F と矢板根入長の関係

の根入長の関係である。ここで得られている安全率は斜面安定の際と同一の意義を持ち、地盤のせん断抵抗とせん断応力の比を表している。この図に示されるように、今回の計算では矢板の根入長を2.5m, 5m, 7.5mの3種類について行っている。矢板根入長が零のものは矢板が

全くない場合を意味している。有限要素法によれば、この図に示されるように、矢板の根入長の増加に伴う安全率の増加を容易に算定することができる。

次に矢板の剛性の影響を調べるために、矢板根入長が5mの場合に対して、剛性 EI の値を $0.5\text{tf}\cdot\text{m}^2$ から500,000 $\text{tf}\cdot\text{m}^2$ まで変化させて安全率の変化を調べたものを図-13に示す。この図より明らかのように、 EI の値がある

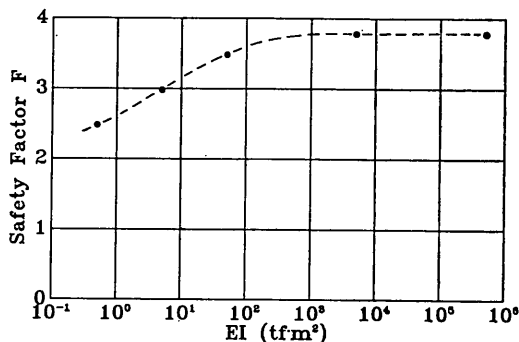


図-13 安全率 F と矢板の曲げ剛性 EI の関係 (矢入長 5 m)

程度以上大きくなると安全率の値は一定となるが、 EI の値が小さくなると安全率は徐々に減少し、 $EI=0$ のときには矢板のない場合の安全率と等しくなる。

このような問題を従来の解析法で計算するのは非常に困難である。例えば、矢板根入長が2.5mの場合に対して通常の円弧すべり法を用いて、通過点を矢板下端とすると、安全率が7.7となり、有限要素法による安全率3.2に比較すると非常に大きい。したがって、このような問題に対して有限要素法を適用する利点は大きいと考えられる。

6. 実際問題の解析

6.1 油タンク基礎の安定解析例

(1) 工事の概要

ここで解析を行ったのは、埋立地盤上に建設されたタンク基礎である⁹⁾。これは、岸壁直接給油方式による船舶給油施設建設の一環として、図-14の平面図に示すように、C重油タンク(36,000kJ)3基とA重油タンク(5,000kJ)2基を建設したものである。タンクの大きさは、前者が直径約50m、高さ約18mであり、後者は直径約19m、高さ約18mである。荷重強度としては、いずれも約19 tf/m^2 となっている。

この地点での土質は図-15に示すように、地表面から標高-13mまでが砂と礫の埋立層であり、その下に厚さ

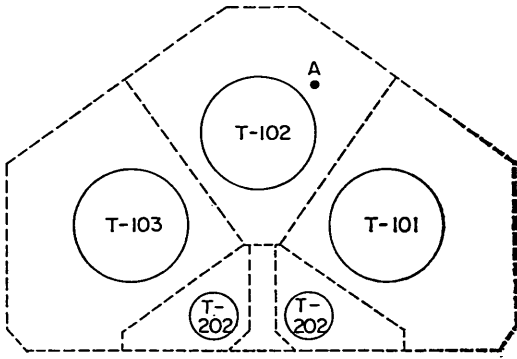


図-14 油タンク基礎平面図

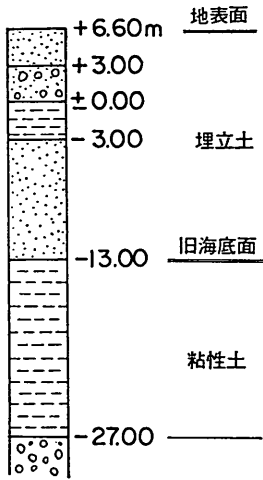


図-15 土質柱状図

14mの軟弱なシルト質粘土層がある。粘土層の下は厚さ30mの砂礫層であり、支持層と考えられる。

埋立は、昭和41年4月に開始されているが、タンクヤード近辺では昭和44年3月より埋立が始められている。タンク建設は昭和48年5月ごろ計画された。一次元圧密理論によってタンク建設時点での粘土層の圧密度を計算すると、約47%となった。図-16はタンク建設時点での粘土層の粘着力 c_u と深度の関係を示したものである。ここでは、乱さない試料に対する一軸圧縮試験の結果から粘着力を求めている。

タンク建設に当たって、地盤が十分な強度を有しないと考えられたので、何らかの地盤改良工法を採用することが考えられた。しかし、この地点では既に約20mの埋立層が存在するので、その下の粘土層を改良することは施工の面からみて困難であった。したがって、埋立層を

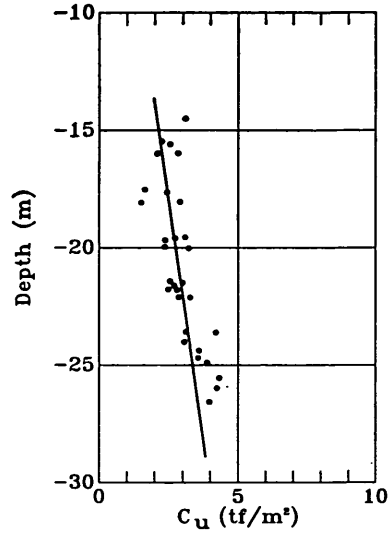


図-16 粘着力 c_u の深度分布

ダイレクトパワー工法によって締め固める工法が採用された。この場合、改良後の N 値を15以上とすることになり、地盤改良施工後にチェックボーリングを行い、この値を確認した。

タンク基礎の支持力を検討するためには、三次元的な解析が必要となる。しかし、三次元的な解析が困難であるために、通常は、円弧すべり法を適用することが多い。図-17は、今回のタンク基礎の支持力の検討を円弧すべり

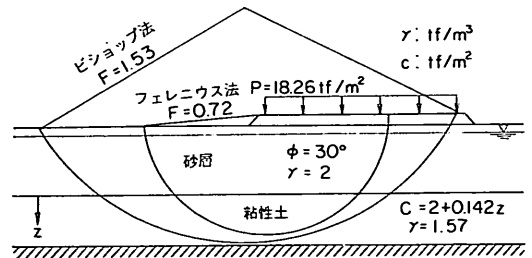


図-17 油タンク基礎の円弧すべり解析

り法で行った結果である。ただし、ここでは大型のタンク1基のみを考えて、他のタンクによる影響は考慮していない。実際には、5個のタンクが存在しているが、それらをすべて考慮することは不可能であり、それぞれのタンクによる荷重は他のタンクに対しては、押さえ荷重のような働きをする。したがって、今回の解析では、タンク1基のみを考慮した。また、円弧すべり解析としては、分割法により修正フェレニウス法（以下フェレニウ

ス法と略称)と簡易ビショップ法(以下ビショップ法と略称)を用いた。図-17より明らかなように、両者の安全率には大きな差がみられ、フェレウス法では、安全率 $F=0.72$ と非常に小さい安全率が得られたのに対して、ビショップ法による安全率は 1.53 と大きな値となっている。この図には両者の臨界円が示されているが、その形状も大きく異なることがわかる。

ここでの地盤は砂と粘土の二層系地盤である。このような地盤に対しては、荷重を砂地盤中で分散させて、粘土表面上の支持力を算定することが行われる。今回の場合、砂地盤中の応力の分散角度を 30° とし、粘土地盤に対して、Terzaghiの支持力公式を用いると、荷重に関する安全率 $F=1.39$ が得られた。

このように、支持力評価法の相違によって結果に大きな差が生じ、フェレウス法の安全率が非常に低いためタンク建設に際しては、十分な施工管理を行うことが決定された。この場合、観測項目としては、連通管の原理を利用した水盛層別沈下計による値と傾斜計による側方変位に重点が置かれた。

タンク建設は48年9月に着工され、水張り試験により安全性の検討を行い無事しゅん工した。図-18は水張り

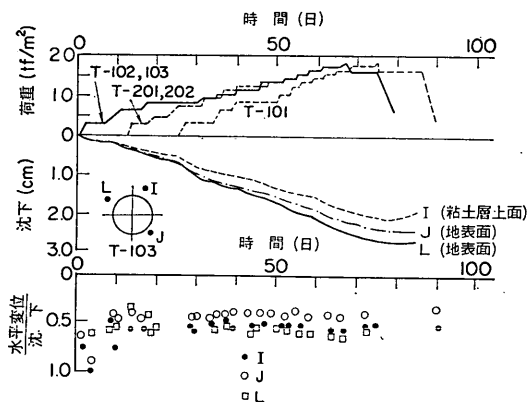


図-18 油タンク基礎の荷重沈下曲線(実測値)

試験中のタンク荷重、沈下量、水平変位と沈下量の比の値が時間とともにどのような推移を示したかをプロットしたものである。ただし、ここでタンク荷重に関しては、5個のタンクにすべて同一の載荷が行われたのではなく、タンクに応じて3種類の載荷段階が採用された。また、沈下量は、この図に示したように、T-103のタンクの周辺地盤の3地点、I、J、Lにおいて測定された値を示した。なお、ここでJとLは地表面における沈下量である。図中には、この3地点における水平変位と沈下の

比と時間の関係をも示している。

(2) 有限要素法による解析

図-19は、今回のタンク基礎を解析するための有限要素

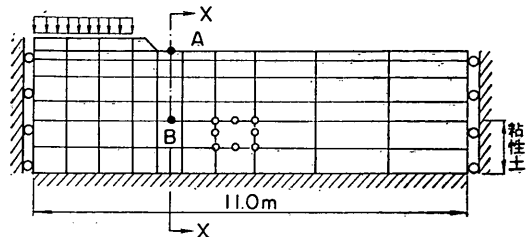


図-19 油タンク基礎の要素分割

素分割を示したものである。ただし、今回は軸対称応力条件で計算を行っている。粘土層に関しては、弾性係数 E の値は粘着力 c_u から $E=210c_u$ として求め、ポアソン比 $\nu=0.45$ とした。また、砂層に関しては、 $E=1,000\text{tf}/\text{m}^2$, $\nu=0.333$ を用いた。

解析に際してはまず最初に支持力解析の場合と同様にして、荷重を段階的に増加させて計算を行った。図-20

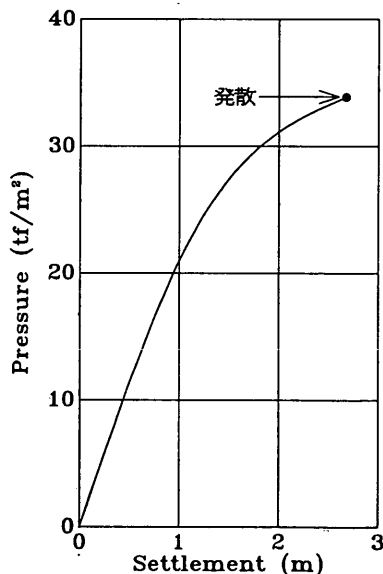


図-20 油タンク基礎の有限要素解析による荷重一沈下曲線

は、この結果得られた、タンク荷重とタンク中心における沈下量の関係を示したものである。今回の計算結果によると、タンク荷重が $33\text{tf}/\text{m}^2$ を超える点で反復計算が収束せず発散現象が生じた。したがって、極限支持力と

しては、 33tf/m^2 が得られた。ただし、荷重が 33tf/m^2 付近になっても、沈下がそれほど増加する傾向がなく、 33tf/m^2 を極限荷重とすることに対して疑問が生じる。この点を明らかにするために 図-19 の要素分割図に示した A 点での水平変位の変化を示したものが 図-21 であ

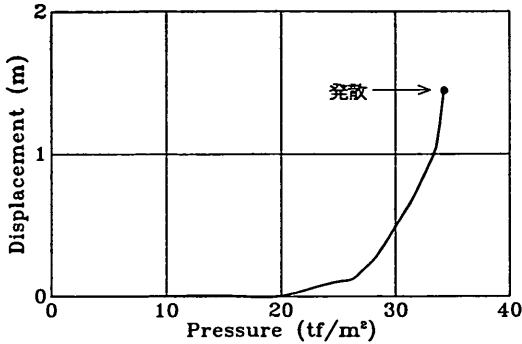


図-21 油タンク基礎の有限要素解析による水平変位一荷重曲線

る。この図は水平変位と荷重の関係をプロットしたものであるが、図-20 と異なり、荷重が 33tf/m^2 に近づくと、水平変位が急増するのが明確である。

次に同一の条件を用いて、斜面安定の場合と同様に安全率の値を求めた。ただし、荷重の値としては 18.26tf/m^2 を採用した。その結果によると、有限要素法による安全率は 1.14 となり、円弧すべり解析のフェレニウス法とビショップ法の平均的な値となっている。

6.2 防波堤の安定解析例

ここで解析を行ったのは、図-22 に示されるような混

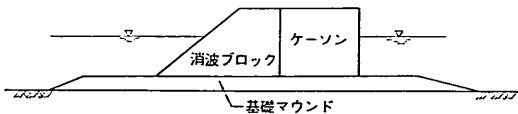


図-22 防波堤断面図

成防波堤の安定問題である。この地点における水深は 10.7m であり、その上に 3m 厚のマウンドを置き、その上にケーソン式防波堤が設置されている。ケーソンの沖側前面には消波ブロックが置かれている。この図では、後の解析を容易にするために実際の断面をやや簡略化して示している。

地盤条件は図-23 に示すように、海底面から約 15m の厚さの砂層が堆積し、その下に 20m 厚の粘性土が存在し、その下には再び 3m 程度の砂層となり、それ以深は

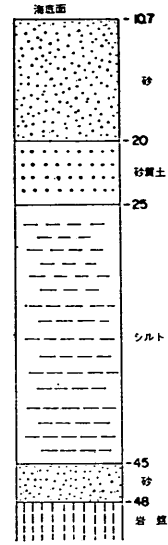


図-23 土質柱状図

砂礫層からなる基盤層が現れる。上部の砂層は海底面から 10m 程度までは砂分も多く、標準貫入試験による N 値も 10 以上ある良好な層である。しかし、海底面から 10m ~ 15m までは、ややシルト分が多くなり、 N 値も低くなっている。中間の粘性土層はシルト質粘土であり、乱さない試料に対する一軸圧縮試験結果から求めた粘着力 c_u と深度の関係を図-24 に示す。この図に示されるように、この粘性土層の c_u の値はほぼ一定であり、 $c_u=4\text{tf/m}^2$ である。粘性土の下の砂層は砂分が多く N 値も 10 以上の層である。

防波堤建設後、ケーソンが沈下する現象がみられ、図-25 に示すような沈下—時間関係で沈下が進行した。この図には、沈下量が最も大きなケーソンの結果を示したものである。この図に示されるように、明らかに大きな沈下が進行しているため、この現象が地盤の破壊によるものか、あるいは単なる圧密現象かを判断する必要が生じた。

図-26 は、通常の円弧すべり解析を行った結果を示したものである。ただし荷重条件としては、波圧を考慮しない常時のものを用いている。なお、上部砂層のせん断抵抗角 $\phi=30^\circ$ 、中間の砂層の $\phi=27.5^\circ$ 、粘性土の $c_u=4\text{tf/m}^2$ 、下部砂層の $\phi=30^\circ$ とし、水中単位体積重量は、砂層で 1.0tf/m^3 、粘性土で 0.6tf/m^3 とした。また、6.1 の油タンク基礎の場合と同様に修正フェレニウス法と簡易ビショップ法の二つの結果を比較している。この図より明らかのように、ビショップ法の安全率が修正フェレニウス法による値に比較して大きくなっている。こ

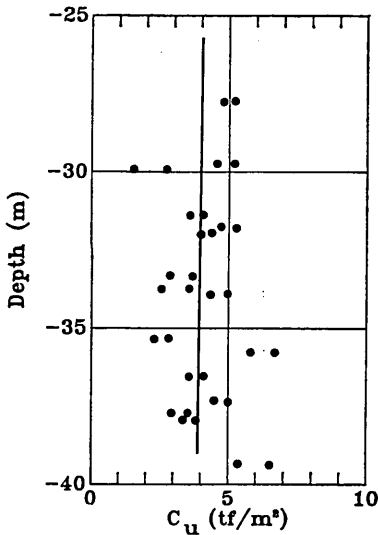


図-24 粘着力 c_u の深度分布

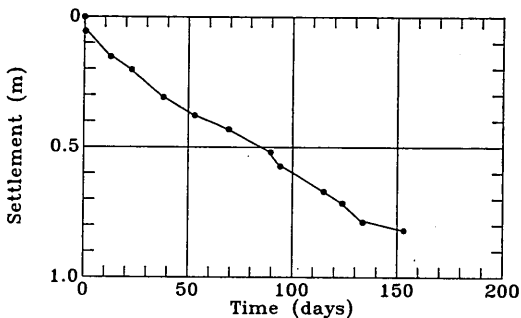


図-25 防波堤の沈下—時間曲線

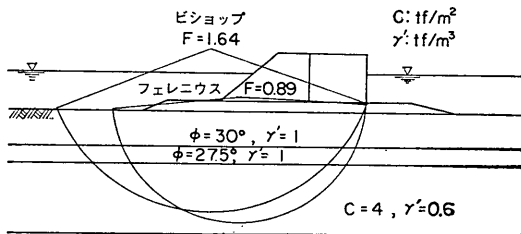


図-26 防波堤の円弧すべり解析

のような傾向は油タンク基礎の解析例でもみられたように、粘性土層の上部に厚い砂層が存在する場合の一般的傾向である。

図-26に示されるように、修正フェレニウス法による安全率が0.89と非常に低いのにに対して、ビショップ法に

よる値が1.64と大きく、実際に生じている現象が破壊と関連があるのかが明確とならなかった。したがって、有限要素法による安定解析を行って安全率の検討を行うこととした。地盤定数としては円弧すべり解析と同一の c と ϕ の値を用い、ケーソンおよび消波ブロックの弾性係数は $1,000\text{tf/m}^2$ とし、ポアソン比は0.3とした。マウンドおよび砂層の弾性係数は $1,000\text{tf/m}^2$ とし、ポアソン比0.3としている。粘性土に対しては、弾性係数を 800tf/m^2 、ポアソン比を0.45としている。図-27は用いた要

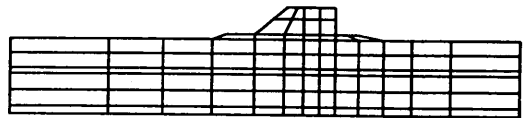


図-27 防波堤の有限要素分割

素分割を示したものである。

有限要素解析においては、斜面の安定解析の場合と同様にして安全率を求めた。この結果によると、今回の防波堤の安全率は1.36となり、円弧すべり解析における修正フェレニウス法とビショップ法の中間の値となっている。これらの値を総合的に判断することによって、ここでの防波堤の沈下現象は破壊ではなく圧密沈下によるものと判断された。

7. まとめ

本報告では、有限要素法によって地盤の安定解析を行う方法を検討した。そのためにも、安定解析を精度良く行うための有限要素解析手法を開発した。次に、この方法を用いて地盤の支持力と斜面安定の問題を解析し、従来から得られている解と比較した。さらに、従来からの方法では解析が困難な問題でも、今回開発した方法によって容易に解析が行える例として、矢板によるすべり防止効果の問題をとりあげた。最後に、実際の構造物の安定解析を有限要素法により行った2例として、油タンク基礎と防波堤の例に対する計算結果を報告している。本報告の成果は次のようにまとめられる。

- 1) 有限要素法により地盤の極限支持力が求められることが明確になり、計算の結果得られた塑性域の発生状況は弾性論による最大せん断応力に対応する部分から、剛塑性論によるすべり線へと変化している。極限荷重での塑性域はPrandtlによるものと良く一致していた。
- 2) 解析範囲および弾性定数は極限支持力の値にほとんど影響を及ぼさない。

3) 有限要素法によって求めた支持力係数 N_c および N_q は基礎底面が滑らかな場合でも粗な場合でも変化がみられず, Pandt による値と良く一致した。

4) 支持力係数 N_r に関しては, 有限要素法による結果は, 基礎底面が滑らかな場合には Hill のすべり線を仮定した値と良く一致し, 基礎底面が粗な場合には Prandtl のすべり線によるものとはほぼ一致した。

5) 有限要素法による斜面安定解析の結果は, $\phi=0$ の場合には Taylor の安定図表の結果と良く一致したが, $\phi \neq 0$ の場合には, 有限要素法による安全率が Taylor によるものより大きい傾向がみられた。

6) 矢板のすべり防止効果のような地盤と構造物の相互作用を考慮しなければならない問題でも, 有限要素法によれば安定解析が容易に行える。しかも, その際, 矢板の剛性によって安全率がどのように変化するかも評価することができる。

7) 油タンク基礎と防波堤の安定解析結果によると, 粘性土の上部に砂層が存在するような場合の安定解析を行う際には, 有限要素法によれば従来の方法よりも信頼性の高い計算が可能となることが判明した。

(1983年11月30日受付)

参考文献

- 1) Smith, I.M. and Hobbs, R.: Finite element analysis of centrifuged and built-up slopes, *Geotechnique*, Vol. 24, No. 4, 1974
- 2) 小林正樹: 地盤の安定計算における安全率の問題点, 土と基礎, Vol. 30, No. 9, 1982
- 3) Zienkiewicz, O.C. and Cormeau, I.C.: Viscoplasticity and creep in elastic-solids—a unified numerical solution approach, *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 8, 1974
- 4) Hill, R: The mathematical theory of plasticity, *Crarendon Press*, 1950
- 5) Chen, W.F.: Limit analysis and soil plasticity, *Elsevier*, 1975
- 6) Taylor, D.W.: Fundamentals of soil mechanics *Wiley*, 1943
- 7) Janbu, N.: Stability analysis of slopes with dimensionless parameters, *Harvard Soil Mech. Series*, No. 46, 1954
- 8) Hinton, E. and Owen, D.R.J.: Finite element programming, *Academic Press*, 1977

9) 梅原靖文, 堀井修身: オイルタンク基礎設計について, 港湾, Vol. 52, No. 4, 1975

付録A. モール・クーロンの構成式に基づく場合の有限要素解析手法

モール・クーロンの破壊基準を用いた弾塑性論により, 降伏関数 F および塑性ポテンシャル Q を求める際には, 次式のように応力不変量 $\sigma_m, \bar{\sigma}, \theta$ を定義しておくことと便利である。

$$\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 \quad (A.1)$$

$$\bar{\sigma} = \left[\frac{1}{2} (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right]^{1/2} \quad (A.2)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\bar{\sigma}^3} \right] \quad \left(-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \right) \quad (A.3)$$

ここに, $J_3 = s_x s_y s_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{zx}^2 - s_z \tau_{xy}^2$ であり, $s_x = \sigma_x - \sigma_m, s_y = \sigma_y - \sigma_m, s_z = \sigma_z - \sigma_m$ である。

このように応力不変量を定義すると, モール・クーロンの F および Q は次式で与えられる。

$$F = Q = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} \cos \theta - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi - c \cos \phi \quad (A.4)$$

今回の計算においては, 弾塑性モデルに対して仮想的な時間を考えた弾・粘塑性理論を用いて計算を行っている。このような考え方をを用いると, 粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{vp}$ が次式のように表される。

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{d\epsilon_{vp}}{dt} = \beta(\sigma) \quad (A.5)$$

計算に際しては, ある時刻における既知の値を基にして, 時間増分が Δt の新しい時刻に対する値を求めることになる。その場合, ひずみ増分 $\Delta \epsilon$ から応力増分 $\Delta \sigma$ を求めるためには次式を用いる。

$$\Delta \sigma = \bar{D}(\Delta \epsilon - \Delta t \beta_0) \quad (A.6)$$

ここに, β_0 は $\Delta t=0$ に対応する既知の β であり, \bar{D} は $\bar{D} = [D^{-1} - \Delta t S_0]^{-1}$ (A.7)

となる。ただし, D は弾性応力マトリックスであり, $S = (\partial \beta / \partial \sigma)$ として, S_0 は $\Delta t=0$ に対応する既知の S を表している。

式(A.6)を用いると解が発散せずに, 非常に安定性が良い。ただし, この式を用いる際にはマトリックス S を計算しなければならない。 β としては, 今回は次のようなものを用いた。

$$\beta = \gamma \left\langle \frac{F}{F_0} \right\rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (A.8)$$

ここに γ は粘塑性ひずみ速度を表す定数で, 時間の逆数の次元を持つものであり, F_0 は, 降伏関数 F を無次元

化するものである。また、記号 $\langle \rangle$ は、その中の正負によって値が変化するものであり、次式のような意味を持つ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F}{F_0} > 0 \text{ ならば } \langle \frac{F}{F_0} \rangle = \frac{F}{F_0} \\ \frac{F}{F_0} \leq 0 \text{ ならば } \langle \frac{F}{F_0} \rangle = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

粘塑性ひずみを考慮して計算するのは、 $F > 0$ の場合のみであるので、この場合に対して S を求めると次式が得られる。

$$S = \partial\beta/\partial\sigma = \frac{\gamma}{F_0} \left\{ \frac{\partial F}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial Q}{\partial\sigma} + F \frac{\partial^2 Q}{\partial\sigma^2} \right\} \quad (\text{A.10})$$

したがって、 S を求めるためには、 $(\partial F/\partial\sigma)$ 、 $(\partial Q/\partial\sigma)$ 、 $(\partial^2 Q/\partial\sigma^2)$ の値を求めなければならない。前の2項目に関しては通常の有限要素法の教科書に式がのせられている。しかし、 $(\partial^2 Q/\partial\sigma^2)$ は非常に複雑となるので通常は定式化されていない。この値をマトリックス M とすると、 M の (i, j) 成分 M_{ij} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M_{ij} = & \left(\cos\theta - \frac{\sin\phi \sin\theta}{\sqrt{3}} \right) A_1 - \bar{\sigma} \left(\cos\theta \right. \\ & \left. + \frac{\sin\phi \sin\theta}{\sqrt{3}} \right) \frac{\partial\theta}{\partial\sigma_i} \frac{\partial\theta}{\partial\sigma_j} - \left(\sin\theta + \frac{\cos\theta \sin\phi}{\sqrt{3}} \right) \\ & \times \left(A_2 + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_i} \frac{\partial\theta}{\partial\sigma_j} + \frac{\partial\theta}{\partial\sigma_i} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

ただし、 A_1 および A_2 は対称マトリックスであり、次式で表される。

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{\partial}{\partial\sigma_i} \left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_i} \right) = \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \left(\bar{\sigma} C_1 - \frac{S_i S_j}{2\bar{\sigma}} \right) \quad (\text{A.12}) \\ A_2 = & \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\bar{\sigma}^4 \cos 3\theta} - \frac{27J_3 \sin 3\theta}{4\bar{\sigma}^7 \cos^3 3\theta} \right) \left(\frac{\partial J_3}{\partial\sigma_i} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_j} \right. \\ & \left. + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_i} \frac{\partial J_3}{\partial\sigma_j} \right) + \frac{3\sqrt{3} J_3}{2\bar{\sigma}^4 \cos 3\theta} A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2\bar{\sigma}^3 \cos 3\theta} C_2 \\ & + \frac{9 \sin 3\theta}{4\bar{\sigma}^6 \cos^3 3\theta} \frac{\partial J_3}{\partial\sigma_i} \frac{\partial J_3}{\partial\sigma_j} + \left(\frac{81 J_3^2 \sin 3\theta}{4\bar{\sigma}^8 \cos^3 3\theta} \right. \\ & \left. - \frac{6\sqrt{3} J_3}{\bar{\sigma}^5 \cos 3\theta} \right) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_i} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_j} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ただし、 C_1 および C_2 は定係数マトリックスであり、平面ひずみおよび軸対称応力条件では次式で与えられる。

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} s_x & \frac{2}{3} s_x & \frac{2}{3} s_y & \frac{2}{3} \tau_{xy} \\ \frac{2}{3} s_x & \frac{2}{3} s_y & \frac{2}{3} s_x & \frac{2}{3} \tau_{xy} \\ \frac{2}{3} s_y & \frac{2}{3} s_x & \frac{2}{3} s_x & -\frac{4}{3} \tau_{xy} \\ \frac{2}{3} \tau_{xy} & \frac{2}{3} \tau_{xy} & -\frac{4}{3} \tau_{xy} & -2s_x \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

実際に式(A.6)を用いて計算する場合には、最初は時間増分 $\Delta t = 0$ として弾性計算を行う。次に適当な時間増分を与えて計算を続行する。この際の時間増分を求めるために、パラメータ τ を用いて次式から計算した。

$$\Delta t = \tau \left[\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_{vp}} \right]_{\min}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.16})$$

ここに、 $\bar{\varepsilon}$ は有効ひずみであり、 $\bar{\varepsilon}_{vp}$ も粘塑性ひずみ速度に関して同様の考え方をういたものであり、次式で与えられる。

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{zx}^2} \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{\varepsilon}_y^2 + \bar{\varepsilon}_z^2 + 2\bar{\varepsilon}_{xy}^2 + 2\bar{\varepsilon}_{yz}^2 + 2\bar{\varepsilon}_{zx}^2} \quad (\text{A.18})$$

また、(A.16) はすべての積分点における最小値を Δt として用いることを意味している。今回の計算においては、パラメータ τ の値としては、0.1~1.0を用いた。

仮想的な弾・粘塑性理論を用いて計算を行う場合には、途中段階は必要なく、定常状態に達した値のみが必要となる。今回の計算では式(A.16)で計算した時間増分に対する不平衡力が加えた荷重の内積の0.1%以下になった場合に定常状態に達したと判断した。

付録B. はり要素

今回用いたはり要素は、3節点から構成されるものであり、せん断変形も考慮したものである。このはり要素は通常用いられているはり要素と異なり、変位を表す形状関数に回転角を含んでいない。したがって、変位が平面要素とはり要素で完全に適合しているという利点がある。

この要素においては、各節点の自由度として、水平変位 u 、鉛直変位 w 、回転角 θ の3成分を考える。それぞれの値は、形状関数 N_1, N_2, N_3 を用いて表され、例えば、回転角 θ は次式のように各節点における値 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ から求められる。

$$\theta = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \theta_3 \quad (\text{B.1})$$

ここに、3番めの節点を中間節点とし、1番めの節点で $\xi = -1$ 、2番めの節点で $\xi = 1$ となるような座標系を考えたと、

$$N_1 = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) \quad (\text{B.2})$$

$$N_2 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad (\text{B.3})$$

$$N_3 = (1-\xi)(1+\xi) \quad (\text{B.4})$$

となる。

ひずみベクトル ϵ は次式で与えられる。

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \phi = -\frac{\partial w}{\partial x} + \theta \end{Bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

応力ベクトル σ は軸力 P 、曲げモーメント M 、せん断力 Q から次式のように構成される。

$$\sigma = \begin{Bmatrix} P \\ M \\ Q \end{Bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

応力マトリックス D は、軸方向の剛性 EA 、曲げ剛性 EI 、せん断剛性 S から次式のように与えられる。

$$D = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

以上のように、ひずみと応力が定義されると通常の平面要素の場合と同様にして剛性マトリックスが計算される。この要素を用いる際には数値積分の次数を2次としなければならない。また、通常はせん断変形の影響を無視するために、式(B.7)の S の値としては非常に大きな値を用いる。