

運輸省港湾技術研究所

港湾技術研究所 報告

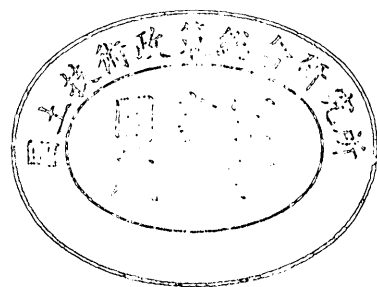
REPORT OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH
INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT

VOL. 11

NO. 3

SEPT. 1972

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第11巻 第3号 (Vol. 11, No. 3), 1972年9月 (Sept. 1972)

目 次 (CONTENTS)

1. An Analysis of the Hydraulic Transport of Solids in Horizontal
..... Tokuji YAGI, Tadasu OKUDE,
Shoji MIYAZAKI and Akio KOREISHI..... 3
(水平管路における土砂水力輸送の解析.....八木得次・奥出 律・宮崎昭児・是石昭夫)
2. 円柱の動揺に伴う造波抵抗 ——杭の波力応答と円形浮体の挙動への応用——
..... 伊藤喜行・木原 力..... 37
(Wave Making Resistance due to Oscillation of Circular Cylinder
.....Yoshiyuki ITO and Tsutomu KIHARA)
3. 柱状構造物の波力応答計算伊藤喜行・谷本勝利・小舟浩治..... 59
(Dynamic Response of an Offshore Platform to Random Waves
..... Yoshiyuki Ito, Katsutoshi TANIMOTO and Koji KOBUNE)
4. 波向線交差領域における波高分布 ——数値波動解析法の応用——
..... 伊藤喜行・谷本勝利・山本庄一..... 87
(Wave Height Distribution in the Region of Ray Crossings ——Application of
the Numerical Analysis Method of Wave Propagation——
.....Yoshiyuki ITO, Katsutoshi TANIMOTO and Shoichi YAMAMOTO)
5. 斜め入射部分重複波による質量輸送速度の分布に関する研究
..... 田中則男・入江 功・小笹博昭.....111
(A study on the velocity distribution of mass transport caused by diagonal partial
standing waves.....Norio TANAKA, Isao IRIE and Hiroaki OZASA)
6. 航空機荷重の路床・路盤への伝達機構に関する一研究
——巨人機の設計荷重——.....佐藤勝久・須田 潤.....141
(A Study on Aircraft Load Distribution through Bases to a Subgrade——Design
Load of a Jumbo Jet——.....Katsuhisa SATO and Hiroshi SUDA)
7. ブロック式けい船岸の設計について——非線形計画法による最適設計——
..... 高力健次郎.....167
(The application of SUMT to the Optimum Design of the block quay
.....Kenjiro KORIKI)

2. 円柱の動揺に伴う造波抵抗 ——杭の波力応答と円形浮体の挙動への応用——

伊藤喜行*・木原力**

要 旨

波の作用のもとで運動している物体に働く波力は、物体が固定されているときの波力と、物体の運動に基づく造波抵抗との和である。本報告は、円柱の動揺に伴う造波抵抗を計算して、杭の波力応答における相対運動の影響と、波力を受ける円形浮体の挙動とを論じたものである。

造波抵抗は、円柱のまわりの速度ポテンシャルから求められる（本報告では慣性力成分のみ扱い、抗力についての考察は含めない）。造波抵抗のうち、円柱の加速度と同位相で逆向きに働く成分は、いわゆる附加質量となり、また速度と同位相の成分は減衰抵抗となる。

剛な円柱の水平ピストン運動のような一自由度系の場合には、附加質量や減衰係数の定量的評価は容易である。しかし弾性杭については、造波抵抗が単純に表わし得ないために、その評価が困難である。そこで本報告では、杭における分布質量や分布荷重を等価な杭頭集中質量ならびに荷重で置換え一自由度系としての近似的評価を試みた。頭部自由杭の計算例によれば、附加質量よりもむしろ減衰項の影響の方が大きい。上部工を有する杭では、共に影響は小さい。

円形浮体については、固定時の作用波力と、水平・鉛直・回転各振動に対する造波抵抗とを算出し運動方程式を導いた。これは、減衰的定常波に相当する無限級数項を省略した近似理論である。表現が簡単のため、現象に関連する因子の影響が容易に把握され、また拘束条件が単純であれば、運動方程式を解いて直ちに円形浮体の挙動を求めることができる。

* 水工部長

** 水工部 防波堤研究室

2. Wave Making Resistance due to Oscillation of Circular Cylinder

Yoshiyuki ITO*

Tsutomu KIHARA**

Synopsis

The wave force on a body in motion is composed of the wave force on the fixed situation and the wave making resistance due to the motion of the body. The dynamic behaviour of a vertical circular cylinder exerted by wave forces is discussed in this investigation, on the basis of the calculation of wave making resistance. In Part 1 of this paper, the effect of the relative motion on the dynamic response of an elastic pile is examined. In Part 2, an approximate theory for the motion of a circular floater is presented.

The wave making resistance due to oscillatory motion of a circular cylinder is theoretically calculated by solving the equation for velocity potential (the discussion on the drag force is not included in this paper). The wave making resistance can be divided into two components, the one is in phase with the acceleration of the body and corresponds to the added mass, the other acts as a damping resistance in phase with the velocity of the body.

The quantitative evaluation of the wave making resistance is not difficult for rigid bodies. In case of a flexible pile, however, the infinite degrees of freedom of the body prevents simple expression of the added mass and the damping factor. In this paper a pile is replaced by a system having one degree of freedom, with an equivalent mass and load concentrated at the top. Some examples of calculation suggest the importance of the damping resistance rather than the added mass.

The approximate theory for a circular floater consists of the calculation of velocity potential around and beneath the body. The additional terms of infinite series, which correspond to the exponentially diminishing stationary waves, are omitted in this theory. The wave force on a fixed floater and the wave making resistance due to horizontal, vertical and rotary oscillation of a floater are calculated and the equations of motion are obtained. The motion of a circular floater under simple restraint can be solved from these equations.

* Head of Hydraulic Engineering Division

** Member of the Breakwaters Laboratory, Hydraulic Engineering Division

目 次

1. ま え が き	41
2. 杭の波力応答における造波抵抗の役割	41
2.1 固定杭に作用する波力	41
2.2 杭の水平振動に対する造波抵抗	43
2.3 杭の波力応答計算における相対運動の取扱い	46
2.4 頭部自由杭に対する造波抵抗の影響	47
2.5 上部工を有する杭における造波抵抗の影響	49
3. 円形浮体に作用する波力と造波抵抗	50
3.1 固定円形浮体に作用する波力	50
3.2 水平振動に対する造波抵抗	52
3.3 鉛直振動に対する造波抵抗	54
3.4 回転振動に対する造波抵抗	55
3.5 円形浮体の運動方程式	55
4. む す び	57
参考文献	57
記 号 表	57

1. まえがき

本報告は、波力を受ける円柱の挙動に関する問題を扱ったもので、「杭の波力応答」についての部分と、「円形浮体」についての部分とから成る。これらは一見異質の問題であるが、円柱のまわりの波という点では本質的に同じ事象に属しており、共に円柱の運動に基づく造波抵抗が重要な位置を占めているので、敢えて一つの報告にとりまとめたのである。

いわゆる有脚式海洋構造物については、先ず杭に作用する波力の問題から始まり、静的取扱いから動的計算へ、また規則波から不規則波へと進んで来た。更に、杭と波との相対運動を考慮に入れた計算も散見されるようになった。我々もシーバースを対象とした波力応答計算を実施しているが、このような相対運動を具体的に取入れるに先立ち、その基本的事項を考察しておこうというのが本報告の前半の趣旨である。

杭に作用する波力のうち、完全流体としての理論的計算から導き得るのは慣性力成分のみである。本報告では抗力成分は対象とせず、論議を慣性力に限っている。相対運動を考慮に入れるとき、式の表現や係数のとり方、またいわゆる附加質量の問題など、必ずしも明確に認識されていない点があるが、基本的には杭の運動に基づく造波抵抗から出発すれば考え易い。ただし、杭のように弾性的な撓みを生ずる部材についての精密な扱いは困難なので、本報告では、一自由度系への近似的な置換えにより、造波抵抗が附加質量ならびに減衰係数として杭の応答に及ぼす影響を考察した。

本報告の後半では、円形浮体（平面的に円形をなす）を対象とし、それが固定状態にあるときの作用波力と、水平・鉛直・回転の各振動に対する造波抵抗を算出して運動方程式を導いた。拘束条件が簡単な場合には、この運動方程式を解いて、波の作用のもとでの浮体の挙動を知ることができる。ただしこれらの計算では、減衰的定常波に相当する無限級数部分を省略しており、手法としては、先に扱った矩形断面浮体（平面的には十分に長い）に関する近似理論¹⁾と同じである。したがって、理論計算としての精度は当然精密解に劣るが、主な関連因子の影響を容易に把握し得るなどの利点がある。また精密計算の場合でも、固定時の波力と造波抵抗とを別箇に算出しておけば、運動浮体の取扱いが容易である。そのときの運動方程式の立て方は、本報告に示すものと全く同様である。

2. 杭の波力応答における造波抵抗の役割

2.1 固定杭に作用する波力

杭の運動に伴う造波抵抗の考察に入る前に、まず固定杭に作用する波力の取扱い方を復習し、以後の計算の便宜をはかることとする。

(1) 円柱のまわりの速度ポテンシャル

円形断面の杭を対象とし、図2.1のような座標系と記号を用いる。この場合の速度ポテンシャル ϕ^{total} に対する基本方程式は

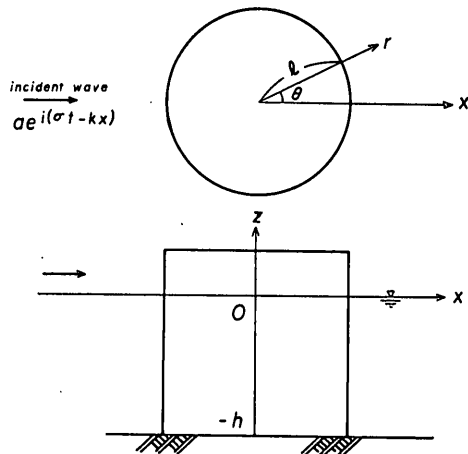


図2.1 座標系および記号

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

である。

この速度ポテンシャル ϕ は、入射波の ϕ_i と散乱波の ϕ_s とから成る。まず入射波について

$$\phi_i = \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-ikx} \quad (2.2)$$

とおく。

散乱波については、表面条件および海底条件を満たすものとして次の形が得られる。

$$\phi_s = \psi(r, \theta) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} + \sum_j \psi_j(r, \theta) \frac{\cos k_j(h+z)}{\cos k_j h} \quad (2.3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= kg \tanh kh \\ &= -k_j g \tan k_j h \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

の関係があり、 ψ と ψ_j はそれぞれ次の方程式の解である。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k^2 \psi = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \theta^2} - k_j^2 \psi_j = 0 \quad (2.6)$$

(2.5) の解は

$$\left. \begin{matrix} H_n^{(1)}(kr) \\ H_n^{(2)}(kr) \end{matrix} \right\} \times \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases}$$

の形であるが ($H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$ は Hankel 関数), 外側へ向う散乱波を表すために $H_n^{(2)}$ のみを, また θ に関する対称性より \cos のみをとればよい。

(2.6) の場合には, 変形された Bessel 関数 $I_n(k_j r)$, $K_n(k_j r)$ が現れるが, 遠方で減衰する K_n のみをとる。したがって散乱波の速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi_s = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n H_n^{(2)}(kr) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \right. \\ & \left. + \sum_j D_{nj} K_n(k_j r) \frac{\cos k_j(h+z)}{\cos k_j h} \right\} \cos n\theta \quad (2.7) \end{aligned}$$

となる。

ここに含まれている係数 A_n , D_{nj} は, 円柱表面で法線速度が 0 という条件, すなわち

$$r=l \text{ で } -\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (2.8)$$

によって定まる。

そのために, まず

$$\begin{aligned} e^{-ikx} &= e^{-ikr \cos \theta} \\ &= J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \cos n\theta \quad (2.9) \end{aligned}$$

なる公式を用いて, 入射波の速度ポテンシャルを展開する。その ϕ_i と (2.7) の ϕ_s との和を (2.8) の条件式に入れるのであるが, 今の場合 k_j を含む項は消えて, 結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{J_0'(kl)}{H_0^{(2)'}(kl)} \frac{ga}{\sigma} \\ A_n &= -\frac{2(-i)^n J_n'(kl)}{H_n^{(2)'}(kl)} \frac{ga}{\sigma}, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.10)^*$$

係数値が定まったので, 杭のまわりの速度ポテンシャルは以下ようになる。

* $J_0'(kl)$ 等は kl による微分を示す。

$$\phi = \phi_i + \phi_s$$

$$\begin{aligned} &= \left[J_0(kr) - \frac{J_0'(kl)}{H_0^{(2)'}(kl)} H_0(kr) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-i)^n \left\{ J_n(kr) - \frac{J_n'(kl)}{H_n^{(2)'}(kl)} H_n^{(2)}(kr) \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \cos n\theta \right] \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (2.11) \end{aligned}$$

(2) 円柱に作用する波力

円柱表面に作用する単位面積あたりの波圧 p は

$$p = \rho i \sigma \phi_{r=l} \quad (2.12)^*$$

で与えられる。その x 方向の成分 ($-p \cos \theta$) を円周に沿って積分したものが, 単位長あたりの水平波力 p_H である (図 2.2)。この積分により, (2.11) 中の $n=1$ 以外の項は消えるから

$$\begin{aligned} p_H &= -2\rho i \sigma \int_0^\pi \phi_{r=l} \cos \theta \cdot l d\theta \\ &= -2\pi \rho g l a \left\{ J_1 - \frac{J_1'}{H_1^{(2)'}} H_1^{(2)} \right\} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (2.13)** \end{aligned}$$

となる。

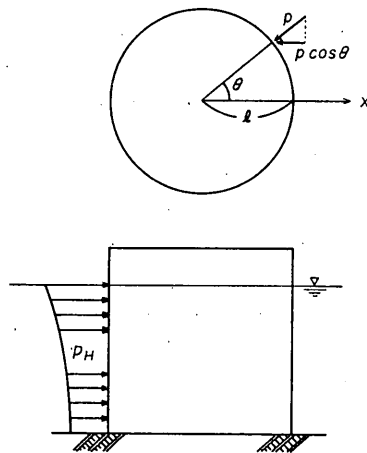


図 2.2 円柱に作用する波力

ここで

$$\left. \begin{aligned} H_1^{(2)} &= J_1 - iY_1, \quad H_1^{(2)'} = J_1' - iY_1' \\ J_1 Y_1' - J_1' Y_1 &= \frac{2}{\pi kl} \\ J_1' &= J_0 - \frac{J_1}{kl}, \quad Y_1' = Y_0 - \frac{Y_1}{kl} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

* $p = \rho \partial(\phi e^{i\omega t}) / \partial t$ の関係による。 p や ϕ は大きさと位相を含む複素数であり, 本報告では, 時間項 $e^{i\omega t}$ は一般に省略して記述する。

** $J_1(kl)$ 等を J_1 等と略記する。

の諸関係を用いると、結局 (2.13) は

$$p_H = \pi \rho l^2 \cdot gka \frac{\frac{4i}{\pi kl}}{(klJ_0 - J_1) - i(klY_0 - Y_1)} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (2.15)$$

と書くことができる。

(3) 慣性力係数 C_M

円柱に作用する波力は、一般に水粒子速度に関する抗力と、粒子加速度に比例する慣性力との和として表わされる。本報告では完全流体を扱っているので、上記の p_H は慣性力に相当し、

$$p_H = \pi \rho l^2 C_M \dot{u} \quad (2.16)$$

という形に表現できる。

この式の中の \dot{u} は、円柱が存在しないとしたときのその中心位置における入射波の粒子加速度で、今の場合は

$$\dot{u} = -gka \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (2.17)$$

である。

したがって (2.15) より

$$C_M = -\frac{4i}{\pi kl} \frac{1}{(klJ_0 - J_1) - i(klY_0 - Y_1)} \quad (2.18)$$

となることがわかる。

もし $kl \rightarrow 0$ 、すなわち円柱の径が波長に比して小さければ、 $klJ_0, J_1, klY_0 \rightarrow 0, klY_1 \rightarrow -2/\pi$ であるから、

$$C_M \rightarrow 2$$

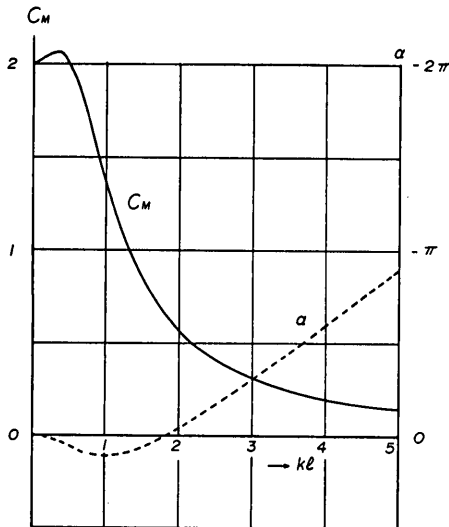


図2.3 C_M, α と kl との関係

となる。これが通常用いられている値である。

一般の場合の C_M の大きさは

$$|C_M| = \frac{4}{\pi kl} \frac{1}{\sqrt{(klJ_0 - J_1)^2 + (klY_0 - Y_1)^2}} \quad (2.19)$$

で、図2.3のような周知の変化を示す。また、粒子加速度に対する慣性力の位相の遅れ α は

$$\tan \alpha = \frac{klJ_0 - J_1}{klY_0 - Y_1} \quad (2.20)$$

で表わされる。これも図2.3に示してある。

2.2 杭の水平振動に対する造波抵抗

静水中で杭が振動すると、ある波を発生する。この波が杭に及ぼす波力を造波抵抗とよぶこととする。本節ではこの造波抵抗の一般的計算法を述べ、剛な杭のピストン運動という最も簡単な場合についての適用例を示す。

(1) 発生波の速度ポテンシャル

図2.4のように、杭が x 方向に $f(z)e^{i\omega t}$ なる運動をしているものとする。これによる発生波の速度ポテンシャルは (2.7) 式の形で与えられる。今の場合、入射波はないとしているので、これだけを考えればよい。

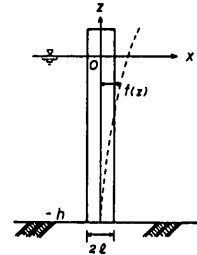


図2.4 杭の水平振動

境界条件は

$$r=l \text{ で } -\frac{\partial \phi}{\partial r} = i\sigma f(z) \cos \theta \quad (2.21)$$

であり、したがって $n=1$ の項のみ残り、次の関係を得る。

$$kA_1 H_1^{(2)'}(kl) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} + \sum_j k_j D_{1j} K_1'(k_j l) \frac{\cos k_j(h+z)}{\cos k_j h} = -i\sigma f(z) \quad (2.22)$$

この式の両辺に $\cosh k(h+z)$ をかけて海底から表面まで積分すると、 $\cos k_j(h+z)$ との直交性によりその項は消えて A_1 が定まる。同様に $\cos k_j(h+z)$ をかけて積分すると D_{1j} が得られる。計算を遂行すると、速度ポ

テンシャルは結局次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{i\sigma}{n \sinh kh} \frac{\cosh k(h+z) H_1^{(2)}(kr)}{\cosh kh H_1^{(2)'}(kl)} \\ & \times \cos \theta \int_{-h}^0 f(z) \cosh k(h+z) dz \\ & - \sum_j \frac{i\sigma}{n_j \sin k_j h} \frac{\cos k_j(h+z) K_1(k_j r)}{\cos k_j h K_1'(k_j l)} \\ & \times \cos \theta \int_{-h}^0 f(z) \cos k_j(h+z) dz \end{aligned} \quad (2.23)$$

ただし

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (2.24)$$

$$n_j = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k_j h}{\sin 2k_j h} \right) \quad (2.25)$$

である (この n を $n=1, 2, \dots$ 等と混同しないよう注意)。

(2) 任意の振動型に対する造波抵抗

固定円柱に作用する波力を求めたときと同様の手続により、振動円柱に作用する造波抵抗が計算できる。その過程で以下のような記号を導入する。

まず

$$\begin{aligned} \frac{H_1^{(2)}(kl)}{H_1^{(2)'}(kl)} &= \frac{J_1 - iY_1}{J_1' - iY_1'} \\ &= -kl |R_{JY}(kl) - iI_{JY}(kl)| \end{aligned} \quad (2.26)$$

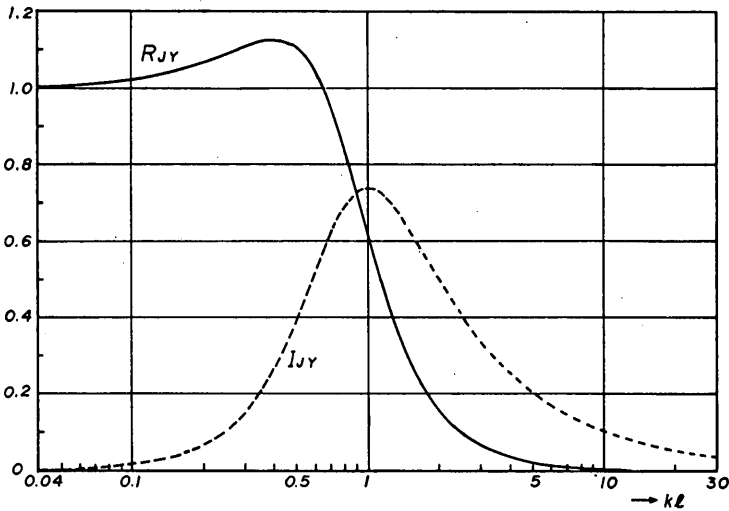


図2.5 R_{JY}, I_{JY} の値

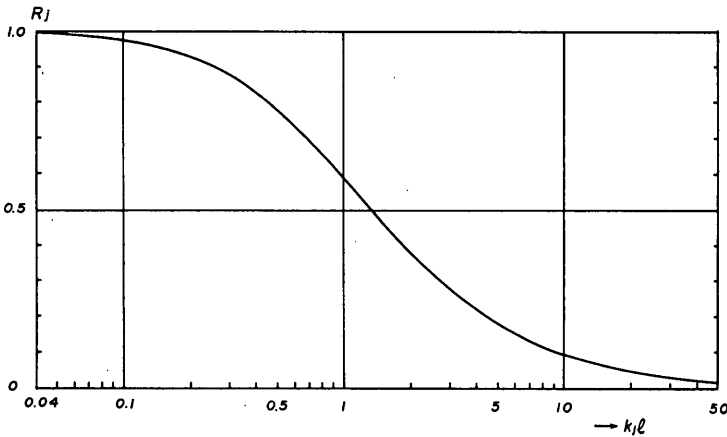


図2.6 R_j の値

円柱の動揺に伴う造波抵抗

$$\left. \begin{aligned} R_{JY}(kl) &= -\frac{J_1(klJ_0 - J_1) + Y_1(klY_0 - Y_1)}{(klJ_0 - J_1)^2 + (klY_0 - Y_1)^2} \\ I_{JY}(kl) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{(klJ_0 - J_1)^2 + (klY_0 - Y_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

と表わす。この R_{JY}, I_{JY} は図2.5のような値となる。
また

$$\frac{K_1(k_j l)}{K_1'(k_j l)} = -k_j l \frac{K_1}{k_j l K_0 + K_1} = -k_j l R(k_j l) \quad (2.23)$$

とおく。以下、 $R(k_j l)$ を R_j と略記する。 R_j の値は図2.6のとおりである。

これらを用いると、単位長あたりの造波抵抗 p_R は

$$\begin{aligned} p_R &= \pi \rho l^2 \sigma^2 \left\{ \frac{k \cosh k(h+z)}{n \sinh kh \cosh kh} (R_{JY} - i I_{JY}) \right. \\ &\quad \times \int_{-h}^0 f(z) \cosh k(h+z) dz \\ &\quad + \sum_j \frac{k_j \cos k_j(h+z)}{n_j \sin k_j h \cos k_j h} R_j \\ &\quad \left. \times \int_{-h}^0 f(z) \cos k_j(h+z) dz \right\} \quad (2.29) \end{aligned}$$

となる。

(3) 剛な円柱のピストン運動の場合

剛体としての円柱が、上から下まで一様に $\xi e^{i\omega t}$ なる水平運動をする場合を考えると、このとき

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h}^0 f(z) \cosh k(h+z) dz &= \frac{\xi}{k} \sinh kh \\ \int_{-h}^0 f(z) \cos k_j(h+z) dz &= \frac{\xi}{k_j} \sin k_j h \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

である。

この関係を用い、かつ(2.29)を積分して全造波抵抗 P_R を求めると

$$\begin{aligned} P_R &= \int_{-h}^0 p_R dz \\ &= \pi \rho l^2 h \sigma^2 \xi \left\{ \frac{\tanh kh}{nkh} (R_{JY} - i I_{JY}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_j \frac{\tan k_j h}{n_j k_j h} R_j \right\} \quad (2.31) \end{aligned}$$

となる。

図2.7にこの計算例を示す。 kh が小さければ、全体の中で級数項 (R_j を含む項) の占める割合は小さいが、 kh が大きくなると、その割合も増大して行く。これは、発生波のうち級数項以外の成分は $\cosh k(h+z)$ なる速度分布を有するのに対し、級数項は $\cos k_j(h+z)$ の速度分布であることによる。すなわち、 kh が小さいときには、 \cosh の速度分布は海底から表面まで一様で、円柱自体の速度分布と等しいから級数項を加える必要がない。これに反し、 kh が大きいとき \cosh の速度分布は表面附近に集中するため、円柱の近傍では級数項に対応する波が存在しなければならないのである。

さて(2.31)右辺の実部は

$$\left. \begin{aligned} P_R(\text{実}) &= -M_1(-\sigma^2 \xi) \\ M_1 &= \pi \rho l^2 h \left\{ \frac{\tanh kh}{nkh} R_{JY} + \sum_j \frac{\tan k_j h}{n_j k_j h} R_j \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

と書くことができる。 $(-\sigma^2 \xi)$ は円柱の加速度であるから、この実部は加速度に比例する抵抗を表わしている。そして M_1 がいわゆる附加質量である。

図2.7によれば、 $kh \rightarrow 0$ のとき (このとき必然的に kl も0に近づく) 上記の [] の値は1となる。したがって

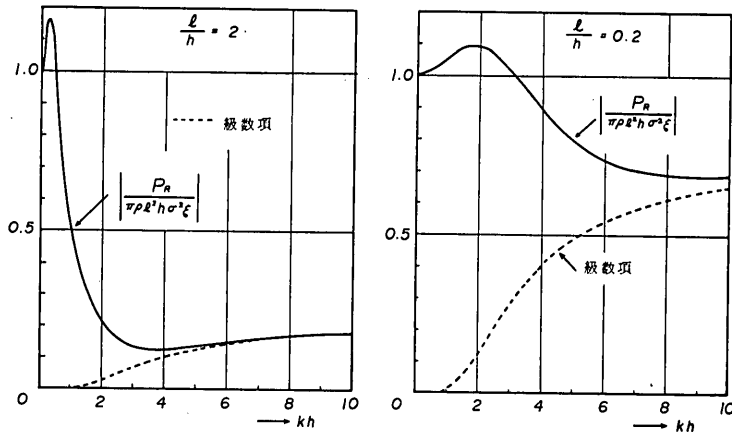


図2.7 ピストン運動による造波抵抗の計算例

M_1 は $\pi\rho l^2 h$, すなわち円柱が排除した水の質量に等しい。これは通常云われている附加質量の値と一致する*。

次に (2.32) の虚部を書直すと

$$\left. \begin{aligned} P_R(\text{虚}) &= -c_1(i\sigma\xi) \\ c_1 &= \pi\rho l^2 h \sigma \frac{\tanh kh}{kh} I_{JY} \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

となつて、円柱の速度 ($i\sigma\xi$) に比例する減衰抵抗を示している。そしてこの抵抗に抗して円柱のなす仕事は、発生波のエネルギー輸送に等しい (造波抵抗中の実部は、円柱の速度と 90° の位相差をもつので、1 周期間の仕事の総和は 0 となり、虚部のみが有効な仕事をする)。

また造波抵抗全体を一括して

$$P_R = -C_M'(\pi\rho l^2 h)(-\sigma^2\xi) \quad (2.34)$$

と書くこともできる。 $kh, kl \rightarrow 0$ のとき $C_M' \rightarrow 1$ である。

2.3 杭の波力応答計算における相対運動の取扱い

前 2 節の予備的考察をもとに、本節から弾性杭についての問題に移る。剛な円柱と異なり、弾性変形のために計算は困難であり、近似的な置換えに頼らざるを得ない。

(1) 相対運動を考慮した波力の表現

静止している杭に作用する波力を今の記号で書くと、抗力も含めて

$$p = \frac{\rho}{2}(2l)C_{Du}|u| + \rho(\pi l^2)C_M\dot{u} \quad (2.35)$$

と表わされる。

杭の運動を考慮に入れた場合、その各点の水平速度を v とすれば、抗力成分について

$$C_{Du}|u| \rightarrow C_D(u-v)|u-v| \quad (2.36)$$

と書きかえることは一応妥当であろう。相対速度の 2 乗の形のためやや複雑であるが、杭の速度に関係した減衰抵抗が附加されたものと考えられる。本報告では、抗力成分に関してこれ以上は触れず、もっぱら論議を慣性力

* 通常云われている附加質量は、二次元運動としての流体力学的理論に依拠している。その場合は自由表面がないから発生波もなく、本報告で扱っているような造波抵抗とは異なる。ところが、有限水深中での円柱の振動に伴う速度ポテンシャルを、表面で圧力が 0、海底で鉛直速度が 0 という条件で解くと、(2.23) の級数項のみの形となる (ただし、 $k_j h = m\pi/2$, $m=1, 3, \dots$ とおく)。そして $l/h \rightarrow 0$ のとき、すなわち表面や海底の影響が消えた状態では、附加質量としてやはり $(\pi\rho l^2 h)$ なる値が得られ、造波抵抗から求めたものと全く一致する。

に限定する**。

さて慣性力に対して杭の運動を考慮に入れるとき、 $C_M\dot{u}$ の代りに $C_M(\dot{u}-\dot{v})$ とおくことは明らかに誤りであり、強いてこの種の表現をとり得る場合でも、

$$C_M\dot{u} - C_M'\dot{v} \quad (2.37)$$

のような形でなければならない。

一般的に云えば

$$\begin{aligned} & \text{(運動物体に作用する波力)} \\ & = \text{(静止物体に作用する波力)} \\ & + \text{(物体の運動に伴う造波抵抗)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

である。

このことは、固定円柱に作用する波力および振動円柱に対する造波抵抗の算出過程をふりかえれば、容易に理解することができる。すなわち固定円柱の場合は、入射波と散乱波の和が、円柱表面で法線速度 0 となるように解いた。一方造波抵抗は、円柱の運動速度に対応する散乱波から求めた。したがって両者を足し合せたものは、入射波のもとである運動をしている円柱への作用波力ということになる。

(2.37) は、(2.38) をある特別な場合について表わしたものであって、例えば剛な円柱に対する全波力はこのように書き得る。しかしながら、たとえ剛体であっても、各深さの波力はこれでは表わせない。(2.29) を見ればわかるように、造波抵抗 p_R は $\cosh k(h+z)$ あるいは $\cos k_j(h+z)$ の鉛直分布をしており、円柱自身の加速度の分布とは一致していないからである。

(2) 造波抵抗を考慮した杭の運動方程式

剛な円柱が水平振動のみする場合には、全造波抵抗を

$$P_R = -M_1\ddot{\xi} - c_1\dot{\xi} \quad (2.39)$$

と書くことができた。この円柱がバネ係数 k_0 、減衰係数 c_0 なる水平バネで拘束されているものとする、運動方程式は

$$M_0\ddot{\xi} + c_0\dot{\xi} + k_0\xi = P_H + P_R \quad (2.40)$$

である (M_0 は円柱の質量、 P_H は固定円柱に対する全波力)。(2.39) を用いてこれを書直すと

$$(M_0 + M_1)\ddot{\xi} + (c_0 + c_1)\dot{\xi} + k_0\xi = P_H \quad (2.41)$$

となる。

** 抗力成分における相対運動の影響が小さいことを意味するものではなく、その定量的評価は別途に進める予定である。

円柱の動揺に伴う造波抵抗

この運動方程式を見れば、 M_1 や c_1 の影響、すなわち造波抵抗の役割は明瞭である。また条件が与えられれば、変位は容易に求められる。

ところが弾性杭の運動方程式は、その撓みを $f(z)e^{i\omega t}$ とすれば

$$-\frac{wA\sigma^2}{g}f(z) + EI\frac{d^4f(z)}{dz^4} = p_H(z) + p_R(z) \quad (2.42)$$

となる。ここに、 wA = 杭の単位長あたり重量、 EI = 杭の曲げ剛性、 $p_H(z)$ = 固定杭に作用する波力(2.15)、 $p_R(z)$ = 造波抵抗 (2.29)。

この造波抵抗 $p_R(z)$ は、未知関数 $f(z)$ に関する積分を含んでいる。したがって (2.42) は微積分方程式となり、解を求めることは甚だ困難である。

(3) 一自由度系への置換えによる近似化

(2.42)式そのままでは解き難いので、以下のような置換えによって近似的に考察を進めることとする(図2.8)。

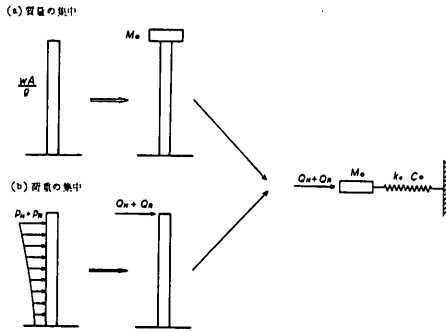


図2.8 杭の等価一自由度系

a) 質量の集中化

杭の分布質量の代りに、それと等価な杭頭集中質量を考える。例えば片持梁の基本振動の場合、自由端における等価集中質量は、杭の全質量の約1/4である。

b) 荷重の集中化

波力ならびに造波抵抗を静的分布荷重とし、それによる杭頭変位を生ぜしめるような等価集中荷重を考える。造波抵抗の計算に必要な撓み曲線には、杭頭に静的集中荷重が作用したときのものを用いる。

このように置換えれば、杭の運動は一自由度の振動系によって表わされ、造波抵抗の影響を近似的に評価できることとなる。具体的計算例を次の2節で示す。

2.4 頭部自由杭に対する造波抵抗の影響

この節では、海底で固定された図2.9 のような頭部自由杭を対象とする。計算を簡単にするため、杭長は水深と等しいものとする。

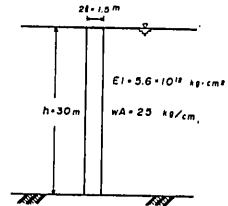


図2.9 頭部自由杭の諸元

(1) 杭頭集中荷重による静的撓み曲線に基づく造波抵抗

杭頭に集中荷重 Q が作用したときの静撓み曲線は

$$f(z) = \frac{Qh^3}{2EI} \left\{ \frac{(h+z)^2}{h^2} - \frac{(h+z)^3}{3h^3} \right\} \quad (2.43)$$

である。したがって杭頭変位 δ は

$$\delta = \frac{Qh^3}{3EI} \quad (2.44)$$

となり、これを用いれば (2.43) は

$$f(z) = \left\{ \frac{3(h+z)^2}{2h^2} - \frac{(h+z)^3}{2h^3} \right\} \delta \quad (2.45)$$

と表わされる。

この撓み曲線に基づく造波抵抗は、(2.29)によって求められる。まず積分を遂行して

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h}^0 f(z) \cosh k(h+z) dz &= \frac{\delta h}{(kh)^4} S \\ S &= (kh)^3 \sinh kh - \frac{3}{2}(kh)^2 \cosh kh + 3(\cosh kh - 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h}^0 f(z) \cos k_j(h+z) dz &= \frac{\delta h}{(k_jh)^4} S_j \\ S_j &= (k_jh)^3 \sin k_jh + \frac{3}{2}(k_jh)^2 \cos k_jh + 3(\cos k_jh - 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

と置く。

これを (2.29) に代入すると

$$p_R = q \cosh k(h+z) + \sum_j q_j \cos k_j(h+z) \quad (2.48)$$

の形となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} q &= \pi \rho l^2 \sigma^2 \delta \frac{kh}{n \sinh kh \cosh kh} \frac{S}{(kh)^4} (R_{jY} - iI_{jY}) \\ q_j &= \pi \rho l^2 \sigma^2 \delta \frac{k_jh}{n_j \sin k_jh \cos k_jh} \frac{S_j}{(k_jh)^4} R_j \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

である。

(2) 等価集中荷重

まず造波抵抗 (2.48) の第1項だけを考えると、このような静的分布荷重のもとでの杭の弾性方程式は

$$EI \frac{d^4 f(z)}{dz^4} = q \cosh k(h+z) \quad (2.50)$$

である。これを境界条件

$$\left. \begin{aligned} f(-h) = f'(-h) = 0 \\ f''(0) = f'''(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

と共に解き、杭頭変位 δ を求めると

$$\delta = \frac{q}{3EI k^4} S \quad (2.52)$$

となる。

一方、杭頭集中荷重 Q による変位は (2.44) のとおりであるから、この両者を等しいとおいて等価集中荷重 Q が定まる。すなわち

$$Q = \frac{qh}{(kh)^4} S \quad (2.53)$$

である。

(2.48) の級数項に対しても、同様にして

$$Q_j = \frac{q_j h}{(k_j h)^4} S_j \quad (2.54)$$

を得る。

したがって全造波抵抗に等価な集中荷重は、これらを加えさせて

$$\begin{aligned} Q_R = \pi \rho l^2 h \sigma^2 \delta \left[\frac{kh}{n \sinh kh \cosh kh} \left\{ \frac{S}{(kh)^4} \right\}^2 \right. \\ \left. \times (R_{JY} - iI_{JY}) \right. \\ \left. + \sum_j \frac{k_j h}{n_j \sin k_j h \cos k_j h} \left\{ \frac{S_j}{(k_j h)^4} \right\}^2 R_j \right] \quad (2.55) \end{aligned}$$

と表わされる。

(3) 附加質量の評価

(2.55) の等価造波抵抗を

$$Q_R = -M_1 (-\sigma^2 \delta) - c_1 (i\sigma \delta) \quad (2.56)$$

の形に書けば、附加質量は

$$\begin{aligned} M_1 = \pi \rho l^2 h \left[\frac{kh}{n \sinh kh \cosh kh} \left\{ \frac{S}{(kh)^4} \right\}^2 R_{JY} \right. \\ \left. + \sum_j \frac{k_j h}{n_j \sin k_j h \cos k_j h} \left\{ \frac{S_j}{(k_j h)^4} \right\}^2 R_j \right] \quad (2.57) \end{aligned}$$

である。

片持梁の基本振動周期を Rayleigh の方法で求める場合、自由端に荷重を加えたときの静撓み曲線を仮定すれば、等価集中質量は

$$M_0 = \frac{33}{140} \frac{wAh}{g} = \frac{wAh}{4g} \quad (2.58)$$

である。

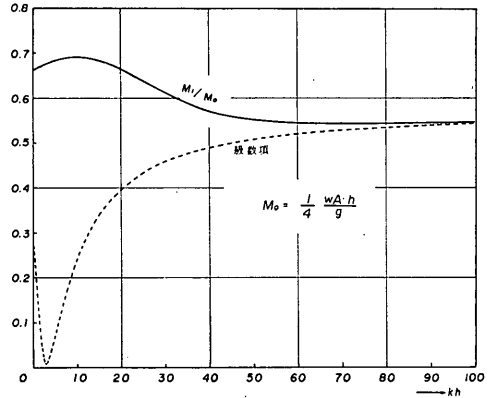


図2.10 頭部自由杭における附加質量

図2.9に示した杭について、このような M_1 と M_0 との比を計算すると、図2.10のように大略0.6の程度となる。この杭の空中固有周期（基本振動の）は約1 sec であるから、 $kh \approx 120$ であるから、 $M_1/M_0 \approx 0.55$ 、したがって水中固有周期は $1 \times \sqrt{1+0.55} \approx 1.2$ sec に増大する。

固有周期の変化は、杭の動的応答特性に当然影響するが、外力を規則波として扱うにせよ、また不規則波として扱うにせよ、予想される来襲波の周期範囲を網羅した応答計算を行えば、共振周期が僅かにずれるだけで、特別の問題を生ずることはないであろう。

(4) 減衰項の評価

減衰係数は (2.55) より

$$c_1 = \pi \rho l^2 h \sigma \frac{kh}{n \sinh kh \cosh kh} \left\{ \frac{S}{(kh)^4} \right\}^2 I_{JY} \quad (2.59)$$

となる。

これに対応する対数減衰率は

$$\left. \begin{aligned} \log A = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta = \frac{c_1}{2\sqrt{k_0(M_0+M_1)}} \\ k_0 = \frac{3EI}{h^3} \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

である。

図2.11は、前と同じ例について計算した対数減衰率である。もし空中で $\log A=0.05$ 程度の値を用いていたとすると、造波抵抗中の減衰項の影響はかなり大きいと考えざるを得ない。特に共振点では、動的増幅率（ほぼ $1/2\beta$ ）は減衰定数に決定的な影響を受ける。したがって造波抵抗の取入れ方が結果を大きく左右するが、それを過大評価すると危険側の設計となってしまう。一方、本来の減衰定数を設計時に適確に定めることにも困難があり、更には抗力成分の影響も考慮せねばならず、問題はなかなか複雑である。

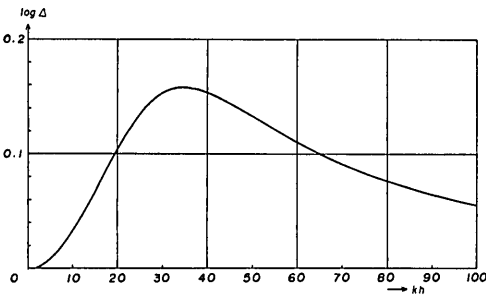


図2.11 頭部自由杭における対数減衰率

2.5 上部工を有する杭における造波抵抗の影響

本節では、図2.12のような上部工を有する杭を考える。これは有脚プラットフォームを単純化したもので、上部工は水平にのみ移動可能とする。また前節と同じく杭長は水深に等しいと仮定するが、上部工は波力を受けないものとする。

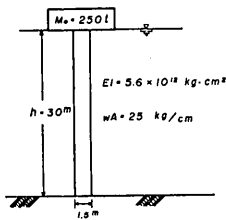


図2.12 上部工を有する杭の諸元

(1) 杭頭集中荷重による静的撓み曲線に基づく造波抵抗

杭頭に集中荷重 Q が作用したときの静撓み曲線は、杭頭の境界条件を

$$f'(0) = f'''(0) = 0 \quad (2.61)$$

として求めると、

$$f(x) = \left\{ \frac{3(h+x)^2}{h^2} - \frac{2(h+x)^3}{h^3} \right\} \delta \quad (2.62)$$

となる。ただし杭頭変位 δ は

$$\delta = \frac{Qh^3}{12EI} \quad (2.63)$$

で与えられる。

この静撓み曲線に基づく造波抵抗は、(2.49) 中の S, S_j の代りに次の F, F_j を用いて (2.48) のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} F &= (kh)^3 \sinh kh - 6(kh) \sin kh + 12(\cosh kh - 1) \\ F_j &= (kjh)^3 \sin kjh + 6(kjh) \sin kjh + 12(\cos kjh - 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

(2) 等価集中荷重

前節と同様にして、造波抵抗が静的分布荷重として作用したときの杭頭変位を算出する。境界条件は、(2.51) 下式の代り (2.61) を用いればよい。結果は

$$\delta = \frac{q}{12EI k^4} F \quad (2.65)$$

の形となるので、これを (2.63) と等しいとおけば、

$$Q = \frac{qh}{(kh)^4} F \quad (2.66)$$

となり、(2.53) と対応する。 Q_j についても同様である。

したがって全造波抵抗に等価な集中荷重 Q_R は、(2.55) 中の S, S_j を F, F_j で置換えたものとなる。

(3) 附価質量の評価

杭自体の分布質量を

$$M_0 = \frac{13 wAh}{35 g} \quad (2.67)$$

なる等価集中質量で置換え、計算を遂行すると図2.13のような値が得られる。頭部自由杭の場合とほとんど同じで、 $M_1/M_0 = 0.6$ の程度である。

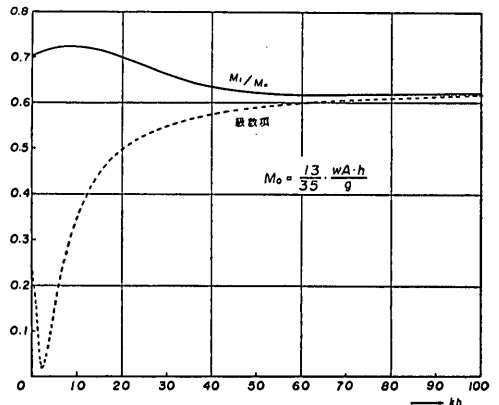


図2.13 上部工を有する杭における附加質量

上部工の質量が大きく、杭自体の質量がもともと小さければ、附加質量の影響もあまり考えなくてよいし、多少の影響があったとしても、前節と同じ理由により、実際上特に考慮する必要はないだろう。

(4) 減衰項の評価

減衰係数 c_1 は、(2.59) 中の S の代りに F を入れれば求められる。その c_1 自体は、頭部自由杭の場合よりやや大きい、著しい相異ではない。しかし、減衰定数ならびに対数減衰率に対しては、(2.60) の下2式の代りに

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{c_1}{2\sqrt{k_0(M+M_1+M_2)}} \\ k_0 &= \frac{12EI}{h^3} \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

とおくこととなり、上部工の質量 M が非常に大きいため図2.14に示すとおり、頭部自由杭よりはるかに小さな値となる。

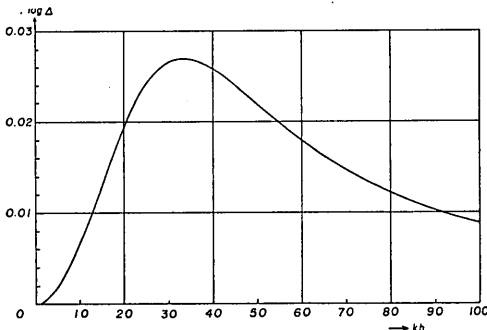


図2.14 上部工を有する杭における対数減衰率

したがってこの計算例の程度の条件であれば、造波抵抗に基づく減衰項は無視し得る。もちろん、抗力成分の影響の評価は別箇に検討の要がある。

3. 円形浮体に作用する波力と造波抵抗

3.1 固定円形浮体に作用する波力

前章で扱った固定円柱の場合との違いは、浮体下方に底層領域が存在することである。そのため計算の煩雑さが増すが、減衰の定常波に相当する無限級数項を省略して近似的に取扱う。

(1) 周辺領域の速度ポテンシャル

図3.1の座標系と記号を用いる。周辺領域 ($r \geq l$) における速度ポテンシャルは、(2.2) に示した入射波の ϕ_i と、散乱波による (2.7) の形の ϕ_s とから成るが、この近似理論では、 ϕ_s 中の k_j を含む級数項は省略する。

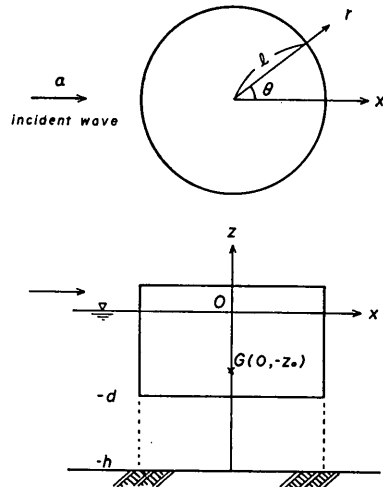


図3.1 座標系と記号

したがって、(2.9) の展開式を用いると、周辺領域の速度ポテンシャル ϕ_M は

$$\begin{aligned} \phi_M &= \left[\frac{ga}{\sigma} J_0(kr) + A_0 H_0^{(2)}(kr) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2(-i)^n \frac{ga}{\sigma} J_n(kr) + A_n H_n^{(2)}(kr) \right] \cos n\theta \right] \\ &\quad \times \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \end{aligned} \quad (3.1)$$

と表わされる。

(2) 底層領域の速度ポテンシャル

浮体下方の底層領域 ($r \leq l, z = -d \sim -h$) での基本方程式は (2.1) と同じであるが、海底面と浮体底面とで鉛直速度が0という境界条件により、解は

$$r^n \times \cos n\theta \quad (3.2)$$

および

$$\left. \begin{aligned} I_n\left(\frac{m\pi r}{h-d}\right) \\ K_n\left(\frac{m\pi r}{h-d}\right) \end{aligned} \right\} \times \cos n\theta \times \cos \frac{m\pi}{h-d}(h+z) \quad (3.3)$$

の形となる (I_n, K_n は変形された Bessel 関数)。ここでは第二の部分を省略し、底層領域の速度ポテンシャル ϕ_B を

$$\phi_B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n \cos n\theta \quad (3.4)$$

とする。

(3) 圧力および流速の連続条件

圧力の連続条件は

$$r=l \text{ で } \phi_M = \phi_B \quad (3.5)$$

である。これを $z = -d \sim -h$ での平均値を以て考えると、(3.1) と (3.4) とから

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{ga}{\sigma} J_0(kl) + A_0 H_0^{(2)}(kl) \right\} f_B = B_0 \\ \left\{ 2(-i)^n \frac{ga}{\sigma} J_n(kl) + A_n H_n^{(2)}(kl) \right\} f_B = B_n l^n, n=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} f_B &= \frac{1}{h-d} \int_{-h}^{-d} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz \\ &= \frac{\sinh k(h-d)}{k(h-d) \cosh kh} \end{aligned} \quad (3.7)$$

である。

次に水平速度の連続条件は

$$\left. \begin{aligned} r=l \text{ で } \frac{\partial \phi_M}{\partial r} = 0, \quad z=0 \sim -d \\ = \frac{\partial \phi_B}{\partial r}, \quad z=-d \sim -h \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

である。

(3.1), (3.4) から $\partial \phi / \partial r$ を計算して (3.8) に代入し、その両辺に $\cosh k(h+z) / \cosh kh$ をかけて海底から海面まで積分すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{ga}{\sigma} J_0'(kl) + A_0 H_0^{(2)'}(kl) = 0 \\ \left\{ 2(-i)^n \frac{ga}{\sigma} J_n'(kl) + A_n H_n^{(2)'}(kl) \right\} \frac{cg\sigma}{g} \\ = n B_n l^{n-1} (h-d) f_B, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

となる。

(3.6), (3.9) の両式から係数 A_n, B_n が定まる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{ga}{\sigma} \frac{J_0'}{H_0^{(2)'}} \\ A_n &= -2(-i)^n \frac{ga}{\sigma} \frac{J_n' - n y_B J_n}{H_n^{(2)'} - n y_B H_n^{(2)'}} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= -\frac{ga}{\sigma} \frac{2if_B}{\pi kl} \frac{1}{H_0^{(2)'}} \\ B_n &= -\frac{ga}{\sigma} \frac{2if_B}{\pi kl} \frac{2(-i)^n}{l^n} \frac{1}{H_n^{(2)'} - y_B H_n^{(2)'}} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

ただし

$$y_B = \frac{g}{\sigma^2 l} \frac{k(h-d) f_B^2}{n} \quad (3.12)^*$$

である。

(4) 作用波力

全水平力は

$$P_H = -2 \int_{-d}^0 dz \int_0^\pi \rho i \sigma \phi_M(l) \cos \theta \cdot l d\theta \quad (3.13)$$

であるが、 ϕ_M のうちこの積分で残るのは $n=1$ の項のみであり、計算を遂行すると

$$\begin{aligned} \frac{P_H}{2\rho g d l a} &= \frac{2if_H}{kl \{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)'}\}} \\ &= \frac{2if_H}{\{kl J_0 - (1 + kly_B) J_1\} - i \{kl Y_0 - (1 + kly_B) Y_1\}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} f_H &= \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz \\ &= \frac{\sinh kh - \sinh k(h-d)}{kd \cosh kh} \end{aligned} \quad (3.15)$$

である。

全揚圧力は

$$P_U = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^l \rho i \sigma \phi_B(-d) r dr \quad (3.16)$$

である。この積分で残るのは $n=0$ の項のみで、

$$\begin{aligned} \frac{P_U}{\pi \rho g l^2 a} &= \frac{2f_B}{\pi kl} \frac{1}{H_0^{(2)'}} \\ &= -\frac{2f_B}{\pi kl} \frac{1}{J_1 - i Y_1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。

浮体の重心 G を通る水平軸のまわりの波力モーメントのうち、水平波圧によるものは

$$M_H = 2 \int_{-d}^0 (z - z_0) dz \int_0^\pi \rho i \sigma \phi_M(l) \cos \theta \cdot l d\theta \quad (3.18)$$

であり、また揚圧力によるものは

$$M_U = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^l \rho i \sigma \phi_B(-d) r \cos \theta \cdot r dr \quad (3.19)$$

* この中の n は c_g/c を表わし、(2.24) で与えられる。級数項の $n=1, 2, \dots$ と混同しないよう注意。

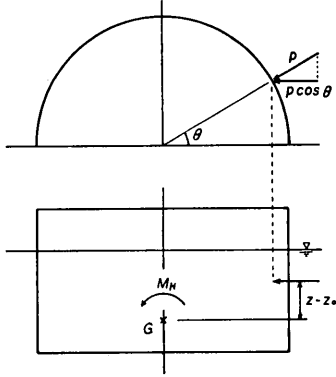


図3.2 水平力による波力モーメント

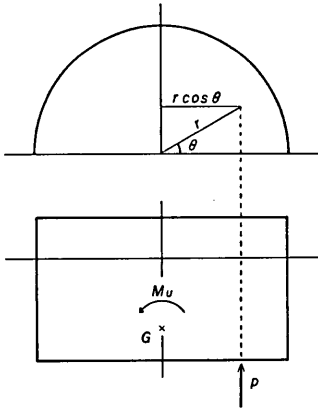


図3.3 揚圧力による波力モーメント

である。計算を遂行すると、全波力モーメント $M_T = M_H + M_U$ は

$$\begin{aligned} \frac{M_T}{2\rho g d l^2 a} &= -\frac{2if_M}{kl\{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}\}} \\ &= -\frac{2if_M}{\{kJ_0 - (1 + kly_B)J_1\} - i\{kLY_0 - (1 + kly_B)Y_1\}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

となる。ただし

$$f_M = f_{MH} + \frac{l}{4d} f_B \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} f_{MH} &= \frac{1}{dl} \int_{-d}^0 (z - z_0) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz \\ &= \frac{1}{kdkl \cosh kh} \{-kz_0 \sinh kh + k(d+z_0) \\ &\quad \times \sinh k(h-d) - \cosh kh + \cosh k(h-d)\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

である。

図3.4, 3.5は, Garrett の行なった計算²⁾とこの近似理論によるものとの比較である。極めて良好な近似といえよう。

なお (3.14) に示した水平波力は, 浮体底面が海底に達しているとき ($d \rightarrow h$, このとき $y_B \rightarrow 0$), (2.15) を積分した全波力と当然一致する。

3.2 水平振動に対する造波抵抗

本節から, 円形浮体の水平・鉛直・回転振動に対する造波抵抗を順次計算して行く。

(1) 速度ポテンシャル

浮体が水平方向に $\xi e^{i\sigma t}$ なる運動をし, 鉛直および回転運動はないものとする。この運動方向に x 軸をとる。

このとき浮体底面に鉛直速度はないから, 底層領域の速度ポテンシャルは固定浮体の場合の (3.4) と同形である。すなわち

$$\phi_B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n \cos n\theta \quad (3.23)$$

また周辺領域では, (3.1) のうち散乱波に対する部分のみをとればよい。すなわち

$$\phi_M = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (3.24)$$

これらから, 固定浮体のときと同様な圧力の連続条件により

$$A_n H_n^{(2)}(kl) f_B = B_n l^n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

が得られる。

円柱壁面に直角外向きの速度成分は $i\sigma \xi \cos \theta$ であるから, 水平速度の連続条件式は

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 0 \\ -\frac{c_g \sigma}{g} A_1 H_1^{(2)'}(kl) &= i\sigma \xi d f_H - B_1 (h-d) f_B \\ -\frac{c_g \sigma}{g} A_n H_n^{(2)'}(kl) &= -n B_n l^{n-1} (h-d) f_B, \\ &\quad n=2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

となる。

(3.25), (3.26) の両式より, 次のような各係数値が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{ig\xi}{\sigma} \frac{kdf_H}{n} \frac{1}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \\ B_1 &= -\frac{ig\xi}{\sigma} \frac{kdf_H f_B}{n} \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \\ A_0 &= A_2 = \dots = B_0 = B_2 = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

円柱の動揺に伴う造波抵抗

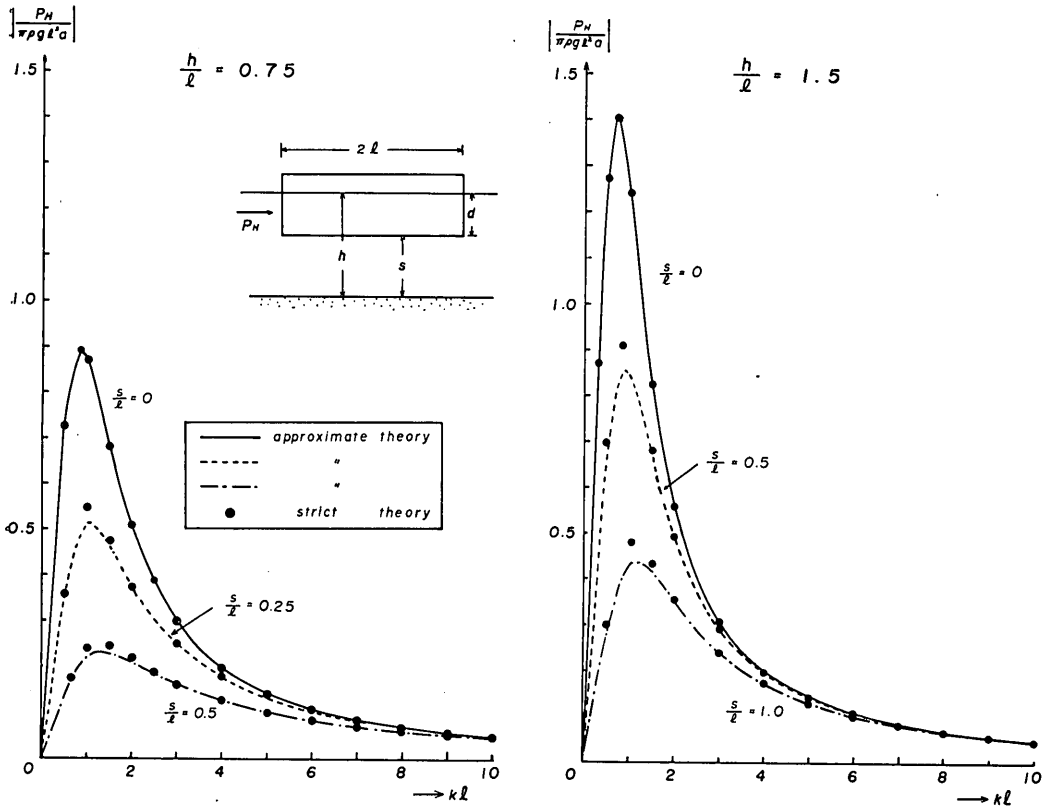


図3.4 精密計算との比較 (水平力)

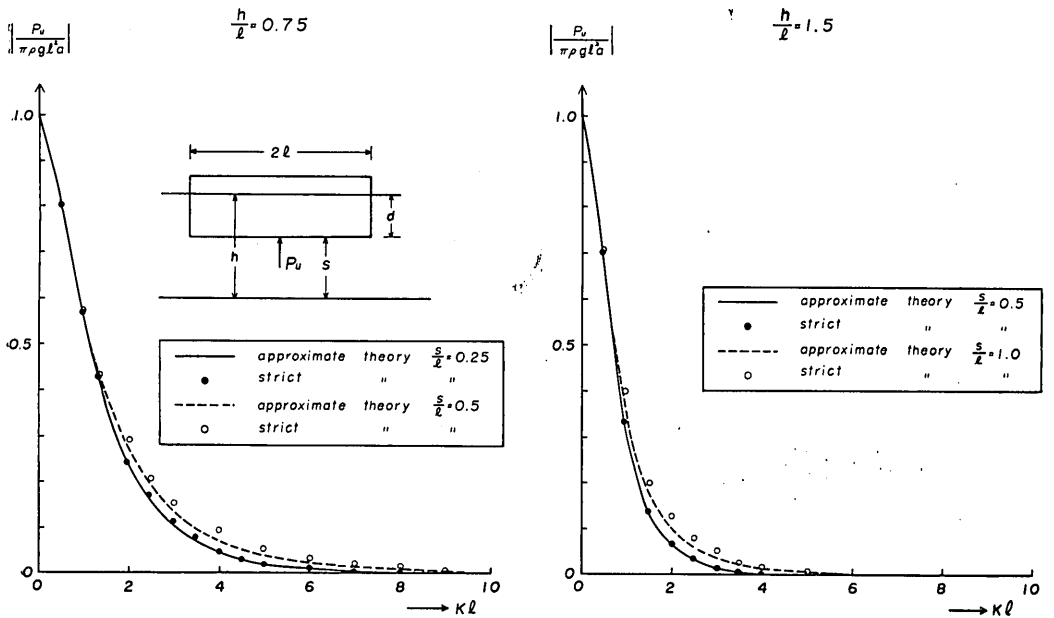


図3.5 精密計算との比較 (揚圧力)

したがって各領域の速度ポテンシャルは

$$\phi_M = -\frac{ig\xi}{\sigma} \frac{kdf_H}{n} \frac{H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \cos \theta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (3.28)$$

$$\phi_B = -\frac{ig\xi}{\sigma} \frac{kdf_H f_B}{n} \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \frac{r}{l} \cos \theta \quad (3.29)$$

(2) 造波抵抗

固定浮体の場合と全く同様にして、以下のような水平造波抵抗および造波抵抗モーメントを得る。なお、浮体の運動方向の前後に正負対称の波を発生しているので、それによる揚圧力の合力、すなわち鉛直造波抵抗は0である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_H}{2\rho g d l \xi} &= -\frac{\pi k d f_H^2}{2n} \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \\ \frac{M_T}{2\rho g d l^2 \xi} &= \frac{\pi k d f_H f_M}{2n} \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

$$\frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} = \frac{kl(J_1 - iY_1)}{\{klJ_0 - (1 + kl y_B)J_1\} - i\{klY_0 - (1 + kl y_B)Y_1\}} \quad (3.31)$$

3.3 鉛直振動に対する造波抵抗

(1) 底層領域の速度ポテンシャル

浮体が鉛直方向に $\xi e^{i\omega t}$ なる運動をしているものとする。浮体底面の鉛直速度 $i\sigma\xi$ を境界条件として、基本方程式(2.1)を解けばよい。今の場合、 θ に関して一様であるから、基本式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.32)$$

これを解くには、有限 Fourier cosine 変換³⁾を用いるのが便利である。まず

$$y = \frac{h+z}{h-d} \pi \quad (3.33)$$

として(3.32)を書直すと

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \left(\frac{\pi}{h-d} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.34)$$

となる。

$\phi(r, y)$ の有限 Fourier cosine 変換は

$$\phi_c(r, m) = \int_0^\pi \phi(r, y) \cos my dy, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

である。(3.34)に変換を施し、かつ

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi'(r, \pi) = -\frac{h-d}{\pi} i\sigma\xi \quad (3.36)$$

なる境界条件を考慮すると

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_c}{dr} \right) - \left(\frac{m\pi}{h-d} \right)^2 \phi_c = \frac{\pi}{h-d} (-1)^m i\sigma\xi \quad (3.37)$$

となる。

この微分方程式の一般解は

$$\left. \begin{aligned} m=0 \text{ のとき } \phi_c(r, 0) &= \text{const.} \\ m \neq 0 \text{ のとき } \phi_c(r, m) &= \left\{ \begin{aligned} I_0 \left(\frac{m\pi r}{h-d} \right) \\ K_0 \left(\frac{m\pi r}{h-d} \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

の形となり、その逆変換は

$$\phi(r, y) = \frac{1}{\pi} \phi_c(r, 0) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_c(r, m) \cos my \quad (3.39)$$

で与えられる。これは、固定浮体の場合の(3.2)、(3.3)に相当する($n=0$ とおく)。この近似理論では(3.39)右辺の級数項を省略する。

また(3.37)の特解は

$$\left. \begin{aligned} \phi_c(r, 0) &= \frac{\pi}{h-d} \frac{r^2}{4} i\sigma\xi \\ \phi_c(r, m) &= -\frac{h-d}{\pi} \frac{(-1)^m}{m^2} i\sigma\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

である。これの逆変換も(3.39)で求められるが、このときの級数項は省略せず

$$\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos my = \frac{y^2}{2\pi} - \frac{\pi}{6} \quad (3.41)$$

の関係を利用して整理する。

このようにして、底層領域の速度ポテンシャルは結局次のとおりとなる。

$$\phi_B = \frac{i\sigma\xi}{h-d} \left\{ \frac{r^2}{4} - \frac{(h+z)^2}{2} + C \right\} \quad (3.42)$$

(2) 周辺速度ポテンシャル

周辺領域については、散乱波に対する(3.24)のうち θ に関係しない項のみをとると

$$\phi_M = A_0 H_0^{(2)}(kr) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (3.43)$$

となる。

(3.42) と (3.43) とを、これまでと同様に圧力および水平速度の連続条件で結び合わせるのであるが、このとき簡単のため、 z の関数となっている ϕ_B をその鉛直方向平均値で置換える。

こうした計算を経て、各領域の速度ポテンシャルは

$$\phi_M = \frac{ig\zeta}{\sigma} \frac{k l f_B}{n} \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_0^{(2)'}} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (3.44)$$

$$\phi_B = \frac{i\sigma\zeta}{h-d} \left\{ \frac{r^2 - l^2}{4} - \frac{(h+z)^2}{2} + \frac{(h-d)^2}{6} + \frac{H_0^{(2)}}{2H_0^{(2)'}} \gamma_B l^2 \right\} \quad (3.45)$$

となる。

(3) 造波抵抗

浮体底面に作用する揚圧力の計算により、鉛直方向の造波抵抗は

$$\frac{P_U}{\pi \rho g l^2 \zeta} = \frac{\sigma^2}{g(h-d)} \left\{ \frac{l^2}{8} + \frac{(h-d)^2}{3} \right\} - \frac{k l f_B^2}{2n} \frac{H_0^{(2)}}{H_0^{(2)'}} \quad (3.46)$$

$$\frac{H_0^{(2)}}{H_0^{(2)'}} = -\frac{J_0 - iY_0}{J_1 - iY_1} \quad (3.47)$$

となる。

水平造波抵抗および造波抵抗モーメントは、今の場合周囲に一樣な波を発生しているのであるから、共に 0 である。

3.4 回転振動に対する造波抵抗

(1) 速度ポテンシャル

重心を通る水平軸のまわりに $\theta e^{i\omega t}$ なる回転運動をしているものとする。底層領域については、鉛直振動のときと同様、方程式 (2.1) に有限 Fourier cosine 変換を施して解を求める。今の場合、浮体底面の鉛直速度は $i\sigma\theta r \cos\theta$ で与えられ、変換 $\phi_c(r, \theta, m)$ に関する方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial \theta^2} - \left(\frac{m\pi}{h-d} \right)^2 \phi_c = \left(\frac{\pi}{h-d} \right)^2 (-1)^m i\sigma\theta r \cos\theta \quad (3.48)$$

となる。

これを解き、その逆変換を求めると

$$\phi_B = \sum_{n=0}^{\infty} B_0 r^n \cos n\theta + \frac{i\sigma\theta}{h-d} \left\{ \frac{r^2}{8} + \frac{(h-d)^2}{6} - \frac{(h+z)^2}{2} \right\} r \cos\theta \quad (3.49)$$

が得られる。

周辺領域の速度ポテンシャルは、水平運動の場合と同じく

$$\phi_M = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (3.50)$$

である。

水平速度の連続条件に用いる壁面直角方向の運動速度成分は、図 3.6 に示すとおり $-i\sigma\theta(z-z_0) \cos\theta$ である。圧力の連続条件と共に各係数値を定めると、速度ポテンシャルは結局次のようになる。

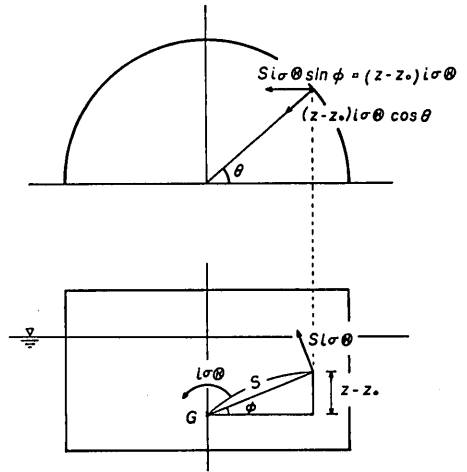


図 3.6 回転運動による壁面速度

$$\phi_M = \frac{ig l \theta k d f_M}{\sigma} \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'}} \frac{r}{-y_B H_1^{(2)'}} \frac{r}{l} \cos\theta \quad (3.51)$$

$$\phi_B = \frac{ig l \theta k d f_M f_B}{\sigma} \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'}} \frac{r}{-y_B H_1^{(2)'}} \frac{r}{l} \cos\theta + \frac{i\sigma\theta}{h-d} \left\{ \frac{r^2 - l^2}{8} + \frac{(h-d)^2}{6} - \frac{(h+z)^2}{2} \right\} r \cos\theta \quad (3.52)$$

(2) 造波抵抗

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_H}{2\rho g d l \cdot l\theta} &= \frac{\pi k d f_H f_M}{2n} \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'}} \frac{r}{-y_B H_1^{(2)'}} \\ \frac{M_T}{2\rho g d l^2 \cdot l\theta} &= \frac{\pi l \sigma^2}{24g d (h-d)} \left\{ \frac{l^2}{8} + (h-d)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{\pi k d f_M^2}{2n} \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'}} \frac{r}{-y_B H_1^{(2)'}} \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

なお鉛直造波抵抗は、水平運動のときと同じく 0 である。

3.5 円形浮体の運動方程式

前節までに固定浮体に作用する波力と、運動浮体に対する造波抵抗とを算出した。ほかに静水圧の復原力を求めれば、浮体の運動方程式を立てることができる。その過程で、附加質量や固有周期に言及する。

(1) 静水圧的復原力と復原モーメント

浮体の鉛直変位 ζ に対する鉛直上向きの復原力は

$$P_S = -\pi\rho g l^2 \zeta \quad (3.54)$$

である。

また回転角 θ に対する復原モーメントは

$$M_S = -\pi\rho g d l^2 \overline{GM} \theta \quad (3.55)$$

である。ただし

$$\overline{GM} = \frac{l^2}{4d} - \frac{d}{2} - z_0 \quad (3.56)$$

(2) 附加質量と附加慣性モーメント

鉛直造波抵抗 (3.46) の右辺第 1 項に関して

$$M_1 = \frac{\pi\rho l^2}{h-d} \left\{ \frac{l^2}{8} + \frac{(h-d)^2}{3} \right\} \quad (3.57)$$

とおくと、この項に対応する造波抵抗は $-M_1(-\sigma^2\zeta)$ となる。 M_1 は浮体の寸法と水深のみで定まる附加質量である。

また (3.47) を更に実部と虚部とに分けると

$$\frac{H_0^{(2)}}{H_0^{(2)'}} = -\frac{J_0 J_1 + Y_0 Y_1}{J_1^2 + Y_1^2} + \frac{2i}{\pi k l} \frac{1}{J_1^2 + Y_1^2} \quad (3.58)$$

となるので、(3.46)の右辺第 2 項に対応する造波抵抗は

$$\begin{aligned} & -\pi\rho g l^2 \frac{1}{\sigma^2} \frac{J_0 J_1 + Y_0 Y_1}{J_1^2 + Y_1^2} (-\sigma^2 \zeta) \\ & -2\rho g l \frac{1}{k\sigma(J_1^2 + Y_1^2)} (i\sigma\zeta) \end{aligned} \quad (3.59)$$

と表わされ、実部はやはり附加質量の一部に、虚部は減衰抵抗に相当することがわかる。これらは浮体の運動周期によっても変化する。

次に (3.53) の造波抵抗モーメント M_T の右辺第 1 項に関して

$$I_1 = \frac{\pi\rho l^4}{12(h-d)} \left\{ \frac{l^2}{8} + (h-d)^2 \right\} \quad (3.60)$$

とおくと、これは幾何学的寸法のみで定まる附加慣性モーメントを表わす。

同じく右辺第 2 項については、(3.31)を更に変形すると

$$\begin{aligned} & \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'}} = \frac{H_1^{(2)}}{-y_B H_1^{(2)}} \\ & = \frac{k l (J_0 J_1 + Y_0 Y_1) - (1 + k l y_B) (J_1^2 + Y_1^2) + 2i/\pi}{\{k l J_0 - (1 + k l y_B) J_1\}^2 + \{k l Y_0 - (1 + k l y_B) Y_1\}^2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

となるので、その実部は附加慣性モーメントに影響し、虚部は減衰抵抗に対応する。

上記の附加質量 M_1 と附加慣性モーメント I_1 は、その誘導の過程からわかるように、何れも浮体底面がある鉛直速度をもつという条件に由来するものである。したがって水平運動のみのときは、こうした形の附加質量は現れない。

しかし、(3.30)の水平造波抵抗 P_H を (3.61) によって分解すれば、附加質量および減衰抵抗が現れる。これらは $d \rightarrow h$ のとき、前章で述べた剛な円柱におけるもの(ただしそこでの級数項は省略)と当然一致する。

(3) 固有振動数

鉛直振動および回転振動に対し、以下のような固有振動数を導入しておくと、後の運動方程式の表現が簡単となる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{V1}^2 &= \frac{\pi\rho g l^2}{M_0 + M_1} \\ \omega_{R1}^2 &= \frac{\pi\rho g d l^2 \overline{GM}}{I + I_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

ただし、 M_0 は浮体本来の質量、 I は重心を通る水平軸のまわりの慣性モーメントである。なお、これらの固有振動数は、前述のような附加質量・附加慣性モーメントのすべては含んでいないので、正確な固有振動数とは一致しない。

(4) 運動方程式

来襲波のもとで運動している浮体に作用する外力は

$$\begin{aligned} & (\text{浮体が固定されているとしたときの波力}) \\ & + (\text{浮体の運動に対する造波抵抗}) \\ & + (\text{静水圧的復原力}) + (\text{拘束力}) \end{aligned}$$

である。これと

$$(\text{浮体の質量}) \times (\text{加速度})$$

とを等しいとおけば運動方程式が導びかれる。

拘束力の水平・鉛直成分をそれぞれ R_H , R_V また拘束モーメントを M_R とし(何れも座標軸の正の向きにとる)、前述の附加質量や固有振動数を用いて運動方程式を立てると、以下のように表わすことができる。

水平運動:

円柱の動揺に伴う造波抵抗

$$\begin{aligned}
 -\sigma^2 M_0 \xi &= \frac{4i\rho g d l f_H a}{kl[H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}]} \\
 -\rho g d l \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \frac{\pi k d f_H^2}{n} \xi \\
 + \rho g d l \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \frac{\pi k d f_H f_M}{n} l \theta + R_H \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

鉛直運動：

$$\begin{aligned}
 -(\sigma^2 - \omega_{V1}^2)(M_0 + M_1)\xi &= \pi \rho g l^2 \frac{2f_B}{\pi k l} \frac{a}{H_0^{(2)'}} \\
 -\pi \rho g l^2 \frac{k l f_B^2}{2n} \frac{H_0^{(2)}}{H_0^{(2)'}} \xi + R_V \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

回転運動：

$$\begin{aligned}
 -(\sigma^2 - \omega_{R1}^2)(I + I_1)\theta &= -\frac{4i\rho g d l^2 f_M a}{kl[H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}]} \\
 + \rho g d l^2 \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \frac{\pi k d f_H f_M}{n} \xi \\
 - \rho g d l^2 \frac{H_1^{(2)}}{H_1^{(2)'} - y_B H_1^{(2)}} \frac{\pi k d f_M^2}{n} l \theta + M_R \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

以上の3式を解くことにより、自由浮体・半自由浮体・バネ繫留浮体・緊張繫留浮体など、簡単な拘束条件のもとにある浮体の挙動は容易に求められる。ここには掲げないが、緊張繫留浮体についての計算例を別の資料⁴⁾に示した。

なお、各方向からの波が同時に作用する三次元的運動の場合も、上記の運動方程式の拡張によって解き得る筈である。

4. む す び

(1) 本報告の前半では、杭の波力応答における造波抵抗の役割を考察し、いわゆる相対運動の取扱いならびにその影響を論じた。

(2) 円柱の運動に基づく造波抵抗は、周辺の数値ポテンシャルを求めて計算することができ、附加質量と減衰項との2成分にわけられる。

(3) 例えば剛な杭の水平振動のような場合、附加質量や減衰係数の定量的評価は容易である。しかし弾性杭においては、ある点での造波抵抗がその点のみの加速度や速度で表わし得ないため、取扱いが困難である。そこで杭頭に等価集中質量および荷重を仮定した一自由度系に置換えて、近似的な評価を試みた。

(4) 頭部自由杭に関する計算例によれば、附加質量による固有周期の変化はあまり著しくないが、減衰項は本

来のものと同程度の値となり、その影響は大きい。

(5) 上部工を有する杭の場合は、上部工の質量がもとと大きければ、附加質量や減衰項の影響は小さい。

(6) 何れについても、抗力成分における相対運動の効果は別途検討の要がある。これら相対運動に基づくものと、構造物本来のものとをあわせ、減衰定数の想定が応答計算中の重要な因子となる。

(7) 本報告の後半では、円形浮体について固定時の波力と水平・鉛直・回転各振動に基づく造波抵抗を算出し、運動方程式を導いた。

(8) これは定常的減衰波に相等する級数項を省略した近似理論であるので、計算値としての精度は十分でない場合もあり得るが、現象に關与する主な因子の役割は大略把握できる。

(9) 導びかれた運動方程式を解けば、簡単な拘束条件のもとにある円形浮体の挙動は容易に求められる。

(10) もちろん、波力のうちの抗力成分や各種の損失など、完全流体の理論から導き得ないものは、実験結果などを参照して適宜考慮しなければならない。

(1972年6月30日受付)

参 考 文 献

- 1) 伊藤喜行・千葉繁：浮防波堤の水理に関する近似理論と応用，港湾技術研究所報告11巻2号，昭和47年6月
- 2) C.J.R. GARETT: Wave forces on a circular dock, J. Fluid Mech. vol. 46, part 1, 1971
- 3) R.V. Churchill (洪四方次訳)：応用ラプラス変換，彰国社，昭25
- 4) 伊藤喜行：海洋構造物の諸問題，1972年度水工学に関する夏期研修会講義集(B)，土木学会水理委員会，1972年8月

記 号 表

a	： 入射波の半振幅
c	： 波速
c_g	： 群速度
c_0	： 減衰係数
c_1	： 造波抵抗に基づく減衰係数
C_D	： 抗力係数
C_M	： 慣性力係数
C_M'	： 造波抵抗に対する慣性力係数
d	： 浮体の吃水
EI	： 杭の曲げ剛性
f_B	： (3.7)

f_H	: (3. 15)	P_S	: 静水圧的復原力
f_M	: (3. 21)	P_U	: 揚圧力
f_{MH}	: (3. 22)	q	: (2. 49)
$f(z)$: 円柱の水平変位	q_j	: (")
F	: (2. 64)	Q_H	: 等価集中波力
F_j	: (")	Q_R	: 等価集中造波抵抗
g	: 重力加速度	R_H	: 水平拘束力
\overline{GM}	: 傾心高 (3. 56)	$R_{JY}(kl)$: (2. 27)
h	: 水深	$R(k,l)$: (2. 28)
$H_n^{(2)}(kr)$: Hankel の第二関数(= $J_n(kr) - iY_n(kr)$)	R_V	: 鉛直拘束力
I	: 浮体の重心を通る水平軸のまわりの慣性モーメント	S	: (2. 46)
I_1	: 浮体の附加慣性モーメント	S_j	: (2. 47)
$I_{JY}(kl)$: (2. 27)	u	: 水粒子の水平速度
$I_n(k_j r)$: 第一種の変形 Bessel 関数	v	: 円柱の水平速度
$J_n(kr)$: 第一種の Bessel 関数	y_B	: (3. 12)
$k=2\pi/L$: L は波長	$Y_n(kr)$: 第二種の Bessel 関数
k_0	: バネ定数	z_0	: 浮体初期重心の z 座標
k_j	: (2. 4) の根	α	: 粒子加速度と慣性力の位相差
$K_n(k_j r)$: 第二種の変形 Bessel 関数	β	: 減衰定数
l	: 円の半径	δ	: 杭頭の変位
M	: 上部工の質量	$\log d$: 対数減衰率
M_0	: 円柱の質量, 杭の仮想集中質量	ζ	: 鉛直振動の半振幅
M_1	: 附加質量	θ	: 回転振動の半振幅
M_H	: 水平波圧によるモーメント	ξ	: 水平振動の半振幅
M_R	: 拘束力によるモーメント	ρ	: 水の密度
M_S	: 静水圧的復原モーメント	$\sigma=2\pi/T$: T は周期
M_T	: 全波力モーメント	ϕ	: 速度ポテンシャル
M_U	: 揚圧力によるモーメント	ϕ_B	: 浮体底層領域の速度ポテンシャル
$n=c_g/c$: (2. 24)	ϕ_c	: ϕ の有限 Fourier cosine 変換
n_j	: (2. 25)	ϕ_i	: 入射波の速度ポテンシャル
p	: 単位面積あたりの圧力	ϕ_M	: 浮体周辺速度ポテンシャル
p_H	: 単位長あたりの波力	ϕ_s	: 散乱波の速度ポテンシャル
p_R	: 単位長あたりの造波抵抗	ω_{R1}	: 回転固有振動数
P_H	: 水平波力または水平造波抵抗	ω_{v1}	: 鉛直固有振動数
P_R	: 全造波抵抗		