

運輸省港湾技術研究所

# 港湾技術研究所 報告

---

---

REPORT OF  
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH  
INSTITUTE

MINISTRY OF TRANSPORT

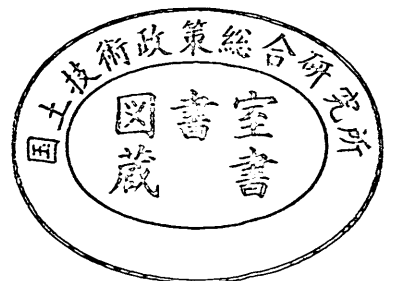
---

VOL. 17

NO. 2

JUNE. 1978

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



# 港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第17巻 第2号 (Vol. 17, No. 2), 1978年6月 (June. 1978)

## 目 次 (CONTENTS)

1. 水平版に働く揚圧力に関する研究  
..... 谷本勝利・高橋重雄・和泉田芳和..... 3  
(A Calculation Method of Uplift Forces on a Horizontal Platform  
.....Katsutoshi TANIMOTO, Shigeo TAKAHASHI, Yoshikazu IZUMIDA)
2. 海水の A.G.P. 試験法とその適用  
..... 堀江 毅・細川恭史・三好英一.....49  
(A.G.P. (Algal Growth Potential) Test and its Application to Seawater  
.....Takeshi HORIE, Yasushi HOSOKAWA, Eiichi MIYOSHI)
3. 集中荷重をうける鉄筋コンクリートスラブの設計法に関する研究  
..... 関 博.....81  
(Ultimate Strength of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Concentrated Loads  
.....Hiroshi SEKI)
4. 車止めの塗装の標準化について  
..... 伊藤隆夫・阿部正美・久保清志・石塚修次... 171  
(Standardization of Painting System Applied on Steel Curbing  
.....Takao ITO, Masami ABE, Kiyoshi KUBO, Shuji ISHIZUKA)
5. 有限要素法と最適分割法について..... 東海林秀幸... 193  
(On the Finite Element Method and Optimum Mesh Grid  
..... Hideyuki SHOJI)

## 有限要素法と最適分割法について

東海林秀幸\*

### 要 旨

有限要素法による応力計算の精度は、変位関数と分割方法で決定される。高次の変位関数はすでに開発されており、その代表的なものはアイソパラメトリック要素である。一方、構造物の効果的な分割方法は、現在まで検討された機会があまりなく、適当な文献も発表されていない。経験的に分割されているのが現状である。本報告では分割方法によって応力値がどのように変わるかを数値計算例で検討し、分割のガイドラインをまとめた。さらに最適分割法の一つとして等エネルギー密度線に基づく分割方法を検討し、その効果を調べ、有効な方法であることを確認した。

---

\* 樫材部 岩盤掘削主任研究官

## On the Finite Element Method and Optimum Mesh Grid

Hideyuki SHOJI\*

### Synopsis

To obtain an accurate solution with the Finite Element method, controlling parameters are displacement functions and mesh grids. Recently, higher order displacement functions have been developed. One of the representative elements is isoparametric elements. On the other hand, there is a few research works available on a reasonable mesh grids for a given problem.

This study dicusses a relationship between an accuracy of a calculated solution and mesh grids. Numerical examples show dependency of a solution on total degrees of freedom and elements distributions. Guide line is proposed through these numerical examples. It is verified that optimum mesh grid based on isoenergetics is very effective.

---

\* Senior Research Engineer, Machinery Division

## 目 次

目 旨	193
1. ま え が き	197
2. 要素分割と応力値の変動	197
2.1 平面応力の基礎式	197
2.2 き裂を有する平板の応力集中係数	197
2.3 要素分割上の注意事項	201
3. 最適要素分割の手法	202
3.1 最適化の考え方	202
3.2 厳密な方法	202
3.3 等エネルギー密度線に基づく分割方法	202
4. 結 論	203
5. あとがき	203
謝 辞	204
記 号	204
参 考 文 献	204
付録1 片持はりの計算例	204
付録2 データチェック	204

1. まえがき

応力計算の近似解法として登場した有限要素法は、構造物の形状に関係なく計算できること、差分法よりも安定であること、さらに大型電子計算機の普及によって急激に発展している。現在では応力計算のみでなく、同型式の偏微分方程式からなる拡散、熱伝導、ポテンシャルフローの解析にも用いられている。

著者は、水ジェットによって溝を掘削された岩盤内の応力解析に有限要素法を用いることを目的としてプログラムを開発を行った。その際に、高度な解析方法として2次、3次の多項式、あるいはアイソパラメトリック要素については基本的な参考書<sup>1),2),3),4)</sup>でも詳しく説明されているにもかかわらず、構造物の分割方法は特に触れられていないことに気付いた。有限要素法は数値計算法であり、高次の要素と適切な分割方法の組合せによって効果的な使用が可能となる。あるいは電子計算機の合理的な使用にもつながる。このような観点から、著者はWaterloo 大学でのコースプロジェクトとして、要素分割と応力値の変動、等エネルギー密度線に基づく最適分割法をとりあげ数値計算例によって検討を試みた。本報告は、著者のコースプロジェクトを骨子として書かれたものである。分割方法のガイドラインとして9項目を提案し、それによって応力値がどの程度解の精度が改善されるか数値計算例によって具体的に示した。

検討に用いた問題は、一様引張を受けるき裂を有する平板で、平面応力、線型として計算している。

2. 要素分割と応力値の変動

この章では具体的な数値計算例によって、要素数、その分布によって応力値がどのように変化するかを示し、構造物を要素に分割する際に留意すべき事項を述べる。

2.1 平面応力の基礎式

有限要素法による平面応力問題の解法は適当な参考書<sup>1),2),3),4)</sup>に詳しく説明されているので、ここでは結果のみを述べる。等方等質の構造物をもっとも簡単な一次式で三角形要素（以後、要素と呼ぶ）内の変位を近似すると応力計算に必要な式は以下ようになる。座標系は図-2.1 のとおりとする。

$$[k]\{\delta\} = \{F\} \quad (2.1)$$

$$[k] = [B]^T [D] [B] A t \quad (2.2)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & y_i - y_j & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_k - x_i & 0 & x_i - x_j \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & y_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$2A = \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

各要素の剛性マトリックス  $[k]$  を (2.2) 式によって計算し、全要素について重ね合わせると構造物の剛性マトリックスと節点変位、節点力の関係が求まる。節点変位と節点力の境界条件を代入すれば解くべき連立一次方程式が決定される。連立一次方程式の解として節点変位が求まり、要素内の応力は、 $[D][B]$  のマトリックスに節点変位を乗じて得られる。要素内のひずみエネルギーは応力とひずみより容易に求まる。

2.2 き裂を有する平板の応力集中係数<sup>5)</sup>

数値計算例として、一様引張応力を受けるき裂を有する平板の応力計算をとりあげる。図-2.1 にその寸法を示す。単位系はフィートポンド系であるが、応力集中係数には何の影響もないのでメートル系には換算しない。き裂の幅は無限小とし、先端の曲率は無限としているので応力集中係数は無限大となる。有限要素法では先端部に有限な要素を用いざるを得ないので無限大の値を求める

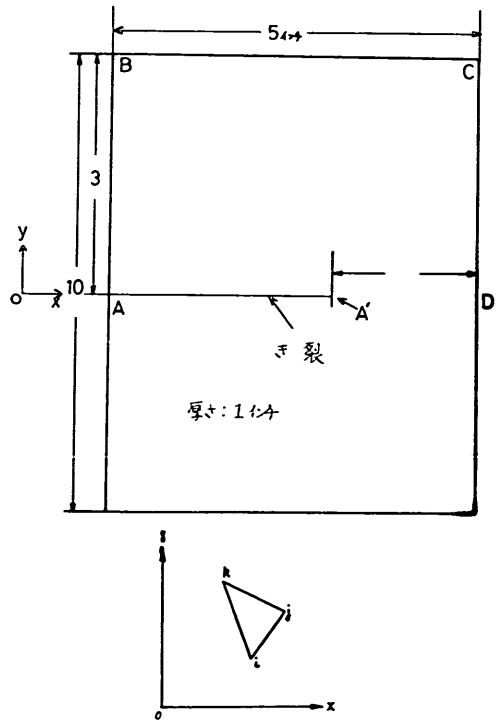


図-2.1 座標系とき裂を有する平板

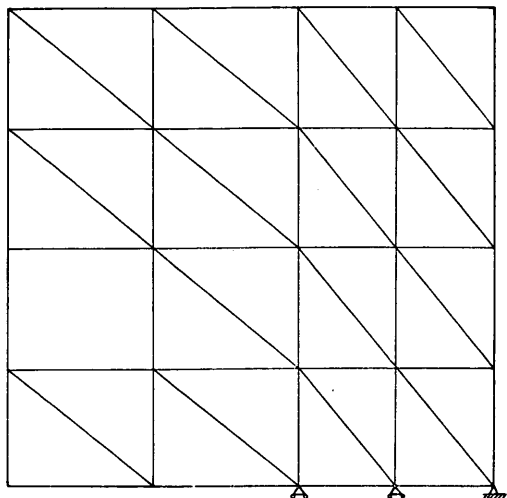


図-2.2 Run No. 1

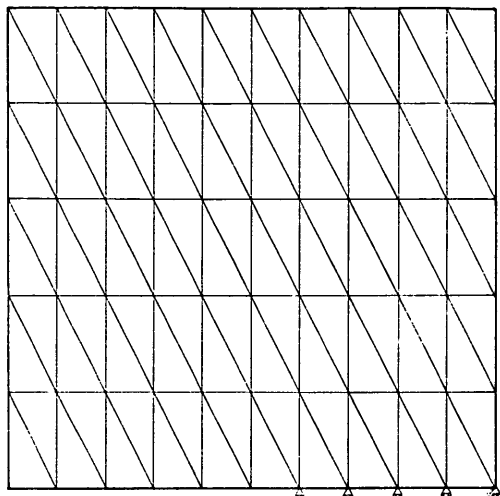


図-2.4 Run No. 3

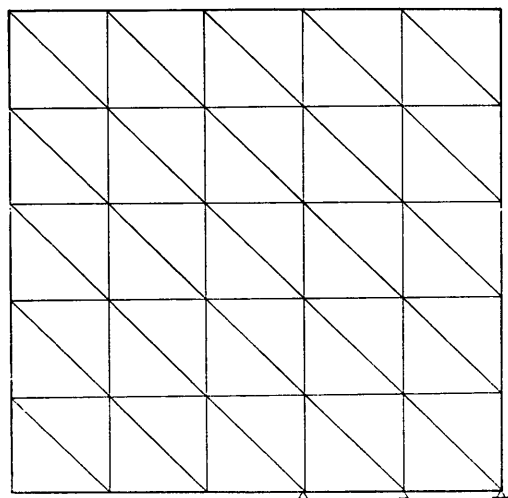


図-2.3 Run No. 2

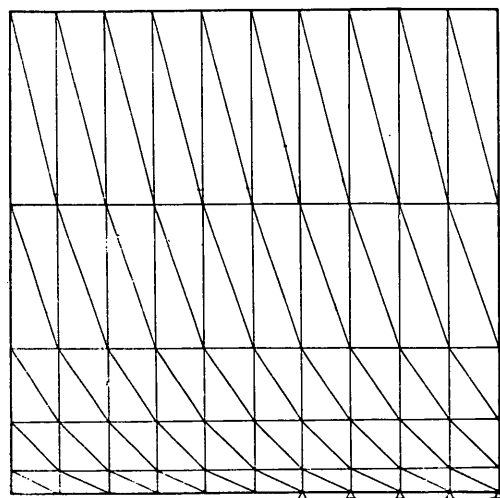


図-2.5 Run No. 4

ことはできないが、解としてはできるだけ大きな数値を求めると分割方法の方がより好ましいことになる。応力分布はき裂に関して対称なので平板の上半分のみを計算すれば十分である。変位の境界条件は AD' 間の各節点を x 軸方向のローラ支持とし、節点 D は固定である。

この平板を 図-2.2 から 図-2.8 までのように全自由度、要素の分布を変えた。Run No. 7 はき裂の影響を加味して分割されている。

計算結果より AD 線上の節点応力  $\sigma_y$  をプロットすると 図-2.9 のようになる。容易に想像できるように応力値は要素の寸法、配置、全自由度に大きく依存している。不適格な分割では、実際と非常にかけ離れた結果を

得てしまう危険性が大であることは明白であろう。Run No. 1 は、極端な例として粗い分割を用いたが、き裂先端での節点応力は Run No. 7 のわずか25%という非常に低い値であった。Run No. 3 から No. 6 は同一の全自由度で要素の大きさや分布を変えている。同一の全自由度であっても応力値にはかなりの差が生じることを読みとれる。Run No. 6 の分割では、応力集中部に比較的小さい要素を配置した Run No. 6 がもっとも高い応力値を得ている。しかし、より高い値は Run No. 7 によって求められている。このことは数値計算の常識から当然のように応力勾配を考慮して構造物を分割することが如何に重要であることを示している。

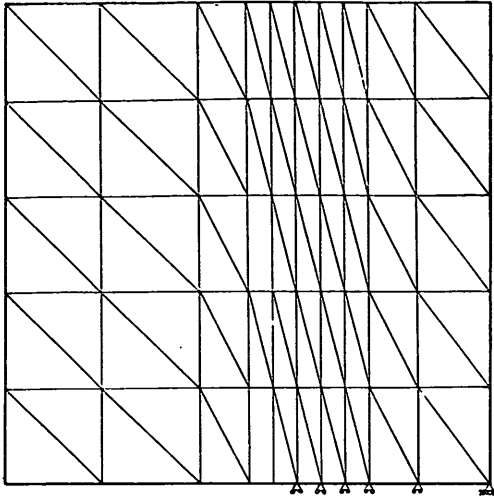


図-2.6 Run No. 5

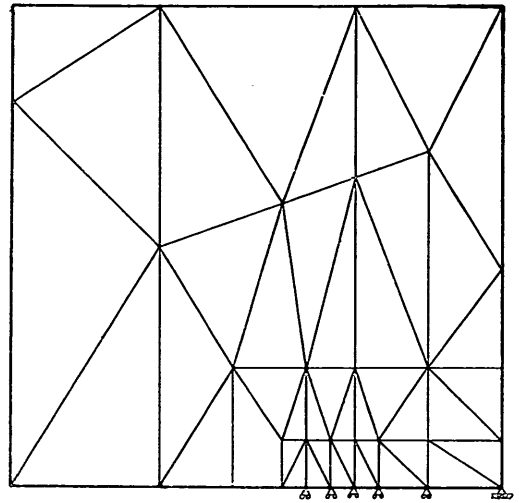


図-2.8 Run No. 7

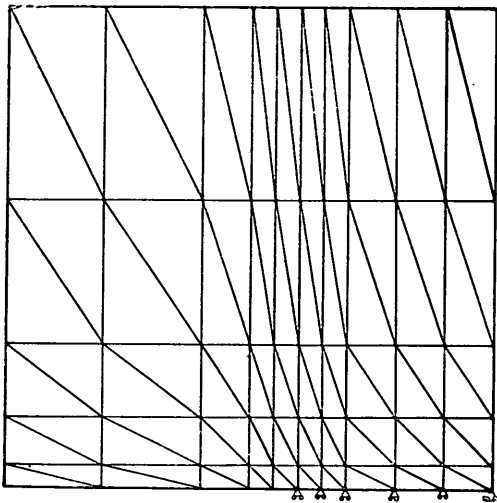


図-2.7 Run No. 6

有限要素法の解を総合的に評価する指標として全ひずみエネルギーがある。計算結果から各例の全ひずみエネルギーを全自由度に対してプロットすると図-2.11に示したようになる。Run No. 7を除くと全ひずみエネルギーは全自由度と共に単調に増加している。有限要素法の収束で説明されているのと同じ傾向である。全自由度が同一のRun No. 3から6では応力集中係数と同じ頃に全ひずみエネルギーが変る。図-2.11のように曲線で結んでみると、Run No. 3, 4, 5の見掛け全自由度はかなり低い値となる。Run No. 7は全自由度に対して他の例よりも高い全ひずみエネルギーである。見掛全

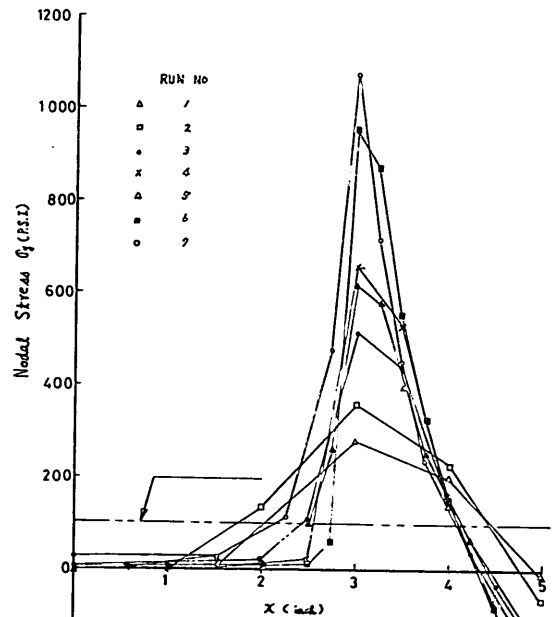


図-2.9 AD間の節点応力  $\sigma_y$

自由度を 図-2.11 から求めてみると Run No. 5 よりも高い値となる。全ひずみエネルギーと全自由度の関係から解の精度を検査するには系統だった要素分割についてのみ可能であり、異種の要素分割をも含めるにはその影響を考慮しなければならないことを示している。



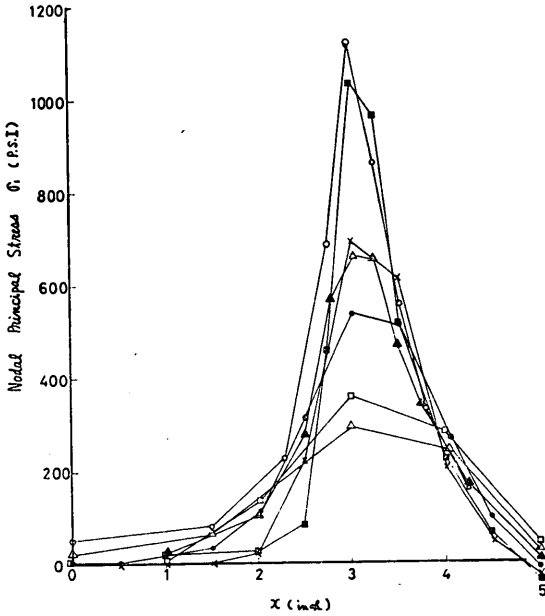


図-2.10 AD間の節点主応力  $\sigma_2$

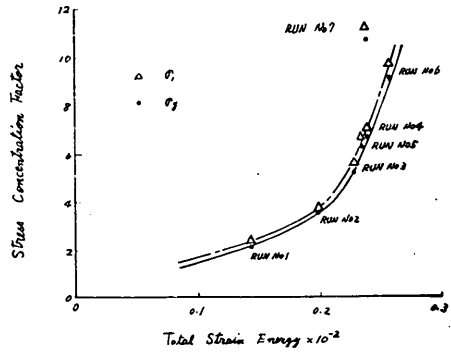


図-2.13 応力集中係数と全ひずみエネルギーの関係

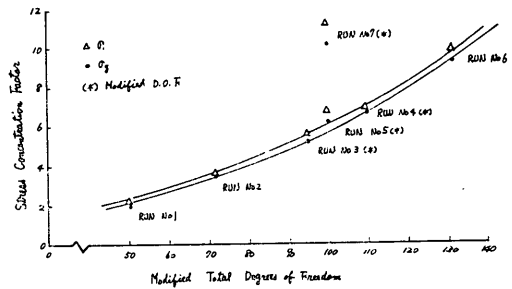


図-2.14 応力集中係数と修正全自由度の関係

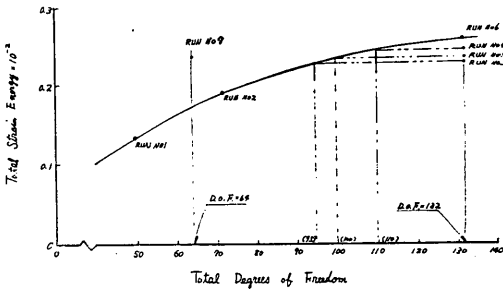


図-2.11 全ひずみエネルギーと全自由度の関係

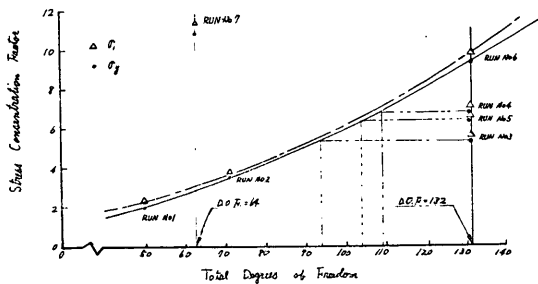


図-2.12 応力集中係数と全自由度の関係

図-2.12 は節点応力に基づく応力集中係数を全自由度に対してプロットした結果である。応力集中係数は局所的な値であって、全自由度のように構造物全体の評価に関

連する変数と直接関係するとは考えにくい、計算結果はかなり良い相関を示している。図-2.11と同様に曲線で結び見掛全自由度を求めると全ひずみエネルギーで得た値とほぼ同じ値となる。

応力集中係数を全ひずみエネルギーに対してプロットすれば図-2.13のようになる。図-2.12のように全体に滑らかな傾向は得られず、 $E > 2.2 \times 10^{-2}$ の範囲で応力集中係数は急激に増大する。応力集中係数が有限であれば、有限要素法の収束性から考えて全ひずみエネルギーは漸的に増加するのであるから、応力集中係数と全ひずみエネルギーの関係も漸的になるはずである。図-2.13は曲率無限大のき裂特有なことと考えられる。図-2.12と図-2.13から応力集中係数のように局所的な値と全体的な評価である全ひずみエネルギーや全自由度と密接な関係のあることは明らかである。

図-2.11で求めた Run No. 3 から 5 までの見掛全自由度を用いて応力集中係数を再プロットすると図-2.14になる。Run No. 7を除けば、いずれも同系統の要素を使用しているため一本の曲線上にのると思われる。内挿によって求めているのでこの方法がいずれの問題にも適用できるとは言えないが計算結果のチェックには用いられよう。

図-2.11 から 図-2.14 までに示した結果で Run No. 7 は他の例と独立している。要素数、全自由度が少なくないにもかかわらず、全ひずみエネルギーと応力集中係数は高くなっている。これは要素分割によるだけである。き裂先端の要素面積は同一であるが、その周囲の要素の形状によってこのような差が現われたと言える。故に構造物を要素に分割する際には要素の大きさと配分が重要であると言える。換言すれば、各々のケースに最適な要素分割様式があることになる。

### 2.3 要素分割上の注意事項<sup>9)</sup>

前節では、数値計算例をもとにして要素分割を機械的にするのでは十分な精度を持った解を求められないことを示した。全自由度を増加しても必ずしも良い結果を得られないことも明白であった。与えられた問題に対して要素の大きさとその方向に十分注意すれば、わずかな全自由度でかなり満足のいく結果を期待できるのであるから、構造物を分割するには何らかのガイドラインがあってもよいはずである。ガイドラインとして常識的な事項まで含めると以下の事項が挙げられる。

- (1) 応力勾配の大きいと予想される部分には小さい要素を用いる。
- (2) 要素のアスペクトレシオ（短辺と高さの比、図-2.15 参照）はできるだけ1に近づける。
- (3) 応力勾配が大きくかつその方向が推定しがたい領域には(2)で述べた要素を用いる。
- (4) アスペクトレシオの悪い要素を用いざるを得ない領域には、長片方向を応力勾配の方向に一致させるよう分割する<sup>9)</sup>。
- (5) 極端に扁平な要素を使用しない<sup>9)</sup>。
- (6) 隣り合う要素の面積比を極端に大きくしない<sup>9)</sup>。
- (7) 構造物中の最大要素と最少要素の面積比を極端に大きくしない<sup>9)</sup>。
- (8) 座標原点から離れた領域に小さな要素を配置しない<sup>2)</sup>。
- (9) 応力集中部の自由境界の座標は自動読取機を用いず、計算機内部で求めるか、有効桁までパンチして入力する<sup>6)</sup>。

(8)、(9)は分割方法ではなく、誤差の導入防止を目的としている。上記の注意事項を具体的な例で示すと 図-2.15 となる。応力勾配の大きくなりそうな場所は経験的に判別でき、細かく分割することができる。しかし、その方向を決めることは困難である。そのような領域には、アスペクトレシオが1の要素か正三角形を用いるのがもっとも安全でかつ精度にも不安がないようである。クラック関係の計算<sup>6)</sup>にはこれらの要素がよく用いられ

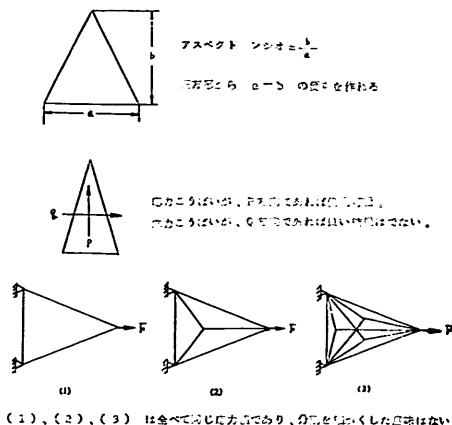


図-2.15 分割の例

ている。アスペクトレシオの悪い要素を使用するのは応力勾配がいずれの方向にも低い領域に限る。著者等のクラス20名中にアスペクトレシオ10以上の要素のみを用いて、ノッチ部の応力計算をやり、実験値よりも50%以下となる応力集中係数を求めた例がある。扁平な要素でもアスペクトレシオは悪くないことがあるが、良い結果を期待できない。図-2.15 に示した3つの例はどの要素内も同じ応力値となり、分割を細かくした効果は全くない。このような分割では逆に精度を低下させることもあり、既存の分割をより細かくする際には十分注意した方がよい。一部分だけ極端に細かく分割すると実際にありそうもない応力分布を得たりする。ノッチの問題で、ノッチ底部に隣り合う要素面積を極端に大きくして計算した例では、高い応力集中係数を得られたが、周辺での応力値が符号を変えてしまい、実質的には意味のない計算となった。応力、ひずみのいずれも連続で滑らかに変わる値であるから要素の大きさも滑らかに増減するよう分割すべきである。最大要素と最少要素の比が極端に大きいのは、計算機の有効数字、桁落ち、丸めの誤差等の数値計算上避けられない誤差を考慮すると望ましくない。他の要素に比較して非常に小さい要素を使うのであれば、有効数字無限桁の計算機を用いるほかない。座標原点から離れた領域に小さな要素を配置すると解の精度を悪化させる。これは、 $[B]$ マトリックスが座標の差になっているので計算機内部で有効桁の低下をきたすからである。座標原点は任意の点に置くので、応力集中部付近にするとよい。あるいは、Cook<sup>2)</sup>が述べているように、要素の重心を原点とする局所座標系を使用する。

以上の注意事項をもとについて Run No. 1 から 7 までの例を検討してみる。Run No. 1 と 2 は分割が粗すぎでしまい精度の良い解を求めることは不可能である。

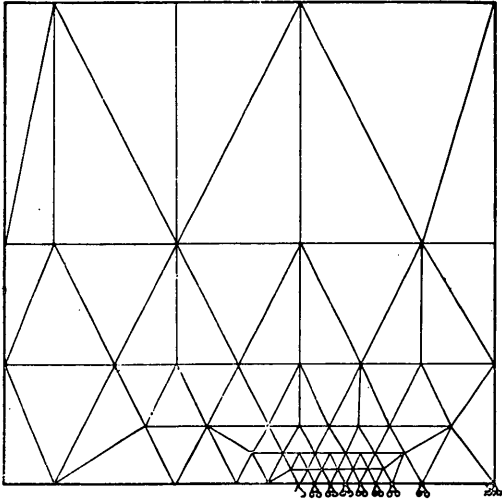


図-2.16 Run No. 8

Run No. 3 は全自由度を増加したが、一様な分割であるから応力集中は全く考慮されていない。No. 4 はき裂底部で方向の応力勾配を期待した要素の配分である。き裂先端では  $x$  方向の応力勾配も大きいと考えられるので一面的な分割と言える。Run No. 5 は逆に  $x$  方向のを考慮した分割である。Run No. 4 と大差のない結果を得ているのも当然と言える。Run No. 3 よりも良い結果を出したのは、一面的とは言え、不等分割の効果である。Run No. 6 は、 $x, y$  2 方向の不等分割を行ったために前例に較べてかなり良い結果を求めている。応力集中部付近にはアスペクトレシオ1.41の要素と2.0の要素を用いている。これら6例はシンプルなメッシュジェネレーターを用いて分割したが、Run No. 7 は応力集中を考慮して平板を3領域に分けて分割した例である。カード入力準備に時間を必要とするが、注意事項にもとずいている。部分的にはアスペクトレシオの悪い要素を用いているものの、計算結果が良好であったのは当節で説明したとおりである。

上記注意事項をより忠実に守って分割をしたのが、図-2.16 である。大半の要素はアスペクトレシオが1である。計算結果は図-3.3 のように前出の例題よりもはるかに良い結果が求まっている。

### 3. 最適要素分割の手法

#### 3.1 最適化の必要性

前章では構造物を要素に分割する際に基本的な注意事項に沿っていない限り、得られた結果の信頼性が薄いことを数値計算例で示した。より良い精度を期待するあまり、必要以上に細かく分割することもあり得る。分割様

式には各問題に対して最適な方法があってよさそうである。この章では最適要素の大きさ、配置について厳密な方法と近似的ではあるが使い易い等エネルギー密度線に基づく分割法について詳しく述べる。

#### 3.2 厳密な方法

有限要素法は、周知のように最少ひずみエネルギーから定式化される。最適分割を得るためにひずみエネルギーはひずみと座標の関数と仮定する。通常は固定した要素内でのひずみエネルギーを考えているので座標の関数とはならない。ここでは要素そのものが最適な位置に移動すると仮定するため座標の関数となる。簡単のため体積力、初期ひずみ等はないとすれば、要素内のひずみエネルギー  $\pi_p$  は

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{F\} \quad (3.1)$$

$\pi_p$  が最少となるには

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \delta_i} \Delta \delta_i + \frac{\partial \pi_p}{\partial x_k} \Delta x_k = 0 \quad (3.2)$$

$\delta_i$  と  $x_k$  は任意であるので

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \delta_i} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial x_k} = 0 \quad (3.4)$$

(3.3) 式から、節点変位と節点力が剛性マトリックスで結ばれた (2.1) 式を導かれる。(3.4) 式は

$$\left[ \frac{1}{2} \{\delta_i\}^T \left\{ \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} \{\delta_i\} - \{\delta_i\}^T \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\} \right] \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = 0 \quad (3.5)$$

となる。(3.5) 式から考えている領域内で最適となる要素が決定される。これが厳密な方法である。しかし、この方法によって2次元、3次元問題で解が存在するかどうか証明されていない。さらに計算機のプログラム作成に際してアルゴリズムが複雑すぎて、Mcneice, Turcke<sup>7),8)</sup> 等は推奨していない。本報告では、これ以上深くとりあげず参考文献の紹介にとどまる。

#### 3.3 等エネルギー密度線に基づく分割方法<sup>9)</sup>

近似的に最適化要素分割を得る方法として、等エネルギー密度線に基づく手法がある。等エネルギー密度は要素の体積でひずみエネルギーを割った値で、その等高線が等エネルギー密度線となる。この方法を用いるには、予備計算でエネルギー密度を求めなければならない。手順は

- (1) 構造物の応力計算を実行し、エネルギーを求める。
- (2) 等エネルギー密度線とそれに直交する曲線群を構造物上にプロットする。

(3) 2種類の曲線で囲まれた領域をもとに要素分割を実行する。

(4) 応力計算を再度実行し、解を求める。

のように4ステップとなる。第1ステップの分割は粗くてもよい。これは 図-2.9 でわかるように粗い分割でも応力分布は定性的傾向を持っているからである。等エネルギー密度線の間隔が粗ければ、補間して細かくすれば十分である。

前章と同じ問題を取り扱ってみる。等エネルギー密度線を Run No. 3 から求めると 図-3.1 のようになる。これをもとに再分割してみると 図-3.2 のような形状になる。前章で示した分割した様式とはかなり異なってい

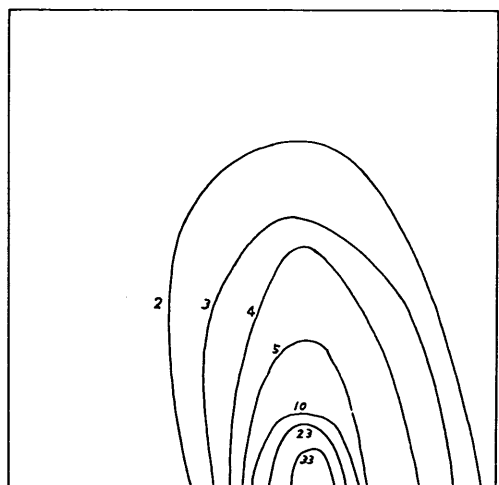


図-3.1 等エネルギー密度線 (番号はエネルギー密度のクラスを表わす)

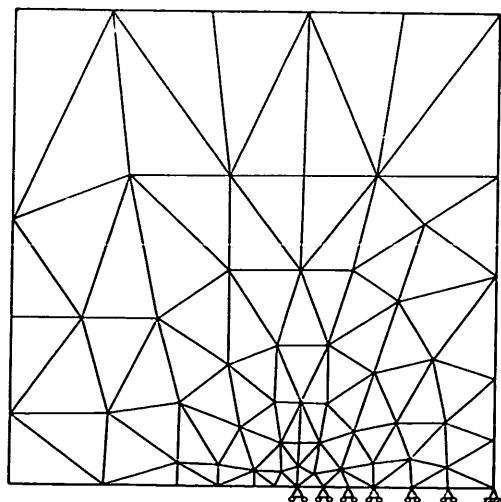


図-3.2 等エネルギー密度線に基づいた分割の例

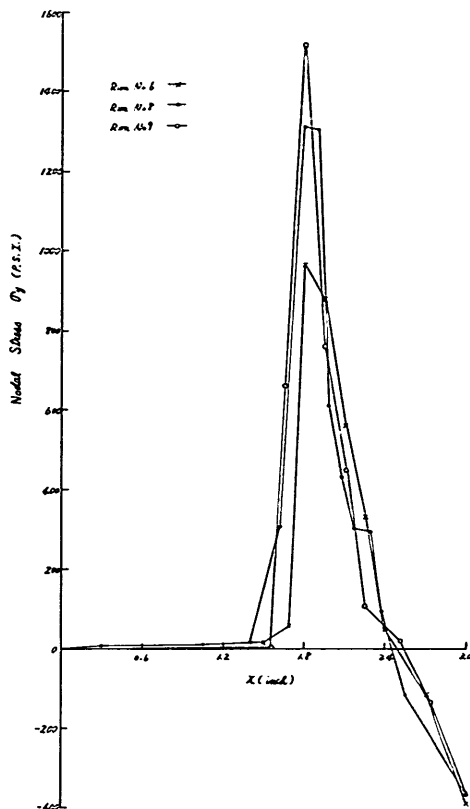


図-3.3 AD間の節点応力  $\sigma_y$  (分割改善による応力分布の変動例)

る。この要素分割で計算した応力値は 図-3.3 のようになり、もっとも高い値でかつ分布も滑かである。

#### 4. 結 論

数値計算例をもとにして要素分割によって、応力値がどのように変るかを調べた。最適化の一手法として等エネルギー密度線に基づく分割方法を取りあげ、その効果を数値計算例で示した。これらの結果をまとめる次のような事項を挙げることができる。

- (1) 使用する要素はアスペクトレシオができるだけに近いが、あるいは正三角形を用いる。
- (2) 扁平な要素はできるだけ使用しない。
- (3) 等エネルギー密度線に基づく分割は同一自由度であればより精度の高い解を得るための有効な方法である。

#### 5. あとがき

本報告の骨子は Waterloo 大学での有限要素法の講義と著者のコースプロジェクトである。プロジェクトの動

機は有限要素法が数値計算法であるにもかかわらず、構造物をどのように分割すれば十分なのか判断する基準をまとめた文献が見当らなかったことである。高次の変位関数を用いた要素を詳しく説明している参考書では、分割方法は簡単に触れるだけであったりする。分割のガイドラインとして7項目、誤差導入防止として2項目を挙げたがこれで十分なものではない。さらに分割の最適化として等エネルギー密度線を利用した方法を紹介し、計算でその効果を確めた。計算機の容量が十分大きければ、このような方法を試みる必要はない。しかし、今後、大型の問題を解かなければならない時には役立つと思われる。

謝 辞

本報告中に示した Run No. 1 から 7 まではコースプロジェクトとした作成した著者のプログラムを使用し、IBM 370 で計算した。Run No. 8 と 9 は機材部岩崎室長のプログラムで TOSBAC 560 によって計算した。最適化に関する文献は Waterloo 大学土木工学科 Mcniece 助教授の好意による。岩崎室長、Mcniece 助教授に感謝の意を表わします。

記 号

- [ $k$ ]: 要素の剛性マトリックス
- { $\delta$ }: 節点変位ベクトル
- [ $F$ ]: 節点力ベクトル
- { $\sigma$ }: 応力ベクトル
- $E$ : 縦弾性係数
- $\nu$ : ポアソン比
- $x_i$ : 節点と座標 ( $i = 1, 2, 3$ )
- $y_i$ : 節点座標要 ( $i = 1, 2, 3$ )
- $A$ : 素の面積
- $t$ : 要素の厚さ
- $\pi_p$ : ひずみエネルギー

参 考 文 献

- 1) O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Analysis in Engineering The Second Edition, 1971, McGraw-Hill.
- 2) R.D. Cook, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wily & Sons, Inc. 1974
- 3) K.H. Huebner, "The Finite Element Method for Engineer", John Wily and Sons, Inc. 1975
- 4) D. Turcke, "The Finite Element Method", lecture notes, University of Waterloo, 1975
- 5) H. Shoji, "Course project for CE 525", University of Waterloo, 1977
- 6) 宮本 博, "有限要素法と破壊力学", 培風館, 1972
- 7) G.M. Mcneice and P.V. Marcal, "Optimization

of Finite Element Grids Based on Minimum Potential Energy", Technical Report no 7, Brown University, 1971

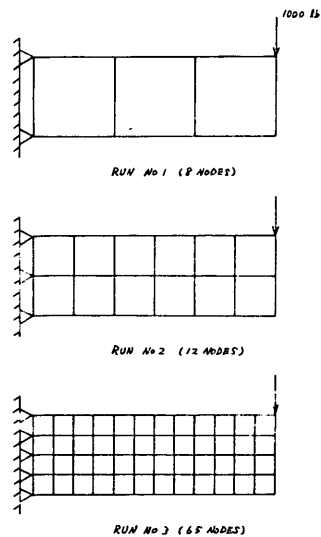
- 8) D.J. Turcke and G.M. Mcneic, "Procedure for Selecting Near Optimum Finite Element Grids for Improved Stress Analysis", 2nd International Conference on pressure Vessel and piping Technology, San Antonio, Texas, October 1973

付録 1 片持はりの計算例

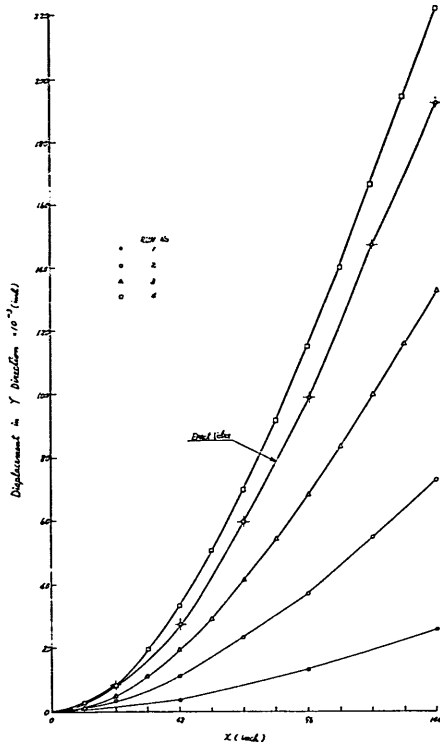
ここでは片持はりの変形を四角形要素を用いて、要素数を変えて結果にどのような影響が現われるかを示す。分割の様子を付 図-1 に示す。材料定数、荷重、厚さは一定として節点数のみを変えた。節点変位は付 図-2 のようになる。図中、Eact は片持はりの式で計算した値である。応力は付 図-3 のような結果となった。8 節点要素で 付図-4 のような分割をすると節点要素を数多く用いるよりも変位、応力ともに大きくなる。付図-5には全ひずみエネルギーをプロットしてある。ここに示した例から、数多くの低次の要素を用いるよりも、高次の要素を使用した方が有利である。特に曲げの問題ではその傾向が強いとされている。

付録 2 データチェック

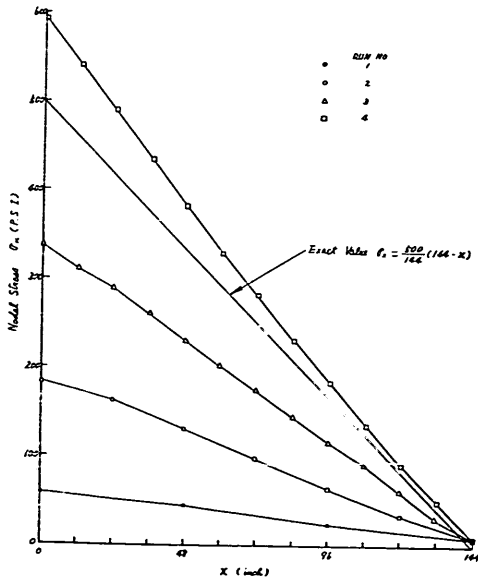
有限要素法を使用する際に問題になるのはエラーである。プログラムが完全で入力データにも誤りがなくとも出るエラーは境界条件が不適切であるとか、大型構造物の計算で計算機の性質と解法によって累積して来るもので、その原因は簡単には探れない。しかし、大半のエラーは入力データ中の誤りによって発生することが多い。



付図-1 4 節点要素による片持はりの分割

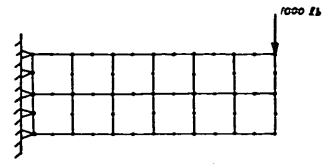


付図-2 変位の計算結果

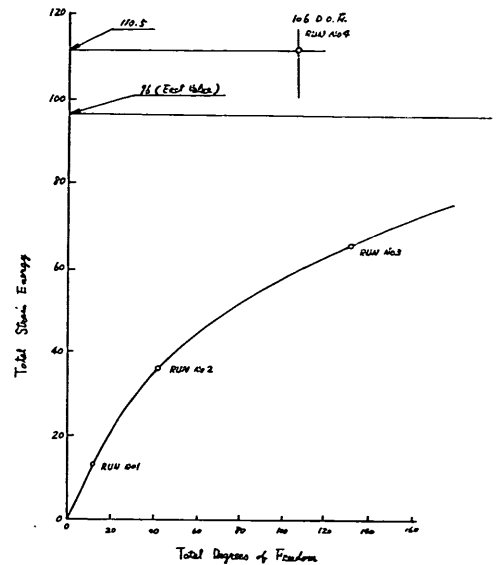


付図-3 応力の計算結果

汎用のプログラムでは、このようなエラーを防止していると思われるが、著者のプログラムに組み込み、実際に使用して便利だったデータエラーゲートを紹介する。



付図-4 8 節点要素による片持はりの分割



付図-5 全ひずみエネルギーと全自由度の関係

それらは

- (1) 節点数過大
- (2) 要素数過大
- (3) 解析方法の識別の不可
- (4) バンド幅過大
- (5) 境界条件の設定不可
- (6) 要素面積の過小
- (7) 要素節点番号が時計廻り
- (8) 要素面積が負
- (9) エラー総数打出しと演算停止

(1)と(2)は常識的な事だが意外と忘れられている。(3)と(5)は指定コード以外が入力された時に働く機能である。(4)はバンドマトリックス法を用いたので使用している。シーケンシャルファイル法では必要ない。(6)は節点座標が等しい時に働くゲートで、節点座標のいずれか2点等しいことを発見できる。(7)は節点番号が等しい時に働くゲートである。(8)は節点番号を時計廻りになっていると働くゲートである。面積の絶対値をとれば問題ないが、節点座標のエラー発見に役立つ。つまり、節点番号を反

時計廻りに統一して入力すれば絶対にエラーメッセージの出ないはずなのが、ここのメッセージが出たりすると、この時には必ず節点座標にエラーがある。(9)は入力データ中にあるエラー個数を打出して演算を停止するゲートである。

入力データのチェックはドラフターで分割された構造物を描くことがもっとも便利で正確である。しかし、これでは工程が増えてしまい、混雑している時には仕事が遅れてしまう。以上のゲートをプログラムに組み込むことは簡単であるし、演算時間を大幅に長くすることはない。プリント結果からすぐにエラーを発見できるので無駄のない計算を実行できる。ドラフターによるチェックは最終段階でよいと思われる。

入力データエラーを軽減する方法としてメッシュジェネレーターの使用がある。本報告では、もっとも簡単なメッシュジェネレーターを用いて準備時間の短縮とエラーの発生を防いだ。汎用性のメッシュジェネレーターを開発するのはかなり困難であるが、部分的に使用するのは効果的である。

計算機の実行時エラーからその原因を発見するのはユーザーだけでは不可能なことがある、プログラム演算部のミスをなくすのが終了すれば、その後使用するユーザーのためにできるだけ数多くのエラーメッセージを組み込んでおく方が望ましい。総合的には時間と費用の節約になることは確かである。