

運輸省港湾技術研究所

港湾技術研究所 報告

REPORT OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH
INSTITUTE

MINISTRY OF TRANSPORT

VOL. 19

NO. 2



JUNE 1980

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



正 誤 表

頁	欄	行	誤	正
73	式 (2.3)		$(m_1+m_2)\frac{d^2y_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}+c_1y_1$ $-m_2l\frac{d^2\theta}{dt^2}=0$	$(m_1+m_2)\frac{d^2y_1}{dt^2}+m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+c_1y_1$ $-m_1l\frac{d^2\theta}{dt^2}=P_w$
81	右	下から 4	のうちに	のように
83	左	上から 4	3200 tf/cm	3200 tf/m
84	"	"	衝衝速度	衝突速度
88	"	" 9	考慮	考察

頁	欄	行	誤	正
115		上から 8	0.01~5 Hz の周波数の	0.01~5 Hz の周波数の
119	右	下から 6	模擬の	模擬の
120	図-2.1			削除
123	左	上から 5	$-2\rho g d \overline{BG} M \varphi$	$-2\rho g d \overline{BG} M \varphi$
124	右	下から 5	橋りょう梁などの	橋りょうなどの
"	"	" 2	春一番のとき風速の	春一番のときの風速の
126	図-3.3			削除
135	右	上から 7	ベキ指数	べき指数
136	"	下から 9	16.3 m/s ²	16.3 m/s,
139	"	上から 8	時々刻々と	時々刻々と
142	"	" 9	シミュレーションモデルに	シミュレーションモデルに
143	"	" 14	高さ 25 m がとすると	高さが 25 m とすると
"	"	下から 13	10 ² ~10 ³ 程度の	10 ² ~10 ³ 程度の
145	"	" 7	風荷重などの	風荷重などの
147	"	" 6	シミュレーショ	シミュレーショ
150	"	上から 5	シミュレーション	シミュレーション
"	"	" 11	シミュレーション	シミュレーション
151	表-7.5 (その 1)	ケース番号 1	49,340	49,390
"	"	"	23,400	23,480
"	" (その 2)	ケース番号	13	13
153	表-7.7 (その 1)	表題	バネの変位 (その 1)	バネの変位 (その 1) Y 方向
"	" (その 2)	"	バネの変位 (その 2)	バネの変位 (その 2) X 方向
155	左	下から 4	5,675 tf·m	5,678 tf·m
"	"	" 2	49.6 cm	49.5 cm
155	右	上から 4	0.86 × 10 ⁻³	1.28 × 10 ⁻³
"	"	"	4 cm 程の	6 cm 程の
156	左	下から 1	シミュレーション	シミュレーション
"	右	" 8	シミュレーション	シミュレーション

頁	欄	行	誤	正
177	右	下から 4	内節近 0 を	内節点 0 を
179	式 (3.29)		$W_0 = \{\delta_e\}^T [K] \{\delta_e\}$	$W_0 = \{\delta_e^*\}^T [K] \{\delta_e\}$
183	図-4.2 左	ω 厳密解	1.0	1.0 × 10 ⁻¹
"	" 右	"	1.00	1.00 × 10 ⁻¹
184	図-4.2	"	1.132	4.13 × 10 ⁻¹

港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第19巻 第2号 (Vol. 19, No. 2), 1980年6月 (June 1980)

目 次 (CONTENTS)

1. 埋立護岸における裏込砂の浄化効果に関する実験……………門 司 剛 至………… 3
(Experimental Study on Purification Effect of Backfilling Sand Used for Revetments
for Reclaimed Land……………Takeshi MONJI)
2. けい留中の大型タンカーの衝突力……………上 田 茂・佐藤喜………… 67
(Impact Force by VLCC Moored to Dolphin……………Shigeru UEDA and Kiichi SATOH)
3. 海上風の性質とそれによるく(矩)形浮体の動揺解析……………清 宮 理………… 115
(The Properties of Wind above Sea and the Oscillation Analysis of Floating Bodies
(Rectangular Cross Section) subjected to Wind Force ……………Osamu KIYOMIYA)
4. 有限要素法による鉄筋コンクリートスラブの弾塑性解析……………関口信一郎………… 169
(Elasto-plastic Analysis for Reinforced Concrete Slabs by Finite Element Method
…………… Shin-ichiro SEKIGUCHI)

4. 有限要素法による鉄筋コンクリートスラブの 弾塑性解析

関口 信一郎*

要 旨

鉄筋コンクリートスラブの破壊機構については不明な点が多い。本報告では、スラブがコンクリート層と鉄筋層から成り、各層は平面応力場にあること、ひびわれが進行するにしたがい中立面が変動することを仮定し、積層化有限要素法により静的荷重を受けるスラブのせん断破壊を数値解析した。既往の実験結果と比較検討し、解析法の妥当性を確認した。

* 前設計基準部 計算室

Elasto-plastic Analysis for Reinforced Concrete Slabs by Finite Element Method

Shin-ichiro SEKIGUCHI*

Synopsis

Collapse formula is classified into three groups. They are flexural failure, flexural-punching shear failure and punching shear failure. It is very difficult to analyse punching shear failure. This paper assumes that a slab consists of concrete layers and steel layers which are on the plane stress field, and that the neutral surface of the slab moves according to concrete crack's growing. Then Author simulates punching shear failure of reinforced concrete slabs by finite element method.

Comparing with the experimental results, this paper emphasizes that this analytical method can simulate the failure process, deflection and ultimate strength of reinforced concrete slabs.

* Ex-member of Computer Center, Design Standard Division

目 次

要 旨	169
1. ま え が き	173
2. 解析の仮定	174
2.1 応力とひずみの関係	174
2.2 破壊曲面	174
2.3 ひびわれの発生と中立面の移動	174
3. 有限要素法による解析	176
3.1 面内方向の形状関数	176
3.2 面外方向の形状関数	177
3.3 積 層 化	179
3.4 弾性域における平板要素の剛性マトリックス	180
3.5 要素の降伏	180
4. 数 値 解 析	180
4.1 平板理論の適用範囲	180
4.2 解 析 例	184
5. 結 論	185
謝 辞	185
参 考 文 献	185

1. まえがき

鉄筋コンクリートスラブの終局極限強度を求める試みは、古くは降伏線理論に始まる。1958年、Ocklestonは実在のスラブの実験により、終局極限強度が降伏線理論による値の数倍に達することを発見した。現在までの研究によると、その主な理由は、コンクリートに生ずるひびわれによって中立面が移動し、スラブが幾何学的にアーチに似た構造で外力を支える（アーチ作用という）ことによると言われ、スラブ周辺の拘束力が大きくなるに従いアーチ作用が顕著になることがわかってきた(図-1.1 参照)。

今までに発表された著名な終局極限強度の提案式は、上述のメカニズムを考慮し、破壊の形態を曲げ破壊、曲げせん断破壊、押し抜きせん断破壊に大別して式を提示している(表-1.1 参照)。

スラブのせん断耐力の算定式は Eletner & Hongnestad, Whitney, Moe 等の提案した式²⁾が著名であるが、破壊機構はほとんど説明されていない。曲げ破壊はひびわれ

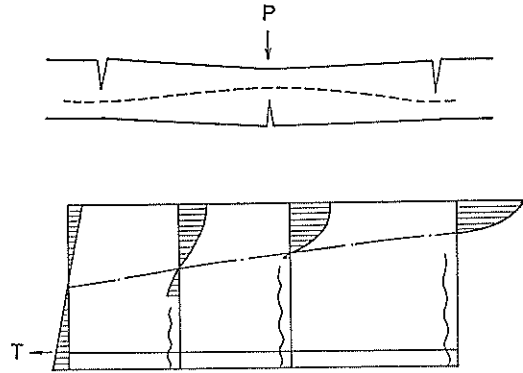


図-1.1 スラブの版厚方向の応力分布と中立面の変化

が十分発達してから破壊に到るのに対し、せん断破壊は観察する時間がない程、急激に起こることもその一因とされている。

一方、数値解析では1971年、A. Scanlon が RC 床版のクリープと乾燥収縮による長期たわみの解析に積層化

表-1.1 スラブの破壊¹⁾

	曲 げ 破 壊	曲 げ せん 断 破 壊	せん断破壊 (押し抜きせん断破壊)
荷重-たわみ曲線			
中央切断面			
定 義	曲げひびわれがじゅうぶん発達したのちに起こる上面の圧潰または落ち込みによる破壊である。 (はりの場合の曲げ破壊に相当)	曲げひびわれが斜めに方向をかえはじめた前後に、圧縮部のコンクリートがせん断耐力の限界に達して落ち込みを生じる(はりの場合の圧縮-せん断破壊に相当か、あるいは斜引張り応力による斜ひびわれによる破壊(引張り-せん断破壊に相当)である。	はじめから斜ひびわれを生じるか、あるいは曲げひびわれが斜めに方向をかえる以前に起こる押し抜きによる破壊である。

有限要素法を用い、1972年、F. R. Hand, C. S. Lin が RC 床版の弾塑性解析に積層化有限要素法を用いて、RC 床版の弾塑性解析に有力な手法であることを示した。わが国では前田教授、上田助教授がこの手法を用いて優れた研究を行っている。

上述の数値解析は全て曲げ破壊を生ずる RC 床版を対象としており、積層化有限要素法により、せん断破壊を生ずる RC 床版を解析した研究は、著者の知る限りでは見当たらない。本研究は、RC 床版をコンクリート層と鉄筋層から成る積層構造物にモデル化し、コンクリートに生ずるひびわれによるアーチ作用を、中立面を移動させることにより考慮し、せん断破壊する RC 床版を解析することを目的としている。また、従来の研究で、き裂領域におけるコンクリートが塑性軟化すると仮定しているが、本研究では塑性硬化体と仮定している。

2. 解析の仮定

2.1 応力とひずみの関係

RC 床版がコンクリート層と鉄筋層から成ると仮定す

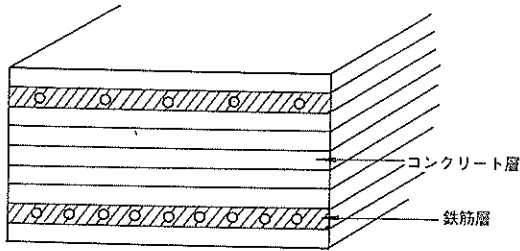


図-2.1 鉄筋コンクリートスラブの積層化

る(図-2.1 参照)。鉄筋層は鉄筋を含む層で、その層厚は鉄筋径の2倍とする。鉄筋とコンクリートの間の最大付着力以上の応力が作用した場合に、鉄筋層にひびわれが生じ、層の剛性は失われると仮定する。付着力は、異形鉄筋を用いた両引き試験結果を参考にした。各層は平面応力場にあるとみなし、図-2.2 のような応力-ひずみ関係を用いる。

2.2 破壊曲面

コンクリートの破壊曲面で一般化できるものは現在のところ二軸、三軸の圧縮領域のみであり、引張りを含む領域の破壊曲面は得られていない⁹⁾(図-2.3 参照)。本解析では図-2.4 のような降伏曲面を用いる⁹⁾。

2.3 ひびわれの発生と中立面の移動

各層のひびわれ発生は式(2.1)による。

$$f \geq \sigma_{ct} \text{ または } f \geq \sigma_{cc} \quad (2.1)$$

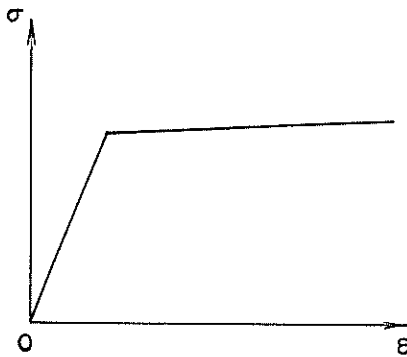
ここに f : 破壊関数

σ_{ct} : 各層の最大引張応力

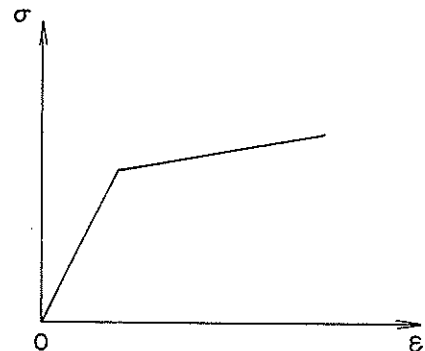
σ_{cc} : 各層の最大圧縮応力

ひびわれが発生した層の応力はすべて解放し、剛性も零とする。したがって要素全体の剛性マトリックスは、ひびわれの発生した層の寄与分だけ剛性が低下すると仮定する。それにともない、中立面の移動を行うが、その手順は次のとおりである。

- (1) 図-2.5 のように4要素で囲まれた節点 P があり、各要素は複数の層で構成されているとする。要素1の第 n 層にひびわれが生じ、その層が破壊されたとすると、要素1による節点 P の座標の変動量 δ_i は式(2.2)で表わされ、板厚は $T-t$ となる。



(a) 圧縮領域



(b) き裂領域

図-2.2 応力-ひずみ関係

有限要素法による鉄筋コンクリートスラブの弾塑性解析

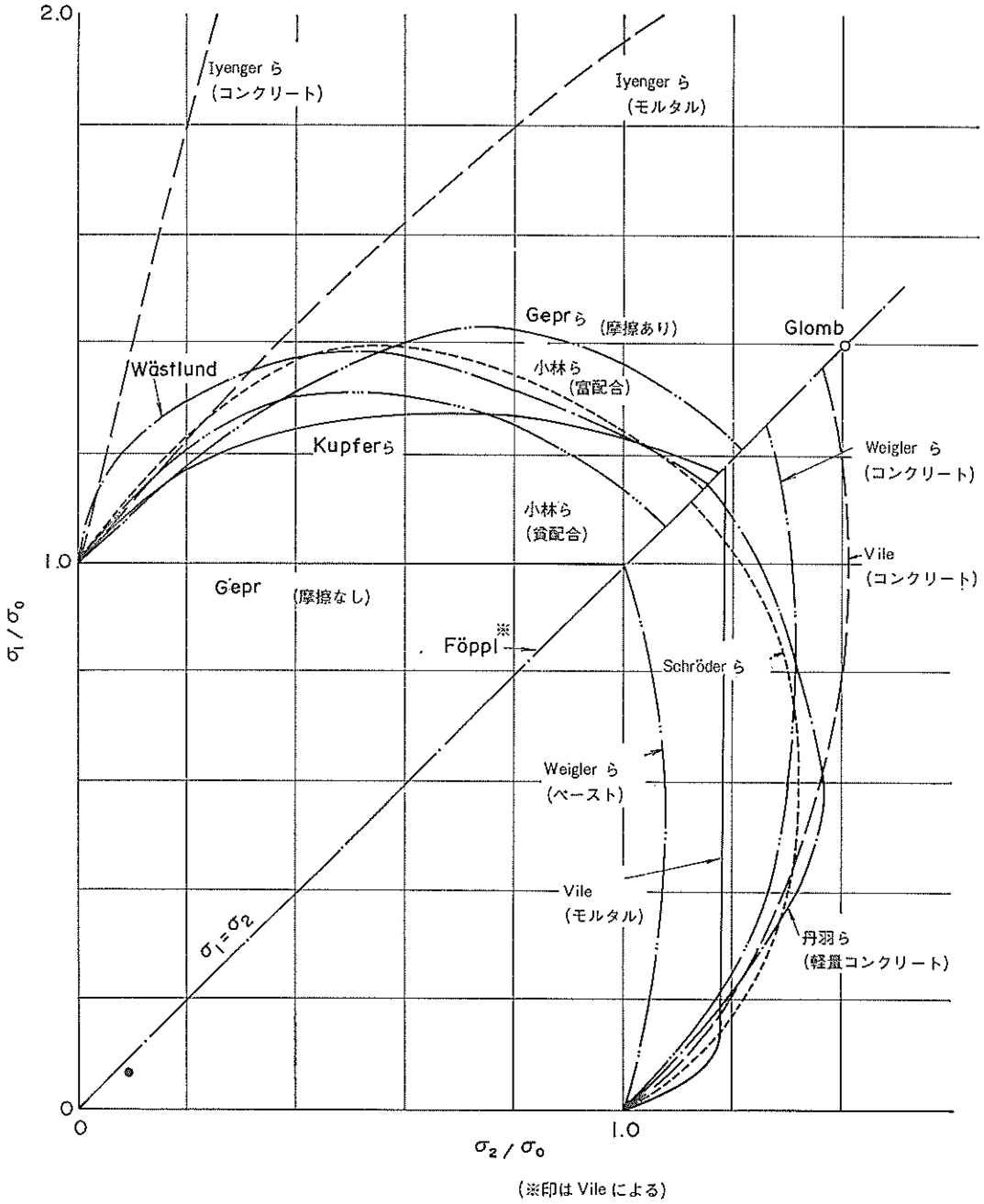


図-2.3 二軸圧縮試験結果

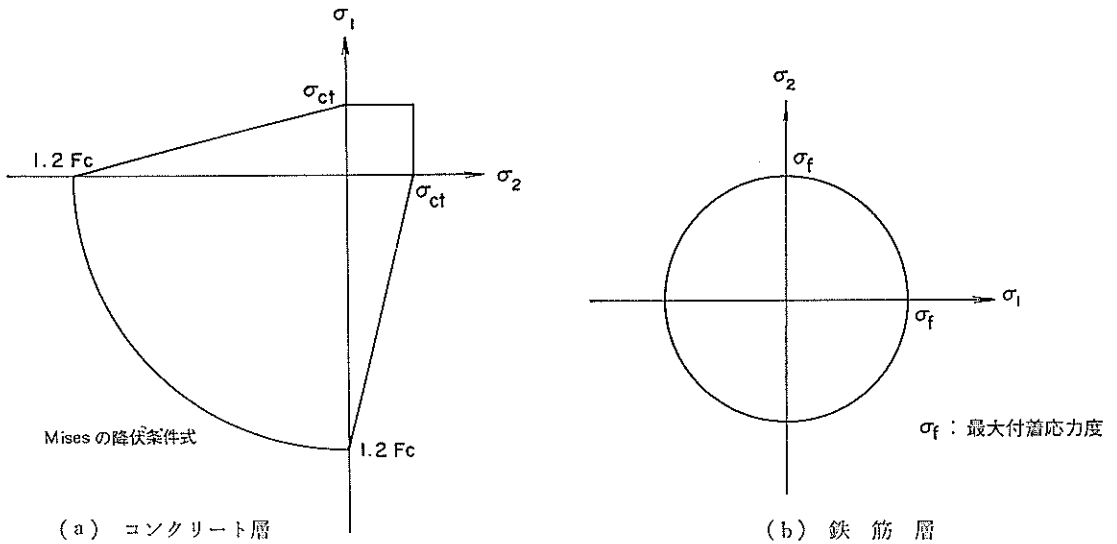


図-2.4 降伏曲面

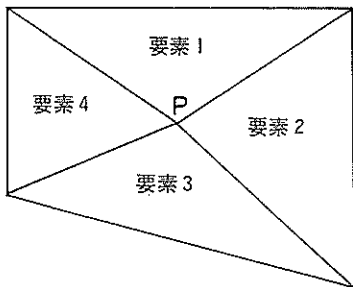
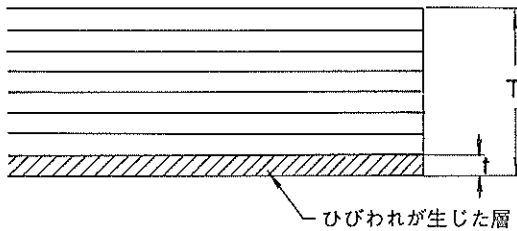


図-2.5 ひびわれの発生と中立面の移動

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lt/2 \\ mt/2 \\ nt/2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ここに, t : 第 n 層の層厚

l, m, n : 板法線ベクトルと全体座標系との方向余弦

(2) 残りの要素による節点Pの変動量 $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ を式

(2.2) と同様にして求める。

(3) 節点Pを共有する要素による変動量の平均を節点Pの変動量 δ とする。

$$\delta = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4) / 4 \quad (2.3)$$

(4) 剛性マトリックスを新座標系で計算する。

3. 有限要素法による解析

弾性域, 塑性域とも等方性で各節点の自由度が6の三角形要素を用い, 要素内部の変位は節点の変位により内挿補間する。

3.1 面内方向の形状関数

面内方向の形状関数は, 要素内のひずみが一一定であるCSTを用いる(図-3.1参照)。

図-3.1に示すように, 節点変位として面内2軸方向

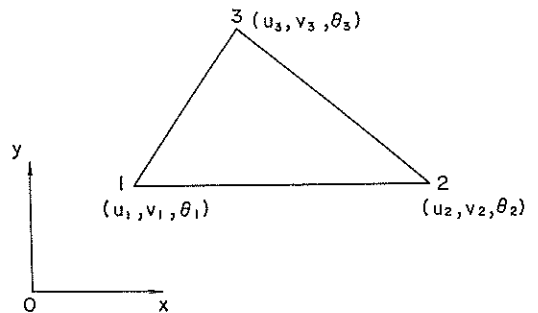


図-3.1 面内変位

の並進変位 u, v および z 軸まわりの回転角 θ_z をとる。回転角 θ_z は、面内、面外方向の変形を定義するパラメータになっていないが、本解析では、仮想的な回転剛性係数を使用することにより、シェル構造の極限強度も解析できるように配慮している⁹⁾。並進変位 u, v は要素内変位を一次と仮定し、節点における変位で補間する。要素辺上の変位も一次式で表わされるので、辺における変位の連続条件は満たされている。

$$\left. \begin{aligned} u &= L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 \\ v &= L_1 v_1 + L_2 v_2 + L_3 v_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ここに、 L_1, L_2, L_3 は面積座標であり、次の関係が成り立つ。

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (3.2)$$

要素内の任意の点の座標も、式 (3.1) と同じ補間関数を用いて表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

式 (3.1) と式 (3.2) より

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

3.2 面外方向の形状関数

Clough と Tocher が提案した適合三角形要素 (HCT)

を用いる。図-3.2 (a) のように、三角形要素を圆心 0 と各頂点を結ぶ線で分割し、それぞれに対し異なる変位関数を仮定する。図-3.2 (b) は分割された要素 a を示す。圆心 0 を原点とし辺 jk に平行に \bar{x} 軸、垂直に \bar{y} 軸をとり、変位関数を式 (3.5) のように仮定する。

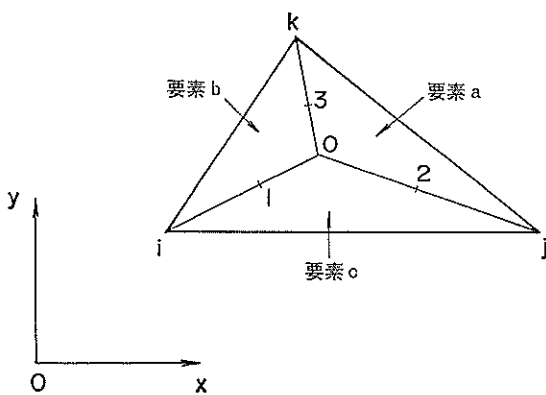
$$w = a_1 + a_2 \bar{x} + a_3 \bar{y} + a_4 \bar{x}^2 + a_5 \bar{x} \bar{y} + a_6 \bar{y}^2 + a_7 \bar{x}^3 + a_8 \bar{x} \bar{y}^2 + a_9 \bar{y}^3 \quad (3.5)$$

上式には $\bar{x}^2 \bar{y}$ の項が含まれていないので辺 jk の normal slope (辺直角方向傾斜) $\partial w / \partial y$ は \bar{x} の 1 次式となり、隣接辺の間で normal slope は連続が保証される。

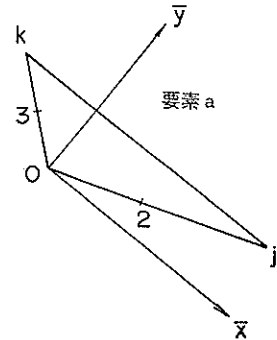
Clough と Tocher の論文では各部分三角形要素について 9 個の未知数を取り、全体で 27×27 の剛性マトリックスを作る。次に各部分三角形要素の外節点において変位が等しいという条件 9 個、内節点での同じ条件 6 個、さらに点 1, 2, 3 において normal slope が等しいという条件 3 個により、 9×9 の剛性マトリックスに減少している。

本解析では、各部分三角形について 9×9 の剛性マトリックス $[K_9]$ を作り、全体座標系に変換する。各頂点での自由度ごとに重ね合せ、内節点 0 の自由度を加えて、12 自由度の剛性マトリックス $[K_{12}]$ を作る。次に normal slope の連続性を満たすという条件より内節点 0 を消去して剛性マトリックス $[K_9]$ を作る。

式 (3.5) の定数 a_m ($m=1 \sim 9$) を求めるために、各節点における座標値を代入する。



(a) 適合三角形要素



(b) 部分三角形要素

図-3.2 HCT

$$\left. \begin{aligned} w_i &= a_1 + a_2 \bar{x}_i + a_3 \bar{y}_i + a_4 \bar{x}_i^2 + a_5 \bar{x}_i \bar{y}_i + a_6 \bar{y}_i^2 \\ &\quad + a_7 \bar{x}_i^3 + a_8 \bar{x}_i \bar{y}_i^2 + a_9 \bar{y}_i^3 \\ \theta_{\bar{x}i} &= \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \right)_i = a_3 + a_5 \bar{x}_i + 2a_6 \bar{y}_i + 2a_8 \bar{x}_i \bar{y}_i + 3a_9 \bar{y}_i^2 \\ \theta_{\bar{y}i} &= - \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \right)_i = -a_2 - 2a_4 \bar{x}_i - a_5 \bar{y}_i - 3a_7 \bar{x}_i^2 - a_8 \bar{y}_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

9個の方程式はマトリックスの形で式(3.7)のように表わすことができる。

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_0 \end{Bmatrix} = [c] \{a\} \quad (3.7)$$

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{\bar{x}i} \\ \theta_{\bar{y}i} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

ここに、 $[c]$: 節点座標値によって定まる 9×9 のマトリックス

$\{a\}$: 9個の未定係数よりなる列ベクトル上の式を逆変換して

$$\{a\} = [c]^{-1} \{\delta\}^e \quad (3.9)$$

要素内の変位 w は次式で表わされる。

$$w = [N] \{\delta\}^e = [P] [c]^{-1} \{\delta\}^e \quad (3.10)$$

$$[P] = [1 \quad \bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{x}^2 \quad \bar{x}\bar{y} \quad \bar{x}^3 \quad \bar{x}\bar{y}^2 \quad \bar{y}^3] \quad (3.11)$$

要素の剛性マトリックス $[K_0]$ は次式で表わされる。

$$[\bar{K}_0^e] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3.12)$$

ここに、

$$[B_i] = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} [N_i] \\ -\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} [N_i] \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} [N_i] \end{Bmatrix}$$

$[D]$: 弾性マトリックス

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

節点力を $\{\bar{F}_a\}$ とすると次式が成り立つ。

$$\{\bar{F}_a\} = [\bar{K}_0^e] \{\delta\}^e \quad (3.13)$$

辺 Oi, Oj の normal slope は式(3.14)で表わすことができる(図-3.3 参照)。

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{oi} = \sin \beta_2 \theta_{\bar{x}} - \cos \beta_2 \theta_{\bar{y}} \quad \left. \vphantom{\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{oi}} \right\}$$

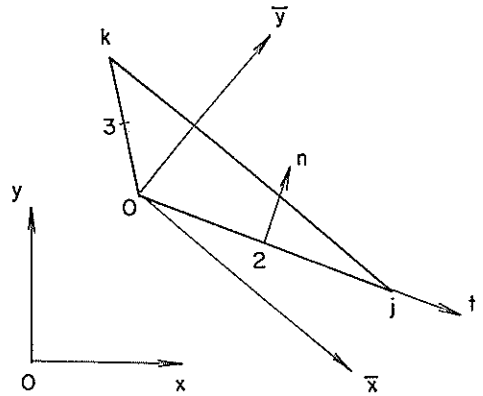


図-3.3 要素 a における座標系

$$\left. \begin{aligned} &= \cos \beta_2 \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} + \sin \beta_2 \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{oj} &= \sin \beta_3 \theta_{\bar{x}} - \cos \beta_3 \theta_{\bar{y}} \\ &= \cos \beta_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} + \sin \beta_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

節点 2, 3 の normal slope (θ_2, θ_3) は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_2 &= [\cos \beta_2 \sin \beta_2] \begin{bmatrix} \theta_{\bar{x}2} \\ \theta_{\bar{y}2} \end{bmatrix} \\ &= [\cos \beta_2 \sin \beta_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \\ -\frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} [c]^{-1} [\lambda] \{\delta\}^e \\ \theta_3 &= [\cos \beta_3 \sin \beta_3] \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \\ -\frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} [c]^{-1} [\lambda] \{\delta\}^e \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

ここに、 $[\lambda]$: 部分三角形要素 a の座標変換マトリックス

式(3.15)を簡単に次式で表わす。

$$\theta_2^e = [S_2^e] \{\delta\}_a^e, \quad \theta_3^e = [S_3^e] \{\delta\}_a^e \quad (3.16)$$

ここに、

$$[S_m^e] = [\cos \beta_m \sin \beta_m] \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} [c]^{-1} [\lambda]$$

式(3.12)と式(3.16)により、部分三角形要素 a の剛性マトリックス $[\bar{K}_0^e]$ と normal slope (θ_2^e, θ_3^e) が求まる。部分三角形要素 b, c の剛性マトリックスおよび

normal slope も同様にして求まる。

式 (3.12) を全体座標系で表わす。

$$\{F_a\} = [K_g^a] \{\delta\}_a^e \quad (3.17)$$

ここに、

$$[K_g^a] = [\lambda]^T [\bar{K}_a] [\lambda]$$

部分三角形 b, c についても同様に次式で表わされる。

$$\{F_b\} = [K_g^b] \{\delta_b\}^e, \quad \{F_c\} = [K_g^c] \{\delta_c\}^e \quad (3.18)$$

剛性マトリックス $[K_g^a], [K_g^b], [K_g^c]$ をまとめて次式で表わす。

$$\{F_{12}\} = [K_{12}] \{\delta\}^e \quad (3.19)$$

ここに、

$$\{\delta\}^e = \{w^i \quad \theta_x^i \quad \theta_y^i \quad w^j \quad \theta_x^j \quad \theta_y^j \quad w^k \quad \theta_x^k \quad \theta_y^k\}^T$$

normal slope は式 (3.15) のように表わされる。それを

12 自由度の節点変位 $\{\delta_{12}\}^e$ で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \theta_x^i &= [\tilde{S}_2^i] \{\delta_{12}\}^e, & \theta_y^i &= [\tilde{S}_3^i] \{\delta_{12}\}^e, & \theta_x^j &= [\tilde{S}_1^j] \{\delta_{12}\}^e \\ \theta_y^j &= [\tilde{S}_2^j] \{\delta_{12}\}^e, & \theta_x^k &= [\tilde{S}_3^k] \{\delta_{12}\}^e, & \theta_y^k &= [\tilde{S}_1^k] \{\delta_{12}\}^e \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

normal slope は連続であるから次式が成り立つ。

$$\theta_x^i = \theta_x^j, \quad \theta_y^i = \theta_y^j, \quad \theta_x^i = \theta_y^j$$

上式より、式 (3.12) が成立する。

$$[S] \{\delta_{12}\}^e = 0 \quad (3.21)$$

ここに、

$$\{\delta_{12}\}^e = \{\delta_i \quad \delta_j \quad \delta_k \quad \delta_0\}^T$$

$$[S]: 5 \times 12 \text{ のマトリックス}$$

式 (3.12) より圆心 0 の変位 $\{\delta_0\}$ は次式で表わされる。

$$\{\delta_0\} = [G_1 \quad G_2 \quad G_3] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

変位 $\{\delta_{12}\}$ と変位 $\{\delta_0\}$ の間には式 (3.23) の関係が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

上式をまとめて表わす。

$$\{\delta_{12}\}^e = \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} \{\delta\}^e = [H] \{\delta\}^e \quad (3.24)$$

ここに、 $[I]: 9 \times 9$ の単位マトリックス

$$[H] = \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix}$$

12 自由度の要素と 9 自由度の要素のひずみエネルギーは等しいから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\{\delta_{12}\}^e]^T [K_{12}] \{\delta_{12}\}^e &= \frac{1}{2} [\{\delta\}^e]^T [H]^T [K_{12}] [H] \{\delta\}^e \\ &= \frac{1}{2} [\{\delta\}^e]^T [K_9] \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\therefore [K_9] = [H]^T [K_{12}] [H]$$

となり、9 自由度の剛性マトリックスが求まる。

3.3 積層化

要素内のひずみは式 (3.26) で表わされるから、

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta_e\} \quad (3.26)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] [B] \{\delta_e\} \quad (3.27)$$

板を数層に分けると各層は平面応力状態とみることができ、面内、面外方向のひずみと変位の関係式は次のように表わされる。ただし z は板中央面からの距離である。

面内方向

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

面外方向

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(3.28)

仮想変位 $\{\delta^*\}$ とそれに対応するひずみおよび節点変位をそれぞれ $\{\varepsilon^*\}, \{\delta_0^*\}$ とすると、要素応力による内部仕事 W_I および節点力による外部仕事 W_0 は次のように表わされる。

$$W_I = \int_V \sum_{i=1}^n \{\varepsilon_i^*\}^T \{\sigma_i\} dV$$

$$W_0 = \{\delta_0^*\}^T \{F\}$$

上式に式 (3.26)、式 (3.27) を代入すると

$$W_I = \int_V \sum_{i=1}^n \{\delta_0^*\}^T [B]^T [D_i] [D_i] [B] \{\delta_e\} dV$$

$$= \{\delta_0^*\}^T \sum_i \int_V [B]^T [D_i] [B] dV \{\delta_e\} \quad (3.28)$$

また、 $\{F\} = [K] \{\delta_e\}$ より

$$W_0 = \{\delta_e\}^T [K] \{\delta_e\} \quad (3.29)$$

仮想仕事の原理から $W_I = W_0$ とすると、

$$[K] = \sum_{i=1}^n [K_i] = \sum_{i=1}^n \int_V [B]^T [D_i] [B] dV \quad (3.30)$$

ここに、 n : 要素の層数

式 (3.30) の第 j 番目の層の剛性マトリックスは式 (3.31) で表わされる。

$$[K_j] = \begin{bmatrix} \int_V [B_j][D_j][B_j]dV & \int_V [B_j][D_j][B_0]dV \\ \text{sym.} & \int_V [B_0][D_j][B_0]dV \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

3.4 弾性域における平板要素の剛性マトリックス

面内方向と面外方向の節点変位を結合して次のように定義する。

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

上式に対応する節点力を次のように定義する。

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

式 (3.32) と式 (3.33) には次の関係が成り立つ。

$$\{F\}^e = [K_{rs}]\{\delta\}^e \quad (3.34)$$

上式の剛性マトリックス $[K_{rs}]$ は、次のような部分マトリックスから成っている。

$$[K_{rs}] = \begin{bmatrix} [K_{rs}^p] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_{rs}^s] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

ただし、変位成分の並べ方は

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \delta_i^p \\ \delta_i^s \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

3.5 要素の降伏

本解析では要素の層を1層ずつ降伏させる方法を用いた。その手順は次のとおりである。

- (1) 入力した荷重による初期剛性での仮想の変位増分、ひずみ増分、応力増分を計算する。第2ステップ以後における荷重は残差荷重、剛性は接線剛性を用いる。

- (2) 降伏していない層については、その層が降伏曲面上にのるまでの比率を計算し、その中の最小の比率 r_{min} を求める。降伏関数に von Mises を用いた場合の比率 r は次式によって求められる。

$$\frac{3}{2}(\sigma'_x - \sigma'_m)^2 + \frac{3}{2}(\sigma'_y - \sigma'_m)^2 + \frac{3}{2}(\sigma'_z - \sigma'_m)^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_y^2 \quad (3.37)$$

ここに、

$$\sigma'_x = \sigma_x + r\Delta\sigma_x$$

$$\sigma'_y = \sigma_y + r\Delta\sigma_y$$

$$\sigma'_z = 0 \quad (\text{平面応力場を考えている})$$

$$\sigma'_m = \frac{1}{3}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) = \sigma_m + r\Delta\sigma_m$$

$$\Delta\sigma_m = \frac{r}{3}(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y)$$

σ_y : 降伏応力

上式は r の2次式となるので、

$$r = [-B + \sqrt{B^2 - AC}] / A$$

ここに、

$$A = (\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_m)^2 + (\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_m)^2 + \Delta\sigma_m^2 + 2\Delta\tau_{xy}^2$$

$$B = (\sigma_x - \sigma_m)(\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m)(\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_m) + \sigma_m\Delta\sigma_m + 2\Delta\tau_{xy}$$

$$C = \frac{2}{3}(\bar{\sigma}^2 - \sigma_y^2)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2}(\sigma_x - \sigma_m)^2 + \frac{3}{2}(\sigma_y - \sigma_m)^2 + \frac{3}{2}\sigma_m^2 + 3\tau_{xy}^2 \quad (3.38)$$

- (3) 変位、ひずみ、応力を変換して接線剛性を求め、新しい剛性マトリックスを計算する。
- (4) 残差荷重を求め収束を判定し、残差応力がある場合は (1) にもどる。

4. 数値解析

4.1 平板理論の適用範囲

平板の古典理論においては、中立面(中央面)は平面を保つと仮定しているため、せん断応力 τ_{xz} , τ_{yz} を無視しているが、このせん断応力によるせん断ひずみの影響により、変形前に中立面に垂直であった断面は変形後傾斜し、断面は平面を保たない。板厚を大きくしていくとその影響が大きくなり、もはやせん断応力を無視しえなくなる。

有限要素法による鉄筋コンクリートスラブの弾塑性解析

λ	t/a	ω 数値解	値
1.5	0.05	2.27×10^{-2}	1.00
	0.07	835×10^{-3}	1.04
	0.1	286×10^{-3}	1.12
	0.12	165×10^{-3}	1.18
	0.15	845×10^{-4}	1.28
	0.2	3.56×10^{-4}	1.5

λ	t/a	ω 数値解	値
0.5	0.05	4.044×10^{-2}	0.98
	0.07	1.440×10^{-2}	1.04
	0.1	4.94×10^{-3}	1.1
	0.12	2.86×10^{-3}	1.16
	0.15	1.46×10^{-3}	1.26
	0.2	6.17×10^{-4}	1.47

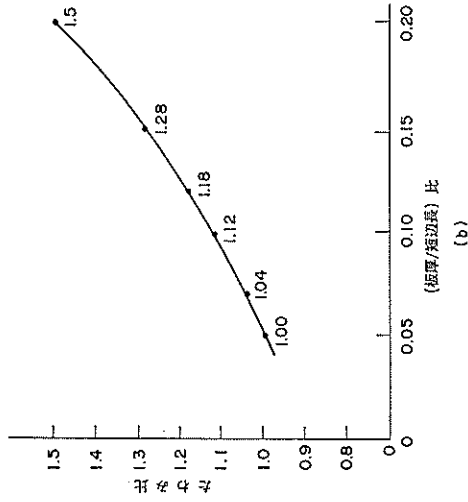
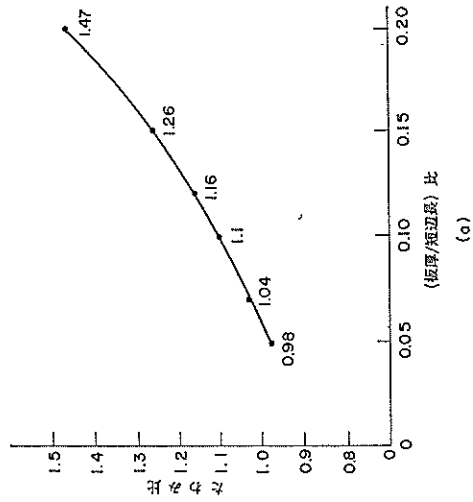
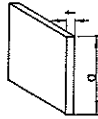


図-4.1 等分布荷重を受ける周辺固定板の最大たわみに及ぼすせん断変形の影響

λ	$1/a$	ω 値
2.5	0.05	1.618×10^{-2}
	0.07	5.896×10^{-3}
0.1	2.022×10^{-3}	1.11
	0.12	1.17×10^{-3}
0.15	5.991×10^{-4}	1.26
	2.527×10^{-4}	1.47

λ	$1/a$	ω 値
3	0.05	1.35×10^{-2}
	0.07	4.91×10^{-3}
0.1	1.68×10^{-3}	1.11
	0.12	9.75×10^{-4}
0.15	4.99×10^{-4}	1.26
	0.2	2.11×10^{-4}

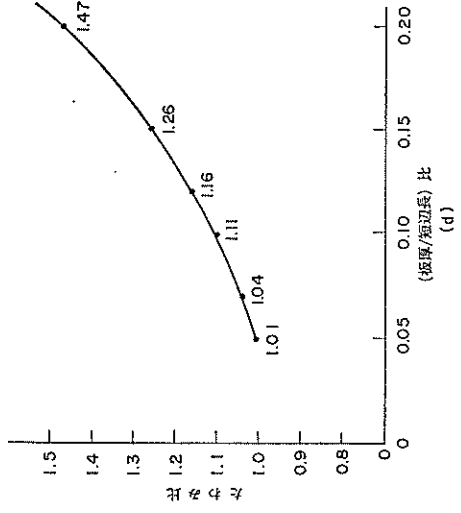
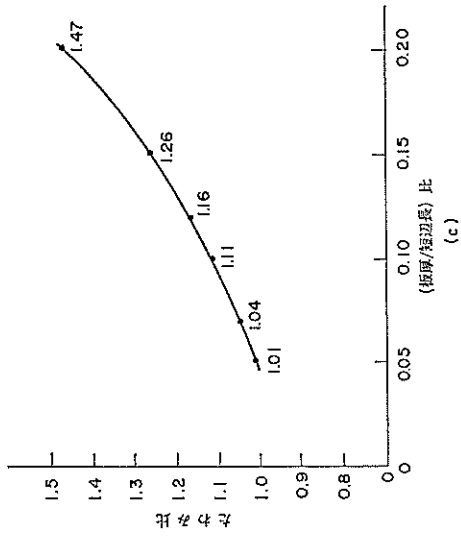


図-4.1 (つづき)

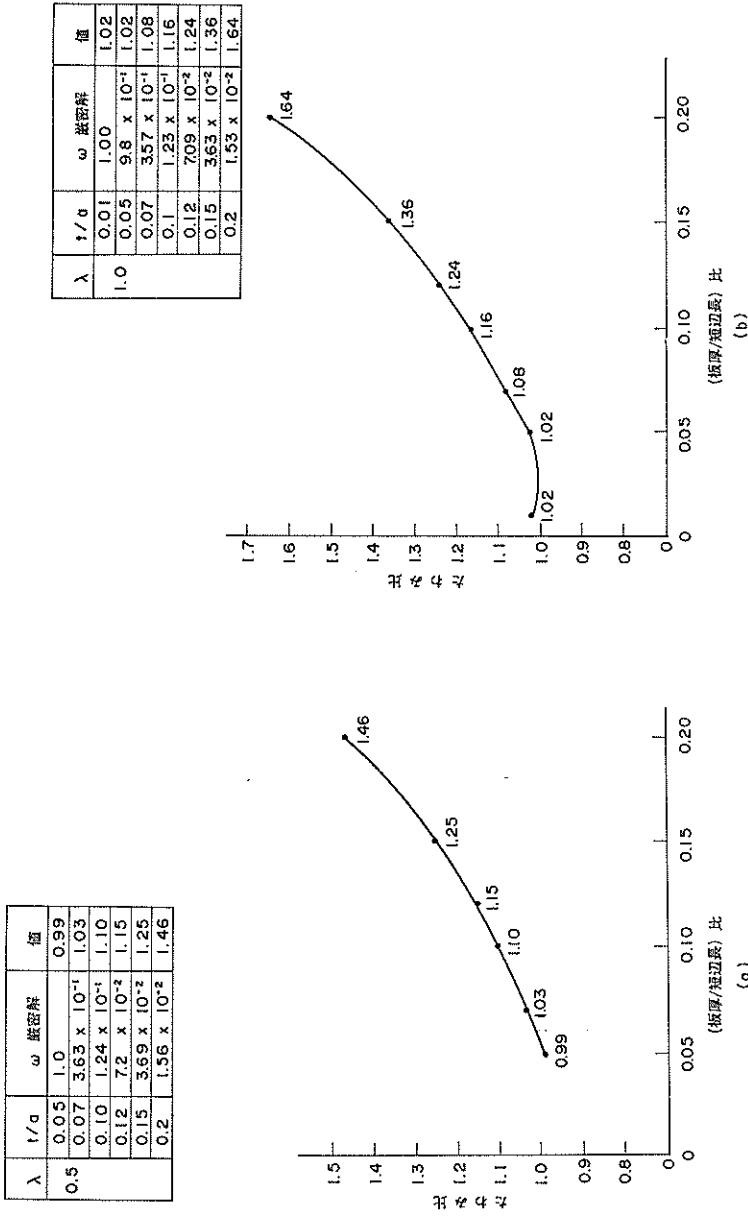


図-4.2 静水圧分布荷重を受ける周辺固定版の中央点のたわみに及ぼすせん断変形の影響

λ	t/a	ω 厳密解	値
1.5	0.05	1.132	1.01
	0.07	4.33×10^{-1}	1.01
	0.1	1.43×10^{-1}	1.12
	0.12	8.24×10^{-2}	1.18
	0.15	4.22×10^{-2}	1.28
	0.2	1.78×10^{-2}	1.49

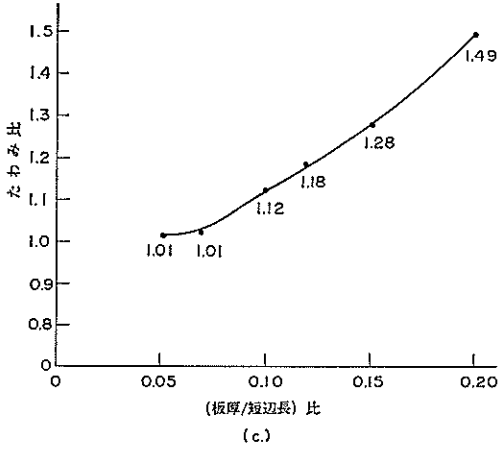


図-4.2 (つづき)

工学的見地より板としてモデル化できる辺長と板厚の関係を調べるため、立体アイソパラメトリック要素を改良したシェル要素と板要素のたわみを比較した⁶⁾(図-4.1, 図-4.2 参照)。工学的に許容できるたわみの差を±10%以内とすると、周辺固定版の場合、(板厚/短辺長) ≤ 0.08 で平板理論に基づく降伏線理論が適用できるが、それ以外ではせん断応力の影響を考慮した解析が必要と思われる。図中、 λ : 辺長比、 t : 板厚、 a : 短辺長、値: (シェル理論によるたわみ/厳密解) 比である。

4.2 解析例

本解析方法の妥当性を調べるため実験結果と解析値との比較を行った。

1) 前田のく(矩)形床板⁷⁾

前田教授が解析解と比較するため行った、2辺自由、2辺単純支持のく形床板の実験結果と本解析解を図-4.3に示す。計算時間の関係で 20 tf までしか解析していないが、両者は比較的良好一致している。

2) 関の正方形床板⁸⁾

正方形 RC 床板のせん断強度算定のために、関教授が行った一連の実験から周辺固定支持板の実験結果と解析解を比較し、図-4.4 に示す。9 tf までの載荷では両者ともよく一致している。スパン中央断面の状態を図-4.5 に示す。有効断面がアーチ形になっているのがわかる。

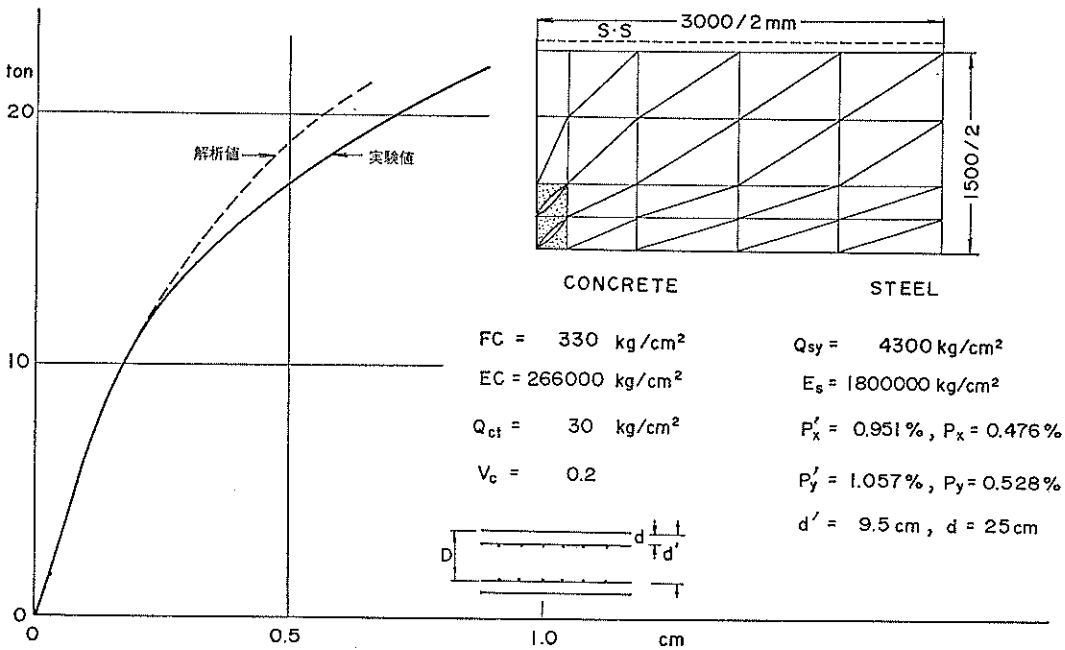


図-4.3 前田のく形床版

有限要素法による鉄筋コンクリートスラブの弾塑性解析

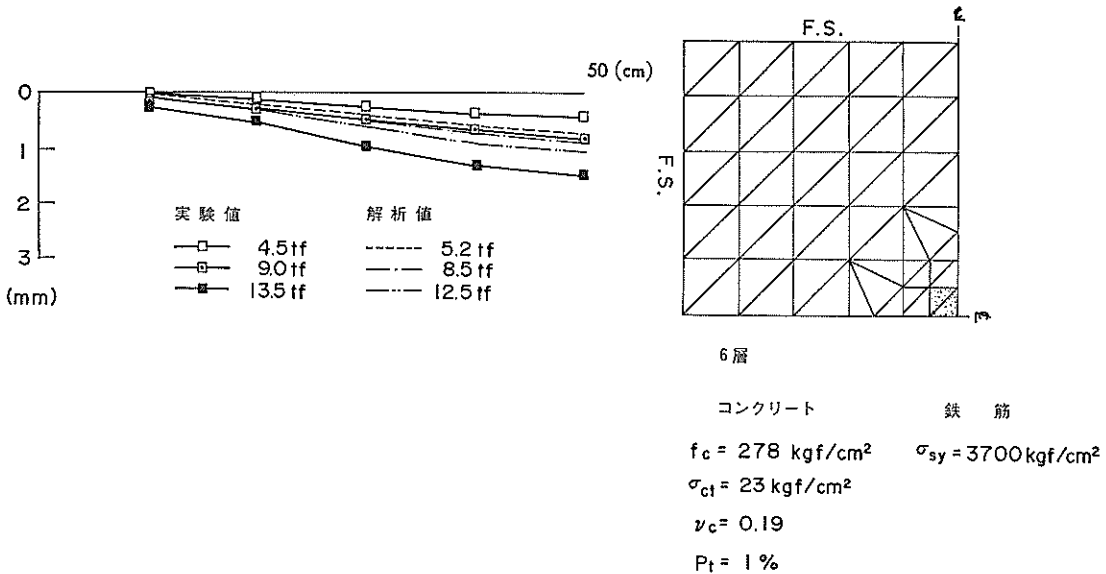


図-4.4 関の正方形床板

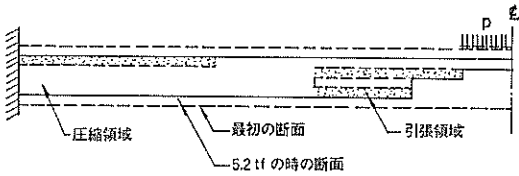


図-4.5 スパン中央断面

終局極限強度は、実験値 18 tf、解析値 15 tf であった。

5. 結 論

曲げ破壊を生ずる、相対する 2 辺が自由、他の 2 辺が単純支持の RC 方形床版およびせん断破壊を生ずる四辺固定版を数値解析し、板の破壊過程、たわみおよび終局極限強度が、実験結果とよく一致することを確かめた。2 例の数値解析結果をみる限りでは、本研究による解析方法が RC 床版の曲げ破壊のみでなくせん断破壊を解析でき、アーチ作用のモデル化に成功していると思われる。

なお、本報告の計算には港湾技術研究所計算センターの ACOS 800-II を用いた。

謝 辞

本研究を行うにあたり、北海道開発局土木試験所コンクリート研究室の太田室長、構造部の清宮主任研究官に資料収集や研究の方向等で多大の援助をいただいた。ま

た、プログラムの作成、原稿の推敲に際しては計算室佐々木技官の協力をいただいた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 小柳 洽, 児島孝之, 平沢征夫, 米田俊一: コンクリート床版のせん断破壊に関する一実験, セメント技術年報 X X II, 1968 年, pp. 549~552
- 2) 関 博: 集中荷重をうける鉄筋コンクリートスラブの設計法に関する研究, 港研報告, Vol. 17, No. 2, 1978 年 6 月, pp. 81~169
- 3) 岡田 清, 小柳 洽: コンクリートの破壊条件と破壊過程, 材料, 第 20 巻, 第 208 号, 昭和 46 年 1 月
- 4) 上田正生, 土橋由造: 鉄筋コンクリート床版の非線型解析, 昭和 53 年度土木学会北海道支部論文報告集, pp. 43~46
- 5) O. C. ツインクヴィッツ: 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 昭和 53 年 4 月, pp. 220~222
- 6) ISAP-6/DYNAMIC 解説書, 日電東芝情報システム株式会社
- 7) Yukio Maeda, Shigeyuki Matsui, Ichiro Kojima: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs by Finite Element Method, Technology Reports of the Osaka Univ., Vol. 26-2, 1976
- 8) 前出 2)