

運輸省港湾技術研究所

港湾技術研究所 報告

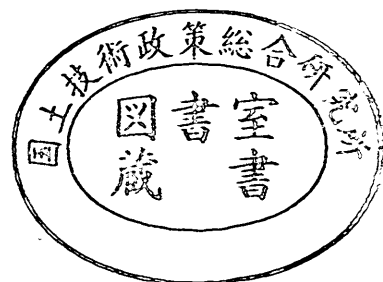
REPORT OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH
INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT

VOL. 12

NO. 4

DEC. 1973

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



1973

港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第12巻 第4号 (Vol. 12, No. 4), 1973年12月 (Dec. 1973)

目 次 (CONTENTS)

1. 波と流れによる砂移動に関する実験
..... 田中則男・小笹博昭・小笠原昭..... 3
(Experiments on Sand Movement by Waves and Currents
.....Norio TANAKA, Hiroaki OZASA and Akira OGASAWARA)
2. 楕円柱体近似による固定船体に働く波力の理論および実験
..... 合田良実・高山知司・笹田 正..... 23
(Theoretical and Experimental Investigation of Wave Forces on a Fixed Vessel
Approximated with an Elliptic Cylinder
..... Yoshimi GODA, Tomotsuka TAKAYAMA and Tadashi SASADA)
3. 空港アスファルト舗装のわだちぼれ
..... 森口 拓・浅島豊明・渋谷英男..... 75
(Rutting of Asphalt Pavements for Airports
..... Hiraku MORIGUCHI, Toyoaki ASAJIMA and Hideo SHIBUYA)
4. 連続載荷方式による急速圧密試験
..... 梅原靖文・松本一明・成田 実・梅田裕史.....131
(Rapid Consolidation Test Under Continuous Loading
.....Yasufumi UMEHARA, Kazuaki MATSUMOTO, Minoru NARITA
and Hirojumi UMEDA)
5. 各種地盤における平均応答スペクトル
..... 土田 肇・倉田栄一・石坂徳三・林 聡.....171
(Average Response Spectra for Various Site Conditions
..... Hajime TSUCHIDA, Eiichi KURATA, Tokuzo ISHIZAKA
Satoshi HAYASHI)
6. 太径鉄筋を用いたコンクリートはりのひびわれ
..... 関 博.....201
(Crack Characteristics of Reinforced Concrete Beams with Large-sized Deformed Bars
.....Hiroshi SEKI)
7. ドラグヘッドに関する研究 (第1報)
——ドラグヘッドの基礎形状について——
..... 八木得次・奥出 律・是石昭夫.....233
(Study of Drag Suction Head (Part 1)—On the Basic Geometry of Draghead—
..... Tokuji YAGI, Tadasu OKUDE and Akio KOREISHI)

2. 楕円柱体近似による固定船体に働く波力の 理論および実験

合田良実*・高山知司**・笹田 正***

要 旨

船や浮遊式海洋構造物を係留したときに作用する波力の基礎研究として、楕円柱体がある吃水を有して水面に固定されているときに働く波力の理論を導き、実験的に検討した。

理論解は楕円柱体の側面および底面の境界条件を満足し、円柱体を含めて任意の形状の楕円柱体に働く波力を計算することができる。境界条件の適用を若干緩めると2種類の近似解が得られる。その一つは前論文(港研報告第10巻4号)で用いたもので、吃水が大きな場合には十分高い精度を有している。もう一つは、円柱体に対して伊藤・木原が用いた近似解と同種のもので、吃水にかかわらず実用上十分な精度を有している。両近似解とも所要計算時間が厳密解の $1/10\sim 1/20$ である点において実用性が高いと考えられる。

実験は、水深40cm、入射波の周期 $0.42\sim 2.5$ secの条件において、長径50cm、短径10cmの楕円柱体について波力を測定した。吃水は、ほぼ全水深の39cmおよび水深の $1/2$ の20cmの2種類である。波力の実験結果は理論値よりもやや大きく、最大波力の付近で理論値の $1.2\sim 1.5$ 倍程度である。しかし、入射波の波長および波向による波力の変化の様相は理論値と良く一致しており、これによって理論解の妥当性は実験的にも検証されたといえる。

* 海洋水理部 波浪研究室長

** 海洋水理部 波浪研究室(旧姓 吉村)

*** 海洋水理部 波浪研究室

2. Theoretical and Experimental Investigation of Wave Forces on a Fixed Vessel Approximated with an Elliptic Cylinder

Yoshimi GODA*

Tomotsuka TAKAYAMA**

Tadashi SASADA***

Synopsis

This is a fundamental study on wave forces exerted upon moored ships or floating offshore platforms. A theory is developed for the interaction between waves and a fixed vertical cylinder of elliptic shape which has a clearance between its bottom and sea bed.

The theoretical solution satisfies the boundary conditions around the side wall and at the bottom of the cylinder, and enables the computation of wave forces upon an elliptic cylinder of any slender ratio inclusive of a circular one. Partial application of the boundary conditions yields two approximate solutions. The one is what has been employed in the previous paper (Vol. 10, No. 4), and is quite accurate for the case of deep draft. The other is similar to those employed by Ito and Kihara for a circular cylinder, and is reasonably accurate for a cylinder of any draft. Both approximations have a practical merit of reducing computation time to only 1/20 to 1/10 of that for the exact solution.

Measurements of wave forces have been made for a model elliptic cylinder with the long axis of 50 cm and the short axis of 10 cm at the water depth of 40 cm for the waves with period from 0.42 through 2.5 sec. The quasi-full-depth draft of 39 cm and the half-depth draft of 20 cm were employed. Measurements show the forces somewhat larger than the theoretical ones: e.g., about 1.2 to 1.5 times the latter in the neighborhood of the maximum forces. However, the patterns of wave force variation with respect to the incident wavelength and wave angle agree quite well with the theory, and thus the theory has been confirmed experimentally.

* Chief of the Wave Laboratory, Marine Hydrodynamics Division

** Member of the Wave Laboratory, Marine Hydrodynamics Division (formerly Tomotsuka YOSHIMURA)

*** Member of the Wave Laboratory, Marine Hydrodynamics Division

目 次

1. 序 論	27
2. 理論式の誘導	27
2.1 理論展開の概要	27
2.2 基本方程式	28
2.3 外側領域の速度ポテンシャル	29
2.4 底面下領域の速度ポテンシャル	35
2.5 未知係数の決定	35
2.6 波力およびモーメント	39
3. 波力およびモーメントの計算	42
3.1 項数の決定と計算条件	42
3.2 近似解の導入	42
3.3 厳密解と近似解の比較	43
3.4 楕円柱体の吃水による波力とモーメントの変化	50
3.5 相対水深による波力およびモーメントの変化	52
4. 実験による波力の測定とその考察	57
4.1 実験装置	57
4.2 実験方法	59
4.3 全没水状態の楕円柱体に働く波力	64
4.4 半没水状態の楕円柱体に働く波力	69
5. 結 論	72
参考文献	73
主要記号一覧表	73

1. 序 論

船が海上に係留されているときに波を受けるとどのくらいの波力が働くかということは、あまり良く分っていない。船でなくて他の形状の浮遊式構造物の場合については、なお一層分っていない。しかし、現実の問題としては、巨大タンカーの荷役施設であるシーバースの計画および設計の主要外力として、船体波力が重要な課題になりつつある。また、最近のように各主要港湾とも入港船舶が増えて港に入り切れないような状態では、台風時の船舶の安全係留の問題を真剣に考えておかなければならない。さらに、海洋開発における海面のスペース利用として各種の浮遊式構造物が提案あるいは計画されているけれども、その具体化のためには波浪中の浮体の係留の問題を解決しておく必要がある。

このような波浪中の浮体の諸問題の解決の一つの手掛りとして、我々は先に、シーバースに接岸した船体に働く波力の計算方法を提示した¹⁾。この方法は、船体を楕円柱体で近似し、楕円柱による波の回折理論から波力を求めるもので、船はシーバースに完全に固定されているものと仮定している。この計算方法を20万トン級のタンカーに適用すると、 $H_{1/3}=1.0\text{ m}$ 、 $T_{1/3}=10\text{ sec}$ の波浪が真横から作用するときは、船体に不規則変動波力の1/3最大値として約2,000tの力が働き、この船に係留するシーバースの二つのドルフィンにはそれぞれ1,400t程度の1/3最大波力が作用することが示される。

実際には、係留時でも船は波によって動揺し、この結果、波力が減少すると予想される。特に、横方向の水平運動が許容されているときは、波力が固定時の1/2程度となるという模型実験結果²⁾も報告されている。逆に、船体の完全固定状態における波力は、一般に係留状態の波力の上限値を与えるものと考えられるので、固定時の波力を解明しておくことは実用上も重要と思われる。

この意味で、前論文¹⁾においては未解決の問題が二、三残されていた。一つは、理論計算として楕円柱が海底にまで達している場合を対象としていることで、船体と海底との間にクリアランスがある場合には、計算の便宜上、理論解の波圧の鉛直分布のうちの船底から上の部分をそのまま用いて波力を算定した。いいかえれば、船体と海底との間に隙間があっても、船体の周りの波圧分布はこれによって影響されないと仮定した。もう一つは、理論計算のみで波力の実験的検討を行なっていないかった

ことで、実験による裏付けが要望されていた。

本報告は、この二つの問題点に対する解答であり、まず船体が海底から離れている場合の理論解を導き、これによる計算結果を示す。さらに、前論文で扱った船体着底時の波力、および本報告の理論計算の適用例として吃水が水深の1/2のときの固定楕円柱体の波力について実験的に検討した結果を報告する。

2. 理論式の誘導

2.1 理論展開の概要

前論文でも述べたように、船体などの巨大構造物は波を反射、回折させると同時に、波から波力を受ける。こうした波と構造物の相互作用を理論的に解析するには、構造物の形状が単純であることが必要である。理論計算が容易なのは円柱体である。これは極座標系 (r, θ) において円柱の外周が $r=r_0$ で表示されるからである。円柱が海底まで達しているときの解は、良く知られているようにMacCamyとFuchs³⁾によって与えられており、ベッセル関数の級数を用いて表示されている。円柱が半没水状態のときには理論解も複雑になり、解法としても、積分方程式を解く方法⁴⁾、変分法による方法⁵⁾、直交関数系の無限級数展開を用いる方法^{6),7)}など種々の方法が試みられている。

本報告で対象とする楕円柱体の場合には、楕円座標 (ξ, η) を用いることによって、外周が $\xi=\xi_0$ と表示され、外周上では η のみが変数となる。これによって、楕円柱の外周上で法線速度0の境界条件の設定が容易になる。また、円柱の場合のベッセル関数に対応して、Mathieu関数が現われる。これは、速度ポテンシャルの基本方程式であるラプラスの方程式を楕円座標に変換することによって必然的に生ずるものである。

構造物と波との相互作用の理論解析においては、一般に速度ポテンシャルが、入射波、散乱波、および定常波の和として取り扱われる。散乱波は構造物によって反射、回折される波を表わし、構造物から外方へ向って進行し、無限遠点では0となる。しかし、伝播性の波であることは入射波と同様であり、広義には進行波と解される。一方、定常波は構造物の極く近傍にのみ存在（指数関数的に減衰）する定常振動波で、波の波数と周波数との関係式における波数の虚数解をパラメーターとする無限級数で表示される。

楕円柱が海底にまで達しているときは、定常波が現わ

れず、入射波と散乱波のみである。解法としては、楕円柱の外周上で入射波と散乱波の水平粒子速度が互いに打ち消し合い、法線速度が0となるように散乱波の解を定める。このため、通常は直角座標 (x, y) で表示されている入射波の速度ポテンシャルを Mathieu 関数の級数に展開する手法が用いられる。

楕円柱が半没水状態のときには、楕円柱底面と海底との間の水が運動するが、本報告では円柱に対する Garret⁶⁾ と類似の方法を用いる。すなわち、水域を楕円柱の外周である $\xi=\xi_0$ の外側の領域と、楕円柱の底面下の $\xi=\xi_0$ の内側の領域とに分ける。外側領域の境界条件は楕円柱の底面から上の側面上で法線速度が0であり、また底面から下方では内側領域と速度および圧力が連続であることが条件として課せられる。底面下の内側領域の速度ポテンシャルの条件は外側領域との連続性であり、これによって両領域の解が接合される。また、外側領域の $\xi=\xi_0$ における法線速度は海底から楕円柱底面の高さまでは有限な値をとり、底面の高さで0に急変してそのまま水面にまで続く。このような法線速度の急変が理論解として定常波の出現を必要とすることになる。なお、定常波の項は楕円柱の側面にのみ現われ、底面には現われない。

以上のような手順で速度ポテンシャルが求められると、波による圧力はベルヌーイの定理によって速度ポテンシャルの時間偏微分で求められる。この圧力を楕円柱体の外面全体にわたって積分することによって、各方向の波力およびそのモーメントが計算される。

このようにして求める半没水時の理論解は極めて煩雑なものであり、数値計算としても相当の計算時間を必要とする。理論解として楕円柱外周面上の境界条件あるいは連続条件のいずれかの適用を緩めると計算時間は大幅に短縮される。そこで、次章においてはそうして導かれる近似解の精度についての吟味も行なっている。

なお、この楕円柱体の波力の理論解は、楕円の一つの極限形である円柱体の波力の理論解を包含するものである。本報告中では特に述べていないけれども、円柱体について計算した結果は Garret⁶⁾ の示した値と一致することが確認されている。

2.2 基本方程式

解析にあたって、水粒子は非回転運動を行ない、水位変動と水粒子速度は十分小さく、水深は一定であると仮定すると、ポテンシャル理論が適用できると同時に、方程式は線型化される。これによって、流体の連続方程式は

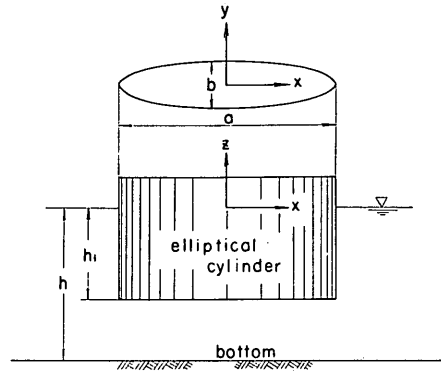


図-1 座標系

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

となつて、速度ポテンシャル ϕ はラプラスの方程式を満足しなければならない。ここで、 x, y, z 座標は 図-1 に示されているように、静水面上に原点を取った、楕円長軸方向、短軸方向および鉛直上方のそれぞれの座標である。構造物の水平断面が楕円形であるから、式 (1) のラプラスの方程式を楕円柱座標

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{B}{2} \cosh \xi \cos \eta \\ y &= \frac{B}{2} \sinh \xi \sin \eta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

で変換すると、次式ようになる。

$$\frac{8}{B^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

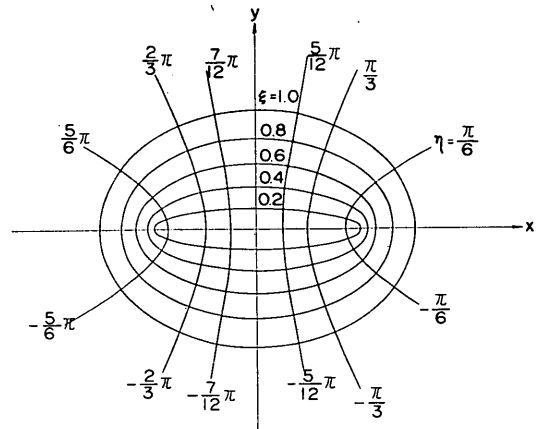


図-2 楕円座標

ここで、 ξ, η は 図-2 に示されているような座標で、 B は楕円の焦点距離を示す。

楕円柱の平面的境界を $\xi = \xi_0$ とし、底面は $z = -h_1$ まです水中に没しているとする。

解析を容易にするために、次のように水域を2つの領域に分ける。

i) 外側領域

楕円柱体の外部領域で、 $\xi > \xi_0$ の領域である。この領域における速度ポテンシャルを ϕ_0 とすると、この ϕ_0 は式 (3) を満足しなければならない。

ii) 底面下領域

この領域は楕円柱底面下の領域で、 $\xi \leq \xi_0, -h_1 \geq z \geq -h$ の領域である。この領域内の速度ポテンシャルを ϕ_u とすると、 ϕ_u もまた式 (3) を満足しなければならない。

2.3 外側領域の速度ポテンシャル

(1) 変数分離による表示

外側領域の速度ポテンシャル ϕ_0 は式 (3) を満足すると同時に、次の境界条件を満足しなければならない。

i) 水面条件

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (4)$$

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (5)$$

ここで、 ζ は水位変動量、 g は重力加速度、 t は時間である。

ii) 水底における境界条件

$$\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0 \quad (6)$$

iii) その他に、楕円柱体の境界 ($\xi = \xi_0$) における条件および底面下領域の速度ポテンシャルとの連続条件があるが、これについては、2.4 で詳しく述べる。

式 (4) と式 (5) から

$$\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0 \quad (7)$$

となる。

式 (6) の底面における境界条件を満足する速度ポテンシャルを

$$\phi_0 = \phi_0 \cosh k(h+z)e^{-i\omega t} \quad (8)$$

とおき、式 (8) を式 (7) に代入すると

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (9)$$

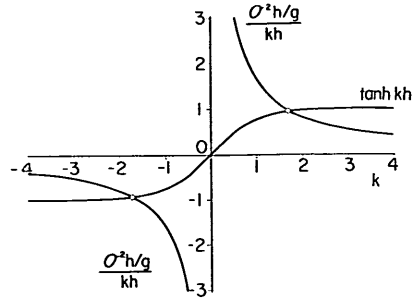


図-3 k の値の決定

となる。ここで、 σ は $2\pi/T$ で、 T は周期である。また、 ϕ_0 は ξ, η の関数になる。

式 (9) を満足する k の値は実数値と虚数値を持つため、実数解をそのまま k とし、虚数解を $i\lambda$ とすると、 k は 図-3 に一例を示すように正負の二根がある。しかし、両者の絶対値は等しいから、速度ポテンシャルのパラメーターとしては一根しかないことになる。一方、 λ は式 (9) を変形した

$$\sigma^2 = -g\lambda \tan \lambda h \quad (10)$$

を満足することになり、図-4 からわかるように、 λ の解は無数個存在する。

これによって、式 (8) を次のように書き直すことができる。

$$\phi_0 = \phi_k \cosh k(h+z)e^{-i\omega t} + \sum \phi_\lambda \cos \lambda(h+z)e^{-i\omega t} \quad (11)$$

ここで \sum は式 (10) の解である λ をパラメーターとする級数を表わす。

式 (11) を式 (1) に代入するとわかるように、 ϕ_k は周期関数、 ϕ_λ は非周期関数である。

式 (11) を式 (3) に代入すると、 ϕ_k, ϕ_λ はそれぞれ次式の解になる。

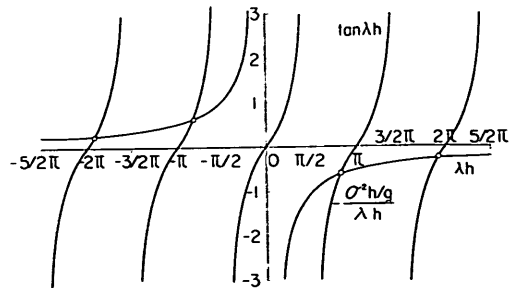


図-4 lambda の値の決定

$$\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial \eta^2} + 2\nu_k^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \phi_k = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_\lambda}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_\lambda}{\partial \eta^2} - 2\nu_\lambda^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \phi_\lambda = 0 \quad (13)$$

ここで, $\nu_k = Bk/4$, $\nu_\lambda = B\lambda/4$ である。

まず, 式(12)の解について考えてみる。式(12)の解が $\phi_k = R_k(\xi)Q_k(\eta)$ で表わされるとすると, 式(12)は次の2つの微分方程式にわかれる。

$$\frac{d^2 Q_k(\eta)}{d\eta^2} + (a_k - 2\nu_k^2 \cos 2\eta) Q_k(\eta) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^2 R_k(\xi)}{d\xi^2} - (a_k - 2\nu_k^2 \cosh 2\xi) R_k(\xi) = 0 \quad (15)$$

ここで, a_k は固有値で, ν_k^2 のみの関数である。

式(14)において, η の代わりに $\eta + n\pi$ を代入しても, 式(14)の形は変わらないから, $Q_k(\eta)$ は $n\pi$ を周期とする周期関数である。このような周期解として次のようなものを考える。

$$\left. \begin{aligned} ce_{2n}(\eta; \nu_k^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\nu_k^2) \cos 2r\eta \\ ce_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2) \cos(2r+1)\eta \\ se_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2) \sin(2r+1)\eta \\ se_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(\nu_k^2) \sin(2r+2)\eta \end{aligned} \right\} (16)$$

式(16)の関数は ν_k^2 が同じならば, 直交関数になるから, これらを正規化して次式のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} ce_n(\eta; \nu_k^2) ce_m(\eta; \nu_k^2) d\eta &= \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \pi & (n = m) \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} se_n(\eta; \nu_k^2) se_m(\eta; \nu_k^2) d\eta &= \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \pi & (n = m) \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} se_n(\eta; \nu_k^2) ce_m(\eta; \nu_k^2) d\eta &= 0 \end{aligned} \right\} (17)$$

式(17)によって, 式(16)の係数は

$$\begin{aligned} 2\{A_0^{(2n)}(\nu_k^2)\}^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \{A_{2r}^{(2n)}(\nu_k^2)\}^2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \{A_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2)\}^2 \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \{B_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2)\}^2 = \sum_{r=0}^{\infty} \{B_{2r+2}^{(2n+2)}(\nu_k^2)\}^2 = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

を満足しなければならない。式(14)は式(16)で与えられる周期解の他に式(16)とは独立な非周期解も持つけれども, 本計算には不必要であるため, この解について述べない。

次に, 式(15)は式(14)の η を ξ/i で置き換えたものと同形である。したがって, 式(16)に $\eta = \xi/i$ とおいてできる ξ の関数は式(15)を満足することになり, これは次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} Ce_{2n}(\xi; \nu_k^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\nu_k^2) \cosh 2r\xi \\ Ce_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2) \cosh(2r+1)\xi \\ Se_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2) \sinh(2r+1)\xi \\ Se_{2n+2}(\xi; \nu_k^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(\nu_k^2) \sinh(2r+2)\xi \end{aligned} \right\} (19)$$

式(19)を第1種ベッセル関数の級数の形で書き直すと

$$\left. \begin{aligned} Ce_{2n}(\xi; \nu_k^2) &= \frac{ce_{2n}(0; \nu_k^2)}{A_0^{(2n)}(\nu_k^2)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\nu_k^2) J_{2r}(2\nu_k \sinh \xi) \\ Ce_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) &= \frac{ce_{2n+1}(0; \nu_k^2)}{\nu_k A_1^{(2n+1)}(\nu_k^2)} \coth \xi \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2) J_{2r+1}(2\nu_k \sinh \xi) \\ Se_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) &= \frac{se'_{2n+1}(0; \nu_k^2)}{\nu_k B_1^{(2n+1)}(\nu_k^2)} \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2) J_{2r+1}(2\nu_k \sinh \xi) \\ Se_{2n+2}(\xi; \nu_k^2) &= \frac{se'_{2n+2}(0; \nu_k^2)}{\nu_k^2 B_2^{(2n+2)}(\nu_k^2)} \coth \xi \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(\nu_k^2) J_{2r+2}(2\nu_k \sinh \xi) \end{aligned} \right\} (20)$$

さらに, 式(20)の第1種ベッセル関数を第2種ベッセル関数に書き直すと, 式(15)のもう一つの独立解が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Fey}_{2n}(\xi; \nu_k^2) &= \frac{\text{ce}_{2n}(0; \nu_k^2)}{A_0^{(2n)}(\nu_k^2)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\nu_k^2) Y_{2r}(2\nu_k \sinh \xi) \\
 \text{Fey}_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) &= \frac{\text{ce}_{2n+1}(0; \nu_k^2)}{\nu_k A_1^{(2n+1)}(\nu_k^2)} \coth \xi \\
 &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2) Y_{2r+1}(2\nu_k \sinh \xi) \\
 \text{Gey}_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) &= \frac{\text{se}'_{2n+1}(0; \nu_k^2)}{\nu_k B_1^{(2n+1)}(\nu_k^2)} \\
 &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2) Y_{2r+1}(2\nu_k \sinh \xi) \\
 \text{Gey}_{2n+2}(\xi; \nu_k^2) &= \frac{\text{se}'_{2n+2}(0; \nu_k^2)}{\nu_k^2 B_2^{(2n+2)}(\nu_k^2)} \coth \xi \\
 &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(\nu_k^2) Y_{2r+2}(2\nu_k \sinh \xi)
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(21)の Fey_{2n} , Fey_{2n+1} , Gey_{2n+1} , Gey_{2n+2} はそれぞれ Ce_{2n} , Ce_{2n+1} , Se_{2n+1} , Se_{2n+2} に対応し, お互に独立な解となる。

(2) 入射波の速度ポテンシャル

式(14), (15)の解によって, 入射波, および楕円柱体によって散乱されて外方へ進行する波を進行波と総称すると, これは以上の式(14), (15)の解の諸関数を用いて表わすことができる。この進行波の速度ポテンシャルを Φ_k とすると, Φ_k は入射波の速度ポテンシャル Φ_i と散乱波の速度ポテンシャル Φ_s によって

$$\Phi_k = \Phi_i + \Phi_s \quad (22)$$

と表わすことができる。この Φ_i および Φ_s は, 無限遠

点で入射波のみになるという条件, すなわち $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Phi_k = \Phi_i$ からいずれも式(12)を満足しなければならない。

入射波が x 軸と α の角度をなす方向から侵入してくるとすると, 入射波の速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned}
 \Phi_i &= \frac{gH_{in} \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh kh} \\
 &\quad \times \exp [i \{ -2\nu_k (\cosh \xi \cos \eta \cos \alpha \\
 &\quad + \sinh \xi \sin \eta \sin \alpha) - \sigma t \}] \quad (23)
 \end{aligned}$$

となる。ここで, H_{in} は入射波の波高である。式(23)を

$$\Phi_i = \phi_i \exp(-i\sigma t) \quad (24)$$

とおくと, ϕ_i は式(14), (15)の解によって展開され,

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= \frac{gH_{in}}{2\sigma} \frac{Z_k(z)}{Z_k(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{p_{2n}} \text{Ce}_{2n}(\xi; \nu_k^2) \text{ce}_{2n}(\eta; \nu_k^2) \text{ce}_{2n}(\alpha; \nu_k^2) \right. \\
 &\quad + \frac{2}{s_{2n+2}} \text{Se}_{2n+2}(\xi; \nu_k^2) \text{se}_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) \text{se}_{2n+2}(\alpha; \nu_k^2) \\
 &\quad - i \left\{ \frac{2}{p_{2n+1}} \text{Ce}_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) \text{ce}_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) \text{ce}_{2n+1}(\alpha; \nu_k^2) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2}{s_{2n+1}} \text{Se}_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) \text{se}_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) \text{se}_{2n+1}(\alpha; \nu_k^2) \right\} \right] \quad (25)
 \end{aligned}$$

となる。ここで, p_n , s_n は式(23)を展開する際に現われる定数で,

$$\left. \begin{aligned}
 p_{2n} &= \text{ce}_{2n}(0; \nu_k^2) \text{ce}_{2n} \left(\frac{1}{2}\pi; \nu_k^2 \right) / A_0^{(2n)}(\nu_k^2) \\
 p_{2n+1} &= \text{ce}_{2n+1}(0; \nu_k^2) \text{ce}'_{2n+1} \left(\frac{1}{2}\pi; \nu_k^2 \right) / \nu_k A_1^{(2n+1)}(\nu_k^2) \\
 s_{2n+1} &= \text{se}'_{2n+1}(0; \nu_k^2) \text{se}_{2n+1} \left(\frac{1}{2}\pi; \nu_k^2 \right) / \nu_k B_1^{(2n+1)}(\nu_k^2) \\
 s_{2n+2} &= \text{se}'_{2n+2}(0; \nu_k^2) \text{se}'_{2n+2} \left(\frac{1}{2}\pi; \nu_k^2 \right) / \nu_k^2 B_2^{(2n+2)}(\nu_k^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となり、また

$$Z_k(z) = N_k^{-1/2} \cosh k(h+z) \quad (27)$$

である。ここで、 N_k は $Z_k(z)$ が

$$\int_{-h}^0 \{Z_k(z)\}^2 dz = h \quad (28)$$

となるように決めた定数で

$$N_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sinh 2kh}{2kh} \right\} \quad (29)$$

である。

(3) 散乱波の速度ポテンシャル

次に、散乱されて外側に進行する波について調べてみると、この波は無遠慮方では消滅するから

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi_s = 0 \quad (30)$$

となる。 ϕ_s は式 (20), (21) を用いて展開することができるけれども、式(33)の条件を考慮して、新しい2つの独立解を

$$\left. \begin{aligned} \text{Me}_n^{(1),(2)}(\xi; \nu_k^2) &= \text{Ce}_n(\xi; \nu_k^2) \pm i \text{Fe}_n(\xi; \nu_k^2) \\ \text{Ne}_n^{(1),(2)}(\xi; \nu_k^2) &= \text{Se}_n(\xi; \nu_k^2) \pm i \text{Ge}_n(\xi; \nu_k^2) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

と定義する。上式中の上付き添字の(1)は複号の+, (2)は複号の-に対応する。そして、 $\text{Me}_n^{(1)}(\xi; \nu_k^2)$ と $\text{Me}_n^{(2)}(\xi; \nu_k^2)$, $\text{Ne}_n^{(1)}(\xi; \nu_k^2)$ と $\text{Ne}_n^{(2)}(\xi; \nu_k^2)$ はお互いに独立で、円筒関数の第1種ハンケル関数, 第2種ハンケル関数に対応する。ここでは、 ϕ_s が散乱されて外方に進行する波であるという条件から、上記の解のうち $\text{Me}_n^{(1)}(\xi; \nu_k^2)$, $\text{Ne}_n^{(1)}(\xi; \nu_k^2)$ を用いなければならない。これらの関数は ξ が十分大きい点で、

$$\left. \begin{aligned} \text{Me}_{2n}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) &\approx p_{2n} \left(\frac{2}{\pi \nu_k e^\xi} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \left(\nu_k e^\xi - \frac{1}{4} \pi \right) \right\} \\ \text{Me}_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) &\approx p_{2n+1} \left(\frac{2}{\pi \nu_k e^\xi} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \left(\nu_k e^\xi - \frac{3}{4} \pi \right) \right\} \\ \text{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) &\approx s_{2n+1} \left(\frac{2}{\pi \nu_k e^\xi} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \left(\nu_k e^\xi - \frac{3}{4} \pi \right) \right\} \\ \text{Ne}_{2n+2}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) &\approx s_{2n+2} \left(\frac{2}{\pi \nu_k e^\xi} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \left(\nu_k e^\xi - \frac{1}{4} \pi \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となって、 $\xi \rightarrow \infty$ ではこれらの関数は0に収束する。

以上によって、進行波の速度ポテンシャル ϕ_k は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{gHim}{2\sigma} e^{-i\omega t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{p_{2n}} \left(\text{Ce}_{2n}(\xi; \nu_k^2) - \frac{\text{Ce}_{2n}(\xi_0; \nu_k^2)}{\text{Me}_{2n}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} \text{Me}_{2n}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) \right) \text{ce}_{2n}(\eta; \nu_k^2) \text{ce}_{2n}(\alpha; \nu_k^2) \right. \right. \\ &+ \frac{2}{s_{2n+2}} \left(\text{Se}_{2n+2}(\xi; \nu_k^2) - \frac{\text{Se}_{2n+2}(\xi_0; \nu_k^2)}{\text{Ne}_{2n+2}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} \text{Ne}_{2n+2}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) \right) \text{se}_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) \text{se}_{2n+2}(\alpha; \nu_k^2) \\ &- i \left\{ \frac{2}{p_{2n+1}} \left(\text{Ce}_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) - \frac{\text{Ce}_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2)}{\text{Me}_{2n+1}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} \text{Me}_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) \right) \text{ce}_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) \text{ce}_{2n+1}(\alpha; \nu_k^2) \right. \\ &+ \frac{2}{s_{2n+1}} \left(\text{Se}_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) - \frac{\text{Se}_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2)}{\text{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} \text{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) \right) \text{se}_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) \text{se}_{2n+1}(\alpha; \nu_k^2) \left. \left. \right] \frac{Z_k(z)}{Z_k(0)} \right. \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[M_{2n} \frac{\text{Me}_{2n}^{(1)}(\xi; \nu_k^2)}{\text{Me}_{2n}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} \text{ce}_{2n}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+2} \frac{\text{Ne}_{2n+2}^{(1)}(\xi; \nu_k^2)}{\text{Ne}_{2n+2}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} \text{se}_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) \right. \\ &\left. \left. - i \left\{ M_{2n+1} \frac{\text{Me}_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2)}{\text{Me}_{2n+1}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} \text{ce}_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+1} \frac{\text{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2)}{\text{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} \text{se}_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) \right\} \right] Z_k(z) \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

式(33)における M_n , N_n は未知係数で、境界条件および連続条件から求める。

(4) 定常波の速度ポテンシャル

つきに、定常波を表わす式(13)の解について考えてみ

る。

式(12)の場合と同様に、 $\phi_i = R_i(\xi)Q_i(\eta)$ として、式(13)に代入すると

$$\frac{d^2 Q_1}{d\eta^2} + (a_1 + 2\nu_1^2 \cos 2\eta) Q_1 = 0 \quad (34)$$

$$\frac{d^2 R_1}{d\xi^2} - (a_1 + 2\nu_1^2 \cosh 2\xi) R_1 = 0 \quad (35)$$

となる。式(34)の解は式(14)の場合と同様に η に関する周期関数である。式(14)に $\eta = \eta + \pi/2$ を代入すれば、式(34)が得られるから、式(16)に $\eta = \eta + \pi/2$ を代入することにより、式(34)の周期解が次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & ce_{2n}(\eta; -\nu_1^2) \\ & = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(\nu_1^2) \cos 2r\eta \\ & ce_{2n+1}(\eta; -\nu_1^2) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_1^2) \cos(2r+1)\eta \\ & se_{2n+1}(\eta; -\nu_1^2) \\ & = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_1^2) \sin(2r+1)\eta \\ & se_{2n+2}(\eta; -\nu_1^2) \\ & = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)}(\nu_1^2) \sin(2r+2)\eta \end{aligned} \right\} (36)$$

式(36)で $(-1)^n$ をかけているのは、式(16)の関数と $\nu_1 = \nu_k = 0$ で連続するようにしたためである。

一方、式(15)に $\xi = \xi + (\pi/2)i$ を代入すれば、式(35)が得られるから、式(20)、(21)に $\xi = \xi + (\pi/2)i$ を代入すると、式(35)の解が求まる。たとえば、 $Ce_{2n}(\xi; -\nu_1^2)$ 、 $Fey_{2n}(\xi; -\nu_1^2)$ について書くと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & Ce_{2n}(\xi; -\nu_1^2) = (-1)^n Ce_{2n}\left(\xi + \frac{\pi}{2}i; -\nu_1^2\right) \\ & = (-1)^n \frac{ce_{2n}(\pi/2; \nu_1^2)}{A_0^{(2n)}(\nu_1^2)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\nu_1^2) I_{2r}(2\nu_1 \sinh \xi) \\ & Fey_{2n}(\xi; -\nu_1^2) = (-1)^n \frac{ce_{2n}(\pi/2; \nu_1^2)}{A_0^{(2n)}(\nu_1^2)} \\ & \quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(\nu_1^2) Y_{2r}(2i\nu_1 \sinh \xi) \end{aligned} \right\} (37)$$

$\xi \rightarrow \infty$ の場合、 Ce_{2n} は $I_{2r}(2\nu_1 \sinh \xi)$ のために $Ce_{2n} \rightarrow \infty$ となり、一方 Fey_{2n} は複素数でその絶対値は有限である。 $\xi \rightarrow \infty$ では入射波のみになるから、式(35)の解で表わされる項は 0 に収束しなければならない。そこで、

$$K_r(u) = \frac{1}{2} \pi e^{i\tau(\tau+1)/2} H_r^{(1)}(iu) \quad (38)$$

となる関数を考えてみると、この関数は変形第 2 種ベッセル関数になり、 $u \rightarrow \infty$ で $K_r(u) \rightarrow 0$ となる。式(38)に

$$H_r^{(1)}(iu) = J_r(iu) + iY_r(iu) \quad (39)$$

を代入すると

$$K_r(u) = \frac{1}{2} \pi e^{i\tau(\tau+1)/2} \{J_r(iu) + iY_r(iu)\} \quad (40)$$

となって、 $\tau = 2r$ を代入すると

$$K_{2r}(u) = \frac{\pi}{2} \{iI_{2r}(u) - (-1)^r Y_{2r}(iu)\} \quad (41)$$

が得られる。式(37)からわかるように、 Ce_{2n} 、 Fey_{2n} は I_{2r} 、 Y_{2r} から成立っている。そこで、次のような関数を作れば、これは式(41)と同形のもので r の級数としたものであり、 $\xi \rightarrow \infty$ のときに 0 に収束する性質を持つ。

$$\left. \begin{aligned} & iCe_{2n}(\xi; -\nu_1^2) - Fey_{2n}(\xi; -\nu_1^2) \\ & = (-1)^n \frac{2ce_{2n}(\pi/2; \nu_1^2)}{\pi A_0^{(2n)}(\nu_1^2)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\nu_1^2) K_{2r}(2\nu_1 \sinh \xi) \end{aligned} \right\} (42)$$

したがって、新しく $Fek_{2n}(\xi; -\nu_1^2)$ を

$$\left. \begin{aligned} & Fek_{2n}(\xi; -\nu_1^2) \\ & = (-1)^n \frac{ce_{2n}(\pi/2; \nu_1^2)}{\pi A_0^{(2n)}(\nu_1^2)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\nu_1^2) K_{2r}(2\nu_1 \sinh \xi) \end{aligned} \right\} (43)$$

と定義すると、 $\xi \rightarrow \infty$ で $Fek_{2n}(\xi; -\nu_1^2) \rightarrow 0$ となる。

式(21)の諸関数に対応する他の関数についても同様にして

$$\left. \begin{aligned} & Fek_{2n+1}(\xi; -\nu_1^2) = (-1)^n \frac{se_{2n+1}(\pi/2; \nu_1^2)}{\pi \nu_1 B_{2n+1}^{(2n+1)}(\nu_1^2)} \coth \xi \\ & \quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_1^2) K_{2r+1}(2\nu_1 \sinh \xi) \\ & Gek_{2n+1}(\xi; -\nu_1^2) = (-1)^{n+1} \frac{ce_{2n+1}(\pi/2; \nu_1^2)}{\pi \nu_1 A_{2n+1}^{(2n+1)}(\nu_1^2)} \end{aligned} \right\} (44)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_1^2) K_{2r+1}(2\nu_1 \sinh \xi) \\ \text{Gek}_{2n+2}(\xi; -\nu_1^2) &= (-1)^{n+1} \frac{se_{2n+2}(\pi/2; \nu_1^2)}{\pi \nu_1^2 B_{2n+2}^{(2n+2)}(\nu_1^2)} \\ & \times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(\nu_1^2) K_{2r+2}(2\nu_1 \sinh \xi) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_{r=0}^{\infty}} \right\}$$

となる。式(37)の Ce_{2n} と式(43)の Fek_{2n} はお互いに独立であるから、このような形の関数で定常波を表わすことができる。しかし、 $\xi \rightarrow \infty$ では入射波のみになるという条件から、 Ce_{2n} のような形の関数は $\xi \rightarrow \infty$ で ∞ となるため、これらの関数の係数は 0 となり、 Fek_{2n} の形の関数項のみ残る。これから、定常波の速度ポテンシャル Φ_{st} は

$$\begin{aligned} \Phi_{st} &= \frac{gH_{in}}{2\sigma} e^{-i\omega t} \\ & \times \sum_l \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_{l, 2n} \frac{Fek_{2n}(\xi; -\nu_1^2)}{Fek_{2n}(\xi_0; -\nu_1^2)} ce_{2n}(\eta; -\nu_1^2) \right. \\ & + G_{l, 2n+2} \frac{Gek_{2n+2}(\xi; -\nu_1^2)}{Gek_{2n+2}(\xi_0; -\nu_1^2)} se_{2n+2}(\eta; -\nu_1^2) \\ & \left. - i \left\{ F_{l, 2n+1} \frac{Fek_{2n+1}(\xi; -\nu_1^2)}{Fek_{2n+1}(\xi_0; -\nu_1^2)} ce_{2n+1}(\eta; -\nu_1^2) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \left. + G_{l, 2n+1} \frac{Gek_{2n+1}(\xi; -\nu_1^2)}{Gek_{2n+1}(\xi_0; -\nu_1^2)} se_{n+1}(\eta; -\nu_1^2) \right\} \right] \\ & \times Z_l(z) \end{aligned} \quad (45)$$

のように書き表わすことができる。ここで、 $Z_l(z)$ は式(27)の $Z_k(z)$ に対応して

$$Z_l(z) = N_l^{-1/2} \cos \lambda(h+z) \quad (46)$$

であり、また

$$N_l = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin 2\lambda h}{2\lambda h} \right\} \quad (47)$$

である。式(45)中の $F_{l, 2n}$, $G_{l, 2n+2}$, $F_{l, 2n+1}$, $G_{l, 2n+1}$ は未知係数で、境界条件と連続条件から決定される。

以上によって、外側領域における速度ポテンシャル Φ_0 は

$$\Phi_0 = \Phi_k + \Phi_{st}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{gH_{in}}{2\sigma} e^{-i\omega t} \\ & \times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{p_{2n}} \left(Ce_{2n}(\xi; \nu_k^2) - \frac{Ce_{2n}(\xi_0; \nu_k^2)}{Me_{2n}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} Me_{2n}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) \right) ce_{2n}(\eta; \nu_k^2) ce_{2n}(\alpha; \nu_k^2) \right. \right. \\ & + \frac{2}{s_{2n+2}} \left(Se_{2n+2}(\xi; \nu_k^2) - \frac{Se_{2n+2}(\xi_0; \nu_k^2)}{Ne_{2n+2}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} Ne_{2n+2}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) \right) se_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) se_{2n+2}(\alpha; \nu_k^2) \\ & - i \left\{ \frac{2}{p_{2n+1}} \left(Ce_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) - \frac{Ce_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2)}{Me_{2n+1}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} Me_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) \right) ce_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) ce_{2n+1}(\alpha; \nu_k^2) \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{s_{2n+1}} \left(Se_{2n+1}(\xi; \nu_k^2) - \frac{Se_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2)}{Ne_{2n+1}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} Ne_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2) \right) \right\} \right] \frac{Z_k(z)}{Z_k(0)} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left[M_{2n} \frac{Me_{2n}^{(1)}(\xi; \nu_k^2)}{Me_{2n}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} ce_{2n}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+2} \frac{Ne_{2n+2}^{(1)}(\xi; \nu_k^2)}{Ne_{2n+2}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} se_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) \right. \\ & \left. - i \left\{ M_{2n+1} \frac{Me_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2)}{Me_{2n+1}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} ce_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+1} \frac{Ne_{2n+1}^{(1)}(\xi; \nu_k^2)}{Ne_{2n+1}^{(1)}(\xi_0; \nu_k^2)} se_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) \right\} \right] Z_k(z) \\ & + \sum_l \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_{l, 2n} \frac{Fek_{2n}(\xi; -\nu_1^2)}{Fek_{2n}(\xi_0; -\nu_1^2)} ce_{2n}(\eta; -\nu_1^2) + G_{l, 2n+2} \frac{Gek_{2n+2}(\xi; -\nu_1^2)}{Gek_{2n+2}(\xi_0; -\nu_1^2)} se_{2n+2}(\eta; -\nu_1^2) \right. \\ & - i \left\{ F_{l, 2n+1} \frac{Fek_{2n+1}(\xi; -\nu_1^2)}{Fek_{2n+1}(\xi_0; -\nu_1^2)} ce_{2n+1}(\eta; -\nu_1^2) \right. \\ & \left. \left. + G_{l, 2n+1} \frac{Gek_{2n+1}(\xi; -\nu_1^2)}{Gek_{2n+1}(\xi_0; -\nu_1^2)} se_{2n+1}(\eta; -\nu_1^2) \right\} \right] Z_l(z) \end{aligned} \quad (48)$$

となる。

2.4 底面下領域の速度ポテンシャル

底面下領域の速度ポテンシャル Φ_u は式 (3) を満足すると同時に、境界条件

$$\left(\frac{\partial\Phi_u}{\partial z}\right)_{z=-h_1}=0 \quad (49)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_u}{\partial z}\right)_{z=-h}=0 \quad (50)$$

を満足しなければならない。

式 (49), (50) を満足する速度ポテンシャルを

$$\Phi_u = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{um} \cos \frac{m\pi(z+h)}{h-h_1} e^{-i\sigma t} \quad (51)$$

とおき、これを式 (3) に代入すると

$$\frac{\partial^2 \phi_{um}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_{um}}{\partial \eta^2} - 2\mu_m^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) = 0 \quad (52)$$

となる。ここで、 $\mu_m = \frac{B}{4} \left(\frac{m\pi}{h-h_1} \right)$ である。

$\phi_{um} = R_m(\xi) Q_m(\eta)$ とすると、式 (52) は

$$\frac{d^2 Q_m}{d\eta^2} - (a_m + 2\mu_m^2 \cos 2\eta) Q_m = 0 \quad (53)$$

$$\frac{d^2 R_m}{d\xi^2} + (a_m + 2\mu_m^2 \cosh 2\xi) R_m = 0 \quad (54)$$

となる。ここで、 a_m は固有値である。

式 (53) の解は η に関して周期関数でなければならないから、式 (36) と同じ形になる。

式 (54) の解は式 (37) の Ce_{2n} 、式 (43) の Fek_{2n} と同じ形のものになるが、楕円柱体底面下では湧出点および流出点は存在しないから、この領域で解は有界な値を持つことになる。 Fek_{2n} の形のもの $\xi \rightarrow 0$ で ∞ になるため、解は Ce_{2n} の形の解だけで表わされることになる。

これらの解を示すと、次のような関数になる。

$$\left. \begin{aligned} Ce_{2n}(\xi; -\mu_m^2) &= (-1)^n \frac{ce_{2n}(\pi/2; \mu_m^2)}{A_0^{(2n)}(\mu_m^2)} \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\mu_m^2) I_{2r}(2\mu_m \sinh \xi) \\ Ce_{2n+1}(\xi; -\mu_m^2) &= (-1)^n \frac{se_{2n+1}(\pi/2; \mu_m^2)}{\mu_m B_1^{(2n+1)}(\mu_m^2)} \coth \xi \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2) I_{2r+1}(2\mu_m \sinh \xi) \\ Se_{2n+1}(\xi; -\mu_m^2) &= (-1)^{n+1} \frac{ce'_{2n+1}(\pi/2; \mu_m^2)}{\mu_m A_1^{(2n+1)}(\mu_m^2)} \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2) I_{2r+1}(2\mu_m \sinh \xi) \\ Se_{2n+2}(\xi; -\mu_m^2) &= (-1)^{n+1} \frac{se'_{2n+2}(\pi/2; \mu_m^2)}{\mu_m^2 B_2^{(2n+2)}(\mu_m^2)} \coth \xi \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(\mu_m^2) I_{2r+2}(2\mu_m \sinh \xi) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

これによって、速度ポテンシャル Φ_u は

$$\begin{aligned} \Phi_u &= \frac{gH\epsilon_n}{2\sigma} e^{-i\sigma t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{m, 2n} \frac{Ce_{2n}(\xi; \mu_m^2)}{Ce_{2n}(\xi_0; -\mu_m^2)} ce_{2n}(\eta; -\mu_m^2) \right. \\ &\quad + b_{m, 2n+2} \frac{Se_{2n+2}(\xi; -\mu_m^2)}{Se_{2n+2}(\xi_0; -\mu_m^2)} se_{2n+2}(\eta; -\mu_m^2) \\ &\quad - i \left\{ a_{m, 2n+1} \frac{Ce_{2n+1}(\xi; -\mu_m^2)}{Ce_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} ce_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) \right. \\ &\quad \left. \left. + b_{m, 2n+1} \frac{Se_{2n+1}(\xi; -\mu_m^2)}{Se_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} se_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) \right\} \right] \cos \frac{m\pi(z+h)}{h-h_1} \quad (56) \end{aligned}$$

となる。 $a_{m, n}$, $b_{m, n}$ は未知係数で、 $\xi = \xi_0$ における外側領域の速度ポテンシャルとの圧力および流速の連続条

件によって決定される。

2.5 未知係数の決定

楕円柱体は固定されているため、境界面 $\xi=\xi_0$ で流速は 0 になる。すなわち、

$$\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_0}=0 \quad (0\geq z\geq -h_1) \quad (57)$$

また、外側領域の速度ポテンシャルと底面下領域の速度ポテンシャルは $\xi=\xi_0$ で流速の連続条件

$$\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_0}=\left(\frac{\partial\Phi_u}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_0} \quad (-h_1\geq z\geq -h) \quad (58)$$

および圧力の連続条件

$$(\Phi_0)_{\xi=\xi_0}=(\Phi_u)_{\xi=\xi_0} \quad (-h_1\geq z\geq -h) \quad (59)$$

を満足しなければならない。

まず圧力の連続条件である式 (59) に式 (48) および式 (56) を代入すると

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [M_{2n}ce_{2n}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+2}se_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) \\ & - i\{M_{2n+1}ce_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+1}se_{2n+1}(\eta; \nu_k^2)\}] Z_k(z) \\ & + \sum_{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} [F_{\lambda, 2n}ce_{2n}(\eta; -\nu_{\lambda}^2) + G_{\lambda, 2n+2}se_{2n+2}(\eta; -\nu_{\lambda}^2) \\ & - i\{F_{\lambda, 2n+1}ce_{2n+1}(\eta; -\nu_{\lambda}^2) + G_{\lambda, 2n+1}se_{2n+1}(\eta; -\nu_{\lambda}^2)\}] Z_{\lambda}(z) \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a_{m, 2n}ce_{2n}(\eta; -\mu_m^2) + b_{m, 2n+2}se_{2n+2}(\eta; -\mu_m^2) \\ & - i\{a_{m, 2n+1}ce_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) + b_{m, 2n+1}se_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2)\}] \\ & \times \cos \frac{m\pi(z+h)}{h-h_1} \end{aligned} \quad (60)$$

が得られる。この式の両辺に $\cos\{m\pi(z+h)/(h-h_1)\}$ をかけて、 $-h_1\geq z\geq -h$ の区間で z で積分すると

$$\begin{aligned} & \Delta_m L_{mk} \sum_{n=0}^{\infty} [M_{2n}ce_{2n}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+2}se_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) \\ & - i\{M_{2n+1}ce_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+1}se_{2n+1}(\eta; \nu_k^2)\}] \\ & + \sum_{\lambda} [\Delta_m L_{m\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} [F_{\lambda, 2n}ce_{2n}(\eta; -\nu_{\lambda}^2) + G_{\lambda, 2n+2}se_{2n+2}(\eta; -\nu_{\lambda}^2) \\ & - i\{F_{\lambda, 2n+1}ce_{2n+1}(\eta; -\nu_{\lambda}^2) + G_{\lambda, 2n+1}se_{2n+1}(\eta; -\nu_{\lambda}^2)\}]] \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{m, 2n}ce_{2n}(\eta; -\mu_m^2) + b_{m, 2n+2}se_{2n+2}(\eta; -\mu_m^2) \\ & - i\{a_{m, 2n+1}ce_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) + b_{m, 2n+1}se_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2)\}] \end{aligned} \quad (61)$$

となる。ここで、

$$\Delta_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m\neq 0) \end{cases} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} L_{mk} &= \frac{1}{h-h_1} \int_{-h}^{-h_1} Z_k(z) \cos \frac{m\pi(h+z)}{h-h_1} dz \\ &= \frac{(-1)^m N_k^{-1/2}}{k^2(h-h_1)^2 + (m\pi)^2} k(h-h_1) \sinh k(h-h_1) \end{aligned} \quad (63)$$

$$L_{m\lambda} = \frac{(-1)^m N_{\lambda}^{-1/2}}{\lambda^2(h-h_1)^2 - (m\pi)^2} \lambda(h-h_1) \sin \lambda(h-h_1) \quad (64)$$

である。

さらに、式(61)の両辺に $ce_{2n}(\eta; -\mu_m^2)$ をかけて、0 から 2π まで積分すると、 $ce_{2n}(\eta; -\mu_m^2)$ は直交関数であるから、

$$a_{m, 2n} = \Delta_m L_{mk} \sum_{l=0}^{\infty} M_{2l} C_{2l, 2n}(\nu_k^2; \mu_m^2)$$

$$+ \sum_{\lambda} \{\Delta_m L_{m\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} (F_{\lambda, 2l} C_{2l, 2n}(\nu_{\lambda}^2; \mu_m^2))\} \quad (65)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} & C_{2l, 2n}(\nu_k^2; \mu_m^2) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_{2l}(\eta; \nu_k^2) ce_{2n}(\eta; -\mu_m^2) d\eta \\ &= (-1)^n \{2A_0^{(2l)}(\nu_k^2) A_0^{(2n)}(\mu_m^2) \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2l)}(\nu_k^2) A_{2r}^{(2n)}(\mu_m^2)\} \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} & C_{2l, 2n}(\nu_{\lambda}^2; \mu_m^2) = (-1)^{l+n} \{2A_0^{(2l)}(\nu_{\lambda}^2) A_0^{(2n)}(\mu_m^2) \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} A_{2r}^{(2l)}(\nu_{\lambda}^2) A_{2r}^{(2n)}(\mu_m^2)\} \end{aligned} \quad (67)$$

である。

式(61)の両辺に順次 $se_{2n+2}(\eta; -\mu_m^2)$, $ce_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2)$, $se_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2)$ をかけてゆくと、 $b_{m, 2n+2}$, $a_{m, 2n+1}$, $b_{m, 2n+1}$ が次のように求まる。

楕円柱体近似による固定船体に働く波力の理論および実験

$$\left. \begin{aligned}
 b_{m, 2n+2} &= \Delta_m L_m k \sum_{l=0}^{\infty} N_{2l+2} S_{2l+2, 2n+2}(\nu_k^2; \mu_m^2) \\
 &+ \sum_l \{ \Delta_m L_m i \sum_{l=0}^{\infty} (G_{\lambda, 2l+2} S_{2l+2, 2n+2}(\nu_k^2; \mu_m^2)) \} \\
 a_{m, 2n+1} &= \Delta_m L_m k \sum_{l=0}^{\infty} M_{2l+1} C_{2l+1, 2n+1}(\nu_k^2; \mu_m^2) \\
 &+ \sum_l \{ \Delta_m L_m i \sum_{l=0}^{\infty} (F_{\lambda, 2l+1} C_{2l+1, 2n+1}(\nu_k^2; \mu_m^2)) \} \\
 b_{m, 2n+1} &= \Delta_m L_m k \sum_{l=0}^{\infty} N_{2l+1} S_{2l+1, 2n+1}(\nu_k^2; \mu_m^2) \\
 &+ \sum_l \{ \Delta_m L_m i \sum_{l=0}^{\infty} (G_{\lambda, 2l+1} S_{2l+1, 2n+1}(\nu_k^2; \mu_m^2)) \}
 \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned}
 S_{2l+2, 2n+2}(\nu_k^2; \mu_m^2) &= (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2l+2)}(\nu_k^2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(\mu_m^2) \\
 S_{2l+2, 2n+2}(\nu_k^2; \mu_m^2) &= (-1)^{l+n} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2l+2)}(\nu_k^2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(\mu_m^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_{2l+1, 2n+1}(\nu_k^2; \mu_m^2) &= (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2l+1)}(\nu_k^2) B_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2) \\
 C_{2l+1, 2n+1}(\nu_k^2; \mu_m^2) &= (-1)^{l+n} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2l+1)}(\nu_k^2) B_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_{2l+1, 2n+1}(\nu_k^2; \mu_m^2) &= (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2l+1)}(\nu_k^2) A_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2) \\
 S_{2l+1, 2n+1}(\nu_k^2; \mu_m^2) &= (-1)^{l+n} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2l+1)}(\nu_k^2) A_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

である。

次に水平速度の条件である式(57), (58)に式(48), (56)を代入すると

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} &= \frac{Z_k(z)}{Z_k(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{p_{2n}} \left(C e_{2n}'(\xi_0; \nu_k^2) - \frac{C e_{2n}(\xi_0; \nu_k^2)}{M e_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} M e_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2) \right) c e_{2n}(\eta; \nu_k^2) c e_{2n}(\alpha; \nu_k^2) \right. \\
 &+ \frac{2}{s_{2n+2}} \left(S e_{2n+2}'(\xi_0; \nu_k^2) - \frac{S e_{2n+2}(\xi_0; \nu_k^2)}{N e_{2n+2}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} N e_{2n+2}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2) \right) s e_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) s e_{2n+2}(\alpha; \nu_k^2) \\
 &- i \left\{ \frac{2}{p_{2n+1}} \left(C e_{2n+1}'(\xi_0; \nu_k^2) - \frac{C e_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2)}{M e_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} M e_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2) \right) c e_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) c e_{2n+1}(\alpha; \nu_k^2) \right. \\
 &+ \left. \frac{2}{s_{2n+1}} \left(S e_{2n+1}'(\xi_0; \nu_k^2) - \frac{S e_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2)}{N e_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} N e_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2) \right) s e_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) s e_{2n+1}(\alpha; \nu_k^2) \right\} \\
 &+ Z_k(z) \sum_{n=0}^{\infty} \left[M_{2n} \frac{M e_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)}{M e_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} c e_{2n}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+2} \frac{N e_{2n+2}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)}{N e_{2n+2}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} s e_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) \right. \\
 &- \left. i \left\{ M_{2n+1} \frac{M e_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)}{M e_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} c e_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+1} \frac{N e_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)}{N e_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} s e_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) \right\} \right] \\
 &+ \sum_l Z_l(z) \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_{\lambda, 2n} \frac{F e k_{2n}'(\xi_0; -\nu_k^2)}{F e k_{2n}(\xi_0; -\nu_k^2)} c e_{2n}(\eta; -\nu_k^2) \right. \\
 &+ G_{\lambda, 2n+2} \frac{G e k_{2n+2}'(\xi_0; -\nu_k^2)}{G e k_{2n+2}(\xi_0; -\nu_k^2)} s e_{2n+2}(\eta; -\nu_k^2) - i \left\{ F_{\lambda, 2n+1} \frac{F e k_{2n+1}'(\xi_0; -\nu_k^2)}{F e k_{2n+1}(\xi_0; -\nu_k^2)} c e_{2n+1}(\eta; -\nu_k^2) \right. \\
 &+ \left. G_{\lambda, 2n+1} \frac{G e k_{2n+1}'(\xi_0; -\nu_k^2)}{G e k_{2n+1}(\xi_0; -\nu_k^2)} s e_{2n+1}(\eta; -\nu_k^2) \right\} \Big] = 0 \quad (0 \geq z > -h_1) \quad (72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} &= \left(\frac{\partial \Phi_u}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{m\pi(h+z)}{h-h_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{m, 2n} \frac{C e_{2n}'(\xi_0; -\mu_m^2)}{C e_{2n}(\xi_0; -\mu_m^2)} c e_{2n}(\eta; -\mu_m^2) \right. \\
 &+ \left. b_{m, 2n+2} \frac{S e_{2n+2}'(\xi_0; -\mu_m^2)}{S e_{2n+2}(\xi_0; -\mu_m^2)} s e_{2n+2}(\eta; -\mu_m^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -i \left\{ a_{m, 2n+1} \frac{Ce'_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Ce_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} ce_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) \right. \\
 & \left. + b_{m, 2n+1} \frac{Se'_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Se_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} se_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) \right\} \quad (-h_1 > z \geq -h) \quad (73)
 \end{aligned}$$

となる。式(72), (73)の両辺に $Z_k(z)/h$ をかけ、各領域で積分して、加え合わせると、 $Z_k(z)$ の直交性から次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Z_k(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{p_{2n}} \left(Ce'_{2n}(\xi_0; \nu_k^2) - \frac{Ce_{2n}(\xi_0; \nu_k^2)}{Me_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} Me_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2) \right) ce_{2n}(\eta; \nu_k^2) ce_{2n}(\alpha; \nu_k^2) \right. \\
 & + \frac{2}{s_{2n+2}} \left(Se'_{2n+2}(\xi_0; \nu_k^2) - \frac{Se_{2n+2}(\xi_0; \nu_k^2)}{Ne_{2n+2}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} Ne_{2n+2}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2) \right) se_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) se_{2n}(\alpha; \nu_k^2) \\
 & - i \left\{ \frac{2}{p_{2n+1}} \left(Ce'_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2) - \frac{Ce_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2)}{Me_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} Me_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2) \right) ce_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) ce_{2n+1}(\alpha; \nu_k^2) \right. \\
 & \left. + \frac{2}{s_{2n+1}} \left(Se'_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2) - \frac{Se_{2n+1}(\xi_0; \nu_k^2)}{Ne_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} Ne_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2) \right) se_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) se_{2n+1}(\alpha; \nu_k^2) \right\} \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \left[M_{2n} \frac{Me_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)}{Me_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} ce_{2n}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+2} \frac{Ne_{2n+2}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)}{Ne_{2n+2}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} se_{2n+2}(\eta; \nu_k^2) \right. \\
 & \left. - i \left\{ M_{2n+1} \frac{Me_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)}{Me_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} ce_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) + N_{2n+1} \frac{Ne_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)}{Ne_{2n+1}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} se_{2n+1}(\eta; \nu_k^2) \right\} \right] \\
 & = \frac{h-h_1}{h} \sum_m L_{mk} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{m, 2m} \frac{Ce'_{2m}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Ce_{2m}(\xi_0; -\mu_m^2)} ce_{2m}(\eta; -\mu_m^2) \right. \\
 & + b_{m, 2n+2} \frac{Se'_{2n+2}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Se_{2n+2}(\xi_0; -\mu_m^2)} se_{2n+2}(\eta; -\mu_m^2) \\
 & - i \left\{ a_{m, 2n+1} \frac{Ce'_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Ce_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} ce_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) \right. \\
 & \left. + b_{m, 2n+1} \frac{Se'_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Se_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} se_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) \right\} \right] \quad (74)
 \end{aligned}$$

また、式(72), (73)の両辺に $Z_l(z)/h$ をかけ、同様の操作を行なうと

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_{\lambda, 2n} \frac{Fek'_{2n}(\xi_0; -\nu_l^2)}{Fek_{2n}(\xi_0; -\nu_l^2)} ce_{2n}(\eta; -\nu_l^2) + G_{\lambda, 2n+2} \frac{Gek'_{2n+2}(\xi_0; -\nu_l^2)}{Gek_{2n+2}(\xi_0; -\nu_l^2)} se_{2n+2}(\eta; -\nu_l^2) \right. \\
 & \left. - i \left\{ F_{\lambda, 2n+1} \frac{Fek'_{2n+1}(\xi_0; -\nu_l^2)}{Fek_{2n+1}(\xi_0; -\nu_l^2)} ce_{2n+1}(\eta; -\nu_l^2) + G_{\lambda, 2n+1} \frac{Gek'_{2n+1}(\xi_0; -\nu_l^2)}{Gek_{2n+1}(\xi_0; -\nu_l^2)} se_{2n+1}(\eta; -\nu_l^2) \right\} \right] \\
 & = \frac{h-h_1}{h} \sum_m L_{m\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{m, 2n} \frac{Ce'_{2n}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Ce_{2n}(\xi_0; -\mu_m^2)} ce_{2n}(\eta; -\mu_m^2) + b_{m, 2n+2} \frac{Se'_{2n+2}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Se_{2n+2}(\xi_0; -\mu_m^2)} se_{2n+2}(\eta; -\mu_m^2) \right. \\
 & \left. - i \left\{ a_{m, 2n+1} \frac{Ce'_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Ce_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} ce_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) + b_{m, 2n+1} \frac{Se'_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Se_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} se_{2n+1}(\eta; -\mu_m^2) \right\} \right] \quad (75)
 \end{aligned}$$

となる。

式(74)に $ce_{2n}(\eta; \nu_k^2)$, 式(75)に $ce_{2n}(\eta; -\nu_l^2)$ をかけて、0 から 2π まで積分すると

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{Z_k(0)p_{2n}} \left\{ Ce'_{2n}(\xi_0; \nu_k^2) - \frac{Ce_{2n}(\xi_0; \nu_k^2)}{Me_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} Me_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2) \right\} ce_{2n}(\alpha; \nu_k^2) + M_{2n} \frac{Me_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)}{Me_{2n}^{(1)'}(\xi_0; \nu_k^2)} \\
 & = \frac{h-h_1}{h} \sum_m L_{mk} \sum_{l=0}^{\infty} a_{m, 2l} \frac{Ce'_{2l}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Ce_{2l}(\xi_0; -\mu_m^2)} C_{2l, 2n}(\mu_m^2; \nu_k^2) \quad (76)
 \end{aligned}$$

$$F_{\lambda, 2n} \frac{Fek'_{2n}(\xi_0; -\nu_l^2)}{Fek_{2n}(\xi_0; -\nu_l^2)} = \frac{h-h_1}{h} \sum_m L_{m\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} a_{m, 2l} \frac{Ce'_{2l}(\xi_0; -\mu_m^2)}{Ce_{2l}(\xi_0; -\mu_m^2)} C_{2l, 2n}(\mu_m^2; \nu_l^2) \quad (77)$$

となる。

式(76), (77)に式(65)を代入して $a_{m, 2l}$ を消去すると, 式(76), (77)は $M_{2n}, F_{\lambda, 2n}$ に関する連立方程式となるから, これを解くことによって, 未知係数 $M_{2n}, F_{\lambda, 2n}$ が求められる。この結果を式(65)に代入すれば, 未知係数 $a_{m, 2n}$ も求められる。以上と同様の操作を行えば, 他の未知係数もすべて決定することができる。

2.6 波力およびモーメント

固定楕円柱体には, 3成分の力と3成分のモーメントが作用する。図-5に示すように, x, y, z 軸方向の力を F_x, F_y, F_z とし, それぞれの軸まわりのモーメント M_x, M_y, M_z とする。

ベルヌーイの定理から, 圧力 p は

$$p = -\frac{w_0}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - w_0 z \quad (78)$$

で与えられる。速度ポテンシャル Φ は, 側面に働く波力の場合 Φ_0 を用い, 底面に働く場合 Φ_u を用いる。 w_0 は水の単位重量を示し, $w_0 = \rho g$ で与えられる。

(1) x 軸方向の力 F_x

$$F_x = - \int_{-h_1}^0 \oint_y p dy dz \quad (79)$$

$$\begin{aligned} F_x = & -\frac{w_0 H_{in} B}{4} \sinh \xi_0 e^{-i\omega t} \\ & \times \left[\frac{\sinh kh - \sinh k(h-h_1)}{k N_k^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_k^2) \cos(2r+1)\eta \cos \eta d\eta \right\} \right. \\ & \left. + \sum_{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} F_{\lambda, 2n+1} \frac{\sin \lambda h - \sin \lambda(h-h_1)}{\lambda N_{\lambda}^{1/2}} (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(\nu_{\lambda}^2) \cos(2r+1)\eta \cos \eta d\eta \right\} \right] \quad (81) \end{aligned}$$

となって, 再整理すると, 次のようになる。

$$\begin{aligned} F_x = & -\frac{\pi w_0 H_{in} B}{4} \sinh \xi_0 e^{-i\omega t} \\ & \times \left[\frac{\sinh kh - \sinh k(h-h_1)}{k N_k^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1} A_1^{(2n+1)}(\nu_k^2) \right. \\ & \left. + \sum_{\lambda} \left\{ \frac{\sin \lambda h - \sin \lambda(h-h_1)}{\lambda N_{\lambda}^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_{\lambda, 2n+1} B_1^{(2n+1)}(\nu_{\lambda}^2) \right\} \right] \quad (82) \end{aligned}$$

(2) y 軸方向の力 F_y

F_x と同様にして, F_y も次のように求まる。

$$\begin{aligned} F_y = & -\frac{\pi w_0 H_{in} B}{4} \cosh \xi_0 e^{-i\omega t} \\ & \times \left[\frac{\sinh kh - \sinh k(h-h_1)}{k N_k^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \{ N_{2n+1} B_1^{(2n+1)}(\nu_k^2) \} \right. \\ & \left. + \sum_{\lambda} \left\{ \frac{\sin \lambda h - \sin \lambda(h-h_1)}{\lambda N_{\lambda}^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n G_{\lambda, 2n+1} A_1^{(2n+1)}(\nu_{\lambda}^2) \right\} \right] \quad (83) \end{aligned}$$

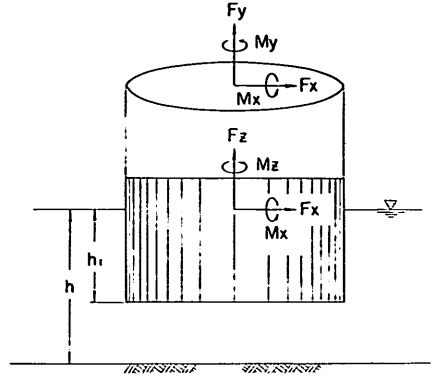


図-5 波力とモーメントの定義

となる。 \oint は y を変数として楕円柱まわりを一周積分することを意味する。

式(2)から

$$dy = \frac{B}{2} \sinh \xi_0 \cos \eta d\eta \quad (80)$$

となる。

式(48)の Φ_0 を式(77)の Φ としておき, 式(78)および式(80)を式(79)に代入すると

(3) z 軸方向の力 F_z (揚力)

z 軸方向の力は楕円柱底面全体で波圧を積分することによって与えられ、

$$F_z = \iint p dx dy \quad (84)$$

となる。式(84)の $dx dy$ を楕円座標で変換すると

$$dx dy = J d\xi d\eta \quad (85)$$

となる。ここで、 J はヤコビヤンで

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{B^2}{8} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \quad (86)$$

となる。式(78)と式(86)を用いて、式(84)を計算すると

$$F_z = -\frac{B^2}{8g} \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \phi_w}{\partial t} \right)_{z=h_1} d\eta d\xi + \frac{\pi w_0 h_1 B^2}{4} \cosh \xi_0 \sinh \xi_0 \quad (87)$$

となる。式(87)の右辺第2項は静水圧を示し、波による力ではないので、これを除き、波による力のみを計算すると

$$F_z = i \frac{\pi w_0 H_{in} B^2}{16} e^{-i\omega t} \times \sum_m \sum_n \left[2(-1)^{m+n} a_{m, 2n} \frac{A_0^{(2n)}(\mu_m^2)}{C_{e2n}(\xi_0; -\mu_m^2)} \int_0^{\xi_0} C_{e2n}(\xi; -\mu_m^2) \cosh 2\xi d\xi + (-1)^{m+n} a_{m, 2n} \frac{A_2^{(2n)}(\mu_m^2)}{C_{e2n}(\xi_0; -\mu_m^2)} \int_0^{\xi_0} C_{e2n}(\xi; -\mu_m^2) d\xi \right] \quad (88)$$

となる。 $C_{e2n}(\xi; -\mu_m^2)$ は式(55)の他に

$$C_{e2n}(\xi; -\mu_m^2) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(\mu_m^2) \cosh 2r\xi \quad (89)$$

のようにも表わすことができる。式(89)を式(88)に代入して、積分を行なうと次のようになる。

$$F_z = \frac{i\pi w_0 H_{in} B^2}{16} e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{m, 2n}}{C_{e2n}(\xi_0; -\mu_m^2)} \times \left[A_0^{(2n)}(\mu_m^2) \left\{ A_0^{(2n)}(\mu_m^2) \sinh 2\xi_0 - A_2^{(2n)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh 4\xi_0}{4} + \xi_0 \right) + \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh (2r+2)\xi_0}{2r+2} + \frac{\sinh (2r-2)\xi_0}{2r-2} \right) \right\} + A_2^{(2n)}(\mu_m^2) \left\{ A_0^{(2n)}(\mu_m^2) \xi_0 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(\mu_m^2) \frac{\sinh 2r\xi_0}{2r} \right\} \right] \quad (90)$$

 (4) x 軸まわりのモーメント M_x

x 軸まわりのモーメントはローリングモーメントを示し、側面に働く力によるモーメントと底面に働く揚圧力によるモーメントの和となる。

$$M_x = - \int z dF_y + \int y dF_z \quad (91)$$

式(91)の積分を計算すると、 M_x は次のように求まる。

$$M_x = \frac{\pi w_0 H_{in} B}{4} e^{-i\omega t} \times \left\{ \cosh \xi_0 \left[N_k^{-1/2} \left\{ \frac{\cosh k(h-h_1) - \cosh kh}{k^2} + \frac{h_1}{k} \sinh k(h-h_1) \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} B_1^{(2n+1)}(\nu_k^2) N_{2n+1} \right] + \sum_{\lambda} N_{\lambda}^{-1/2} \left\{ \frac{\cos \lambda h - \cos \lambda(h-h_1)}{\lambda^2} + \frac{h_1}{\lambda} \sin \lambda(h-h_1) \right\} + \sum_n (-1)^n A_1^{(2n+1)}(\nu_k^2) G_{\lambda, 2n+1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{B^2}{32} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{b_{m, 2n+1}}{\text{Se}_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} \\
 & \times \left[A_1^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left\{ A_1^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh 4\xi_0}{4} - \frac{\sinh 2\xi_0}{2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - A_3^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh 6\xi_0}{6} - \xi_0 \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh (2r+4)\xi_0}{2r+4} - \frac{\sinh (2r-2)\xi_0}{2r-2} \right) \right\} \right. \\
 & \left. + A_3^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left\{ A_1^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh 2\xi_0}{2} - \xi_0 \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh (2r+2)\xi_0}{2r+2} - \frac{\sinh 2r\xi_0}{2r} \right) \right\} \right] \quad (92)
 \end{aligned}$$

 (5) y 軸まわりのモーメント M_y

M_y はピッチングモーメントを表わし, F_x の場合と同様にして次のように求まる。

$$\begin{aligned}
 M_y & = -\frac{\pi \omega_0 H_{in} B}{4} e^{-i\omega t} \\
 & \times \left(\sinh \xi_0 \left[N_k^{-1/2} \left\{ \frac{\cosh k(h-h_1) - \cosh kh}{k^2} + \frac{h_1}{k} \sinh k(h-h_1) \right\} \right. \right. \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} A_1^{(2n+1)}(\nu_1^2) M_{2n+1} \\
 & \left. \left. + \sum_l N_l^{-1/2} \left\{ \frac{\cos \lambda h - \cos \lambda(h-h_1)}{\lambda^2} + \frac{h_1}{\lambda} \sin \lambda(h-h_1) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_1^{(2n+1)}(\nu_1^2) F_{l, 2n+1} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{B^2}{32} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{m, 2n+1}}{\text{Ce}_{2n+1}(\xi_0; -\mu_m^2)} \right. \\
 & \times \left[B_1^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left\{ B_1^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh 4\xi_0}{4} + \frac{\sinh 2\xi_0}{2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - B_3^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh 6\xi_0}{6} + \xi_0 \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh (2r+4)\xi_0}{2r+4} + \frac{\sinh (2r-2)\xi_0}{2r-2} \right) \right\} \right. \\
 & \left. + B_3^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left\{ B_1^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh 2\xi_0}{2} + \xi_0 \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(\mu_m^2) \left(\frac{\sinh (2r+2)\xi_0}{2r+2} + \frac{\sinh 2r\xi_0}{2r} \right) \right\} \right] \quad (93)
 \end{aligned}$$

 (6) z 軸まわりのモーメント M_z

z 軸まわりのモーメントは F_x と F_y によって, 次のように表わされる。

$$M_z = \int x dF_y - \int y dF_x \quad (94)$$

式(94)を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 M_z & = -\frac{\pi \omega_0 H_{in} B^2}{16} e^{-i\omega t} \\
 & \times \left[\frac{\sinh kh - \sinh k(h-h_1)}{k N_k^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} N_{2n+2} B_3^{(2n+2)}(\nu_1^2) \right. \\
 & \left. + \sum_l \frac{\sinh kh - \sinh k(h-h_1)}{\lambda N_l^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n G_{l, 2n+1} B_3^{(2n+2)}(\nu_1^2) \right] \quad (95)
 \end{aligned}$$

3. 波力およびモーメントの計算

3.1 項数の決定と計算条件

前節で求めた波力およびモーメントを実際に電子計算機を用いて計算する際には、計算結果が十分な精度を保つ範囲で項数 r, n, m , および λ に関する項数をできるだけ少なくとることが計算時間を短縮する上で重要である。

項数 n, r については、着底時の楕円柱体に働く波力の計算を述べた前論文においてその値を定めているので、今回もそれを踏襲することにして、次のように決定した。

$$\left. \begin{aligned} n &\leq \left[\frac{11}{9} \frac{B}{L} \right] + 1 \\ r &= n + 8 \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

ここで、 $[]$ はガウスの記号で、 $[]$ 内の値を越えない最大の整数である。

式(96)からわかるように、項数 n は楕円の焦点距離 B と波長 L との比で変り、波長が焦点距離に比して、小さくなれば、それだけ項数は増大する。そして、 $B/L > 10$ の範囲では、式(14)、(15)中の固有値を正確に計算することが非常に困難になるため、計算は $B/L \leq 10$ の範囲にとどめた。

次に、 λ の項数については、 B/L に対応する値として、 $B\lambda/2\pi$ がある。これも、 n の場合と同様に、 $B\lambda/2\pi < 10$ の範囲でないとい固有値を正確に計算することが非常に困難であった。 λ が十分大きくなった場合には、 $\lambda h \approx j\pi$ ($j=1, 2, \dots$) と近似できるから、上記の条件は $j \leq 20h/B$ と書き改められる。その j は λ の項数を与えるから、楕円の焦点距離に比して、水深が浅い場合、 λ の項数はあまり多くとることができない。もっとも、多過ぎると計算時間が無駄なので、予備計算の段階で未知係数の計算精度および計算時間を調べたところ、 λ の項数は最大で5とすれば十分な結果が得られることがわかったので、 λ の項数が5以上取られる場合には5とした。

項数 m についても同様に、 B/L に対応する値が、 $Bm/2(h-h_1)$ となり、この値が10以下であることが必要であった。つまり、 m は $20(h-h_1)/B$ より小さな値でなければならない。たとえば、シーパースに接岸している船について考えてみると、 $h/B \approx 0.1$, $h_1/h \approx 0.8$ であるか $m < 0.4$ となって、 $m=0$, つまり、第1項のみしか使えないことになる。上記の条件から定まる m の

値が大きい場合には、 λ の項数も同様に $m=5$ で打ち切った。なお井島ほか⁷⁾ は円柱浮体の運動で m の値について検討し、 $m=5$ で十分であることを示している。

なお計算にあたっては、収束を良くするために式(15)、(35)、(54)の解をベッセル関数の積の級数⁹⁾で展開している。

3.2 近似解の導入

(1) 厳密解とその問題点

2. で求めた解を以後厳密解と呼ぶことにする。この解の誘導過程からわかるように、式(72)の右辺が0でなくとも、次の二つの条件を同時に満足する任意関数 $q(z)$ であってもよいわけである。

$$\int_{-h_1}^0 q(z) Z_k(z) dz = 0 \quad (97)$$

$$\int_{-h_1}^0 q(z) Z_l(z) dz = 0 \quad (98)$$

この条件は $q(z)$ が $0 \geq z \geq h_1$ の離散点で有限な値を取り得ることを意味している。楕円柱体側面における境界条件、式(57)と流速の連続条件、式(58)を比べてみると明らかのように、 $(\partial\Phi_u/\partial\xi)_{\xi=\xi_0} \neq 0$ である限り、 $(\partial\Phi_0/\partial\xi)_{\xi=\xi_0}$ は $z=-h_1$ で不連続になる。ここで、次のような関数をフーリエ級数展開する問題を考えてみよう。

$$f(x) \begin{cases} = 1 & (1 \geq x > 0) \\ = 0 & (0 \geq x \geq -1) \end{cases} \quad (99)$$

このように、 $x=0$ で不連続な関数を $1 \geq x > -1$ でフーリエ級数展開すると、 $x=0$ における不連続部ではディリクレの定理によって、フーリエ級数は $\{f(0_+) + f(0_-)\}/2 = 0.5$ となる。つまり、図-6に示すように、項数が有限個である限り、 $x=0$ 付近ではフーリエ級数は $f(x)$ との誤差が大きい。ただし、級数項を増大すればより $f(x)$ に近づく。

この解法に於ても、これと同様のことがいえる。つまり、式(57)、(58)の条件を満足するように、 λ の項で級数展開しているわけであるから、 λ の項を有限個とする限り、 $z=-h_1$ の付近では $(\partial\Phi_0/\partial\xi)_{\xi=\xi_0} = 0$ が満足されていない。この誤差が前述の $q(z)$ になるわけであるから、

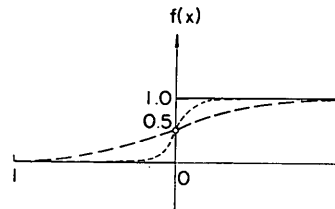


図-6 ステップ状関数のフーリエ級数による近似

$q(z)$ の値が $z = -h_1$ の付近で大きくても、 λ の項数を多く取って $q(z) \neq 0$ の区間を短くすれば式(97)と式(98)の条件はかなりよく満足されて、この解法は成立つことになる。波力およびモーメントを計算する場合、 λ の項数は当然有限個になるため、 $z = -h_1$ で上記の誤差が生じる。このように厳密解といっても、数値計算上は完全な厳密解ではなく、一種の近似解であるといえる。

(2) 第1近似解

前論文¹⁾では、船を楕円柱体で近似し、船底と水底との間に間隙があっても、波圧の分布は間隙のないときと変わらないと仮定して、船体に働く波力を計算した。しかし、水底との間の間隙が大きくなった場合、波のエネルギーはこの間隙を通して、容易に後方へ伝播するようになるので、楕円柱体に働く波圧は間隙のない状態のものとは異なると予想される。そこで、後で厳密解と比較するため、間隙の影響を無視した場合の解を第1近似解と呼ぶことにする。この第1近似解は、楕円柱側面において水粒子速度が0になるという式(57)の条件を水面から水底まで、すなわち $0 \geq z \geq -h$ の範囲にわたって適用した場合の解であり、 λ の無限級数で表わされて定常波の項は無視される。底面下の領域に対する流速の連続条件式(58)は、上述の仮定によって

$$\left(\frac{\partial \Phi_u}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0} = 0 \quad (-h_1 \geq z \geq -h) \quad (100)$$

となって、 Φ_u 中の未知係数はすべて0になってしまい、 F_x, M_x, M_y を計算することができない。前論文では F_x, F_y のみを求めたので、この点は問題にならなかったから、本報告では F_x などを求めるため、式(58)の流速の連続条件を無視し、式(59)の圧力の連続条件から Φ_u 中の未知係数を決定することにした。

(3) 第2近似解

伊藤・木原²⁾は固定円柱の波力の計算において、円柱側面の水粒子速度0の条件を満たすための定常波の項を無視し、間隙における水粒子速度の連続条件と圧力の連続条件から近似的に波力を計算する方法を提示した。そして、この近似理論による解は、Garret が求めた厳密な解³⁾とそれ程大きな差はなく、実用上近似理論による解で十分であることを示している。このような方法が固定楕円柱の場合も使えるのであれば、 λ の項を省略することによって、計算時間を 1/10~1/20 に短縮することができる。以後、定常波の項を無視した近似理論による解を第2近似解と呼ぶことにする。

固定楕円柱の場合、式(58)の流速の連続条件および式

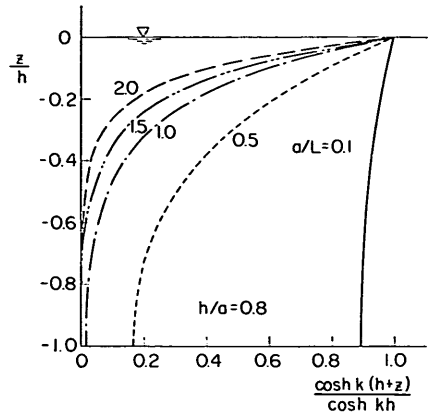


図-7 入射波の粒子速度分布

(59)の圧力の連続条件によって、未知係数を決定することになる。この解法では、式(57)の条件は適用されないから、この条件から導かれる式(72)の右辺も0とはならない。

なお、第1近似解と第2近似解が一致するためには式(100)を満足することが必要である。図-7は入射波の粒子速度を調べるため、 a/L をパラメーターにして、 $h/a = 0.8$ における $\cosh k(h+z)/\cosh kh$ の値を z についてプロットしたものである。これによると、 a/L が増大するにつれて、水粒子速度は水面近くに集中し、水底に近い部分はほとんど0になる。これによって、 a/L が増大すると、 $(\partial \Phi_u / \partial \xi)_{\xi=\xi_0} = 0$ の条件を満足するようになり、第1近似解は第2近似解に近づくことがわかる。

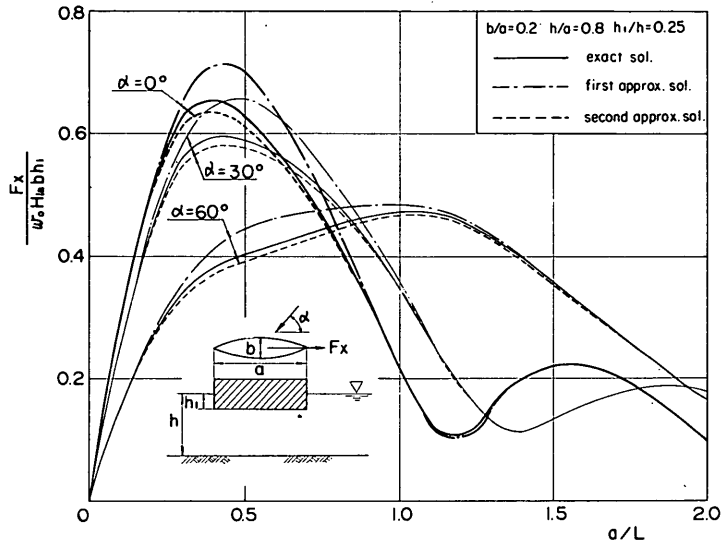
3.3 厳密解と近似解の比較

図-8~13は a/L に対する波力およびモーメントの変化を計算したもので、図中の実線は厳密解、一点鎖線は第1近似解、点線は第2近似解を示している。計算条件は $h/a = 0.8$, $b/a = 0.2$ で、各図とも (a) は $h_1/h = 0.25$, (b) は $h_1/h = 0.5$ の場合である。

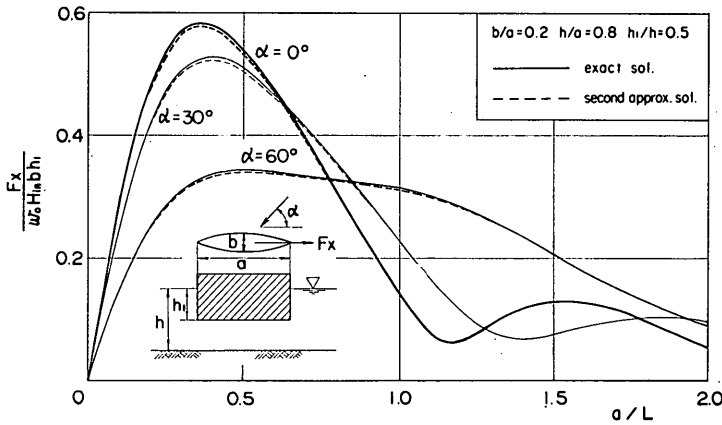
(1) F_x における比較

波力の F_x の計算結果は、幅 b , 高さ h_1 の版に $w_0 H_{in}$ の波圧が一様に働くときの力 $w_0 H_{in} b h_1$ を基準値として無次元化してある。

図-8(a)でわかるように、第1近似解は常に厳密解より大きく、また第2近似解は小さい。どちらの近似解も $a/L = 0.5$ 付近で最も厳密解との差が大きく、第1近似解では差の最大が $\alpha = 60^\circ, 30^\circ$ で 0.07, $\alpha = 0^\circ$ で 0.05 となっているが、第2近似解では第1近似解の場合の 1/4 程度の差である。 a/L が 0.5 よりもさらに大きく



(a)



(b)

図-8 F_x に関する厳密解と近似解の比較

なると、どちらの近似解も漸次厳密解に近づく。第1近似解は最大値の現われる位置でも厳密解とやや異なる。例えば、 $\alpha=30^\circ$ で厳密解の最大値は $a/L=0.40$ 付近に現われるのに対して、第1近似解では $a/L=0.50$ 付近に現われる。これに対して、第2近似解は厳密解と同じ変化パターンを示している。

図-8 (b) の $h_1/h=0.5$ の場合、第1近似解は厳密解と図面上に差が現われない程度によく合うため、図では第1近似解を省略している。第2近似解は $h_1/h=0.25$ と同様に厳密解よりも小さい。その差は $\alpha=60^\circ, 30^\circ$ で 0.01 、 $\alpha=0^\circ$ で 0.005 程度となって、 $h_1/h=0.25$ の場

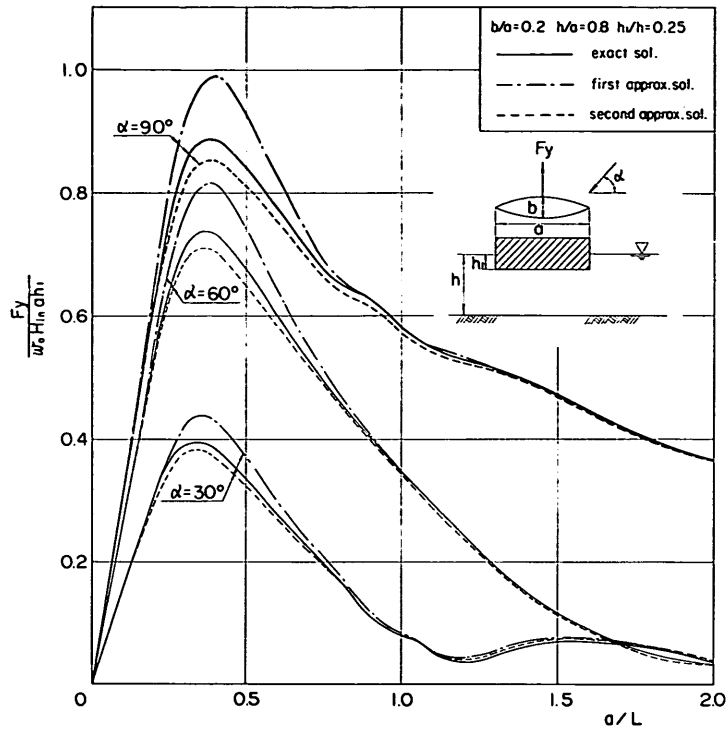
合の半分程度である。

(2) F_y における比較

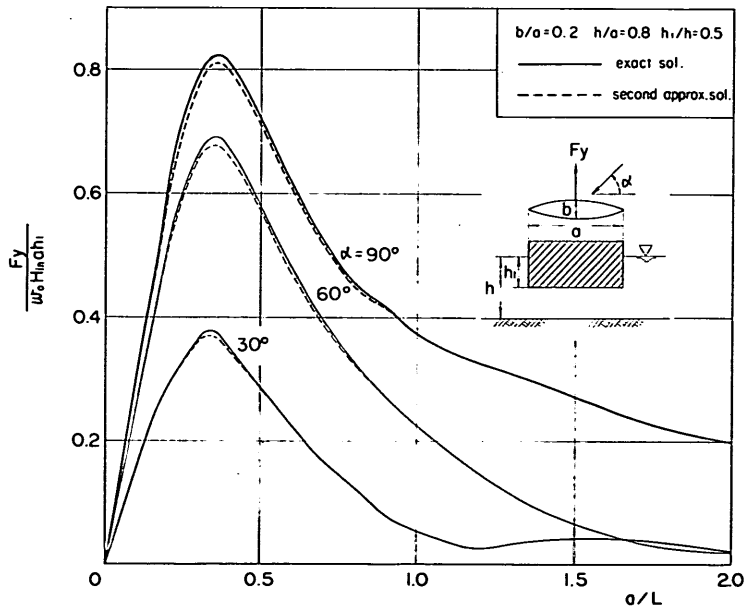
F_y は、幅 a 、高さ h_1 の版に $w_0 H_{1m}$ の波圧が一樣に作用している時の力 $w_0 H_{1m} a h_1$ を基準値として無次元化してある。

図-9 (a) からわかるように、 F_x の場合と同様に第1近似解は厳密解より大きく、第2近似解は小さい。これらの近似解は厳密解と最大値付近、つまり $a/L=0.3\sim 0.4$ で最も大きな差を示し、その差は、第1近似解の場合、 $\alpha=90^\circ$ で最大 0.1 、 $\alpha=60^\circ$ で 0.09 、 $\alpha=30^\circ$ で 0.05 となっているが、第2近似解の場合、第1近似解

楕円柱体近似による固定船体に働く波力の理論および実験



(a)



(b)

図-9 F_y に関する厳密解と近似解の比較

の $1/3 \sim 1/4$ 程度の差である。

a/L がさらに大きくなると、 F_x の場合と同様にどちらの近似解も厳密解に漸近する。この漸近は第1近似解の方が第2近似解より速い。

図-9 (b) の $h_1/h=0.5$ の場合、第1近似解は厳密解とほとんど差がないため、省略してある。第2近似解と厳密解との差は最大で 0.01 程度であって、 $h_1/h=0.25$ の場合の約半分の差しかない。

(3) F_z における比較

F_z は、楕円柱の底面積 $\pi ab/4$ に $w_0 H_{in}$ の波圧が一樣に働くときの力 $w_0 H_{in} \pi ab/4$ を基準値として無次元化してある。

図-10 (a), (b) でわかるように、 F_z は a/L が大きくなると急激に減少する。この減少は α が小さいほど急速である。この理由として、 α が小さくなると、間隙での波のエネルギーの通過距離が長くなり、間隙を通過して波が伝播しにくくなるためと考えられる。このことは、 $h_1/h=0.25$ での値が、対応する $h_1/h=0.5$ の値より大

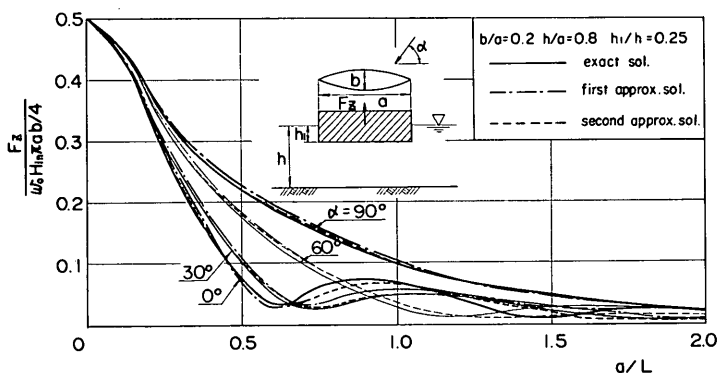
きくなることからでも類推できる。

図-10 (a) の場合、第1近似解と厳密解との差は小さく、最大で 0.02 程度である。第2近似解も同程度の差しかない。しかし、 a/L が大きくなると F_z の力そのものが小さく、差は小さくても近似解と厳密解との比率は大きくなる。例えば、 $\alpha=60^\circ$ の場合、 $a/L=0.5$ で、厳密解に対する第2近似解の比が 1.06 であったものが、 $a/L=1.5$ では 2.0 になっている。また、第1、第2近似解は共に厳密解のまわりを振動している。また、両近似解は $a/L > 1$ ではお互いにほぼ等しい値を示す。

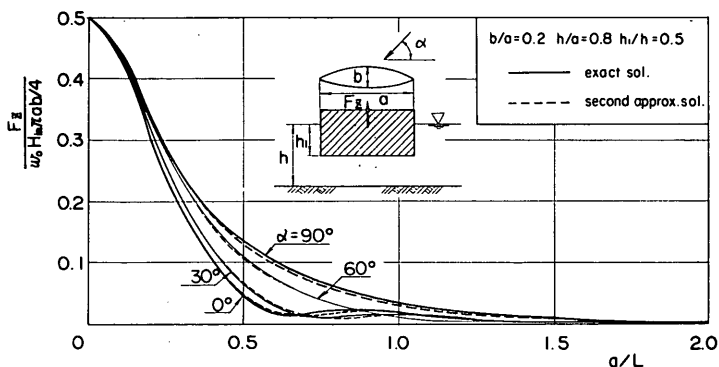
図-10 (b) の $h_1/h=0.5$ の場合、第1近似解は厳密解と同じになるので省略されている。第2近似解と厳密解との差は $h_1/h=0.25$ の場合よりさらに小さくなり、厳密解のまわりを振動するという現象もなくなっている。

(4) M_x における比較

M_x は、幅 a 、高さ h_1 の版に $w_0 H_{in}$ の波圧が一樣に働くときの版の上端まわりのモーメント $w_0 H_{in} a h_1^2/2$ を基準値として無次元化してある。



(a)



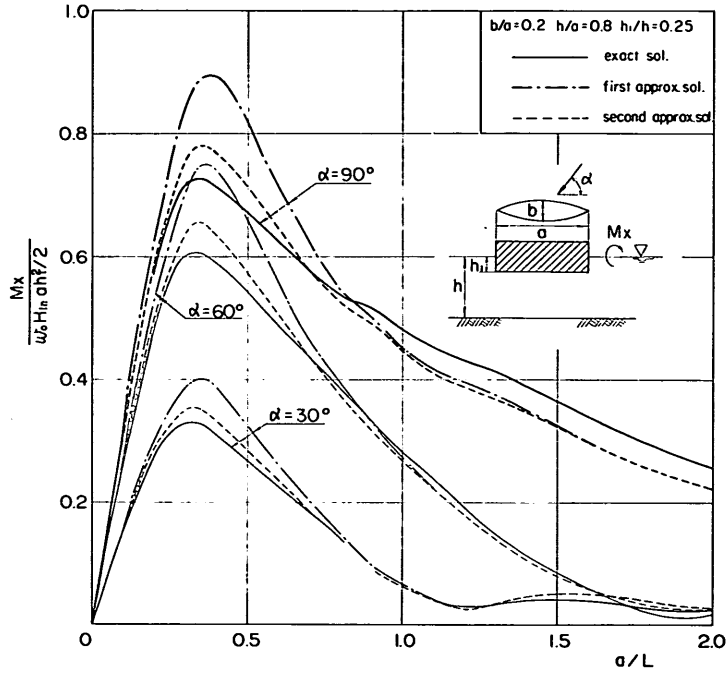
(b)

図-10 F_z に関する厳密解と近似解の比較

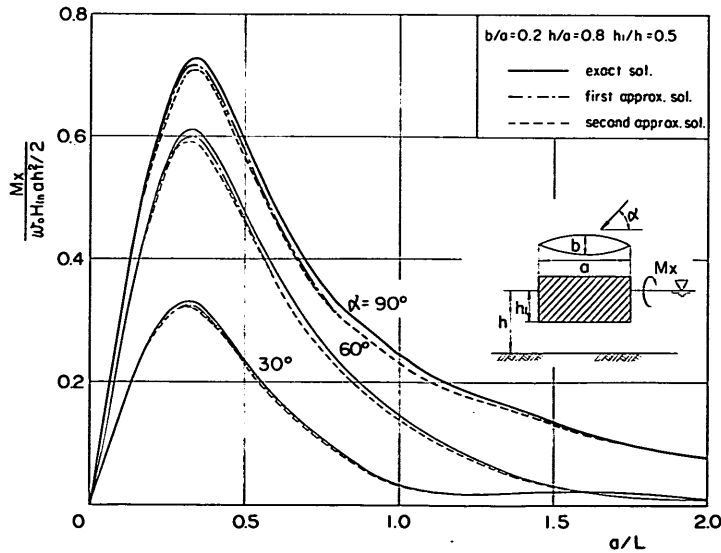
楕円柱体近似による固定船体に働く波力の理論および実験

$h_1/h=0.25$ の 図-11(a) からわかるように、どちらの近似解も最大値付近で厳密解より大きく、 a/L がさらに大きくなると厳密解より小さくなる。厳密解との差はこの近似解も $a/L=0.4$ 付近で最も大きく、第1近似解の場合、 $\alpha=90^\circ$ で 0.18、 $\alpha=60^\circ$ で 0.14、 $\alpha=30^\circ$ で

0.07 であるが、第2近似解の場合、それぞれ第1近似解の 1/3 程度である。近似解同志では a/L が大きくなると、お互いに漸近するが、厳密解には余り良く近づかない。特に $\alpha=90^\circ$ では $a/L=2.0$ でも、近似解は厳密解と 0.03 の差を示している。



(a)



(b)

図-11 M_x に関する厳密解と近似解の比較

$h_1/h=0.5$ の 図-11 (b) では、近似解は $h_1/h=0.25$ のように厳密解のまわりを振動することもなく、常に厳密解より小さな値を示している。第1近似解は厳密解と第2近似解の間にあるが、 a/L が大きくなると、第2近似解に漸近し、 $a/L>0.8$ では一致する。第2近似解は厳密解と $\alpha=90^\circ$, 60° で 0.02, $\alpha=30^\circ$ で 0.01 の差しか示していないが、 $h_1/h=0.25$ の場合より 1/7~1/9 程度の差である。

(5) M_y における比較

M_y は、幅 b 、高さ h_1 の鉛直面に $w_0 H_{1n}$ の波圧が一樣に働くときの先端にかかるモーメント $w_0 H_{1n} b h_1^2 / 2$ を基準値として無次元化してある。

$h_1/h=0.25$ の 図-12 (a) では、近似解は a/L が增大するにつれて、次第に厳密解からずれ始め、そのずれは

拡大しているように見える。この原因として、 M_y の場合、 h_1/h が小さいため F_x によるモーメントより、 F_z によるモーメントがアームが長いだけに大きく影響し、(3) で述べた F_z の誤差がモーメントを取ることによって拡大されたためと思われる。また、 M_y が大きな波状形を示すのも、 F_z によるモーメントのためであると考えられる。このことは、図-12 (b) の $h_1/h=0.5$ の場合、図-8 (b) の F_x と同じ変化形を示していることから推定される。 $h_1/h=0.5$ の場合、 $h_1/h=0.25$ に比して、第2近似解と厳密解との差は小さく、最大で 0.01 程度である。この差も a/L が增大するにつれて小さくなる。第1近似解は a/L が增大するにつれて、 $h_1/h=0.25$ および 0.5 でも第2近似解に近づく。

(6) M_z における比較

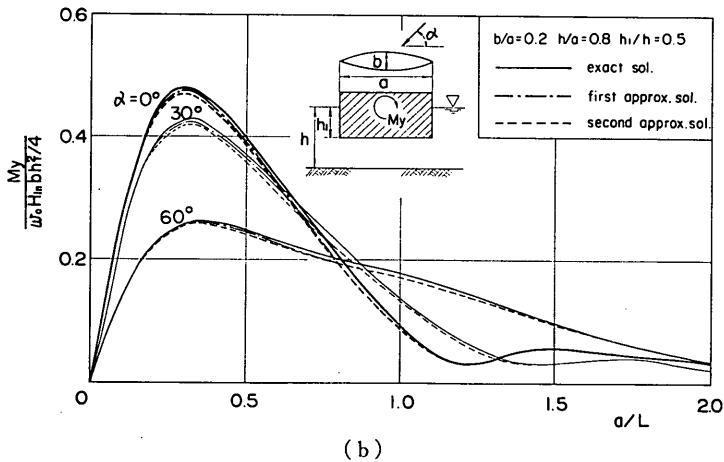
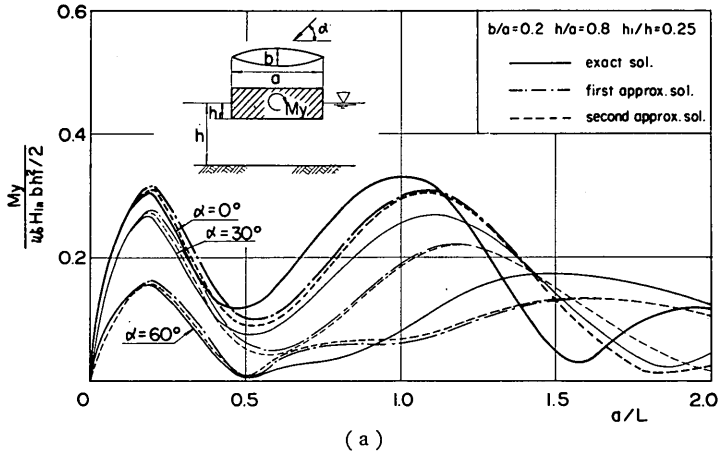
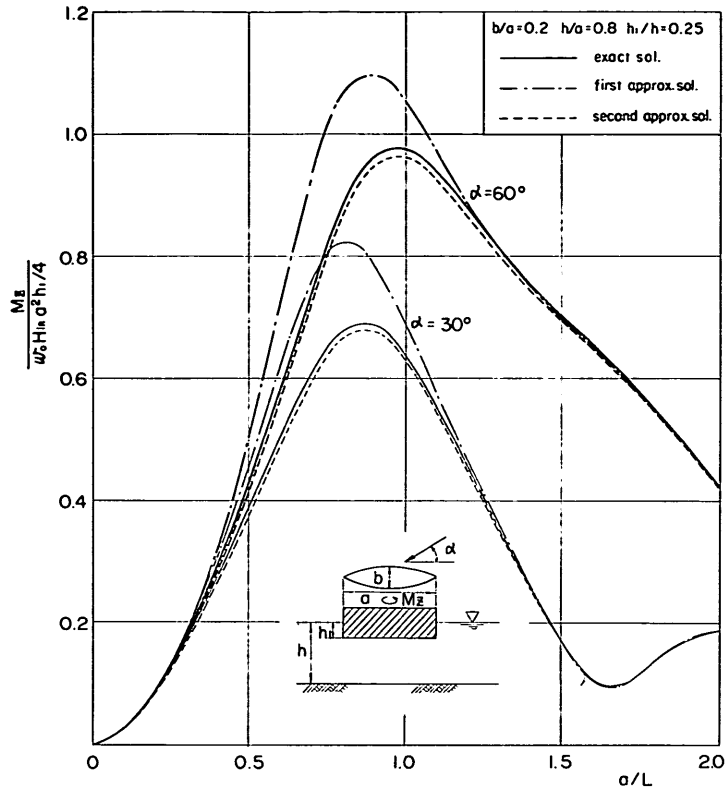
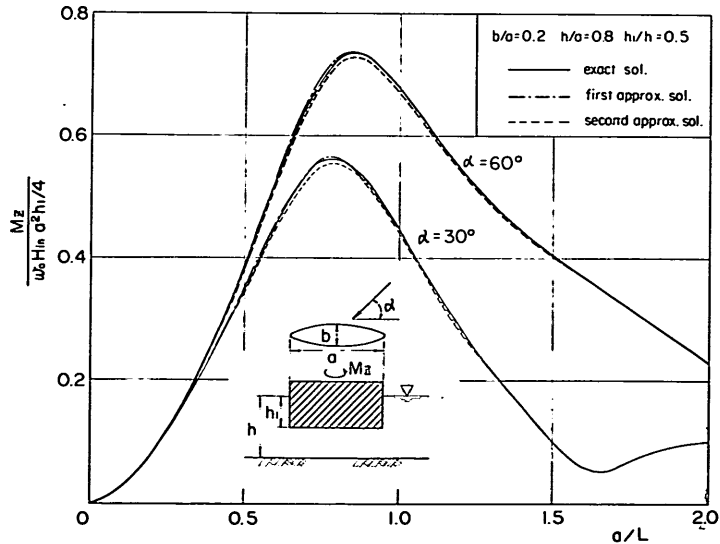


図-12 M_y に関する厳密解と近似解の比較

楕円柱体近似による固定船体に働く波力の理論および実験



(a)



(b)

図-13 M_z に関する厳密解と近似解の比較

M_z は、幅 a 、高さ h_1 の版に $w_0 H_{in}$ の波圧が一樣に働く時の版の側端のモーメントの半分、つまり $w_0 H_{in} a^2 h_1 / 4$ を基準値として無次元化してある。

$h_1/h=0.25$ の場合、図-13(a) からわかるように、第1近似解は $a/L=0.8$ 付近で最も大きく厳密解とずれ、この時の差は $\alpha=60^\circ$ 、 30° とともに 0.15 程度である。 M_z の最大値の位置も第1近似解と厳密解とは異なる。例えば、 $\alpha=60^\circ$ の場合、第1近似解では最大値が $a/L=0.90$ に現われるのに対し、厳密解では $a/L=0.97$ に現われる。第2近似解は厳密解の変化形ともよく一致し、厳密解との差も小さく、0.02 程度である。

$h_1/h=0.5$ の図-13(b) では、第1近似解は厳密解とよく一致し、図面上では差が現われなかった。第2近似解は厳密解と 0.01 程度の差で、 $h_1/h=0.25$ の場合の半分程度の差である。

(7) 近似解の適用性

以上で、近似解と厳密解を比較したことによって、次のようなことが明らかになった。

- i) 第1近似解は $h_1/h=0.25$ の場合厳密解と大きな差を示すが、 $h_1/h=0.5$ になると厳密解との差は小さく、第2近似解よりも精度が良い。
- ii) 第2近似解は、 $h_1/h=0.25$ でも厳密解とよく一致する。しかし、 M_y については、 F_x の誤差がモーメントを取るることによって拡大され、厳密解との差は大きくなっている。また、第2近似解は $h_1/h=0.5$ の場合、第1近似解に比べると精度は悪いけれども、厳密解との差は小さく、この精度の悪化は微

小で、実用上問題はない。

すなわち、第1近似解は h_1/h が小さいときは精度が悪くて実用性に問題があるけれども、 h_1/h が大きな値の場合には良好な近似精度を示す。したがって、前論文の計算例で扱った $h_1/h=0.9$ のような場合は第1近似解は十分な精度を有しており、計算結果も妥当なものであったと考えられる。一方、第2近似解は h_1/h が大きくても小さくてもかなりの精度を保つため、計算時間の節約を考えると、一般的な実用計算としては第2近似解の方が適当と考えられる。

3.4 楕円柱体の吃水による波力とモーメントの変化

図-14~19 は $b/a=0.2$ 、 $h/a=0.8$ の条件で、 h_1/h が異なる場合の波力およびモーメントの変化を示したものである。これらの図で、実線は $h_1/h=0.25$ 、点線は $h_1/h=0.5$ 、一点鎖線は $h_1/h=0.75$ 、二点鎖線は $h_1/h=1.0$ の場合を示している。 F_x と F_y は $a/L=4.0$ まで示されているが、他の波力およびモーメントについては、 $a/L \leq 2.0$ である。

図-14 は $\alpha=0^\circ$ のときの F_x の変化曲線を示す。3.3 の(1)で述べたように、 F_x の場合、 $h_1/h=0.25$ 、 0.5 でも $a/L=2.0$ 付近では厳密解と近似解が良く一致する。したがって、 $h_1/h=0.25$ と 0.5 の場合の $a/L \leq 2.0$ の範囲については厳密解による値を示しているが、その他については第2近似解による値をプロットしている。図-14 からわかるように、 h_1/h が小さい程、無次元量としての F_x は大きくなる。これは図-7 に示した水粒子速度の分布と同様に、波圧も $\cosh k(h+z)$ の関数形

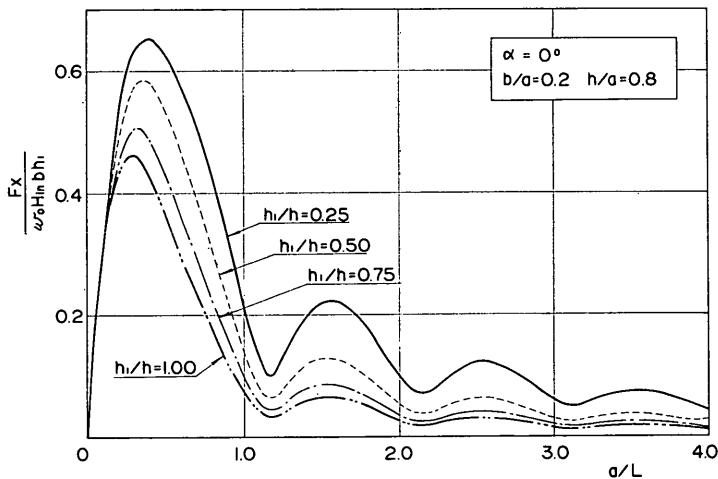


図-14 h_1/h による F_x の変化 ($\alpha=0^\circ$)

に従って水面近くで大きく、水底に近づくに従って急速に減少するからである。さらに、 F_x の最大値が現われる a/L の値をみってみると、 $h_1/h=0.25$ では $a/L=0.4$ 、 $h_1/h=0.5$ では $a/L=0.37$ 、 $h_1/h=0.75$ では $a/L=0.32$ 、 $h_1/h=1.0$ では $a/L=0.30$ となって、 h_1/h が大きくなるに従って、最大値は a/L が小さいところで現われる。また、最大値の右側では F_x は波状形を示しながら減少し、この波状形は h_1/h が小さい程強くなっている。

図-15 は $\alpha=90^\circ$ のときの F_y の変化曲線を示す。 F_x と同じ理由によって、 $a/L \leq 2.0$ の場合の $h_1/h=0.25$ 、 0.5 については厳密解、他は第2近似解による値である。

F_x の場合と同様に、 h_1/h が小さいほど無次元量としての F_y は大きくなる。 $\alpha=90^\circ$ の場合の F_y は $\alpha=0^\circ$ における F_x と異なって、波状形は示さない。最大値の現われる位置にしても F_x の場合と同様に、 h_1/h が大きくなる程 a/L は小さくなる。

図-16 は $\alpha=90^\circ$ における F_z の変化曲線を示す。 F_z の無次元量は 0.5 から出発して、 a/L が增大するにつれて減少する。この減少は h_1/h が大きいほど急である。 $h_1/h=0.75$ の場合、 $a/L > 1.5$ ではほとんど 0 である。

図-17 は $\alpha=90^\circ$ における M_x の変化曲線を示したものである。 $h_1/h=0.5$ 、 0.75 における M_x の曲線はそれぞれの h_1/h に対応する図-14 の F_y の曲線とよ

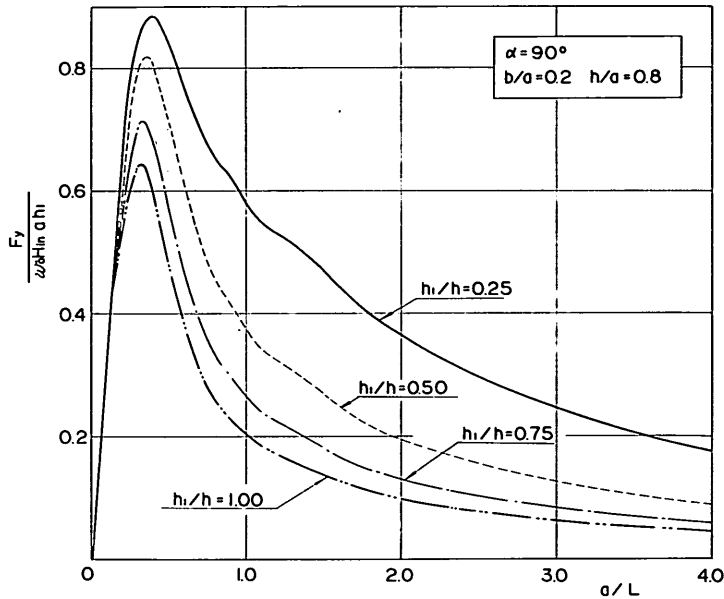


図-15 h_1/h による F_y の変化 ($\alpha=90^\circ$)

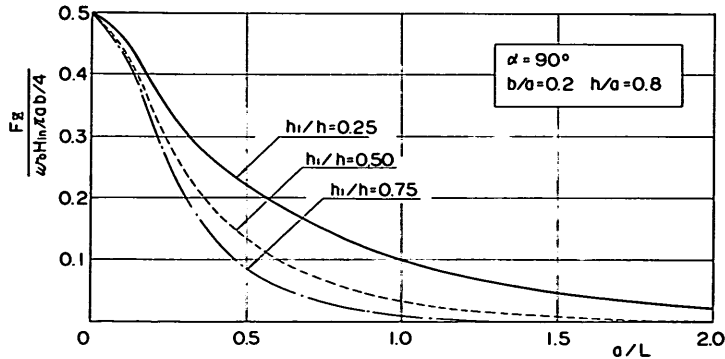


図-16 h_1/h による F_z の変化 ($\alpha=90^\circ$)

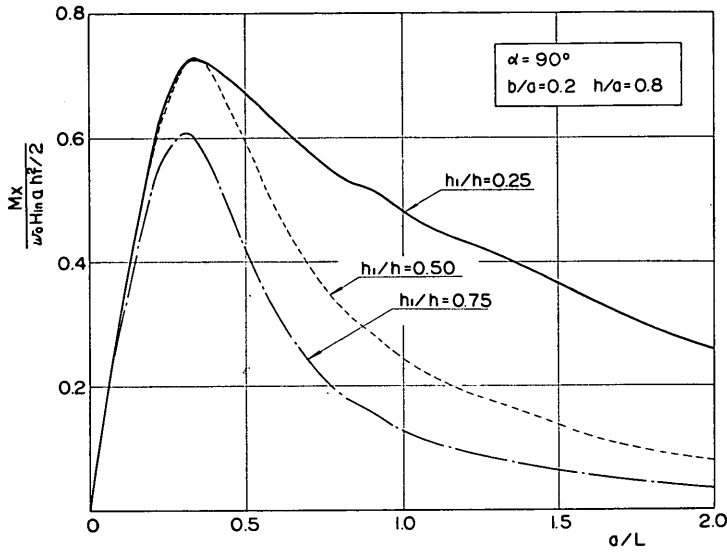


図-17 h_1/h による M_x の変化 ($\alpha=90^\circ$)

く似た分布形を示している。これは、 h_1/h が大きくなると、 F_y によるモーメントが M_x の大部分を占めるためである。 $h_1/h=0.25$ の場合の最大値は $h_1/h=0.5$ の最大値とほぼ等しく、0.73 である。しかし、 a/L がさらに増大すると $h_1/h=0.25$ の曲線は減少率が小さいため、 $h_1/h=0.5$ の曲線との差が大きくなる。

図-18 は $\alpha=0^\circ$ における M_y の変化曲線を示したものである。 M_x の場合と同じ理由によって、 $h_1/h=0.5$ 、0.75 の曲線はそれぞれ h_1/h が対応する F_x の曲線とよく似た分布形を示している。 $h_1/h=0.25$ の場合、 $h_1/h=0.75$ 、0.5 の分布形とは非常に異なり、大きな波状形

を示している。これは、底面からの揚圧力、つまり F_z によるモーメントが卓越するためである。

図-19 は $\alpha=60^\circ$ における M_z の変化曲線を示したものである。 F_x 、 F_y と同じ理由によって、 h_1/h が小さくなるほど、 M_z の無次元量は大きくなる。 M_z の最大値は $h_1/h=0.25$ で $a/L=0.95$ 、 $h_1/h=0.5$ で $a/L=0.85$ 、 $h_1/h=0.75$ で $a/L=0.82$ 、 $h_1/h=1.0$ で $a/L=0.8$ に現われ、 F_x や F_y と同様に、 h_1/h が大きくなるほど、 M_x の最大値は a/L が小さな値で現われることがわかる。

3.5 相対水深による波力およびモーメントの変化

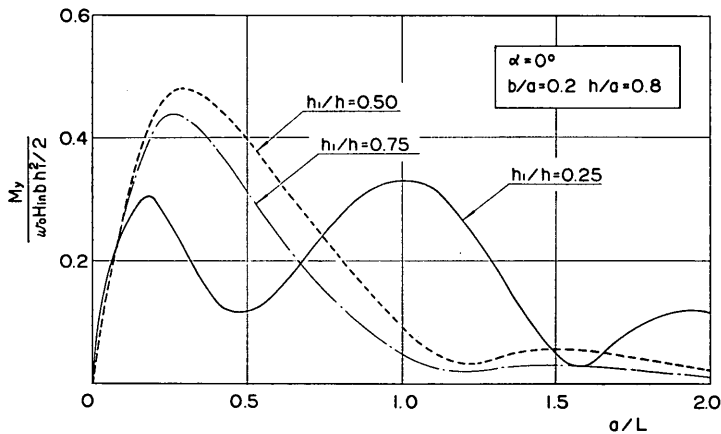


図-18 h_1/h による M_y の変化 ($\alpha=0^\circ$)

楕円柱体近似による固定船体に働く波力の理論および実験

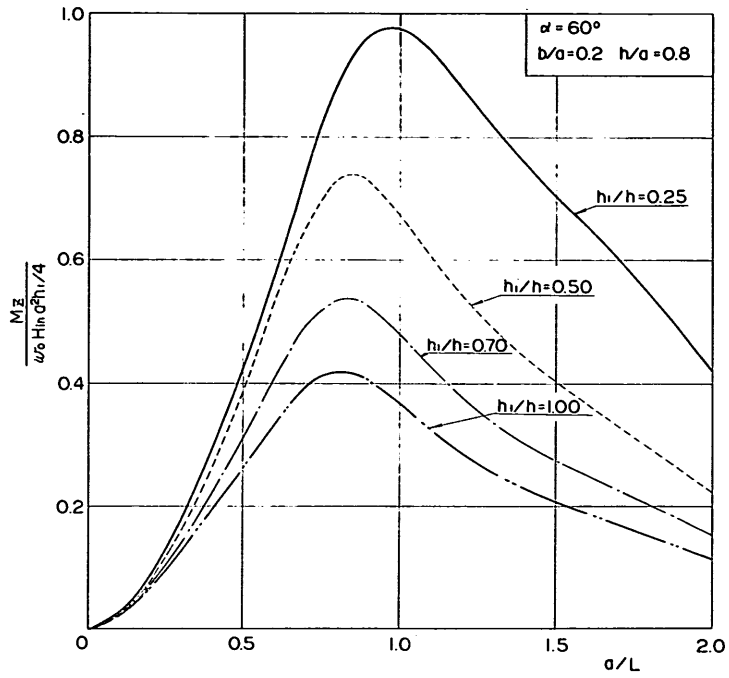


図-19 h_1/h による M_z の変化 ($\alpha=60^\circ$)

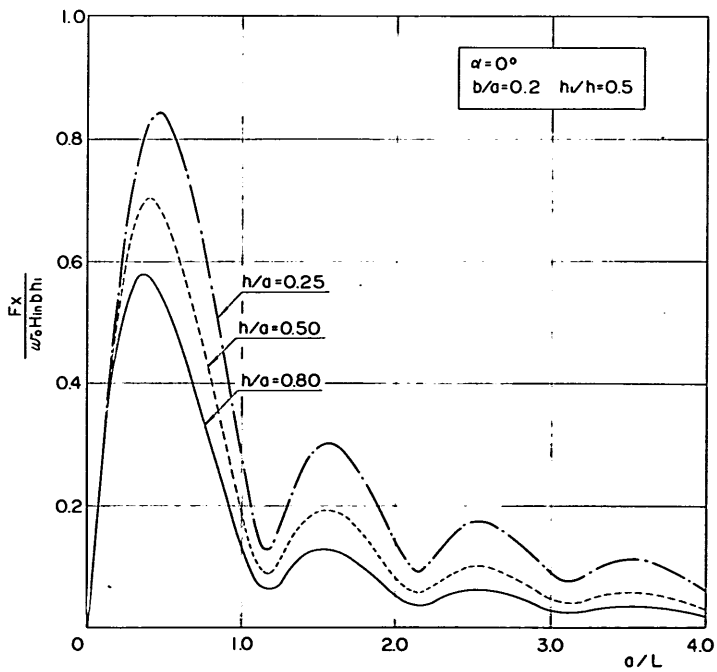


図-20 h/a による F_x の変化 ($\alpha=0^\circ$)

図-20~25には、 $b/a=0.2$, $h_1/h=0.5$ の状態では、 $h/a=0.25, 0.5, 0.8$ と変化した時の a/L に対する波力およびモーメントの変化曲線が示されている。これらの図で、 $h/a=0.8$ は実線、 $h/a=0.5$ は点線、 $h/a=0.25$ は一点鎖線である。

図-20は $\alpha=0^\circ$ の時の F_x の変化曲線を示している。この図からわかるように、 h/a が小さくなるに従って、

F_x は大きくなる。このような変化は、図-14の h_1/h を変化させた時の変化と同じような傾向を示している。最大値の現われる位置にしても、 $h/a=0.25$ で $a/L=0.45$, $h/a=0.5$ で $a/L=0.4$, $h/a=0.8$ で $a/L=0.35$ となつて、 h/a が大きくなるに従って、最大値は h/a が小さな所に現われ、図-14の h_1/h を変えた時の最大値の出現位置の変動と同様な傾向を示す。

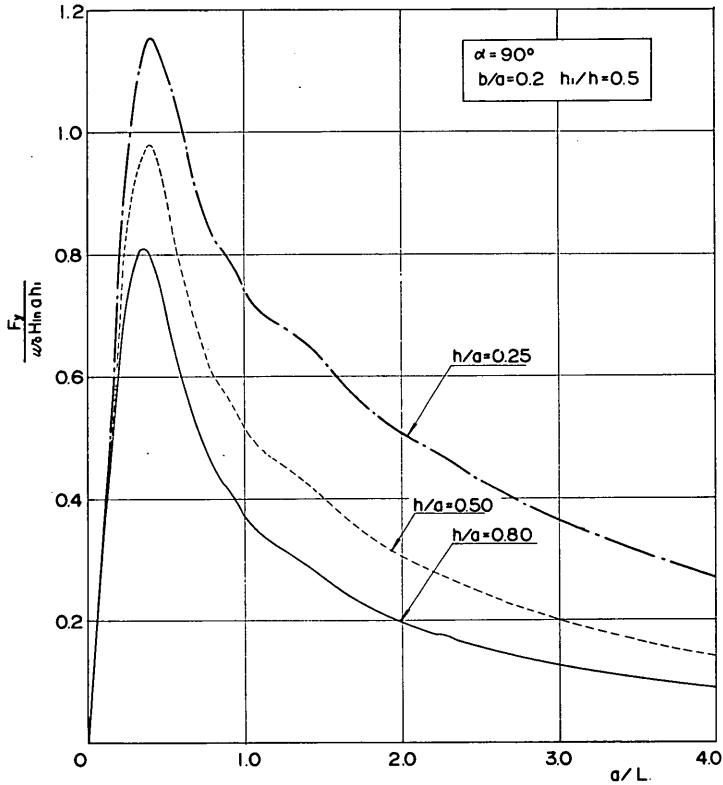


図-21 h/a による F_y の変化 ($\alpha=90^\circ$)

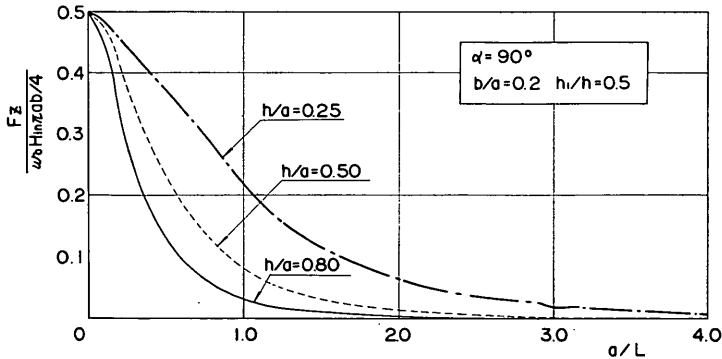


図-22 h/a による F_z の変化 ($\alpha=90^\circ$)

楕円柱体近似による固定船体に働く波力の理論および実験

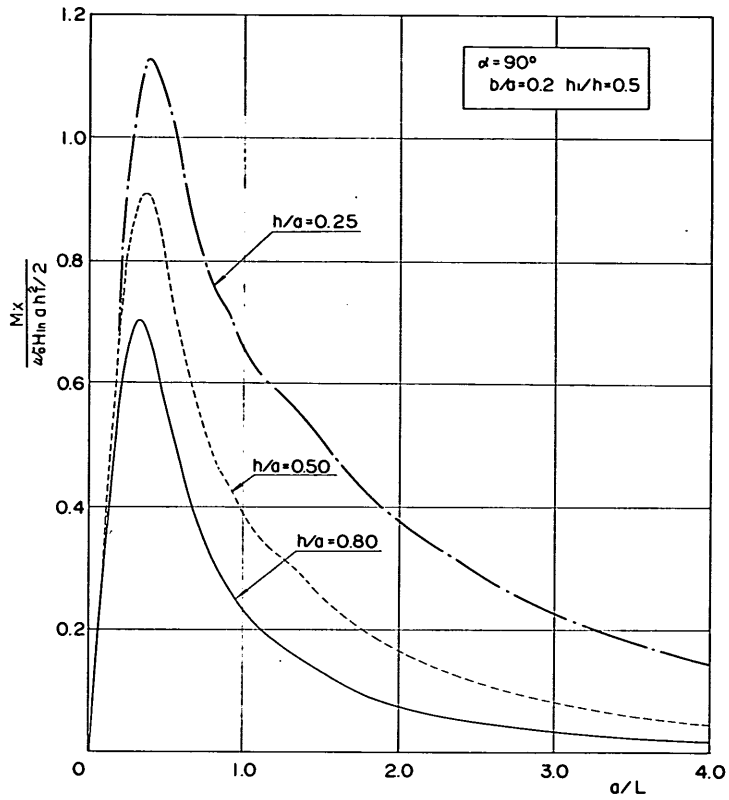


図-23 h/a による M_x の変化 ($\alpha = 90^\circ$)

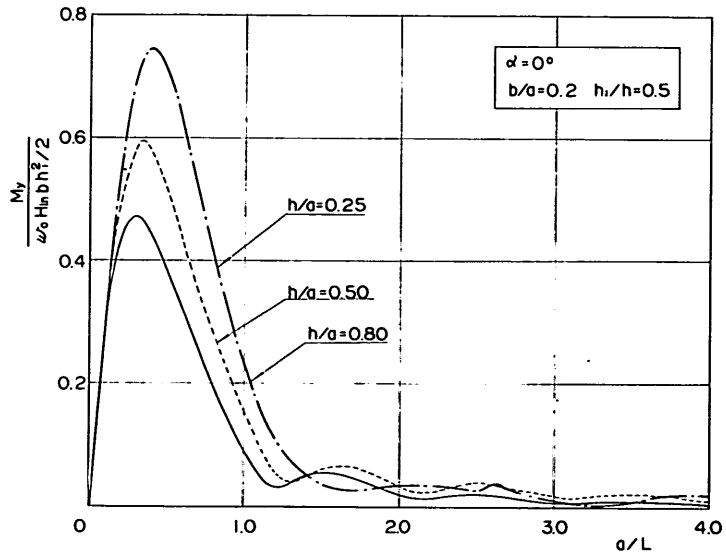


図-24 h/a による M_y の変化 ($\alpha = 0^\circ$)

図-21 は $\alpha=90^\circ$ の場合の F_y の変化曲線を示したものである。 F_x の場合と同様に、 h/a が小さくなるほど、 F_y は大きくなる。また、最大値は、 h/a が大きくなるほど、 a/L が小さい位置に現われる。 F_y についても、 h_1/h を変えた場合の 図-15 と似た傾向を示している。

図-22 は、 $\alpha=90^\circ$ における F_z の変化曲線を示したものである。 a/L が大きくなるに従って、 F_z は減少する。 $h/a=0.25$ の場合、この減少はほぼ直線的であるのに対し、 $h/a=0.5$ や 0.8 の場合の減少は急激である。特に h/a が大きくなるほど、この傾向は強い。

図-23 は、 $\alpha=90^\circ$ での M_x の変化曲線を示す。 M_x の最大値の現われる点は、 $h/a=0.25$ で $a/L=0.4$ 、 $h/a=0.5$ で $a/L=0.36$ 、 $h/a=0.8$ で $a/L=0.35$ となつて、 h/a が大きくなるほど、 a/L の小さな点に最大値が現われる。この図の分布形は 図-21 の F_y の分布形と

ほぼ類似した形を示している。これは、 $h_1/h=0.5$ と水深の半分まで構円柱が沈んでいるため、 M_x 中で F_y によるモーメントが卓越しているからである。

図-24 は、 $\alpha=0^\circ$ での M_y の変化曲線を示す。 M_x と同様に、 M_y の最大値は h/a が大きくなるほど a/L が小さい点に現われる。しかし、 M_x とは異なり、 M_y の変化曲線は 図-20 の F_x のような大きな波状形を示さず、その形状は大きく異なる。これは、 F_x によるモーメント以外に F_z によるモーメントも M_y 中で大きな部分を占めていることによる。

図-25 は $\alpha=60^\circ$ の時の M_z の変化曲線である。 F_x や F_y と同様に、 h/a が小さくなるほど、 M_z は大きな値を示す。最大値の位置は、図-19 の h_1/h を変化させた場合ほど、 h/a を変えることによって変動しない。

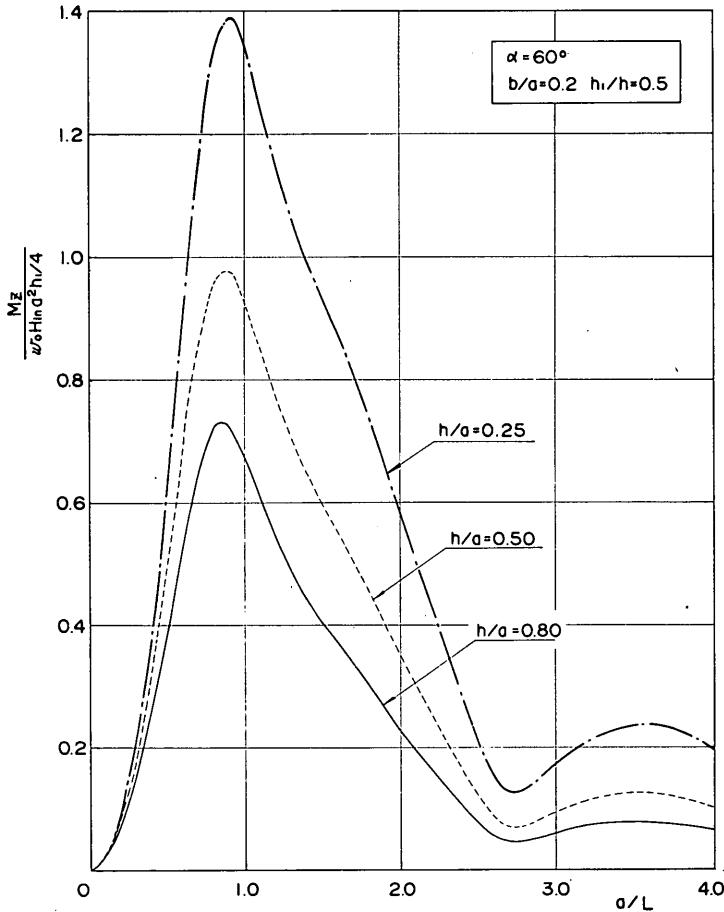


図-25 h/a による M_z の変化 ($\alpha=60^\circ$)

4. 実験による波力の測定とその考察

4.1 実験装置

(1) 実験水路および造波装置

実験水路は、運輸省港湾技術研究所大型水工実験場内に仮設したブロック積み水路で、図-26 に示すように内側幅 5.03m、長さ 30m、深さ 1.0m である。水路の片側から 60cm 離れた位置に、長さ 23m の仕切壁を設けて、水路を大水路と小水路の 2 つに分けた。大水路は模型楕円柱に働く波力を測定するのに用い、小水路は波高を測定するのに用いた。水路床は、造波板の運動中心から 5.1m の間を水平とし、これから岸側を勾配 1/50 の一様斜面にしてある。水路終端部には消波装置として、勾配 1/10 の碎石斜面が設けてある。

造波装置としては、大型水工実験場に付設する可搬式造波機を用いた。この造波機はピストン型造波機で、幅 5.0m、高さ 1.3m の造波板をミニャモータで駆動するようになっている。造波板の最大振幅は 300mm、最高速度 500mm/sec であり、入力信号の波形に追随して運動する。

実験は規則波について行なったので、造波機の入力信号として、超低周波発信器による正弦波形を用いた。

(2) 測定機器

波高測定には、ピックアップとして抵抗線式波高計、増幅器として 4 チャンネルの水位変動測定器を用いた。検定波および楕円柱体沿いの波高の記録には、直線書ペンオシロ、波力測定中の入射波の記録にはビジュアル

および 4 チャンネルのデータレコーダを用いた。

波力測定は、後述の波力測定アームを用いて行なった。この受感部は自己温度補償型半導体ゲージ、増幅器としては 6 チャンネルの動歪計を用いた。波力の記録には、ビジュアルおよび 4 チャンネルのデータレコーダを 2 台用いた。

(3) 模型楕円柱体

図-27 に示すように、模型楕円柱体は、平角材から削り出した短径 10cm、長径 50cm、高さ 10cm のもの 4 個と厚さ 11cm のものを 1 個、計 5 個の楕円柱体板を積み重ね、径 8mm の真鍮の丸棒 4 本用いて一体化するようにしたものである。半没水状態の実験の場合は、下から 2、3 番目の楕円柱体板 (厚さ 10cm) を 2 枚とり除くことによって、水底と楕円柱体底面との間に間隙を持たせた。

最上段の楕円柱体板 (厚さ 11cm) には、楕円中心から両側にそれぞれ 10cm 離れた位置に、2.5cm 間隔に真鍮の丸棒を取りつけ、楕円柱体を波力測定アームに完全固定連結できるようにした。写真-1 は楕円柱体を真上から見下したものであり、写真-2 は半没水状態の実験用の楕円柱体を波力測定アームに取り付けた状態を示している。

(4) 波力測定装置

2 本の波力測定アームは、図-28 に示すように、22mm × 22mm の角棒で、水平方向の長さが 25cm、鉛直方向の長さが 60cm のものを L 型に連結させたものである。水平方向の角棒には、楕円柱体を連結させるために、

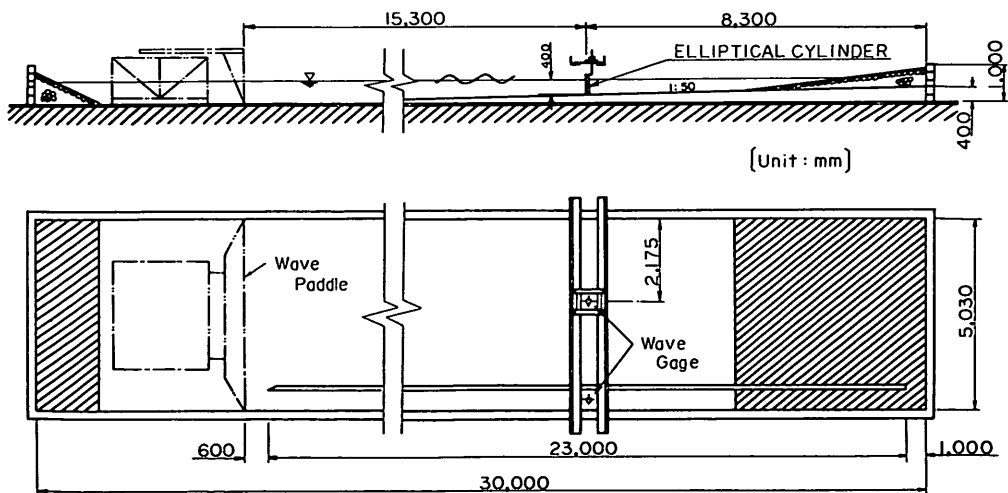


図-26 実験水路の概要

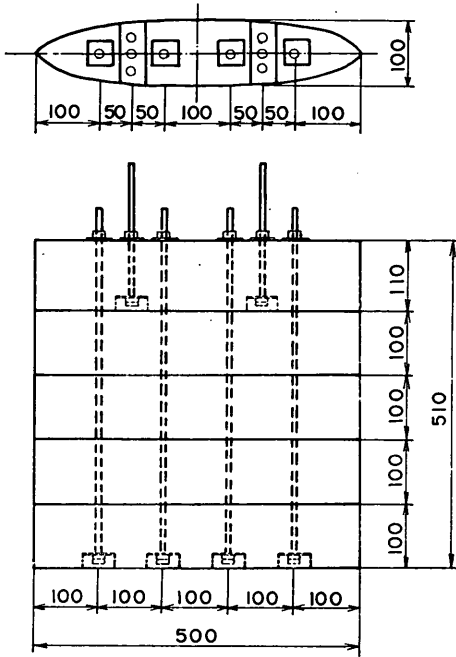


図-27 模型楕円柱体

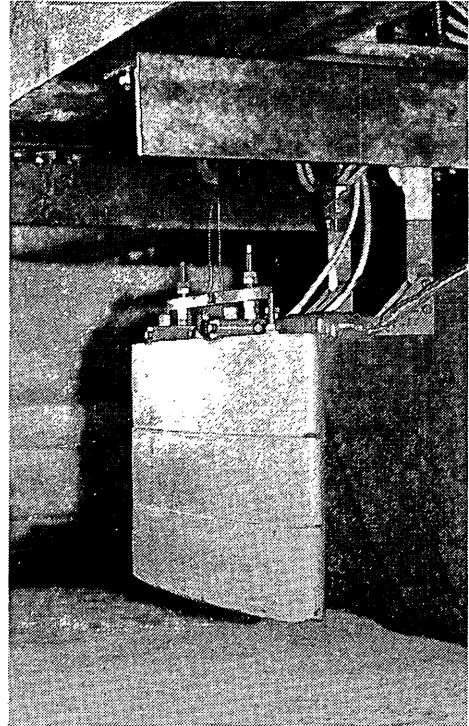


写真-2 模型楕円柱体の取付状況

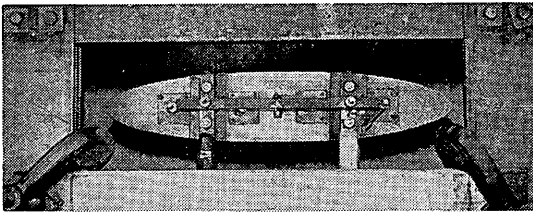


写真-1 模型楕円柱体

25 mm 間隔に $\phi 9$ mm の穴が 3 箇所設けてあり、鉛直方向の角棒にはこのアームを固定台に連結するために、25 mm 間隔に $\phi 5$ mm の穴が 3 箇所設けてある。

波によって楕円柱体連結部では図-29 に示すような力とモーメントが作用する。A, B 点における x 軸方向のモーメントをそれぞれ M_{Ax} , M_{Bx} とすると

$$\left. \begin{aligned} M_{Ax} &= M_x + F_z y_0 + F_y Z_A \\ M_{Bx} &= M_x + F_z y_0 + F_y Z_B \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

与えられるから、両式の差を取ると

$$F_y = (M_{Ax} - M_{Bx}) / (Z_A - Z_B) \quad (102)$$

となる。ここで、式(101)中の記号は図-29 に示してある。

式(102)からわかるように、 $(Z_A - Z_B)$ が常に一定なら、 F_y は A 点、B 点におけるモーメントの差で表わすこと

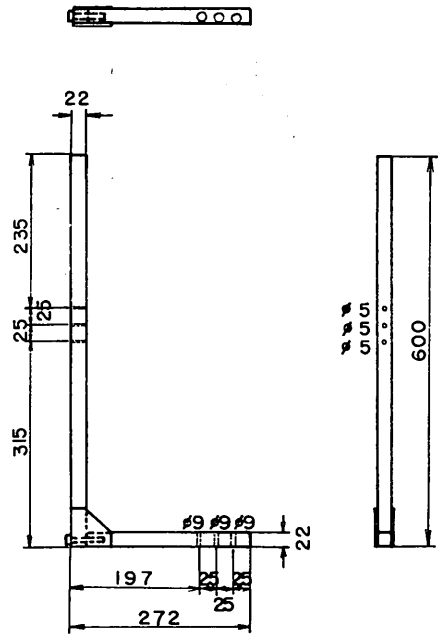


図-28 波力測定アーム

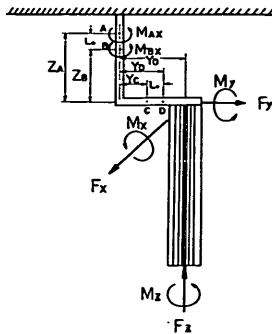


図-29 波力測定の実験原理

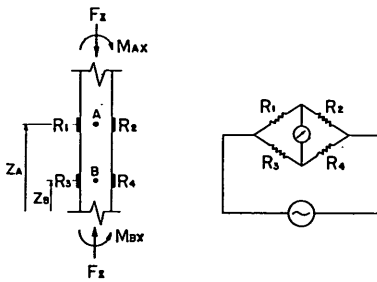


図-30 ブリッジ回路図

ができる。そこで、図-30 のようにゲージをはって、4ゲージ法でブリッジを組み、各ゲージの抵抗変化は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta R_1}{R_1} &= \frac{\lambda_0}{E} \left(-\frac{F_z}{A} + \frac{M_{Ax}}{W} \right) \\ \frac{\Delta R_2}{R_2} &= \frac{\lambda_0}{E} \left(-\frac{F_z}{A} - \frac{M_{Ax}}{W} \right) \\ \frac{\Delta R_3}{R_3} &= \frac{\lambda_0}{E} \left(-\frac{F_z}{A} + \frac{M_{Bz}}{W} \right) \\ \frac{\Delta R_4}{R_4} &= \frac{\lambda_0}{E} \left(-\frac{F_z}{A} - \frac{M_{Bz}}{W} \right) \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

で与えられる。ここで、 λ_0 はゲージ率、 E はヤング率、 A は角棒の断面積、 W は角棒の断面係数、 R_1, R_2, R_3, R_4 はゲージ抵抗、 Δ は微小抵抗変化を示す記号である。

ゲージ電圧を E_0 とすると、不平衡電流 I は

$$I \propto E_0 \frac{(R_1 + \Delta R_1)(R_4 + \Delta R_4) - (R_2 + \Delta R_2)(R_3 + \Delta R_3)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (104)$$

となる。ここで、 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ とおくと

$$I \propto E_0 \frac{(\Delta R_1 - \Delta R_2) - (\Delta R_3 - \Delta R_4)}{4R} \quad (105)$$

となって、式(103)を式(105)に代入すると

$$I \propto E_0 \frac{\lambda}{2EW} (M_{Ax} - M_{Bz})$$

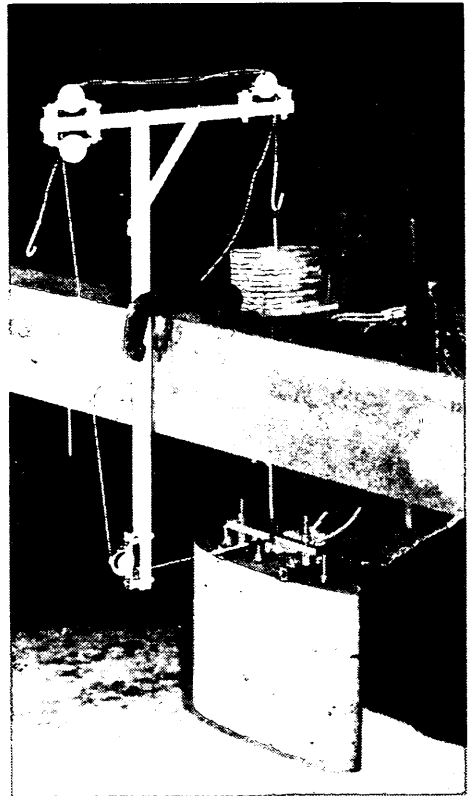


写真-3 y 方向の力の検定状況

$$= E_0 \frac{\lambda}{2EW} F_y (Z_A - Z_B) \quad (106)$$

となる。そこで、予め検定荷重をかけて、 I と F_y の検定曲線を作製しておき、波力が作用した時の不平衡電流を力に換算して波力を求める。他の波力についても、同様にブリッジを組み、個々に力を取り出すことができる。写真-3はこの検定を行なっている時のもので、重錘の重さを滑車を介して y 方向の力として作用させている。

楕円柱体は2本のアームによって固定されているため、各方向の力は各アームに作用する力の合力となる。なお、測定波力の大きさは、2本のアームの合力として $F_y = 0.05 \sim 9.3 \text{ kg}$, $F_x = 0.1 \sim 1.5 \text{ kg}$, $F_z = 0.06 \sim 1.1 \text{ kg}$ 程度であった。

4.2 実験方法

(1) 検定波

水深は実験施設の条件などを考慮して $h = 40 \text{ cm}$ とし、波高は線型理論による波力計算の妥当性を十分検討できるように考えて、なるべく小さく取るようにした。周波数は理論値の広い範囲をカバーするように $f = 0.4$

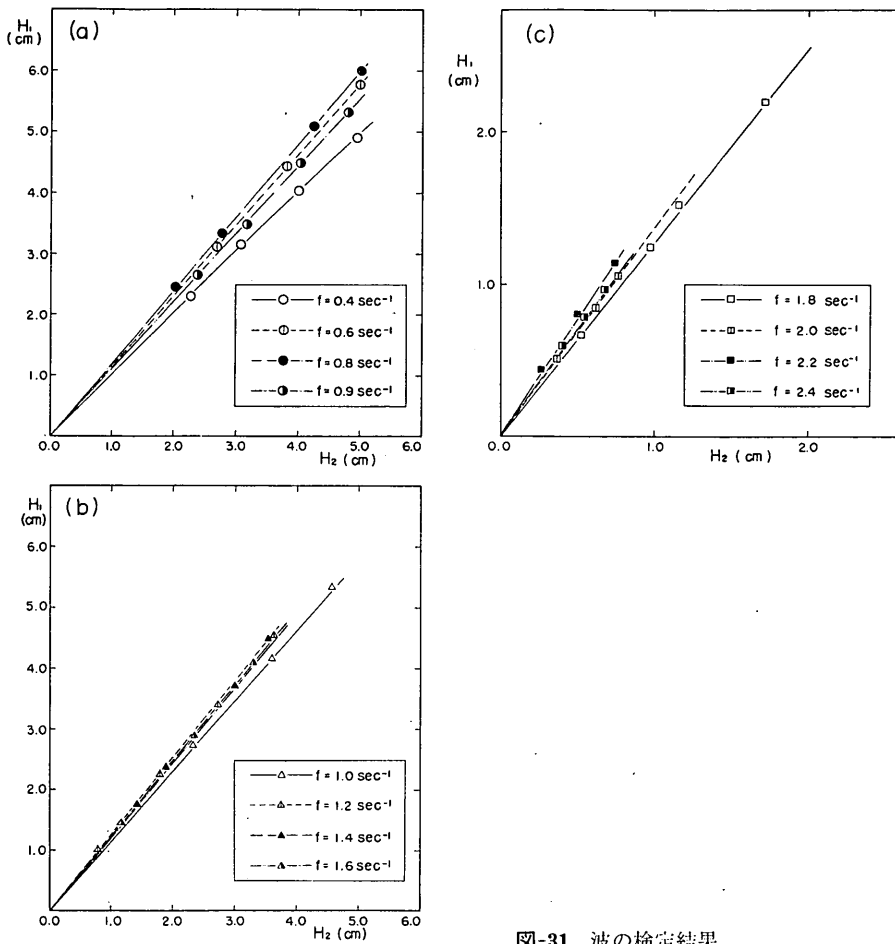


図-31 波の検定結果

~2.4 Hz とした。

波力測定の際は、模型楕円柱体による散乱波のため入射波を直接測定することができない。そこで、大水路内の模型設置位置と小水路内のこれに対応する位置に波高計を設置して両方の波高を記録し、両者の波高の比較を行なった。正確な比較図を作成するため、同一周波数について、4~5種類の波高を用い、各波高については2回繰り返した。この場合、波高はほぼ一定になり始めた時を記録開始時間として、それ以後の8波の波高の平均値を用いた。

図-31 にこの比較図が示してある。この図において H_1 は大水路内の波高、 H_2 は小水路内の波高を示している。同一の周波数については、 H_1 と H_2 は比例している。しかし、 $H_1/H_2 > 1$ であって、小水路における波高減衰は大水路より大きく、特に周波数が高い程大きい。これ

は小水路の幅が狭く、側壁摩擦によってエネルギーが損失されるためである。そこで、層流境界層内のエネルギー損失に伴う波高減衰の式¹⁰⁾を用いて、この場合の波高減衰を計算した結果、周波数が高い程波高減衰は大きいという傾向は一致するけれども、数値的には大きな差があったので、入射波の推定にはこの値は用いず、図-31 (a), (b), (c) を利用した。

(2) 楕円柱体沿いの波高

楕円柱体沿いの反射、回折波の波高について、理論値と実験値を比較するために、以下に示すような方法で実験を行なった。

図-32 (a), (b) に示すような楕円柱体の前面と背後の測定点に抵抗線式波高計を楕円柱体から約 2 cm 離して据え付け、波高を測定した。この時の波高は、検定波の場合と同じく、記録開始時間後の8波の平均値を用いた。

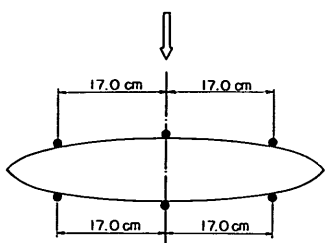


図-32 (a) 楕円柱体沿いの波高の測定点 ($\alpha=90^\circ$)

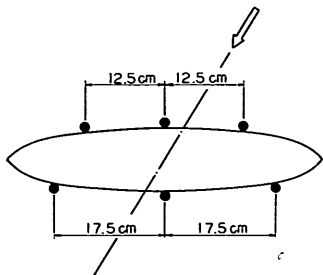


図-32 (b) 楕円柱体沿いの波高の測定点 ($\alpha=60^\circ$)

測定は2回ずつ繰り返して行なった。 α は 90° と 60° とした。 $\alpha=60^\circ$ の場合の波高は、 $\alpha=+60^\circ$ と波の進行方向に対して対象になる $\alpha=-60^\circ$ の場合のお互いに対応する点での波高の平均値を用いた。波高分布の測定を行なったケースの波の周波数 f および入射波高は表-1のとおりである。

(3) 波力の測定の解析方法

全没水時の波力の実験では、図-26で示したように造波板から15.3mの大水路中央部に模型楕円柱体を水路床に接するように設置した。しかし、図-33に示すように模型底面と水路床との間には約8mm程度の間隙が残った。半没水時の波力の実験では、理論値との比較を目的として吃水が $h_1=20$ cmの場合のみについて測定し

表-1 波高分布測定時の入射波高

f (Hz)	H_{in} (cm)	
	$\alpha=90^\circ$	$\alpha=60^\circ$
1.0	5.23	5.23
1.4	4.10	4.10
1.6	—	3.08
1.8	2.51	2.51
2.0	1.23	—
2.4	0.60	—

た。また、入射波の進行角 α は全没水時および半没水時とも 90° 、 $\pm 60^\circ$ 、 $\pm 30^\circ$ 、 0° について実験した。写真-4~7は各波向における波の作用状況を示す。

波力の測定時にも、模型楕円柱体への入射波の波高を推定するために、入射波を検定した時と同じ小水路内の位置に抵抗線式波高計を設置した。波力および波高の測定は、入射波の検定と同じく記録開始時間後の8波をデータ解析に用いた。実験は同一条件のものを2回繰り返した。周波数が0.4~1.4Hzの範囲のものについては、目標入射波高を2.5cmと5cmの2種類とした。周波数が高い短周期波の場合には波高が乱れやすくなるので、安定な波高を得るように波高を小さくした。このため、周波数が1.6~2.4Hzの範囲のものについては、波高を1種類(1~3cm程度)とした。

波力の検定には1kgと2kgの重錘各数個を用い、この重錘を所定の重さまで重ねてゆくことによって検定曲線を求めた。検定は実験の前と後に必ず行ない、前後の検定曲線が異なる場合には経過時間を考えて検定曲線を案分した。

波力の解析は次のようにして行なった。楕円柱体に働く波力は2本のアームによって測定されているため、

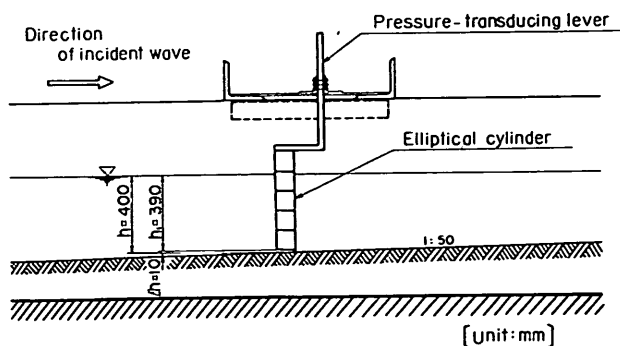


図-33 楕円柱体の取付状況

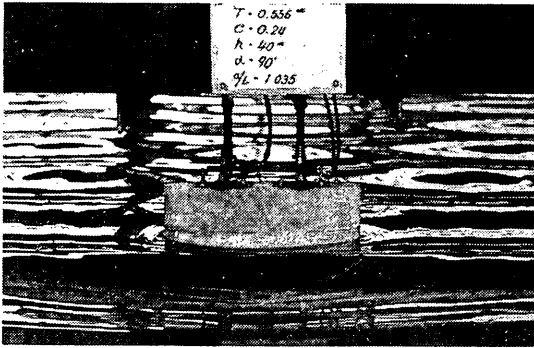


写真-4 $\alpha=90^\circ$ の実験状況

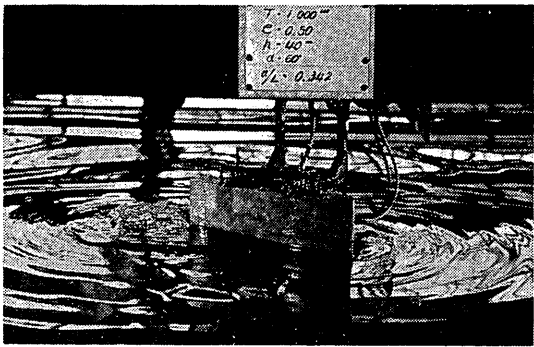


写真-5 $\alpha=60^\circ$ の実験状況

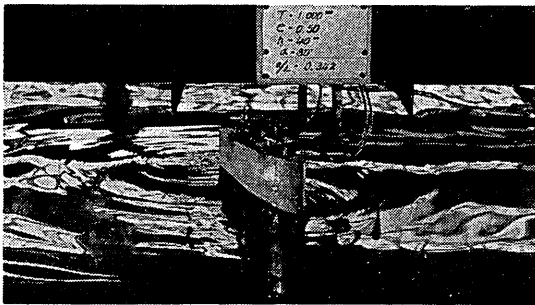


写真-6 $\alpha=30^\circ$ の実験状況

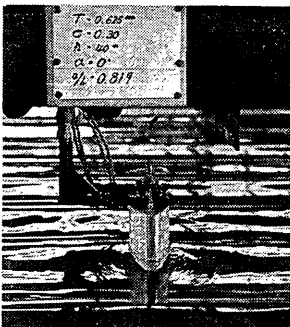


写真-7 $\alpha=0^\circ$ の実験状況

波力としては各アームにかかる力の合力になる。2本のアームにかかる力は、位相のずれを起し、各アームの波力記録の山の値または谷の値を単純に加え合わせることはできない。そこで、合力の山の値と谷の値を見出すために、一方のアームの波力の山の値、谷の値を8波程度読みとり、その時刻における他方のアームの波力を読み取って加え合わせる。次に逆の操作を行なって合力を出す。そして、両者の大きい方を取って、8波の平均値を出した。この場合、山の部分と谷の部分の2つの値が出るが、実験値としては両者の平均値を取った。しかし、この方法では実際の合力の最大値を求めていることにはならないため、この方法と実際の合力の最大値との差を検討した結果、両者の間に大きな差はなく、また他の誤差の諸要素を考えると、このような方法でもデータ整理としては十分であることが確認された。楕円柱体底面が水底まで達しているケースについては、以上述べた方法をオシログラフ上に記録された波力を目で読み取ることによって行なったが、時間があまりにもかかる上に、読み取り誤差が生じるため、半没水時の波力の実験においては波力をデータレコーダに記録し、このアナログ記録をA/D変換して、電子計算機にかけ、上述の方法を計算機内で実行した。 $f=0.4\sim 0.9\text{ Hz}$ の範囲のものについては $1/60\text{ sec}$ 、 $f=1.0\sim 2.4\text{ Hz}$ のものについては $1/120\text{ sec}$ 毎のサンプリングでA/D変換した。

(4) 測定系の固有振動と増幅率

実験状態にある模型楕円柱体に周期的な外力 $F_0 \sin(2\pi ft - \omega)$ が作用した場合、その運動方程式は

$$m_0 \ddot{y} + c \dot{y} + k_0 y = F_0 \sin(2\pi ft - \omega) \quad (106)$$

で与えられ、この式(106)の一般解は次のように求まる。

$$y = A_0 e^{-(c/2m_0)t} \cos\left(\sqrt{\frac{k_0}{m_0} - \frac{c^2}{4m_0^2}} t + \varepsilon\right) - A_f \sin(2\pi ft - \omega - \varphi) \quad (107)$$

式(107)の A_f および φ は

$$A_f = \frac{F_0}{\sqrt{(k_0 - 4\pi^2 f^2 m_0)^2 + 4\pi^2 f^2 c^2}} \quad (108)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\pi f c}{k_0 - 4\pi^2 f^2 m_0} \quad (109)$$

である。ここで、 c は抵抗係数、 m_0 は楕円柱体の質量、 k_0 はバネ定数、 ω 、 ε 、 φ は位相、 A_0 は減衰自由振動の振幅、 A_f は強制振動による振幅、 f は外力の振動数、 y は外力による変位である。

式(107)の右辺第1項は楕円柱体の自由振動に伴う項で、この項は時間の経過とともに急速に0に収束する。このため、楕円柱体の運動はほとんど第2項で支配され

る。この第2項は外力による強制振動の項である。ここで、非減衰自由振動数すなわち楕円柱体の固有振動数を f_0 とすると、固有振動数 f_0 は

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m_0} \quad (110)$$

で与えられ、 f_0 を用いて、式(108)を書き直すと

$$\frac{A_f}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right)^2 + \left(\frac{f \cdot c}{m_0} / 2\pi f_0^2\right)^2}} \quad (111)$$

となる。式(111)の左辺分母 (F_0/k) は静的な力 F_0 が楕円柱体に作用したときに生ずべき変位量を表わす。式(111)からわかるように、動的な力が作用した場合 $A_f/(F_0/k_0) > 1$ となって、記録にはみかけ上 $A_f/(F_0/k_0)$ 倍の力が作用したことになる。ここで、 $A_f/(F_0/k_0)$ を増幅率と呼ぶことにする。この増幅率を計算するために、まず実験状態において楕円柱体を自由振動させ、図-34の

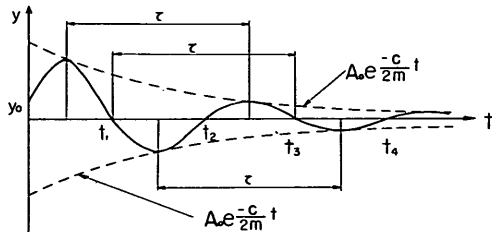


図-34 減衰自由振動

表-2 測定系の固有振動数と減衰定数

h_1/h	f_0 (Hz)	β
1.0	4.83	0.0090
0.5	11.09	0.0055

ような減衰振動を行なう。この時振幅は $A_0 e^{-(c/m_0)t}$ の曲線に沿って減衰し、この減衰振動の周期 τ は式(107)の第1項から

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_0}{m_0} - \frac{c^2}{4m_0^2}}} \quad (112)$$

で与えられる。これによって c/m_0 , k_0/m_0 が求まり、式(111)で与えられる増幅率が計算できる。この計算結果は図-35のようになる。なお、固有振動数 f_0 および減衰定数 $\beta = c/(2\sqrt{k_0 m_0})$ の計算結果は表-2のとおりである。

図-35には楕円柱体底面が水底まで達している場合、つまり $h_1/h=1.0$ の場合と、間隙がある場合、つまり $h_1/h=0.5$ の場合の増幅率が外力の周波数に対して示されている。 $h_1/h=0.5$ の場合の増幅率は、 $h_1/h=1.0$ の場合よりかなり小さくなっている。これは $h_1/h=0.5$ の場合、 $h_1/h=1.0$ の場合に比して、楕円柱板を2枚取っているため楕円柱体の質量が小さくなって、固有振動数が $h_1/h=1.0$ の時の $f_0=4.8\text{Hz}$ から $f_0=11.1\text{Hz}$ と

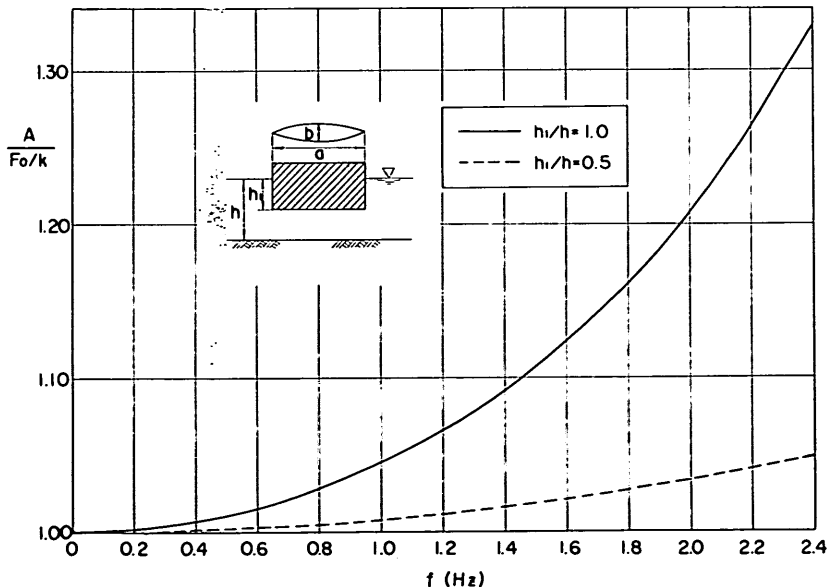


図-35 測定系の増幅率

増大したことが大きな原因になっている。波力の整理にあたっては以上の測定系の振動特性を考慮し、前項の方法で解析した波力の平均値を各周波数に対する増幅率で割って波力の実験値とした。

4.3 全没水状態の楕円柱体に働く波力

(1) 楕円長軸方向の力 F_x

2つの波力測定アームに働く波力の合力は、解析を簡単にするため、山と谷の部分の平均値をとった。

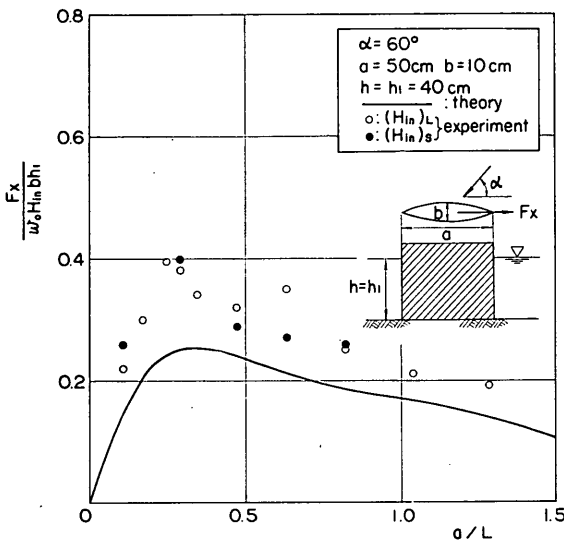


図-36 F_x に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=60^\circ$)

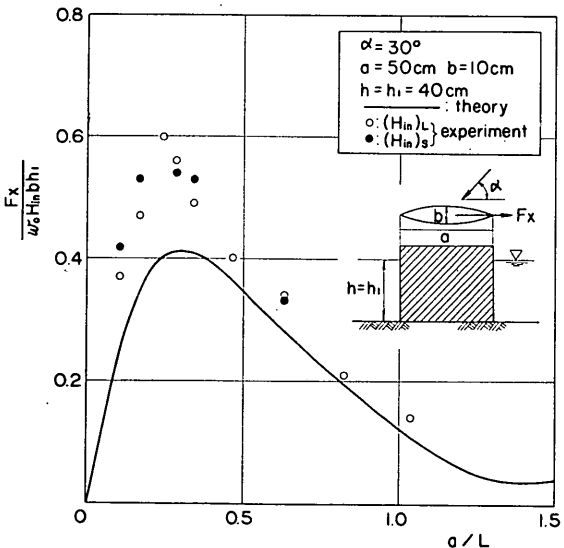


図-37 F_x に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=30^\circ$)

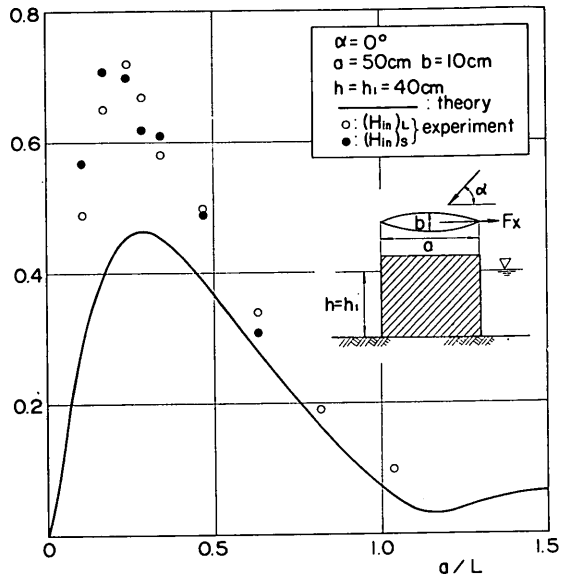


図-38 F_x に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=0^\circ$)

図-36~38には、波力 F_x を $w_0 H_{in} b h_1$ で割って無次元化した値と理論値とが比較してある。図-36は $\alpha=60^\circ$ 、図-37は $\alpha=30^\circ$ 、図-38は $\alpha=0^\circ$ の場合である。これらの図からわかるように、理論値と実験値とは分布形状は良く一致しているけれども、数値的には実験値が理論値より大きく、特に、理論曲線が最大値を示す点で両者の差が大きい。例えば、 $\alpha=0^\circ$ では $a/L=0.25$ 付近で、実験値が理論値の1.5倍程度も大きくなっているのに対して、 $a/L=0.6$ 付近では1.1倍程度である。また、 $\alpha=60^\circ$ では $a/L=0.3$ 付近で約1.6倍、 $a/L=0.8$ 付近で1.2倍になっている。周波数が0.4~1.4 Hzの間、つまり $a/L \leq 0.63$ では波高がほぼ5cmと2.5cmの2種類について実験を行なっている。5cmのものが白丸で、2.5cmのものが黒丸で示されている。実験値によっては白丸と黒丸の差が0.05を超えるものも見られるが、大小関係はばらばらであり、特定の関係は認められない。すなわち、この実験の範囲では波高の絶対値の影響は認められない。

(2) 短軸方向の力 F_y

F_x と同様に F_y も、山と谷の平均値を用いた。 F_y は $w_0 H_{in} a h_1$ の力で割って無次元化している。

図-39~41に F_y の理論値と実験値が比較してある。図-39は $\alpha=90^\circ$ 、図-40は $\alpha=60^\circ$ 、図-41は $\alpha=30^\circ$ の場合の図である。 F_y も F_x と同様に $a/L=0.3$ 付近で理論値と実験値は大きな差を示し、 a/L が大きくなる

楕円柱体近似による固定船体に働く波力の理論および実験

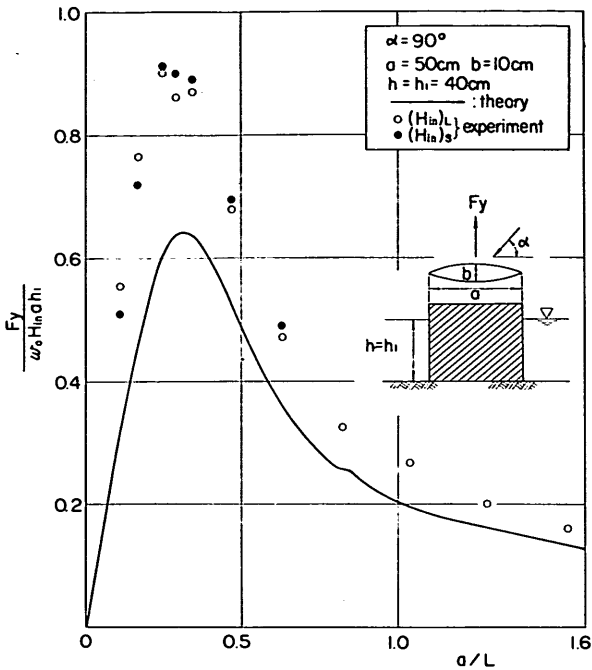


図-39 F_y に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=90^\circ$)

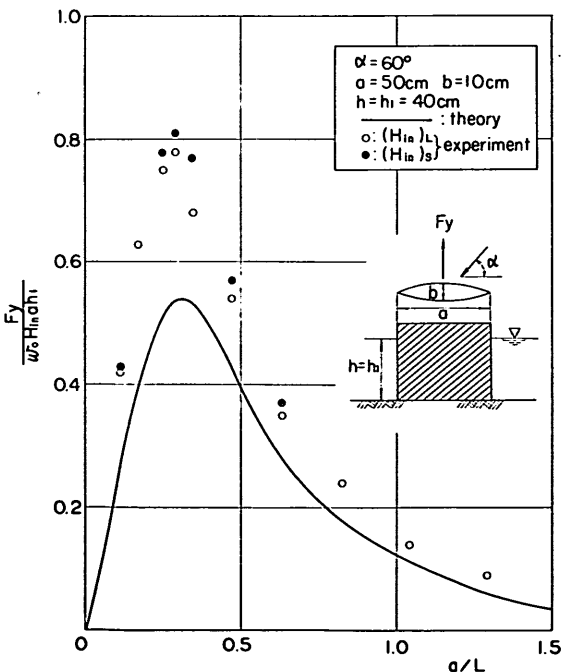


図-40 F_y に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=60^\circ$)

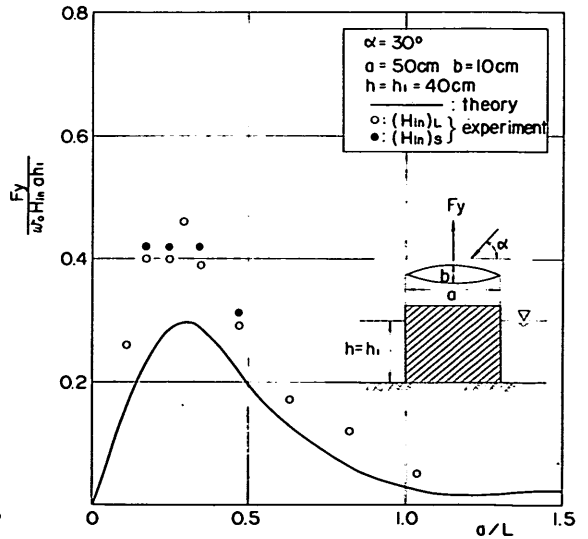


図-41 F_y に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=30^\circ$)

に従ってその差は小さくなる。例えば、 $\alpha=90^\circ$ では $a/L=0.3$ 付近で実験値が理論値の 1.4 倍、差にすると 0.2 程度であるが、 $a/L=1.3$ では理論値の 1.2 倍、差で 0.03 程度である。

F_x の場合も含めて、このような理論値と実験値の差の生じる理由として次のようなことが考えられる。

- i) 微小振幅波理論で波力を求めているのに対し、ある有限な波高で実験を行なっているため。
- ii) 楕円柱体の長径端に発生する二次じょう乱波の影響。
- iii) 理論は一様水深と仮定して展開しているのに対し、実験は 1/50 の一様斜面で行なっているため。

その他にも、いろいろな理由があろうけれども、この 3 点の影響が大きいのではないと思われる。i) の理由については次項で論述することにして、ii)、iii) の理由について、ここで調べてみる。

実験を観察していると、写真-5, 6 でも認められるように楕円柱体の長径端を中心として、同心円状に二次じょう乱波が発生している。この二次じょう乱波は、波形勾配としては大きいけれども波高自体は小さいため、波高計で記録しようとしても入射波と散乱波に重なってしまい、水位曲線上では波としてほとんど認められない。このため、この二次じょう乱波の波高や周期を決めることはできなかった。

ただ、入射波の周期よりも短い周期の波であることは観察でも明らかであった。このように二次じょう乱波の諸元が良くわからないため、この影響を調べることができなかったが、 F_x はもともと波力が小さいためこの二次じょう乱波がかなり影響しているのではないと思われる。

次に iii) については、 $h_1/h=1.0$ の場合でも楕円柱体底面は完全に水路床に接しているわけではなく、平均して 8mm 程度の間隙がある。水路床が 1/50 勾配を持っているため、楕円柱体の前後で間隙に差が生じる。特に $\alpha=0^\circ$ の場合、前後の長さが楕円柱長軸の長さと同じになって、前後の間隙の差は 1cm にもなる。また、図-7 の

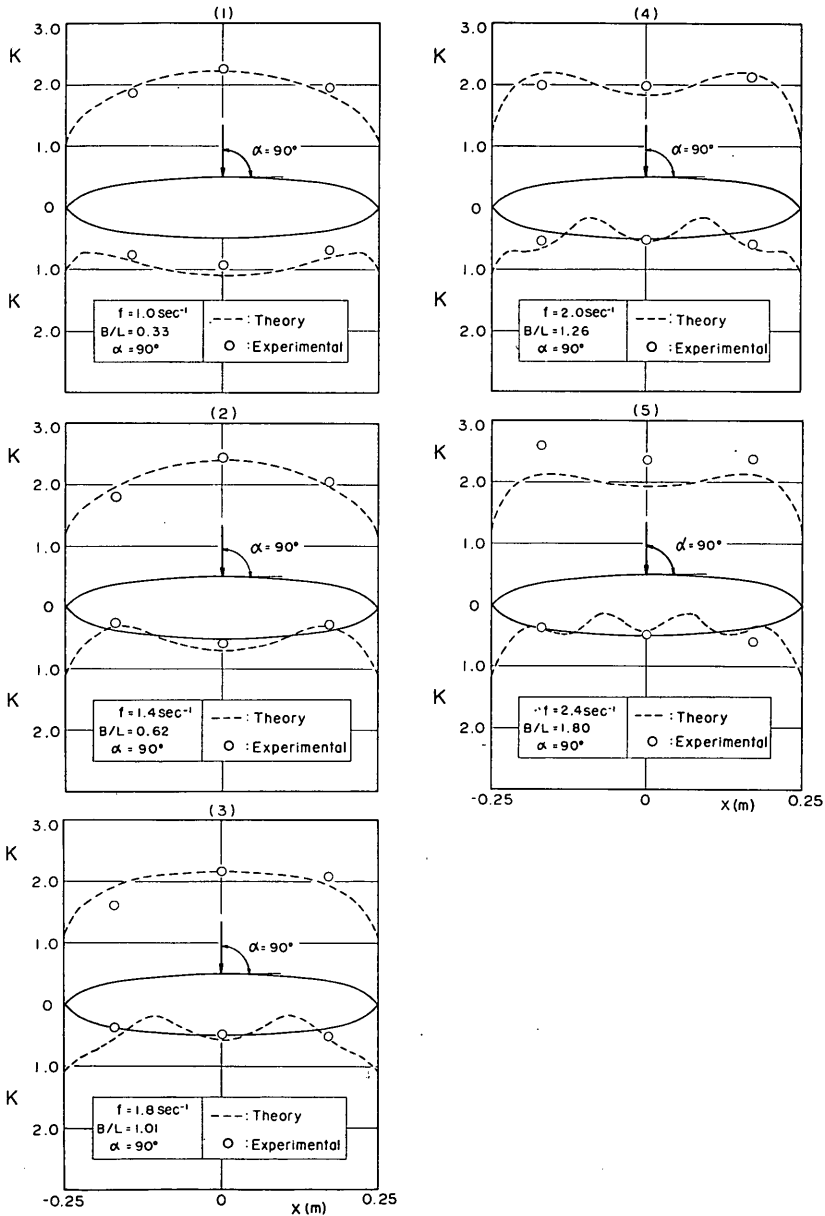


図-42 楕円柱体沿いの波高分布に関する理論値と実験値の比較 ($\alpha=90^\circ$)

入射波の粒子速度分布からわかるように、 a/L が小さいほど底面付近の流速は大きくなる。このため、この前後に差のある間隙は、間隙のない場合に比して流速を大きく変化させると考えられ、これによって波力の計算値と実験値との間で大きな差が生じたのではないかと考えられる。このことは、後述の $h_1/h=0.5$ の場合、このように大きな差が生じないことから判断される。

(3) 楕円柱体沿いの波高分布

F_x, F_y の実験値と理論値の比較では、両者の間には最大 50% 程度、最小でも 10% 程度の差が生じている。この原因の一つに有限振幅の影響があるのではないかと考えられるので、まず楕円柱体のまわりの波高を測定して、理論値と比較してみた。波高 H を入射波高と比較すると、その比は

$$K = \frac{H}{H_{in}} = |\phi_0| \quad (113)$$

となる。この場合、 $h_1/h=1.0$ であるから、式(48)で表わされる ϕ_0 の中の λ の項は消える。

図-42 は $\alpha=90^\circ$ 、図-43 は $\alpha=60^\circ$ の場合の比較図である。 $\alpha=90^\circ$ の場合、 $f=2.4\text{ Hz}$ の前面波高で 15~20% 程度大きくなっていることを除けば、実験値は理論値に良く一致している。 $\alpha=60^\circ$ の場合、実験値は周波数が $f=1.0, 1.4, 1.6\text{ Hz}$ では楕円柱体の前面背後とも良く一致している。しかし、 $f=1.8\text{ Hz}$ になると前面において理論値よりも 10~20% 小さくなっている。背後では良く一致している。

以上の結果から、楕円柱体沿いの波高はほぼ理論値どおりであり、有限振幅の影響は特に認められない。また、直立壁に働く重複波圧の現象では、波圧の 2 倍周波数成分の影響によって、波の山あるいは谷の波圧が微小振幅波理論による値とずれることが多い。しかし、今回の実験では山と谷の平均値を用いているので、2 倍周波数成分の影響はあったとしても打ち消されている筈である。結局、有限振幅の影響による波力の変化は大きくとも数% 程度であり、数十% もずれることはないと考えられる。

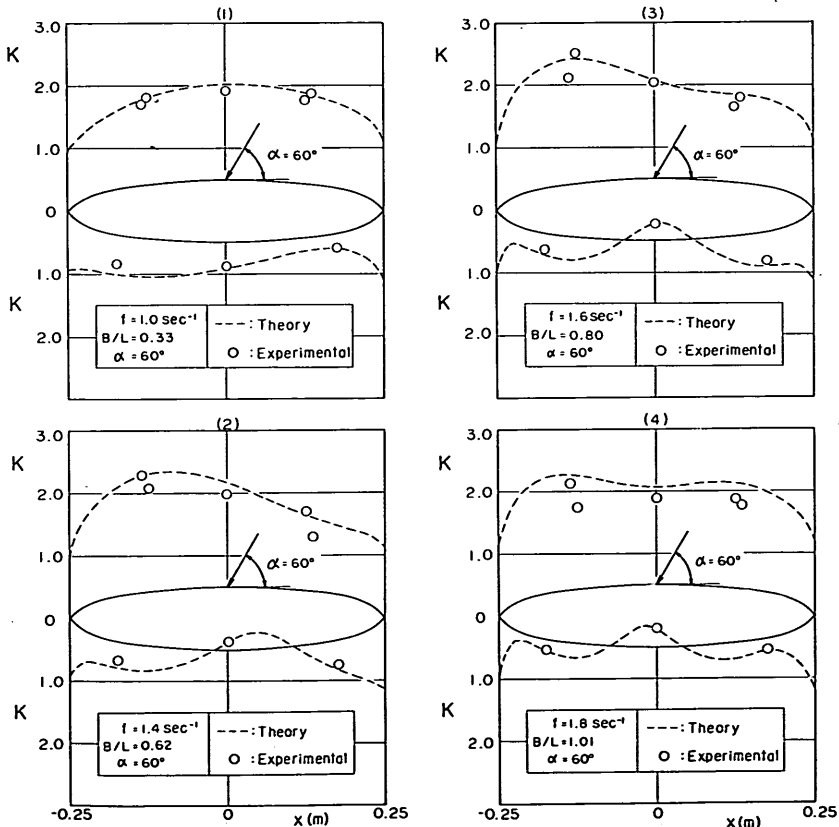


図-43 楕円柱体沿いの波高分布に関する理論値と実験値の比較 ($\alpha=60^\circ$)

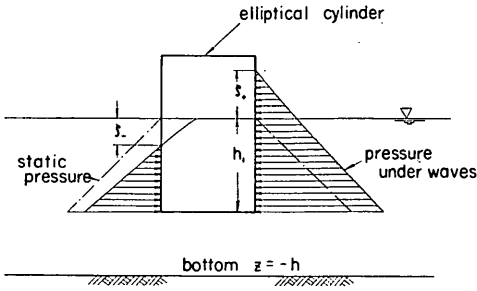


図-44 水面上昇および降下を考慮した場合の波圧の作用範囲

$$\begin{aligned}
 F_x = & -\frac{B \sinh \xi_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-h_1}^{\zeta} \left(i \frac{w_0 H_{1m}}{2} (\phi_0)_{\xi=\xi_0} e^{-i\omega t} - w_0 z \right) \cos \eta dz d\eta \\
 = & -i \frac{w_0 H_{1m} B \sinh \xi_0}{4} e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} \int_{-h_1}^0 (\phi_0)_{\xi=\xi_0} \cos \eta dz d\eta \\
 & + \frac{B \sinh \xi_0}{2} \sum_t \int_{\eta_t}^{\eta_{t+1}} \int_0^{\zeta} w_0 z \cos \eta dz d\eta \\
 & - \frac{B \sinh \xi_0}{2} \sum_t \int_{\eta_{-t}}^{\eta_{-(t+1)}} \int_0^{\zeta} w_0 z \cos \eta dz d\eta
 \end{aligned} \tag{114}$$

上式の右辺第1項は2.4で求めた F_x の波力と一致し、第2項は水面が静水面下にあるために生じる波力の減少分である。ここで、 η_t と η_{t+1} の間は水位が静水面以上にあるときの区間で、 η_{-t} と $\eta_{-(t+1)}$ の間は水位が静

(4) 水面変動を考慮した場合の波力

2.4では、圧力を $-h_1$ から静水面まで積分することによって波力を計算している。しかし、図-44に示されているように、実験に働く波力は $-h_1$ から各時刻の水面までであり、水位の上昇または下降を考慮しなければならない。水面変動を考慮した波力、例えば F_x について書き表わすと次のようになる。

水面以下にあるときの区間である。この式の第2項、第3項は、 ζ が η の関数となるため容易に積分できない。それ故に、 η の区間0から 2π を360個に分割して、差分積分を用いて計算した。この計算は1周期の各時刻に

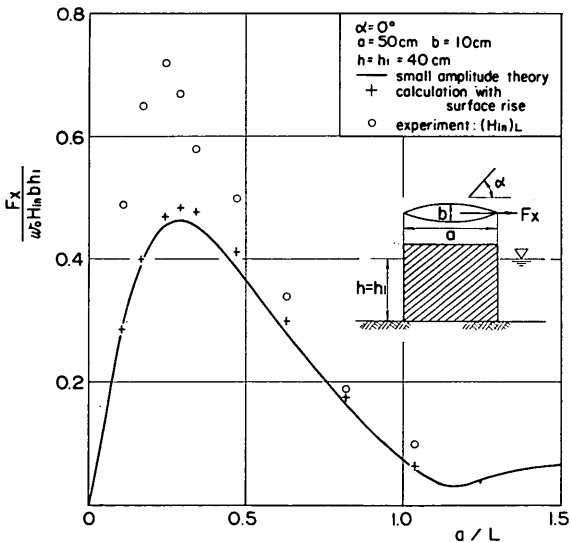


図-45 水面変動を考慮した場合の波力 F_x ($\alpha=0^\circ$)

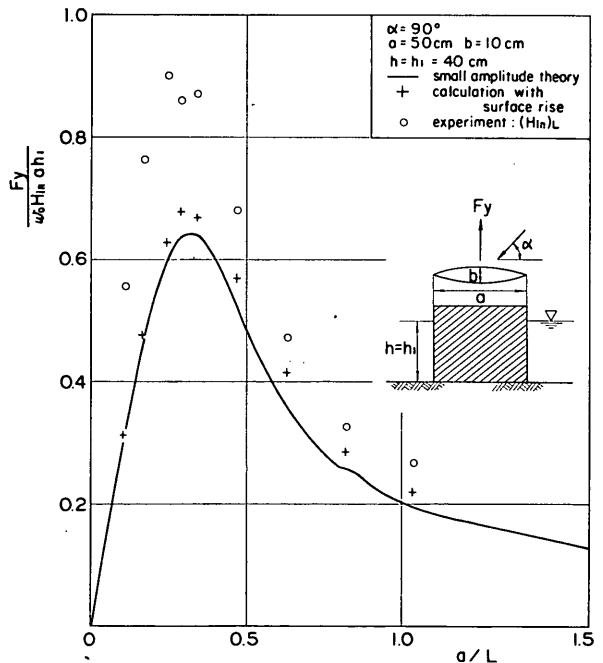


図-46 水面変動を考慮した場合の波力 F_y ($\alpha=90^\circ$)

ついて行なうのが本当であるが、計算量が膨大となるため、次のように最大・最小時刻についてのみ行なった。

まず、2.4 で求められた波力、つまり式 (114) の第 1 項が最大になる時刻を求め、その時刻における水位分布から、前記のように差分積分して式 (114) で示されるような波力を計算して、これを無次元化した。さらに t が $T/2$ だけ進んだ時刻、つまり半周期進んで静水面に対して水位が対称になった場合における絶対値をとって無次元化した。前者は波の山における波力、後者は波の谷にお

ける波力に対応する。図-45 と 図-46 にそれぞれ $\alpha=0^\circ$ の場合の F_x と $\alpha=90^\circ$ の場合の F_y について実験値、理論値および水位分布を考慮した場合の計算値が比較してある。水位分布を考慮した場合については、実験値の整理方法に合わせて波の山と谷の値の平均値を+印で示した。

まず、図-45 の F_x の場合をみると、水位分布を考慮して計算した値は、微小振幅を仮定した理論曲線より上にある。しかし、その差は小さく、実験値と理論値の差を埋めるまでには至らない。図-46 の F_y の場合は水位分布の影響がやや大きくなり、これによって波力が増大する傾向が明らかである。しかし、実験値との間にはまだかなりの差があり、実験値を説明するまでには至らない。

以上、種々の検討を行なった結果、波力の実験値の増大は楕円柱体のまわりの水位分布の影響などである程度説明することができるけれども、定量的には不明のままである。可能性としては、楕円柱体の端部で流線が剥離して背後の圧力が減少する現象が考えられるが、これを究明するためには微小波圧計を使用しなければならず、今回の実験ではそこまで検討することができなかった。なお、こうした大口径物体に働く波力の実験値が理論値を上回る例として、土屋・山口¹¹⁾は円柱の C_M が理論値の 2.0 に対して実験値が平均で 2.3~2.4 であることを報告しており、関連した現象ではないかと思われる。

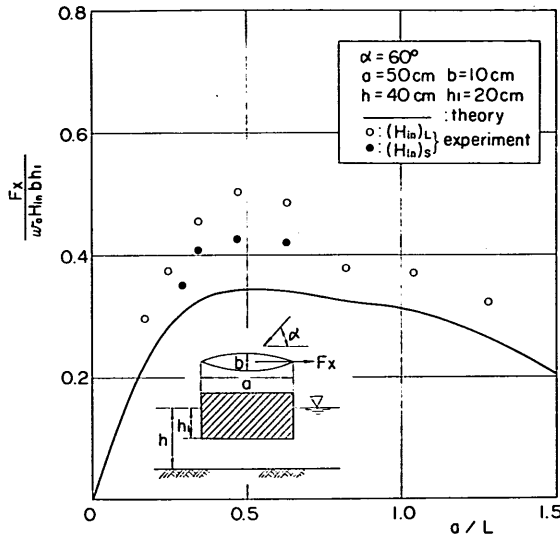


図-47 F_x に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=60^\circ$)

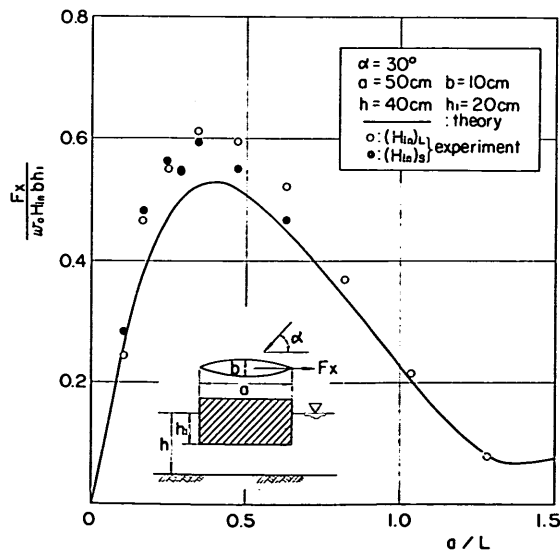


図-48 F_x に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=30^\circ$)

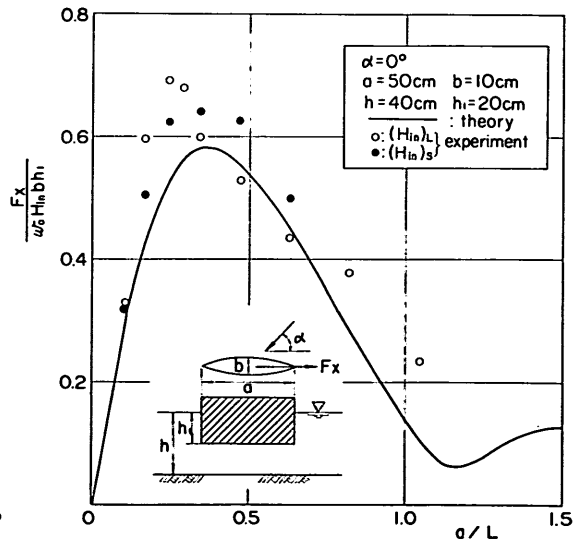


図-49 F_x に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=0^\circ$)

(1) x 軸方向の力 F_x

図-47~49 は, F_x に関して実験値と理論値を比較したものである。図-47 は $\alpha=60^\circ$, 図-48 は $\alpha=30^\circ$, 図-49 は $\alpha=0^\circ$ の場合の比較図である。

これらの図からわかるように, 実験値は理論曲線の傾向と良く一致しているが, 理論値より一般に大きくでている。平均的に実験値は理論値の 1.2 倍程度である。 $\alpha=60^\circ$ は他の $\alpha=30^\circ, 0^\circ$ に比して両者の間の差が大きい。黒丸と白丸は 4.3 で述べたものと同じものを意味するが, 両者の間には顕著な差異はみられない。

(2) y 軸方向の力 F_y

図-50 は $\alpha=90^\circ$, 図-51 は $\alpha=60^\circ$, 図-52 は $\alpha=30^\circ$ の場合の F_y について, 実験値と理論値を比較したものである。

F_y の最大値が現われる a/L の値より a/L が小さい領域では, 理論値と実験値とは α に関係なく良く一致している。しかし, この値よりも a/L が大きくなると, 実験値と理論値の間には一定の差, つまり数値で示すと $\alpha=90^\circ$ の場合 0.15, $\alpha=60^\circ$ の場合 0.08, $\alpha=30^\circ$ の場合 0.05 程度の差を持っているため, 全体として理論曲線の右に少しずれているかのように見える。これは,

有限振幅の影響, 特に水面変動の影響が強いものと思われる。これについては, 本節の (4) で検討する。

(3) 揚力 F_z

F_z については, $\alpha=90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ および 0° の場合の実験値と理論値の比較を 図-53~56 に示した。

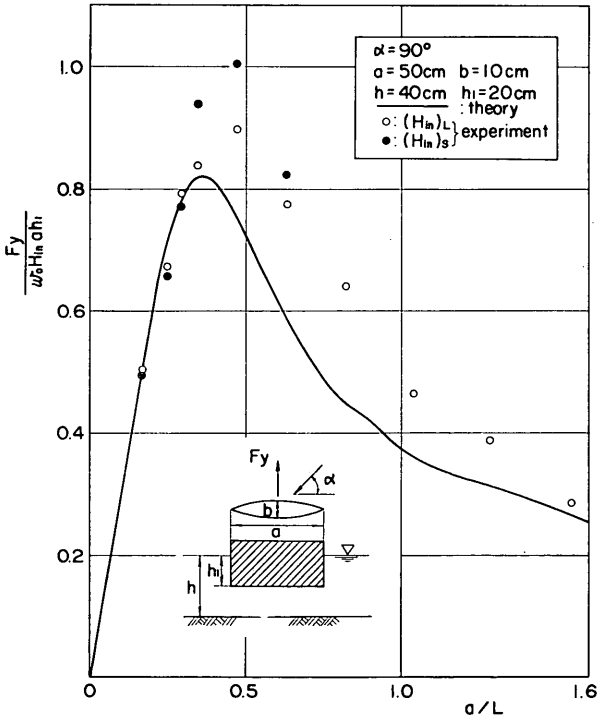


図-50 F_y に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=90^\circ$)

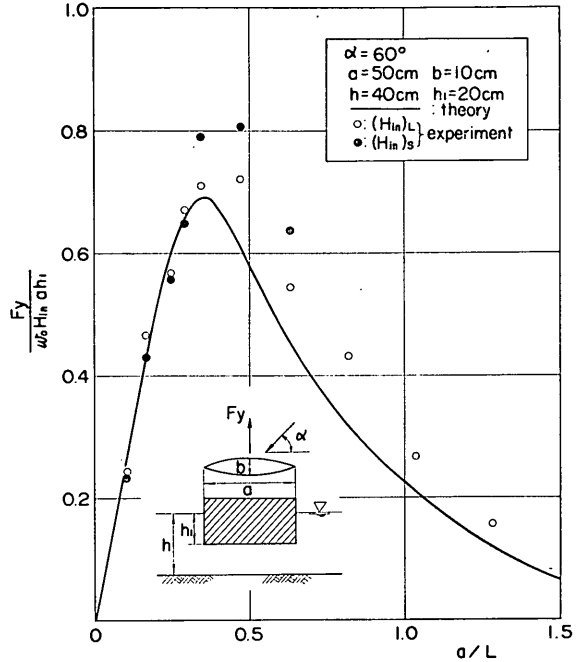


図-51 F_y に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=60^\circ$)

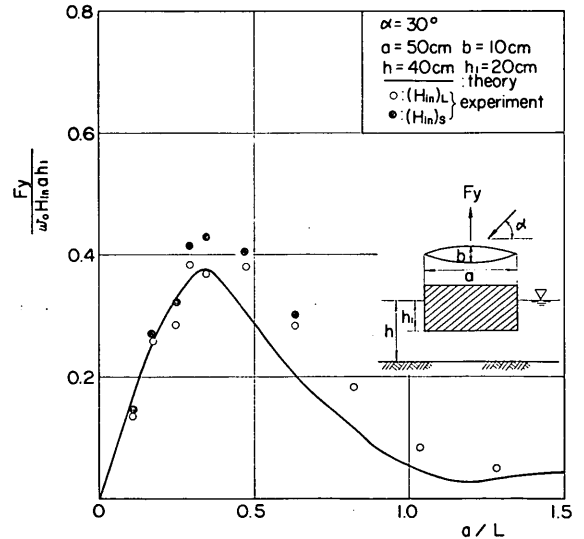


図-52 F_y に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=30^\circ$)

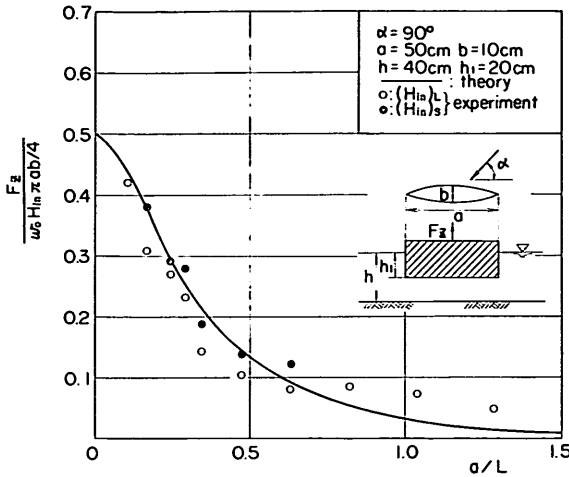


図-53 F_z に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=90^\circ$)

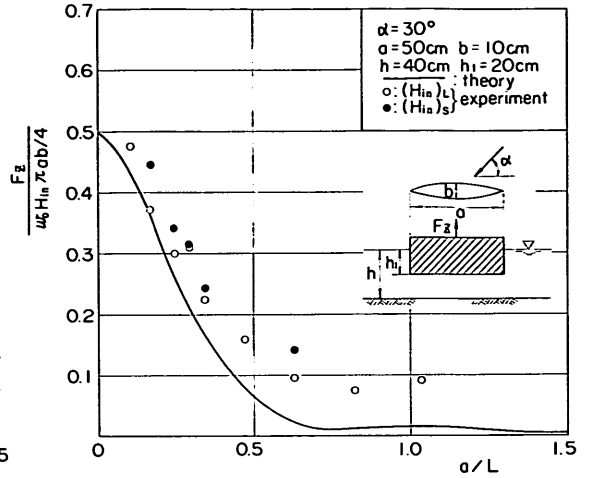


図-55 F_z に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=30^\circ$)

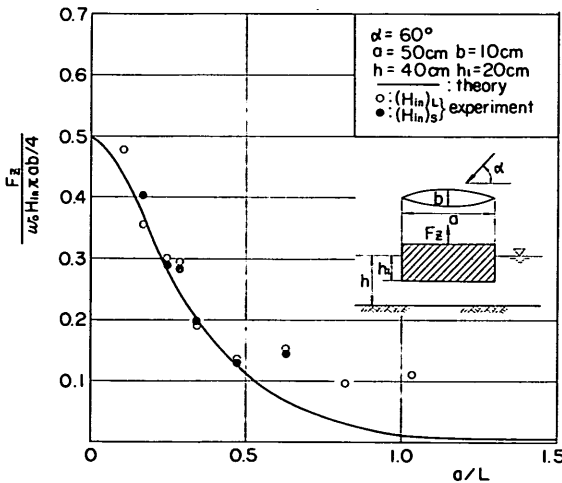


図-54 F_z に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=60^\circ$)

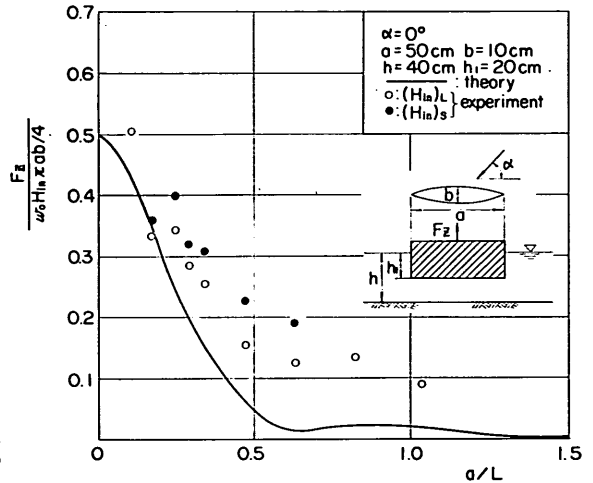


図-56 F_z に関する実験値と理論値の比較 ($\alpha=0^\circ$)

図-53 の $\alpha=90^\circ$ の場合、実験値は $a/L \leq 0.7$ の範囲では、理論曲線によくのっているけれども、 $a/L > 0.7$ になると揚力の絶対値が極めて小さいこともあって、理論値の2倍程度の値を示す。図-54 の $\alpha=60^\circ$ の場合、実験値は $a/L \leq 0.5$ の範囲では理論値とよく合うが、 $a/L > 0.7$ では実験値は大きくなり、理論値の2~3倍程度になる。さらに $30^\circ, 0^\circ$ と α が小さくなるにつれて、実験値と理論値が一致する範囲は小さくなる。特に $\alpha=0^\circ$ になると、実験値は a/L が大きいほど理論値とずれ、理論曲線とは大きく異なった傾向を示す。このような現象の起る原因については、実験水路勾配の影響か、

有限振幅の影響か、波力測定の誤差があるいはその他によるものか明らかにすることができなかった。

(4) 水面変動を考慮した場合の波力

4.3 の(4)と同様に有限振幅の影響を考慮して計算した結果が、図-57, 58 に示してある。計算値は波の山と谷の平均値を+印で示してある。これらの図には、実験値と理論曲線も同時にプロットしてある。

図-57 は $\alpha=0^\circ$ における F_z 、図-58 は $\alpha=90^\circ$ における F_y の場合を示している。全没水状態の場合の図-45, 46 に比べると、吃水 h_1 が小さいために有限振幅の影響が強く現われ、水位分布を考慮することによって波

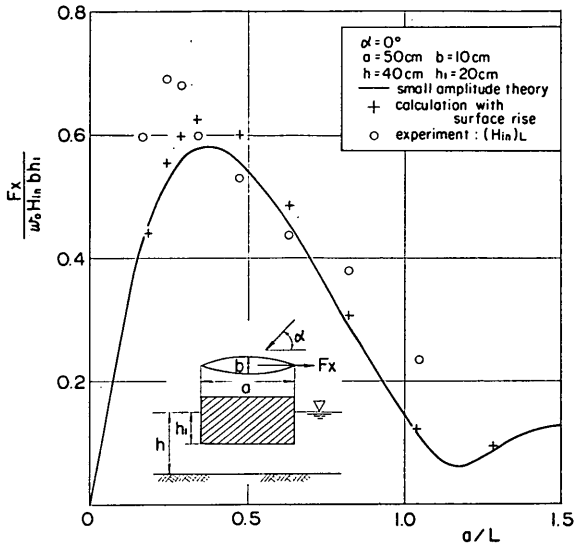


図-57 水面変動を考慮した場合の波力 F_x ($\alpha=0^\circ$)

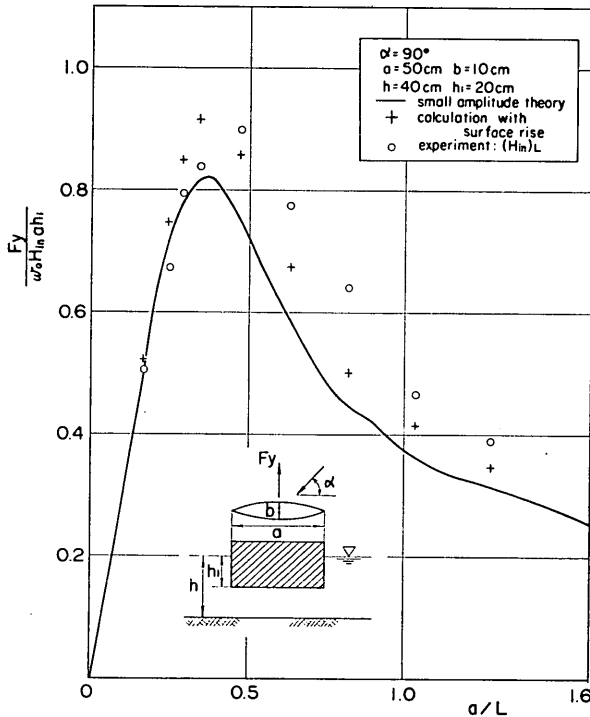


図-58 水面変動を考慮した場合の波力 F_y ($\alpha=90^\circ$)

の場合には水位分布による波力の増大が大きく、この結果、実験値が計算値よりも小さくなる例も出る。実験値が理論曲線の右にずれている傾向は若干残るけれども、全体として実験値は計算値にかなり良く合っているといえよう。

5. 結 論

以上、本研究で得られた結果を要約すると次のとおりである。

- (1) 半没水状態の固定楕円柱体に働く波力を理論的に導いた。この理論は固定円柱の場合も包含している。
- (2) 楕円柱体の側面における条件および楕円柱体底面と水底との間の間隙における圧力の連続条件から解いた第1近似解は、間隙が水深に比して0.5以下である場合、厳密に求めた解との差異が微小である。ただし、間隙との比が0.5よりも大きくなると、精度が低下する。
- (3) 前論文で示した固定船体に働く波力の計算式は、船の吃水が水深の0.5以上ある場合には、十分な精度で使用できる。この意味で前論文で示した計算結果は妥当なもの認められる。
- (4) 定常項を無視し、間隙における圧力と流速の連続条件から求めた第2近似解は厳密に求めた解とそれほど大きな差はなく、実用上は第2近似解で十分である。
- (5) 波力 F_x , F_y , F_z の無次元量は h_1/h または h/a が小さくなるほど、大きくなる。
- (6) 波力の実験結果は、一般的に理論値よりも大き目であり、最大波力の付近では理論値の1.2~1.5倍程度である。この差異は、波力作用時の水面が静水面と異なっていることによる有限振幅の影響としてある程度説明できる。
- (7) 波力の実験値が入射波の波長および波向によって変化する様子は、全没水状態および半没水状態共に理論計算の結果と良く一致しており、これによって理論解の妥当性が実験的にも検証された。

力の計算値はかなり増大する。 F_x の場合はこの増大が比較的小さいが、実験値自体の理論値とのずれもあまり大きくなく、全体としては比較的良く合っている。 F_y

なお、上記の水面変動の影響の検討は、当所の伊藤喜行 工部部長の示唆に負うところが大きい。また、未知係数

楕円柱体近似による固定船体に働く波力の理論および実験

の決定のための連立方程式の解法については、当所機材部の岩崎峯夫主任研究官より有益な助言を頂いた。ここに記して謝意を表する次第である。

本研究は、合田の全般的指導の下に、高山が理論解析および取りまとめを行なったものである。また、実験およびデータ解析は、笹田が波浪研究室員 神山 豊技官の協力を得て実施したものである。最後に、理論計算はすべて当所の電子計算機 TOSBAC 3400 を用いて行なったことを付記する。(1973年9月29日受付)

参 考 文 献

- 1) 合田良実・吉村知司；海中に孤立した巨大構造物に働く波力の計算，港湾技術研究所報告，第10巻第4号，1971年12月，pp. 3-52.
- 2) 港湾技術研究所水工部・構造部；杭式シーバースの波力問題に関する模型実験報告，1973年3月，54 p.
- 3) MacCamy, R.C. and R.A. Fuchs: Wave force on piles: a diffraction theory, Tech. Memo. No. 69, Beach Erosion Board, 1954, 17 p.
- 4) Black, J.L. and C.C. Mei: Scattering and radiation of water waves, Rept. No. 121, Water Resources and Hydrodynamics Lab., M.I.T., 1970, 248 p.
- 5) Miles, J. and F. Gilbert: Scattering of gravity waves by a circular dock, Jour. Fluid Mech., Vol. 34, Part 4, 1968, pp. 783-793.
- 6) Garret, C.J.R.: Wave forces on a circular dock, Jour. Fluid Mech., Vol. 46, Part 1, 1971, pp. 129-139.
- 7) 井島武士・田淵幹修・湯村やす：有限水深の波による円柱状浮体の運動，土木学会論文報告集，第206号，1972年10月，pp. 71-84.
- 8) 伊藤喜行・木原 力：円柱の動揺に伴う造波抵抗一杭の波力応答と円形浮体の挙動への応用一，港湾技術研究所報告，第11巻第3号，1972年9月，pp. 37-58.
- 9) McLachlan, N.W.: Theory and Application of Mathieu Functions, Dover Pub., Inc., New York, 1964.
- 10) 岩垣雄一・土屋義人・陳 活雄：海底摩擦による波高減衰の基礎的研究(3)一層流境界層方程式の非線形項の形質について一，第12回海岸工学講演会論文集，1965年，pp. 41-49.
- 11) 土屋義人・山口正隆：波による円柱の抗力係数および質量係数について，第19回海岸工学講演会論文集，1972年，pp. 379-383.

主要記号一覧表

A: 角棒の断面積

- A_0 : 減衰自由振動の振幅
 A_f : 強制振動による振幅
 $A_f^{(n)}$: Mathieu 関数の係数 (式. 16)
 a : 楕円の長径
 a_k : 進行波に関する Mathieu の微分方程式の固有値 (式. 14, 15)
 a_i : 定常波に関する Mathieu の微分方程式の固有値 (式. 34, 35)
 a_m : 底面下の波に関する Mathieu の微分方程式の固有値 (式. 53, 54)
 a_{mn} : 未知係数 (式. 56, 65, 68)
 B : 楕円の焦点距離
 $B_f^{(n)}$: Mathieu 関数の係数 (式. 16)
 b : 楕円の短径
 b_{mn} : 未知係数 (式. 56, 68)
 c : 抵抗係数
 $Ce_n(\xi; \nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 19)
 $ce_n(\eta; \nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 16)
 E : ヤング率
 E_0 : ゲージ電圧
 F_0 : 強制外力の振幅
 F_x : x 軸方向の力 (式. 82)
 F_y : y 軸方向の力 (式. 83)
 F_z : z 軸方向の力 (式. 90)
 $Fey_n(\xi; \nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 21)
 $Fek_n(\xi; -\nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 43, 44)
 $F_{i,n}$: 未知係数 (式. 45)
 $f(x)$: $\begin{cases} =1 & (+1 \geq x > 0) \\ =0 & (0 \geq x \geq -1) \end{cases}$
 f_0 : 測定係の固有振動数
 $Gey_n(\xi; \nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 21)
 $Gek_n(\xi; -\nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 44)
 $G_{i,n}$: 未知係数 (式. 45)
 g : 重力の加速度
 H : 波高
 H_1 : 大水路内の波高
 H_2 : 小水路内の波高
 H_{in} : 入射波の波高
 h : 水深
 h_1 : 楕円柱体の水没深さ
 I : 電流
 I_r : 第1種変形ベッセル関数
 J_r : 第1種ベッセル関数

- $K_{2\nu}$: 第2種変形ベッセル関数 (式. 38)
 k : 波数 ($=2\pi/L$)
 k_0 : バネ定数
 L : 波長
 $L_{mk} = \frac{(-1)^m N_k^{-1/2}}{k^2(h-h_1)^2 + (m\pi)^2} k(h-h_1) \sinh k(h-h_1)$
 $L_{m\lambda} = \frac{(-1)^m N_\lambda^{-1/2}}{\lambda^2(h-h_1)^2 - (m\pi)^2} \lambda(h-h_1) \sin \lambda(h-h_1)$
 M_n : 未知係数 (式. 33)
 M_x : x 軸まわりのモーメント (式. 92)
 M_y : y 軸まわりのモーメント (式. 93)
 M_z : z 軸まわりのモーメント (式. 95)
 M_{Ax} : A点での x 軸まわりのモーメント
 M_{Bx} : B点での x 軸まわりのモーメント
 $Me_n^{(1),(2)}(\xi; \nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 31)
 m_0 : 楕円柱体の質量
 N_n : 未知係数 (式. 33)
 $N_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sinh 2kh}{2kh} \right\}$ (式. 29)
 $N_\lambda = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin 2\lambda h}{2\lambda h} \right\}$ (式. 47)
 $Ne_n^{(1),(2)}(\xi; \nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 31)
 p : 圧力
 p_n : 定数 (式. 26)
 R : ゲージ抵抗
 $Se_n(\xi; \nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 19)
 $sen_n(\eta; \nu_k^2)$: Mathieu 関数 (式. 16)
 s_n : 定数 (式. 26)
 T : 周期
 t : 時間
 W : 角棒の断面係数
 w_0 : 水の単位重量
 x : 楕円長軸方向の座標
 Y_ν : 第2種ベッセル関数
 y : 楕円短軸方向の座標
 $Z_k(z) = N_k^{-1/2} \cosh k(h+z)$ (式. 27)
 $Z_\lambda(z) = N_\lambda^{-1/2} \cos \lambda(h+z)$ (式. 46)
 z : 鉛直方向の座標
 α : x 軸と波の進行方向とのなす角
 β : 減衰定数
 ϵ : 位相
 $\Delta m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m \neq 0) \end{cases}$
 ζ : 水位変動量
 η : 楕円座標
 λ : $\sigma^2 = -g\lambda \tan \lambda h$ の根 (式. 10)
 λ_0 : ゲージ率
 $\mu_m = m\pi B/4(h-h_1)$
 $\nu_k = Bk/4$
 $\nu_\lambda = B\lambda/4$
 ξ : 楕円座標
 ξ_0 : 楕円柱体の側面を表わす座標値
 ρ : 水の単位質量
 σ : $2\pi/T$
 τ : 減衰振動の周期
 Φ : 速度ポテンシャル
 Φ_0 : 外側領域の速度ポテンシャル (式. 48)
 Φ_u : 底面下領域の速度ポテンシャル (式. 56)
 Φ_i : 入射波の速度ポテンシャル (式. 23)
 Φ_s : 外方へ進行する散乱波の速度ポテンシャル (式. 22, 23)
 Φ_{st} : 定常波の速度ポテンシャル (式. 45)
 ω : 位相