

運輸省港湾技術研究所

# 港湾技術研究所 報告

---

---

REPORT OF  
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH  
INSTITUTE  
MINISTRY OF TRANSPORT

---

VOL. 10      NO. 2      June 1971

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



港湾技術研究所報告は第7巻第1号より年4回定期的に刊行する。

報告の入手を希望する方は論文番号を明記して港湾技術研究所長に申し込んで下さい。

The Report of the Port and Harbour Research Institute is published quarterly, either in Japanese or in occidental languages. The title and synopsis are given both in Japanese and in occidental languages.

The copies of the Report are distributed to the agencies interested on the basis of mutual exchange of technical publication.

Inquiries relating to the Report should be addressed to the director of the Institute specifying the numbers of papers in concern.

# 港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第 10 卷 第 2 号 (Vol. 10, No. 2), 1971年 6 月(June 1971)

## 目 次 (CONTENTS)

1. 島堤による波の反射および回折に関する研究  
.....合田良実, 吉村知司, 伊藤正彦..... 3  
(Reflection and Diffraction of Water Waves by an Insular Breakwater  
.....Yoshimi GODA, Tomotsuka YOSHIMURA, Masahito Iro)
2. 漂砂の連続的な現地観測について  
——海底地形変動に関する一考察——  
.....入江 功, 天坂三朗..... 53  
(On the Continuous Observation of Littoral Drift in the Field  
—A Note on the Variation of the Sea Bottom Level—  
.....Isao IRIE, Mitsuaki TENSUKA)
3. 新しい方法による波動の数値計算  
——防波堤周辺の波高分布への適用——  
.....伊藤喜行, 谷本勝利..... 97  
(A New Method of Numerical Analysis of Wave Propagation  
—Application to Wave Height Distribution along Breakwater—  
Yoshiyuki Iro, Katsutoshi TANIMOTO)
4. 水面波の 2, 3 の性質について  
.....浜田徳一..... 121  
(On Some Properties of Water Surface Waves  
.....Tokuichi HAMADA)
5. 河口侵入波におよぼす河口流の効果  
.....金子安雄, 上野信行..... 147  
(Experimental Study On Wave Height Damping Effects Due to Opposing Current  
.....Yasuo KANEKO, Nobuyuki UENO)
6. 粗粒径土砂混合水による鋼材の摩耗特性について  
.....宮崎昭児, 奥出 律, 津村悦夫..... 163  
(Abrasion Properties of Steels against Coarse Solid-Water Mixtures  
.....Shoji MIYAZAKI, Tadasu OKUDE, Etsuo TSUMURA)

## 4. 水面波の2,3の性質について

浜 田 徳 一\*

### 要 旨

この研究は3章からなり,第1章では非粘性の水波における質量輸送を最近の変分を用いた解析と関係づけて論じ,又表面条件を用いた誘導法を示している。

第2章では粘性を考慮した場合の水底面および自由表面の質量輸送を調べ,底面での問題は可動床の場合につき検討している。

第3章では一般流の存在する場合の進行波の特性を一般的な表面条件を用いて調べ,一般流が水平方向に変化する場合と,垂直方向に変化する場合の性質を明かにしている。

---

\* 水工部 水理研究室長

## On some Properties of Water Surface Waves

Tokuichi HAMADA\*

### Synopsis

This paper consists of three chapters. In Chapter I, the mass transport of progressive surface waves in inviscid fluid is analysed in concern with the recent researches using Lagrangian, and some remark of the mass transport is introduced by taking account of the surface boundary condition.

In Chapter 2, the mass transport of waves of viscid fluid is treated, with the bottom boundary condition of horizontally movable character, and the dynamical analysis of the surface boundary layer follows.

In Chapter 3, the problem of interactions of current and progressive waves is discussed. It is generalized including the treatment of the surface boundary condition. Firstly the case of current horizontally changing is examined, and secondly the case of shear flow (current velocity changes vertically) is solved. A new expression of the velocity of the energy transmission of progressive waves is obtained.

---

\* Chief of Hydraulics Laboratory, Hydraulics Division

## 目 次

1 非粘性問題について .....	125
1.1 longcrested な進行波の場合 .....	125
1.2 2次元の波の場合 .....	127
1.3 留意すべき事項 .....	131
2 粘性問題について .....	133
2.1 可動床の粘性境界層の質量輸送 .....	133
2.2 水面の境界層の質量輸送 .....	137
3 水面波と流れとの干渉について .....	138
3.1 保存則の誘導 .....	138
3.2 $u=U(x)+u_1$ のとき .....	139
3.3 $u=U(y)+u_1$ のとき .....	141

# 1 非粘性問題について

## 1.1 longcrested な進行波の場合

1. J. C. Luke (1967) の変分計算による表面波の表現と、表面波の質量輸送との関係をしらべる。Luke の方法を拡張し、水底地形が  $b(x)$  で与えられる場合の  $x$  方向に進む longcrested な表面波の表現を考えよう。

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} L dx dt \quad \dots\dots (1-1)$$

とおき、 $t_1 \sim t_2$ ,  $x_1 \sim x_2$  は G. B. Whitham(1965, 1967) の意味における Lagrangian の平均の計算として用いるものとする。従って長期的な傾向はこの積分により消されることはない。

$$L = \int_{b(x)}^{h(x,t)} \left\{ \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \phi_t - gh_0 + gy \right\} dy + \frac{1}{2} g (h_0 - b(x))^2 \quad \dots\dots(1-2)$$

として、

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} L dx dt = 0 \quad \dots\dots(1-3)$$

の計算を行う。ただし  $h_0$  は静水面を意味する。

(1-2) において

$$\int_{b(x)}^{h(x,t)} \{g(y-h_0)\} dy = \int_{b(x)}^{h_0} g(y-h_0) dy + \int_{h_0}^{h(x,t)} g(y-h_0) dy = -\frac{g}{2} \{b(x)-h_0\}^2 + \frac{g}{2} \{h(x,t)-h_0\}^2 \quad (1-4)$$

この様にして (1-4) の最終表現の第 1 項は (1-2) の附加項と相殺する。今  $h(x,t) = \eta_1(x,t) + \eta_2(x,t)$  とおき、 $\eta_2(x,t)$  は長期的傾向として表われたもの、 $\eta_1(x,t)$  は周期  $T$ 、波長  $L$  により平均可能な短周期として表われたものとするれば、 $\frac{g}{2} \{h(x,t)-h_0\}^2$  は波により生じた potential energy の増加を示すものである。

(1-3) より

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \phi_t - gh_0 + gy \right\}_{y=h(x,t)} \delta h(x,t) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \phi_t - gh_0 + gy \right\}_{y=b(x)} \delta b(x) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{b(x)}^{h(x,t)} \{ \phi_x \delta \phi_x + \phi_y \delta \phi_y + \delta \phi_t \} dy dx dt = 0 \quad \dots\dots(1-5)$$

現在の変分問題では  $\delta b(x) = 0$  であるから (1-5) の第 2 項は消失する。また (1-5) の第 3 項は計算の結果

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{b(x)}^{h(x,t)} \phi_x \delta \phi dy dx dt + \int_{x_1}^{x_2} \int_{b(x)}^{h(x,t)} \delta \phi dy dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \phi_y \delta \phi \right\}_{y=h(x,t)} dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \phi_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) \delta \phi \right\}_{y=h(x,t)} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial b}{\partial x} \phi_x \delta \phi \right)_{y=b(x)} dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{b(x)}^{h(x,t)} \{ \phi_{xx} + \phi_{yy} \} \delta \phi dy dx dt \quad \dots\dots(1-6)$$

(1-6) の第 1 項および第 2 項は長期的傾向および  $b(x)$  の変化がきわめてゆるやかな場合は 0 となると考えることができる。したがって (1-5), (1-6) より

$$\frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \phi_t - gh_0 + gy = 0 \quad y = h(x,t) \text{ にて} \quad (1-7-1)$$

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad b(x) < y < h(x,t) \text{ にて} \quad (1-7-2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \phi_x \frac{\partial h}{\partial x} = \phi_y \quad y = h(x,t) \text{ にて} \quad (1-7-3)$$

$$\phi_x \frac{\partial b}{\partial x} = \phi_y \quad y = b(x) \text{ にて} \quad (1-7-4)$$

この様にして (1-1), (1-2) の表現は数学的に (1-7-1) ~ (1-7-4) の表面波の諸方程式と全く同意義であることがわかる。つぎに (1-1), (1-2) の力学的内容を調べる。

2. (1-2) において

$$\frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \phi_t - gh_0 + gy = -\frac{p}{\rho} \quad \dots\dots(1-8)$$

が成立する。したがって

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{b(x)}^{h(x,t)} \left( -\frac{p}{\rho} \right) dy + \frac{1}{2} g (h_0 - b(x))^2 \right\} dx dt \quad \dots\dots(1-9)$$

問題を簡単にするため  $b(x) = 0$  とする。Stokes 波の 2 次近似まで考慮する場合を考えると

$$J = - \int_0^h \frac{p}{\rho} dy - \frac{1}{2} g h_0^2, \quad p = p_0 + p_1 + p_2 \quad \dots\dots(1-10)$$

この計算は M. S. Longuet-Higgins および R. W. Stewart (1960) により行なはれ

$$J = -\frac{1}{4} g a^2 \frac{kh_0}{\sinh kh_0 \cosh kh_0} = -\frac{E}{\rho} \left( \frac{C_0}{c} - \frac{1}{2} \right) \quad \dots\dots(1-11)$$

ただし

$$c = \left\{ \frac{g}{k} \tanh kh_0 \right\}^{1/2}, \quad C_0 = \frac{1}{2} c \left( 1 + \frac{2kh_0}{\sinh 2kh_0} \right)$$

$$\dots\dots(1-12)$$

他方 (1-2), (1-4) を用いれば

$$J = \int_0^h \left( \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \phi_i \right) dy + \frac{1}{2} g(h-h_0)^2 \dots\dots(1-13)$$

(1-13) は 2 次近似において次の様に変形せられる。  
(T. Hamada (1965))

$$J = \int_0^h \left( \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 \right) dy + \frac{1}{2} g(h-h_0)^2 - \int_0^h c \phi_x dy - \frac{1}{4} a^2 c^2 k^2 (\coth^2 kh_0 - 1) h_0 \dots\dots(1-14)$$

ここに

$$-\frac{1}{4} a^2 c^2 k^2 (\coth^2 kh_0 - 1) h_0 = -\frac{1}{4} g a^2 \frac{kh_0}{\sinh kh_0 \cosh kh_0} = -\frac{\bar{E}}{\rho} \left( \frac{C_g}{c} - \frac{1}{2} \right) \dots\dots(1-15)$$

(1-11) と (1-14) とより

$$\bar{E} - c\bar{M} - \bar{E} \left( \frac{C_g}{c} - \frac{1}{2} \right) = -\bar{E} \left( \frac{C_g}{c} - \frac{1}{2} \right)$$

即ち  $\bar{E} - c\bar{M} = 0, \quad c\bar{M} = c\bar{M} \dots\dots(1-16)$

これにより Stokes 波の近似において  $a^2$  まで考慮する場合  $\bar{E} - c\bar{M} = 0$  が成立する。

3  $J$  にはなお 1 つの取扱いが可能である  
(1-13) より

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_0^h \left( \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \phi_i \right) dy + \frac{1}{2} g(h-h_0)^2 \right\} dx dt \dots\dots(1-17)$$

これを変形すると

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \phi_x \phi dy - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} (\phi_x \phi)_{y=h} - \frac{1}{2} \int_0^h \phi_{xx} \phi dy + \frac{1}{2} (\phi_y \phi)_{y=h} - \frac{1}{2} (\phi_y \phi)_{y=0} - \frac{1}{2} \int_0^h \phi_{yy} \phi dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \phi dy - \frac{\partial h}{\partial t} (\phi)_{y=h} + \frac{1}{2} g(h-h_0)^2 \right] dx dt$$

$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$  および  $(\phi_y \phi)_{y=0} = 0$  を用い、

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \left[ \int_0^h \phi_x \phi dy \right]_{x_1}^{x_2} dt + \int_{x_1}^{x_2} \int_0^h \phi dy \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ -\frac{1}{2} h_x (\phi_x \phi)_{y=h} + \frac{1}{2} (\phi_y \phi)_{y=h} \right\} dx dt$$

$$-h_x (\phi)_{y=h} + \frac{1}{2} g(h-h_0)^2 \Big] dx dt \dots\dots(1-18)$$

(1-18) の右辺第 1 項は 0 であり, 第 2 項は Stokes 波の 2 次近似において

$$-\frac{1}{4} a^2 c^2 k^2 (\coth^2 kh_0 - 1) \cdot h_0 \cdot T \cdot L$$

である。(1-18) の第 3 項は  $y=h$  における条件  $h_x + \phi_x h_x = \phi_y$  を用いて変形すれば

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left\{ \left( \frac{1}{2} h_x \phi_x - \frac{1}{2} \phi_y \right) \phi \right\}_{y=h} + \frac{1}{2} g(h-h_0)^2 \right] dx dt$$

波面における outward normal を  $n$  で表わせば

$$(\phi_y - \phi_x h_x)_{y=h} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} (h_x)^2 \right\} \phi_n$$

故に (1-18) の第 3 項は

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} (\phi_n \phi)_{y=h} dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{4c^2} \{ (\phi_n)^3 \phi \}_{y=h} dx dt + \dots\dots + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} g(h-h_0)^2 dx dt$$

Green の定理を用いると

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_0^h (-) \left( \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 \right) dy + \frac{1}{2} g(h-h_0)^2 \right] dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{4c^2} \{ (\phi_n)^3 \phi \}_{y=h} dx dt + \dots\dots$$

この様にして (1-17) は

$$J = \frac{1}{T \cdot L} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^h \phi dy \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \bar{E}_p - \bar{E}_k - \frac{1}{4c^2} \overline{\{ (\phi_n)^3 \phi \}_{y=h}} + \dots\dots(1-19)$$

ただし  $\bar{E}_p, \bar{E}_k$  はそれぞれ波の potential energy および kinetic energy を示している。よって  $a^2$  までの近似において (1-14), (1-19) より

$$\begin{aligned} \bar{E}_p - \bar{E}_k - \frac{1}{4} g a^2 \frac{kh_0}{\sinh kh_0 \cosh kh_0} \\ = \bar{E} - c\bar{M} - \frac{1}{4} g a^2 \frac{kh_0}{\sinh kh_0 \cosh kh_0} \end{aligned} \dots\dots(1-20)$$

これに (1-16) を用いると

$$\bar{E}_p = \bar{E}_k \dots\dots(1-21)$$

$a^4$  の位数まで考慮すると

$$\bar{E} - c\bar{M} = \bar{E}_p - \bar{E}_k - \frac{1}{4c^2} \overline{\{ (\phi_n)^3 \phi \}_{y=h}} + \dots\dots(1-22)$$



4. 水面波の 2, 3 の性質について

故に

$$\overline{cM} = \overline{E} + \overline{E_k} - \overline{E_p} + \frac{1}{4c^2} \{(\phi_n)^3\}_{y=h} + \dots \quad \dots\dots(1-23)$$

また  $\overline{cM} - 2\overline{E_k} = \frac{1}{4} h_x^2 (\overline{\phi_n \phi})_{y=h} + \dots \geq 0$

故に  $\overline{cM} \geq 2\overline{E_k} \quad \dots\dots(1-24)$

ただし (1-23), (1-24) においては波速  $c$  には非線形効果が入り込んでいることに注意しなくてはならない。

1.2 2次元の波の場合

1. この場合の表現形式は次のようになる。ただし波は  $x$  方向に進む周期的な進行波とする。

$$J = \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} L dx dz dt \quad \dots\dots(1-25)$$

ただし  $z$  は水平に  $x$  に直角にとられている。

$$L = \int_b^{h(x,z,t)} \left( \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \frac{1}{2} \phi_z^2 + \phi_t - gh_0 + gy \right) dy + \frac{1}{2} g(h_0 - b)^2 \quad \dots\dots(1-26)$$

$$\delta J = \delta \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} L dx dz dt = 0 \quad \dots\dots(1-27)$$

(1-27) は次の様になる。

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \frac{1}{2} \phi_z^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \phi_t - gh_0 + gy \right)_{y=h} \delta h \right. \\ & \left. + \int_b^{h(x,z,t)} (\phi_x \delta \phi_x + \phi_y \delta \phi_y + \phi_z \delta \phi_z + \delta \phi_t) dy \right] \\ & \times dz dx dt = 0 \quad \dots\dots(1-28) \end{aligned}$$

(1-28) の第 2 項は次の様に変形せられる。

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_b^h \phi_x \delta \phi dy \Big|_{z_1}^{z_2} dz dt \\ & - \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial x} (\phi_x \delta \phi)_{y=h} dx dz dt \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial b}{\partial x} (\phi_x \delta \phi)_{y=b} dx dz dt \\ & - \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_b^h (\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) \delta \phi dy dx dz dt \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} (\phi_y \delta \phi)_{y=h} dz dx dt \\ & - \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} (\phi_y \delta \phi)_{y=b} dz dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_b^h \phi_x \delta \phi dy \Big|_{z_1}^{z_2} dx dt \\ & - \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial z} (\phi_x \delta \phi)_{y=h} dz dx dt \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial b}{\partial z} (\phi_x \delta \phi)_{y=b} dz dx dt \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_b^h \delta \phi dy \Big|_{z_1}^{z_2} dx dz \\ & - \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial h}{\partial t} (\delta \phi)_{y=h} dt dz dx = 0 \quad \dots\dots(1-29) \end{aligned}$$

上式において

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_b^h \phi_x \delta \phi dy \Big|_{z_1}^{z_2} dz dt = 0, \quad \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_b^h \delta \phi dy \Big|_{z_1}^{z_2} dx dz = 0$$

は明かに成立する。また

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_b^h \phi_x \delta \phi dy \Big|_{z_1}^{z_2} dx dt = 0 \quad \dots\dots(1-30)$$

の如く  $z_1, z_2$  をとるものとする。この条件が満足されれば、(1-28), (1-29) より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \frac{1}{2} \phi_z^2 + \phi_t - gh_0 + gy = 0 \\ & y = h(x, z, t) \text{ において} \quad \dots\dots(1-31-1) \end{aligned}$$

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad \dots\dots(1-31-2)$$

$$\begin{aligned} & \phi_x h_x + \phi_z h_z + h_t - \phi_y = 0 \\ & y = h(x, z, t) \text{ において} \quad \dots\dots(1-31-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \phi_x b_x + \phi_z b_z - \phi_y = 0 \\ & y = b(x, z) \text{ において} \quad \dots\dots(1-31-4) \end{aligned}$$

我々は  $x$  方向の周期的進行波を考えているのであるが  $x, t$  についての平均せられた Lagrangian の取扱いのほか (1-30) を満足させれば  $\delta J = 0$  はその領域内の 2次元の表面波の運動と一致する。この条件は 2次元の longcrested な波であれば、 $z_1, z_2$  の値のとり方にかかわらず成立する。しかし  $x$  方向に進む shortcrested な波の場合には  $\phi_x = 0$  の様に  $z_1$  および  $z_2$  をとることが適当であろう。また edge wave (H. Lamb (1932) P. 447) の場合には  $z_1$  を  $h-b=0$  の水深 0 の線にとり、それからはるか沖の  $\phi_x = 0$  の水域に  $z_2$  をとる様にしなければならぬ。また実例で示される沿岸の trapped wave の場合は垂直壁により  $\phi_x = 0$  が満足せられる海岸線に  $z_1$  をとり、 $\phi \rightarrow 0, \phi_x \rightarrow 0$  の沖合水域に  $z_2$  をとる様にしなければならぬ。以下これらの実例を示してゆこう。

2. 例

i) shortcrested な波

一様水深とする。波は  $x$  方向に進み、 $z$  軸はそれに直角に水平にとられている。

$$\eta = a \cos(k \sin \theta) z \cos(k \cos \theta x - \sigma t) \quad \dots\dots(1-32)$$

$$\varphi = b \frac{\cosh ky}{\sinh kh_0} \cos(k \sin \theta) z \sin(k \cos \theta x - \sigma t) \quad \dots\dots(1-33)$$

$c$  を  $x$  方向の波速とすると

$$\sigma = k \cos \theta c, \quad b = a \cos \theta c, \quad c = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh_0} \quad \dots\dots(1-34)$$

ただし (1-34) の第 2 式, 第 3 式は表面の運動学的, 力学的条件から導かれる。 $(x, z)$  面におけるある点の potential energy の時間的平均値は

$$\overline{E_p} = \frac{1}{4} \rho g a^2 \cos^2(k \sin \theta) z \quad \dots\dots(1-35)$$

その  $z$  についての平均値は

$$\overline{(\overline{E_p})}_{\text{zaveraged}} = \frac{1}{8} \rho g a^2 \quad \dots\dots(1-36)$$

Kinetic energy  $E_k$  のある点における時間的平均値は

$$\overline{E_k} = \int_0^{h_0} \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) dz, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \dots\dots(1-37)$$

これを計算して

$$\overline{E_k} = \frac{1}{8} \rho g a^2 \{ \cos^2 \theta \cos^2(k \sin \theta) z + \sin^2 \theta \sin^2(k \sin \theta) z + \cos^2(k \sin \theta) z \} + \frac{1}{8} \rho g a^2 \frac{kh_0}{\sinh kh_0 \cosh kh_0} \times \{ \cos^2 \theta \cos^2(k \sin \theta) z + \sin^2 \theta \sin^2(k \sin \theta) z - \cos^2(k \sin \theta) z \} \quad \dots\dots(1-38)$$

$z$  の方向についての平均値は

$$\overline{(E_k)}_{\text{zaveraged}} = \frac{1}{8} \rho g a^2 \quad \dots\dots(1-39)$$

したがって  $\overline{(E_p)}_{\text{zaveraged}} = \overline{(E_k)}_{\text{zaveraged}}$  は成立するが、波面上の各点においては  $\overline{E_p}$  は  $\overline{E_k}$  と一致しない。

つぎにこの波の  $x$  方向への質量輸送のある点における時間的平均値を求めると

$$\overline{M} = \rho \int_0^{\eta} u dy = \frac{1}{2} \rho a^2 \cos^2 \theta c k \coth kh_0 \cos^2(k \sin \theta) z \quad \dots\dots(1-40)$$

$$\begin{aligned} \text{故に } \overline{cM} &= \frac{1}{2} \rho a^2 \cos^2 \theta c^2 k \coth kh_0 \cos^2(k \sin \theta) z \\ &= \frac{1}{2} \rho g a^2 \cos^2(k \sin \theta) z \quad \dots\dots(1-41) \end{aligned}$$

$$\text{故に } \overline{cM} = 2\overline{E_p} \quad \dots\dots(1-42)$$

(1-42) は任意点において成立する。又

$$\overline{(cM)}_{\text{zaveraged}} = \frac{1}{4} \rho g a^2 = \overline{(E_p + E_k)}_{\text{zaveraged}} \quad \dots\dots(1-43)$$

すなわち  $\overline{E} = \overline{cM}$  は  $z$  方向の平均をとる時成立し、これは (12-7) から (1-31) を誘導する計算において既に示唆されたものである。

ii) edge wave

edge wave では座標軸は波の進行方向に  $x$  軸, 静水面においてこれに直角に  $z$  軸, 垂直上向きに  $y$  軸をとることとする。 $y=0$  はこの場合は静水面を意味する。水底は  $z=0$  で  $y=0$  となり、 $z>0$  の方向に一様に  $y$  軸と  $\alpha (< \pi/2)$  の角度でかたむき、 $z$  の増大とともに深くなっている。

この場合の edge wave は H. Lamb (1932) P. 447 により

$$\eta = a e^{-k \cos \alpha z} \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots(1-44)$$

$$\varphi = -a \frac{\sigma}{k \sin \alpha} e^{-k \cos \alpha z} e^{k \sin \alpha y} \cos(kx - \sigma t) \quad \dots\dots(1-45)$$

表面条件より

$$\sigma^2 = g k \sin \alpha, \quad c = \sqrt{\frac{g}{k} \sin \alpha} \quad \dots\dots(1-46)$$

任意点における potential energy の時間的平均値は

$$\overline{E_p} = \frac{1}{2} \rho g \overline{\eta^2} = \frac{1}{4} \rho g a^2 e^{-2k \cos \alpha z} \quad \dots\dots(1-47)$$

(1-47) は  $z=0$  においても使用することが出来る。 $z$  方向の積分値は

$$\begin{aligned} \overline{(E_p)}_{\text{zintegrated}} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{4} \rho g a^2 e^{-2k \cos \alpha z} dz \\ &= \frac{1}{8} \rho \frac{g}{k} a^2 \frac{1}{\cos \alpha} \quad \dots\dots(1-48) \end{aligned}$$

4. 水面波の2, 3の性質について

ある点における kinetic energy の時間的平均値は

$$\overline{E_k} = \int_{-i \tan \alpha z}^0 \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) dy \quad \dots\dots(1-49)$$

これを計算して

$$\overline{E_k} = \frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{1}{\sin^2 \alpha} e^{-2k \cos \alpha z} (1 - e^{-2k \sin \alpha \tan \alpha z}) \quad \dots\dots(1-50)$$

(1-50) による  $\overline{E_k}$  の性質は、 $z \rightarrow +\infty$  で  $\overline{E_k} \rightarrow 0$  となり、これは  $\overline{E_p}$  の性質と同じであるが、 $z \rightarrow +0$  では  $\overline{E_k} \rightarrow 0$  となるが、 $\overline{E_p} = \frac{1}{4} \rho g a^2$  となり、これは edge wave の大きな特徴である。z 方向の  $\overline{E_k}$  の積分値は

$$\begin{aligned} (\overline{E_k})_{\{z \text{ integrated}\}} &= \int_0^\infty \frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ &\{e^{-2k \cos \alpha z} - e^{-2kz(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \alpha)}\} dz \\ &= \frac{1}{8} \rho \frac{g}{k} a^2 \frac{1}{\cos \alpha} \quad \dots\dots(1-51) \end{aligned}$$

故に z 方向に積分されると  $\overline{E_p}$  と  $\overline{E_k}$  とは一致する。つぎに質量輸送はある点における時間的平均値として

$$\overline{M} = \rho \int_0^{\overline{v}} u dy = \frac{1}{2} \rho a^2 \sigma \frac{1}{\sin \alpha} e^{-2k \cos \alpha z} \quad \dots\dots(1-52)$$

(1-52) は  $z \rightarrow 0$  において有限である。(1-52) に (1-46) を用い (1-47) と比較すると、任意の点において

$$2\overline{E_p} = c\overline{M} \quad \dots\dots(1-53)$$

質量輸送の総量は

$$(\overline{M})_{\{z \text{ integrated}\}} = \int_0^\infty \overline{M} dz = \frac{1}{2} \rho a^2 \sigma \frac{1}{\sin 2\alpha} \quad \dots\dots(1-54)$$

故に

$$\begin{aligned} c(\overline{M})_{\{z \text{ integrated}\}} &= \frac{1}{2} \rho a^2 c^2 \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{4} \rho \frac{g}{k} a^2 \frac{1}{\cos \alpha} \\ &= (\overline{E_p} + \overline{E_k})_{\{z \text{ integrated}\}} \quad \dots\dots(1-55) \end{aligned}$$

この様にして  $\overline{E} = c\overline{M}$  は z 方向に積分せられた総量において成立する。

(iii) trapped wave

trapped wave の1例として図-1 の場合を考えよう。この取扱いは線形の長波が x 方向に進行する場合のものである。suffix 1 で示される領域は水深  $h_1$  で沖側に位置し、 $z=0$  から  $z=-\infty$  までひろがっている。suffix 2 で示される領域は水深  $h_2$  で ( $h_2 < h_1$ )  $z=0$  から  $z=l$  の間にあり、 $z=l$  には x 軸に平行な垂直壁が存在する。 $z=0$  で水深は  $h_1$  から  $h_2$  に飛躍する。この水域における trapped wave は次の諸式により示される。

$$\eta_1 = a_1 e^{\beta_1 |z|} \cos(kx - \omega t) \quad \dots\dots(1-56)$$

$$\eta_2 = 2a_2 \cos \beta_2 (z-l) \cos(kx - \omega t) \quad \dots\dots(1-57)$$

$$a_1 = 2a_2 \cos \beta_2 l \quad \dots\dots(1-58)$$

$$h_1 |\beta_1| = h_2 \beta_2 \tan \beta_2 l \quad \dots\dots(1-59)$$

$$\frac{\omega^2}{gh_i} - k^2 = \beta_i^2 \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots(1-60)$$

ただし、 $\beta_1^2 < 0$ 、 $\beta_2^2 > 0$ 。故に  $\beta_1$  は虚数であり、 $|\beta_1|$  は実かつ正である。各点における流速成分は

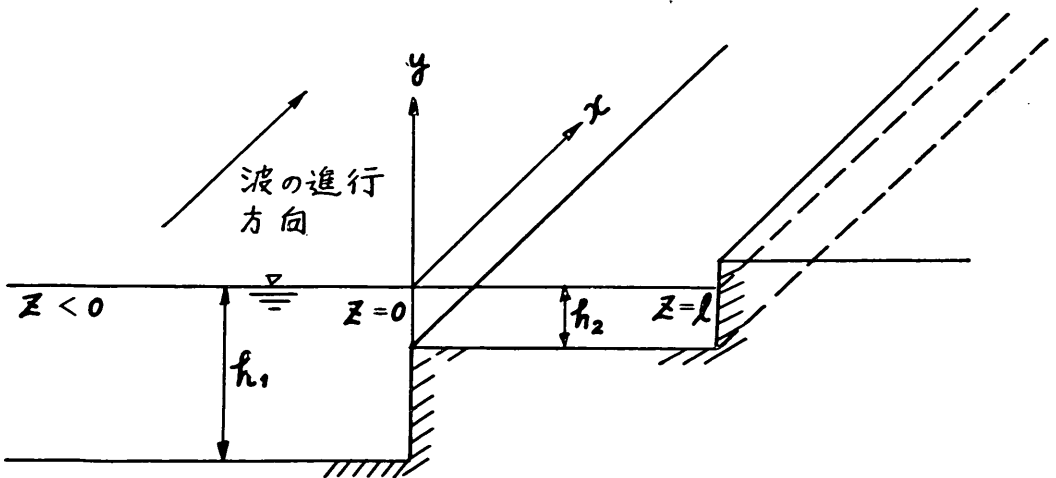


図-1 trapped wave の領域

$$u_1 = \frac{ga_1}{\omega} e^{|\beta_1|z} k \cos(kx - \omega t) \quad \dots\dots(1-61)$$

$$w_1 = -\frac{ga_1}{\omega} |\beta_1| e^{|\beta_1|z} \sin(kx - \omega t) \quad \dots\dots(1-62)$$

$$u_2 = \frac{2ga_2}{\omega} k \cos \beta_2(z-l) \cos(kx - \omega t) \quad \dots\dots(1-63)$$

$$w_2 = -\frac{2ga_2}{\omega} \beta_2 \sin \beta_2(z-l) \sin(kx - \omega t) \quad \dots\dots(1-64)$$

potential energy について考えると、水深  $h_1$  の水域においてある一定点における時間的平均値は

$$(E_p)_1 = \frac{1}{4} \rho g a_1^2 e^{2|\beta_1|z} \quad \dots\dots(1-65)$$

$(E_p)_1$  の  $z$  方向の積分値は

$$(E_p)_1 \{z\text{integrated}\} = \int_{-\infty}^0 (E_p)_1 dz = \frac{1}{8} \rho g a_1^2 \frac{1}{|\beta_1|} \quad \dots\dots(1-66)$$

水深  $h_2$  の水域につき同様の計算を行うと

$$(E_p)_2 = \rho g a_2^2 \cos^2 \beta_2(z-l) \quad \dots\dots(1-67)$$

$(E_p)_2$  の  $z$  方向の積分値は

$$(E_p)_2 \{z\text{integrated}\} = \int_0^l (E_p)_2 dz = \rho g a_2^2 \times \frac{1}{\beta_2} \left\{ \frac{1}{2} \beta_2 l + \frac{1}{4} \sin 2\beta_2 l \right\} \quad \dots\dots(1-68)$$

kinetic energy について考えると、水深  $h_1$  の水域においてある一定点における時間的平均値は

$$(E_k)_1 = \frac{1}{4} \rho \frac{g^2 a_1^2}{\omega^2} h_1 e^{2|\beta_1|z} \{|\beta_1|^2 + k^2\} \quad \dots\dots(1-69)$$

$(E_k)_1$  の  $z$  方向の積分値は

$$(E_k)_1 \{z\text{integrated}\} = \int_{-\infty}^0 (E_k)_1 dz = \frac{1}{8} \rho \frac{g^2 a_1^2}{\omega^2} \frac{h_1}{|\beta_1|} \times \{|\beta_1|^2 + k^2\} \quad \dots\dots(1-70)$$

水深  $h_2$  の水域について、同様の計算を行うと

$$(E_k)_2 = \rho \frac{g^2 a_2^2}{\omega^2} h_2 \{ \beta_2^2 \sin^2 \beta_2(z-l) + k^2 \cos^2 \beta_2(z-l) \} \quad \dots\dots(1-71)$$

$(E_k)_2$  の  $z$  方向の積分値は

$$(E_k)_2 \{z\text{integrated}\} = \int_0^l (E_k)_2 dz = \frac{1}{2} \rho \frac{g^2 a_2^2}{\omega^2} h_2 l (k^2 + \beta_2^2) + \frac{1}{4} \rho \frac{g^2 a_2^2}{\omega^2} h_2 \frac{1}{\beta_2} \sin 2\beta_2 l \cdot (k^2 - \beta_2^2) \quad \dots\dots(1-72)$$

水深  $h_1$  の水域において kinetic energy と potential energy との差をとってみよう。(1-66) (1-70) より

$$\begin{aligned} & \{(E_k)_1 - (E_p)_1\} \{z\text{integrated}\} \\ &= \frac{1}{8} \rho g a_1^2 \frac{1}{|\beta_1|} \left\{ \frac{gh_1}{\omega^2} (k^2 - \beta_1^2) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{8} \rho g a_1^2 \frac{1}{|\beta_1|} \left\{ \frac{k^2 - \beta_1^2}{k^2 + \beta_1^2} - 1 \right\} \end{aligned}$$

これを (1-58) (1-59) を用いて変形すると

$$\begin{aligned} & \{(E_k)_1 - (E_p)_1\} \{z\text{integrated}\} \\ &= \frac{1}{2} \rho g a_2^2 \sin 2\beta_2 l \frac{gh_2 \beta_2}{\omega^2} \quad \dots\dots(1-73) \end{aligned}$$

これは  $(E_k)_1 \{z\text{integrated}\} > (E_p)_1 \{z\text{integrated}\}$  を示している。

つぎに水深  $h_2$  の水域における potential energy と kinetic energy との差をとって見よう。(1-68) (1-72) より

$$\begin{aligned} & \{(E_p)_2 - (E_k)_2\} \{z\text{integrated}\} \\ &= \frac{1}{2} \rho g a_2^2 l + \frac{1}{4} \rho g a_2^2 \frac{1}{\beta_2} \sin 2\beta_2 l \\ & \quad - \frac{1}{2} \rho \frac{g^2 a_2^2}{\omega^2} h_2 l (k^2 + \beta_2^2) \\ & \quad - \frac{1}{4} \rho \frac{g^2 a_2^2}{\omega^2} h_2 \frac{1}{\beta_2} \sin 2\beta_2 l (k^2 - \beta_2^2) \\ &= \frac{1}{4} \rho g a_2^2 \frac{1}{\beta_2} \sin 2\beta_2 l \left\{ 1 - \frac{k^2 - \beta_2^2}{k^2 + \beta_2^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \rho g a_2^2 \sin 2\beta_2 l \frac{\beta_2}{\omega^2} g h_2 \quad \dots\dots(1-74) \end{aligned}$$

(1-74) は  $(E_p)_2 \{z\text{integrated}\} > (E_k)_2 \{z\text{integrated}\}$  である事を示している。しかも (1-73) (1-74) より

$$\begin{aligned} & \{(E_p)_1 + (E_p)_2\} \{z\text{integrated}\} \\ &= \{(E_k)_1 + (E_k)_2\} \{z\text{integrated}\} \quad \dots\dots(1-75) \end{aligned}$$

すなわち  $z=l$  から  $z=-\infty$  にいたる全水域についての積分においてはこの進行波の potential energy と kinetic energy とは一致する。

つぎに水深  $h_1$  の水域における  $x$  方向の質量輸送は任意点での時間的平均値として

$$(M)_1 = \overline{\rho u_1 \eta_1} = \frac{1}{2} \rho g a_1^2 \frac{k}{\omega} e^{2|\beta_1|z} \quad \dots\dots(1-76)$$

$c = \frac{\omega}{k}$  を用いれば

$$c(M)_1 = \frac{1}{2} \rho g a_1^2 e^{2|\beta_1|z} = 2(E_p)_1 \quad \dots\dots(1-77)$$

#### 4. 水面波の2, 3の性質について

また

$$(M)_1 \{zintegrated\} = \frac{1}{4} \frac{\rho}{|\beta_1|} g a_1^2 \frac{k}{\omega} \dots\dots(1-78)$$

$$c(M_1) \{zintegrated\} = \frac{1}{4} \frac{\rho}{|\beta_1|} g a_1^2 = 2(E_p)_1 \{zintegrated\} \dots\dots(1-79)$$

全く同様に水深  $h_2$  の水域において

$$(M)_2 = \overline{\rho u_2 \eta_2} = 2\rho g a_2^2 \frac{k}{\omega} \cos^2 \beta_2 (z-l) \dots\dots(1-80)$$

$$c(M)_2 = 2\rho g a_2^2 \cos^2 \beta_2 (z-l) = 2(E_p)_2 \dots\dots(1-81)$$

$$(M)_2 \{zintegrated\} = 2\rho g a_2^2 \frac{k}{\omega} \frac{1}{\beta_2} \left( \frac{\beta_2 l}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\beta_2 l \right) \dots\dots(1-82)$$

$$c(M)_2 \{zintegrated\} = 2\rho g a_2^2 \frac{1}{\beta_2} \left( \frac{1}{2} \beta_2 l + \frac{1}{4} \sin 2\beta_2 l \right) = 2(E_p)_2 \{zintegrated\} \dots\dots(1-83)$$

これから

$$c\{(M)_1 + (M)_2\} \{zintegrated\} = 2\{(E_p)_1 + (E_p)_2\} \{zintegrated\} \dots\dots(1-84)$$

(1-75), (1-84) より  $z=l$  から  $z=-\infty$  までの全領域にわたる積分においては  $\overline{E} = c\overline{M}$  が成立する。

3. 以上の計算例において  $c\overline{M} = 2\overline{E_p}$  が任意点における時間的平均として成立した。線形の進行波においてこの関係が成立することは次の様にして示される。今平均水面を  $y=0$  とすれば

$$\overline{M} = \rho \int_0^{\eta} \overline{u} dy = \rho \overline{u(0)\eta}$$

また  $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

且水面近傍では  $p = \rho g(\eta - y)$

それ故  $\rho \frac{\partial u(0)}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$

また  $\frac{\partial u(0)}{\partial t} + c \frac{\partial u(0)}{\partial x} = 0$

故に  $\rho c \frac{\partial u(0)}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$

これを  $u(0)=0$  で  $\eta=0$  を用いて積分すれば

$$c u(0) = g \eta$$

故に

$$c\overline{M} = \rho c \overline{u(0)\eta} = \rho g \overline{\eta^2} = 2\overline{E_p} \dots\dots(1-85)$$

この関係は線形の週期的進行波であれば一般に成立する。

#### 1.3 留意すべき事項

1. 流れのある場合を含めて longcrested な波の wave energy と momentum 輸送との関係について考える。波は  $x$  方向に進むものとし、流れは垂直方向  $y$  には速度勾配を持つが、 $x, z$  方向には速度勾配はなく、 $x$  方向の速度成分は  $U(y)$  で示されるものとする。longcrested な波を考えているから、 $z$  方向の速度成分は考慮しなくてもよい。

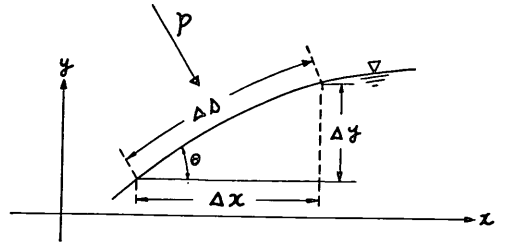


図-2 波面の状態

図-2 の様にある点において波面は  $x$  軸と  $\theta$  の傾きを示しているとし、この波面に作用する垂直圧力を  $p$  とする。

よって  $x$  方向の単位面積あたりの垂直応力は

$$p \Delta s \cos \theta \frac{1}{\Delta x} = p$$

$x$  方向の単位面積あたりの水平応力は

$$p \Delta s \sin \theta \frac{1}{\Delta x} = p \frac{\Delta \eta}{\Delta x}$$

単位時間あたりの仕事量の1週期についての時間的平均値(ただしこの時間的平均は波の周期を基準とした時間の位数においてである)は、波と流れとに対するものをあわせて考えれば

$$-\overline{pv} + p \frac{\partial \eta}{\partial x} (U_s + u) = \frac{\partial \overline{E_1}}{\partial t} \dots\dots(1-86)$$

また波に対するものだけをとれば

$$-\overline{pv} + p \frac{\partial \eta}{\partial x} u = \frac{\partial \overline{E_2}}{\partial t} \dots\dots(1-87)$$

他方表面  $y=\eta$  では

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (U_s + u) \frac{\partial \eta}{\partial x} = v \dots\dots(1-88)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \dots\dots(1-89)$$

が成立する。したがって (1-86) から

$$c\rho\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\bar{E}_1}{\partial t} \quad \dots\dots(1-90)$$

(1-87) から

$$(c-U_s)\rho\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\bar{E}_2}{\partial t} \quad \dots\dots(1-91)$$

これに対して  $\rho\frac{\partial\eta}{\partial x}=\tau=\frac{\partial\bar{M}}{\partial t}$  を用いることができる。まず流れのない場合の非線形問題について考察しよう。(1-90)を変形すると

$$c\frac{\partial\bar{M}}{\partial t}=\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \quad (\text{流れがないから } E_1=E_2=E \text{ である。}) \quad \dots\dots(1-92)$$

この場合  $c\frac{\partial\bar{M}}{\partial t}=c\frac{\partial\bar{M}}{\partial t}$ , 今単一周期の進行波を考えているから,  $c=c_0+c_2$  とし,  $c_2=\alpha t$  とおく。

$$c_0\frac{\partial\bar{M}}{\partial t}+\alpha t\frac{\partial\bar{M}}{\partial t}=\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \quad \dots\dots(1-93)$$

故に  $c_0\frac{\partial\bar{M}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\bar{M}t}{\partial t}-\alpha\bar{M}=\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$   
 $t$  で積分し,  $t=0$  にて  $\bar{E}=0, \bar{M}=0$  を考慮すると

$$c_0\bar{M}+\alpha\bar{M}t-\alpha\int_0^t\bar{M}dt=\bar{E}$$

$c_2=\alpha t$  の Stokes 波では  $\bar{M}=\beta t$  とおく事ができるから

$$\text{上式は } c_0\bar{M}+\alpha\bar{M}t-\alpha\bar{M}\frac{t}{2}=\bar{E}$$

$$\text{故に } \left(c_0+\frac{c_2}{2}\right)\bar{M}=\bar{E} \quad \dots\dots(1-94)$$

(1-94) は  $a^4$  まで考慮せられた時の Stokes 波の momentum 輸送と wave energy との非線形関係を示している。

たとえば水深が十分大きい時の Stokes 波では 1 次近似の波形振幅を  $a_1$  とするとき

$$\left. \begin{aligned} c_0+\frac{c_2}{2} &= c_0+\frac{c_0}{4}a_1^2k^2 \\ \bar{M} &= \frac{1}{2}\rho c_0a_1^2k+\frac{1}{8}\rho c_0a_1^4k^3 \\ \bar{E} &= \frac{1}{2}\rho ga_1^2+\frac{1}{4}\rho ga_1^4k \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(1-95)$$

が成立して, (1-94) の関係が明かになりつつ。

つぎに  $a^2$  までを考慮した線形関係において, 流れのある場合の (1-90), (1-91) について考えよう。

$\rho\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\bar{M}}{\partial t}$  を用い,  $t=0$  で  $\bar{E}=\bar{M}=0$  とすれば,  $c-U_s$  が  $t$  に独立であるとき, (線形波の  $c, c-U_s$  はこの条件を満足する。)

$$c\bar{M}=\bar{E}_1, (c-U_s)\bar{M}=\bar{E}_2 \quad \dots\dots(1-96)$$

である。

(1-96) において  $\bar{E}_1-\bar{E}_2=U_s\bar{M}$  が成立するが, これは次の様に説明せられる。

いま  $y$  軸の原点を波のない時の水面にとり,  $h_0(>0)$  を水深とすれば, 波の形成前後における周期的に平均せ

られた運動の energy の差は  $\frac{1}{2}\int_{-h_0}^{\eta} \rho\{(U+u)^2+v^2\}dy - \frac{1}{2}\int_{-h_0}^{\eta} \rho U^2 dy$  であり, これは  $\bar{E}_1$  から波によって生じた potential energy の増加を減じた量である。 $a^2$  の位相まで計算すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_{-h_0}^{\eta} \rho\{(U+u)^2+v^2\}dy - \frac{1}{2}\int_{-h_0}^{\eta} \rho U^2 dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-h_0}^{\eta} \rho(2Uu+u^2+v^2)dy + \frac{1}{2}\int_{-h_0}^{\eta} \rho(U^2+2Uu)dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-h_0}^{\eta} \rho(u^2+v^2)dy + \rho U(0)u(0)\eta + \rho U(0)\frac{\partial U(0)}{\partial y}\frac{\eta^2}{2} \\ &= \bar{E}_2 - \text{波の potential energy} + U_s\bar{M} \quad \dots\dots(1-97) \end{aligned}$$

$E_1-E_2=U_sM$  の意味はこれにより明かであろう。

## 2. 実例をあげる。

上の計算と同じく波のない場合の水面を  $y=0$  とし, 一様な底面を  $y=-h_0(h_0>0)$  とする。一般流を

$$U=U_0+\beta y \quad \dots\dots(1-98)$$

で与える。その時の波の性質はつぎの諸式により与えられる。

$$\eta = a \cos k(x-ct) \quad \dots\dots(1-99)$$

$$\psi = \frac{a(U_0-c)}{\sinh kh_0} \sinh k(y+h_0) \cos k(x-ct) \quad \dots\dots(1-100)$$

$$(c-U_0)^2 k \coth kh_0 + \beta(c-U_0) - g = 0 \quad \dots\dots(1-101)$$

したがって

$$c = U_0 - \frac{\beta}{2k} \tanh kh_0 \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh_0 + \frac{\beta^2}{4k^2} \tanh^2 kh_0} \quad \dots\dots(1-102)$$

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{-ak(U_0-c)}{\sinh kh_0} \cosh k(y+h_0) \cos k(x-ct)$$

#### 4. 水面波の2, 3の性質について

……(1-103)

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-ak(U_0 - c)}{\sinh kh_0} \sinh k(y + h_0) \sin k(x - ct) \quad \text{……(1-104)}$$

波の kinetic energy は

$$\begin{aligned} \overline{E_k} &= \frac{1}{2} \rho \int_{-h_0}^0 (u^2 + v^2) dy = \frac{1}{4} \rho a^2 k (U_0 - c)^2 \coth kh_0 \\ &= \frac{1}{4} \rho g a^2 - \frac{1}{4} \rho a^2 \beta (c - U_0) \quad \text{……(1-105)} \end{aligned}$$

波の potential energy は

$$\overline{E_p} = \frac{1}{2} \rho g \overline{\eta^2} = \frac{1}{4} \rho g a^2 \quad \text{……(1-106)}$$

$$\overline{E} = \overline{E_k} + \overline{E_p} = \frac{1}{2} \rho g a^2 - \frac{1}{4} \rho a^2 \beta (c - U_0) \quad \text{……(1-107)}$$

これに対する質量輸送は

$$\begin{aligned} \rho \int_{-h_0}^0 (U + u) dy - \rho \int_{-h_0}^0 U dy &= \frac{1}{4} \rho \beta a^2 \\ &+ \frac{1}{2} \rho a^2 k (c - U_0) \coth kh_0 \quad \text{……(1-108)} \end{aligned}$$

(1-108) に  $(c - U_0)$  を乗じ, (1-105) を考慮すれば  
 $(c - U_0) \overline{M} = \overline{E} \quad \text{……(1-109)}$

附：この節に示された計算の結果は進行波の表面に作用する不安定機構によって, longcrested な波の形成が可能である意を示している。shortcrested な波, edge wave 等については既に示した様に各任意点において  $\overline{E} = c \overline{M}$  が波の運動の内部において成立しがたい。このことはこれ等の2次元波が表面の不安定機構によっては発達しがたいことを示していると考えられる。この場合 shortcrested な波についてはこれを成分波としての longerested な波に分解して考えれば, その成分波については表面の不安定による発達機構を用いることができる。

## 2. 粘性問題について

### 2.1 可動床の粘性境界層の質量輸送

M.S. Longuet-Higgins により計算せられた表面波による底の境界層内の質量輸送を可動床の場合に拡張しよう。

計算方法としては以下に示す様に, 2次近似の範囲内ではできるだけ簡単なものを用いる。

$x$  軸を波の進行方向に,  $y$  軸は底面を  $y=0$  として垂直上向きにとる。静水深を  $h_0$  とする。流れのないとき,

底の境界層の線形方程式は

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad \text{……(2-1)}$$

ただし suffix 1 はその値が1次近似のものであることを示している。 $u_1 = u_{11} + u_{12}$  とおき,  $u_{11}$  は非粘性解,  $u_{12}$  は粘性解とする。表面の水位変化を  $\eta = a \cos(kx - \sigma t)$  として, 非粘性波の解より

$$u_{11} = \frac{a\sigma}{\sinh kh_0} \cosh ky \cos(kx - \sigma t) \quad \text{……(2-2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{11}}{\partial t} &= \frac{a\sigma^2}{\sinh kh_0} \cosh ky \sin(kx - \sigma t) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad \text{……(2-3)} \end{aligned}$$

$$p_0 + p_1 = \rho g(h_0 - y) + \rho \frac{a\sigma^2}{k} \frac{\cosh ky}{\sinh kh_0} \cos(kx - \sigma t) \quad \text{……(2-4)}$$

上の諸式から粘性解は次式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial u_{12}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial y^2} \quad \text{……(2-5)}$$

(2-5) の解のうち  $y(>0)$  の増大とともにすみやかに減少する解は

$$u_{12} \sim A_2 e^{i\sigma t} e^{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}} + i\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}\right)y} \quad \text{……(2-6)}$$

ここで  $y=0$  における可動床の条件としては,  $\kappa > 0$  として

$$\tau_0 = \kappa u_1 = \mu \frac{\partial u_{12}}{\partial y} \quad y=0 \text{ おいて} \quad \text{……(2-7)}$$

をとる。この条件は非常に簡単になっているが, 以下の代数計算を簡明にするために用いている。底にはたらく剪断力に比例した底の移動速度が現われることとなる。

(2-7) を用い  $u_{12}$  は

$$\begin{aligned} u_{12} &= -\frac{\kappa a \sigma}{\sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}} \cos(kx - \sigma t) \\ &+ \tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y \Big) e^{-\alpha y} \quad \text{……(2-8)} \end{aligned}$$

ただし  $\alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}$  とする。

(2-7) において  $\tau_0$  を有限とすると,  $\kappa$  が極めて大きいことは  $u_1$  が小となり, 底の可動性が消失することを

意味する。(2-8)において  $\frac{\mu\alpha}{\kappa} \rightarrow 0$  とすれば、固定床の場合の解と一致する。この  $u_1 = u_{11} + u_{12}$  に対応する底の近傍の

$$v_1 = v_{11} + v_{12} \text{ は}$$

$$\begin{aligned} v_1 = v_{11} + v_{12} = & A_1 \sinh ky \sin(kx - \sigma t) \\ & + \frac{\kappa A_1 k}{B_1} \frac{e^{-\sigma y}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}} \sin\left(kx - \sigma t + \tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha}\right) \\ & + \alpha y + \frac{\pi}{4} \\ & - \frac{\kappa A_1 k}{B_1} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}} \sin\left(kx - \sigma t + \tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha}\right) \\ & + \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad \dots\dots(2-9)$$

ただし  $A_1 = \frac{\alpha\sigma}{\sinh^2 kh_0}$ ,  $B_1 = \sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}$  とする。

上に示した  $u_1$  および  $v_1$  により生ずる Stokes の質量輸送に対応する時間的平均値としての水平輸送は

$$\overline{u^{(1)} + u^{(2)}} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \int u_1 dt + \frac{\partial u_1}{\partial y} \int v_1 dt \quad \dots\dots(2-10)$$

ただしこの場合は水粒子に注目しての時間的平均としてとられている。(2-10)に既知の  $u_1 = u_{11} + u_{12}$ ,  $v_1 = v_{11} + v_{12}$  を用いて計算すれば

$$\begin{aligned} \overline{u^{(1)}} = & \frac{1}{2} \frac{a^2 k \sigma}{\sinh^2 kh_0} \cosh^2 ky - \frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}} \\ & \times \frac{a^2 k \sigma}{\sinh^2 kh_0} e^{-\sigma y} \cosh ky \cos\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) \\ & + \frac{\kappa^2}{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2} \frac{1}{2} \frac{a^2 k \sigma}{\sinh^2 kh_0} e^{-2\sigma y} \end{aligned} \quad \dots\dots(2-11)$$

$$\begin{aligned} \overline{u^{(2)}} = & \frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}} \frac{a^2 k \sigma y}{\sinh^2 kh_0} \frac{1}{2} e^{-\sigma y} \alpha \\ & \times \left\{ \sin\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) + \cos\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) \right\} \\ & - \frac{\kappa^2}{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2} \frac{a^2 k \sigma}{\sinh^2 kh_0} \frac{1}{2} e^{-\sigma y} \sin \alpha y \end{aligned} \quad \dots\dots(2-12)$$

粘性境界層においては上記の  $\overline{u^{(1)}}$  および  $\overline{u^{(2)}}$  と同じ位数の粘性による質量輸送が2次の運動方程式から現われる。

それを決定する関係は

$$\begin{aligned} \overline{u_{12} \frac{\partial u_{11}}{\partial x}} + \overline{u_{11} \frac{\partial u_{12}}{\partial x}} + \overline{u_{12} \frac{\partial u_{12}}{\partial x}} + \overline{v_{12} \frac{\partial u_{11}}{\partial y}} + \overline{v_{11} \frac{\partial u_{12}}{\partial y}} \\ + \overline{v_{12} \frac{\partial u_{12}}{\partial y}} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_{22}}}{\partial y^2} \end{aligned} \quad \dots\dots(2-13)$$

である。(2-13)の時間的平均はある特定点においてとられている。これは位数評価の結果である。この様にして決定せられる  $\overline{u_{22}}$  を(2-10)の  $\overline{u^{(1)}}$  および  $\overline{u^{(2)}}$  と並べて  $\overline{u^{(3)}}$  とする。(2-13)において

$$\begin{aligned} \overline{u_{12} \frac{\partial u_{11}}{\partial x}} = & -\frac{1}{2} \frac{\kappa}{B_1} A_1^2 k \cosh ky e^{-\sigma y} \\ & \times \sin\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) \\ \overline{u_{11} \frac{\partial u_{12}}{\partial x}} = & \frac{1}{2} \frac{\kappa}{B_1} A_1^2 k \cosh ky e^{-\sigma y} \sin \\ & \times \left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) \\ \overline{u_{12} \frac{\partial u_{12}}{\partial x}} = & 0 \\ \overline{v_{12} \frac{\partial u_{11}}{\partial y}} = & \kappa \frac{A_1^2}{B_1} k^2 \frac{1}{2} \frac{e^{-\sigma y}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}} \sinh ky \sin \\ & \times \left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y + \frac{\pi}{4}\right) - \kappa \frac{A_1^2}{\beta_1} k^2 \frac{1}{2} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}} \sinh ky \sin\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \overline{v_{11} \frac{\partial u_{12}}{\partial y}} = & \kappa \frac{A_1^2}{B_1} \alpha \sinh ky e^{-\sigma y} \\ & \times \left\{ -\frac{1}{2} \sin\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \cos\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) \right\} \\ \overline{v_{12} \frac{\partial u_{12}}{\partial y}} = & \kappa^2 \frac{A_1^2}{B_1^2} k \frac{1}{2} e^{-2\sigma y} - \kappa^2 \frac{A_1^2}{B_1^2} k \frac{1}{2} e^{-\sigma y} \cos \alpha y \end{aligned}$$

これ等を用い微小項を省略して

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 \overline{u_{22}}}{\partial y^2} = & \kappa \frac{A_1^2}{B_1} \alpha \frac{k}{2} \left\{ y e^{-\sigma y} \cos\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) \right. \\ & \left. - y e^{-\sigma y} \sin\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) \right\} + \kappa^2 \frac{A_1^2}{B_1^2} \frac{k}{2} \\ & \times \{ e^{-2\sigma y} - e^{-\sigma y} \cos \alpha y \} \end{aligned} \quad \dots\dots(2-14)$$

$y(>0)$  が十分大きい時  $\frac{\partial \overline{u_{22}}}{\partial y} \rightarrow 0$  が成立することを考慮して(2-14)を積分すれば次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \overline{u^{(3)}} = \overline{u_{22}} = & (\overline{u^{(3)}})_0 + \frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}} \frac{a^2 \sigma k}{\sinh^2 kh_0} \\ & \times \left[ -\frac{1}{2} \alpha y e^{-\sigma y} \sin\left(\tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y\right) \right. \end{aligned}$$



4. 水面波の2, 3の性質について

表-1

$\alpha y \backslash \frac{\mu\alpha}{\kappa}$	nearly zero	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
0.2	+0.1481	0.1629	0.1741	0.1875	0.1927	0.1929
0.4	+0.3523	0.3712	0.3842	0.3964	0.3965	0.3894
0.8	+0.7753	0.7859	0.7888	0.7785	0.7552	0.7251
1.2	+1.0999	1.0955	1.0835	1.0451	0.9977	0.9461
1.6	+1.2923	1.2748	1.2505	1.1912	1.1257	1.0594
2.0	+1.3762	1.3500	1.3180	1.2458	1.1705	1.0965
2.4	+1.3898	1.3590	1.3233	1.2454	1.1662	1.0895
2.8	+1.3672	1.3350	1.2982	1.2193	1.1399	1.0636
3.2	+1.3326	1.3005	1.2642	1.1866	1.1089	1.0343
3.6	+1.2995	1.2685	1.2332	1.1579	1.0822	1.0096
4.0	+1.2741	1.2442	1.2102	1.1369	1.0632	0.9922

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\alpha y e^{-\alpha y} \cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right) - \frac{1}{2}e^{-\alpha y} \\
 & \times \cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right) \\
 & -\frac{1}{2}e^{-\alpha y} \cos\alpha y + \frac{1}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}e^{-2\alpha y} \\
 & + \frac{1}{2}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}e^{-\alpha y} \sin\alpha y \\
 & + \frac{1}{2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right) + \frac{1}{2} \\
 & \left. - \frac{1}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\right] \dots\dots(2-15)
 \end{aligned}$$

ただし  $(\bar{u}^{(3)})_0$  は  $y=0$  における  $u_{22}$  を示している。  
 この場合の質量輸送速度  $\bar{u}$  は  $\bar{u}^{(1)}$ ,  $\bar{u}^{(2)}$  および  $\bar{u}^{(3)}$  の  
 線形加算により与えられる。

したがって

$$\begin{aligned}
 \bar{u} = (\bar{u}^{(3)})_0 + & \frac{1}{2}\frac{a^2 k \sigma}{\sinh^2 k h_0} \\
 & + \frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}} \frac{a^2 k \sigma}{\sinh^2 k h_0} \\
 & \times \left[ -\frac{3}{2}e^{-\alpha y} \cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right) \right. \\
 & - \frac{1}{2}e^{-\alpha y} \cos\alpha y + \frac{3}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}e^{-2\alpha y} \\
 & + \frac{1}{2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right) + \frac{1}{2} \\
 & \left. - \frac{1}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\right] \dots\dots(2-16)
 \end{aligned}$$

(2-16) において  $y \rightarrow 0$  のときの  $\bar{u}$  を  $(\bar{u})_0$  とすれば

$$\begin{aligned}
 (\bar{u}^{(3)})_0 = (\bar{u})_0 - & \frac{1}{2}\frac{a^2 k \sigma}{\sinh^2 k h_0} - \frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}} \\
 & \times \frac{a^2 k \sigma}{\sinh^2 k h_0} \left\{ -\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}} \right\} \dots\dots(2-17)
 \end{aligned}$$

これを用い (2-16) の  $\bar{u}$  は

$$\begin{aligned}
 \bar{u} = (\bar{u})_0 + & \frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}} \frac{a^2 \sigma k}{\sinh^2 k h_0} \\
 & \times \left[ -\frac{3}{2}e^{-\alpha y} \cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right) \right. \\
 & - \frac{1}{2}e^{-\alpha y} \cos\alpha y + \frac{3}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}e^{-2\alpha y} \\
 & + \frac{3}{2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right) + \frac{1}{2} \\
 & \left. - \frac{3}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}} \right] \dots\dots(2-18)
 \end{aligned}$$

(2-18) において  $\kappa \rightarrow \infty$ , 即ち底の境界層が固定とな  
 ったときは  $(\bar{u})_0 \rightarrow 0$  とすることを考慮して

$$(\bar{u})_{\kappa \rightarrow \infty} = \frac{a^2 \sigma k}{\sinh^2 k h_0} \left( \frac{5}{4} - 2e^{-\alpha y} \cos\alpha y + \frac{3}{4}e^{-2\alpha y} \right) \dots\dots(2-19)$$

(2-19) は M. S. Longuet-Higgins (1953) の結果と  
 一致する。 $y(>0)$  が大きくなると、境界層の外側の

$\bar{u}$  は (2-18) より

$$\bar{u} = (\bar{u})_0 + \frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}} \frac{a^2 \sigma k}{\sinh^2 kh_0} \times \left\{ \frac{3}{2} \cos \left( \tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} \right) + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}} \right\} \quad \dots\dots(2-20)$$

$\frac{\kappa}{\mu\alpha} \rightarrow \infty$  においては (2-20) の  $\bar{u}$  は粘性係数に無関係となるが、

$\frac{\kappa}{\mu\alpha}$  有限のときは一般にそれは粘性に関係する。この場合の粘性係数は分子粘性係数に限定する必要はなく、(2-5) から明かな様に、今用いている解法では垂直方向に一様とみなせればよい。

つぎに (2-18) の数値的な性質を検討する。いま (2-7) に示される底面の  $u_1$  が通常の砂層の場合境界層外の速度の10%程度以下であると考え、また層流境界層の場合を含めてこの振動する境界層の厚さが極めて小であり、この底面に沿う薄い層内ではそれ程大きな運動量交換係数を考え得ないことを考慮すると、 $\frac{\mu\alpha}{\kappa}$  の値は0.2以下の程度と推察せられる。したがって表-1の計算例では  $\frac{\mu\alpha}{\kappa}$  は nearly zero, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 ととられている。(2-18) において

$$\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}} \left[ -\frac{3}{2} e^{-\alpha y} \cos \left( \tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y \right) - \frac{3}{4} \frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}} \right]$$

の値を無次元化された座標

$$\alpha y \left( = \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}} y \right)$$

に対して求めると、表-1 が得られる。この表において  $\frac{\mu\alpha}{\kappa} \rightarrow 0$  の場合は M. S. Longuet-Higgins (1953) と一致することは明かである。したがって (2-18) において未決定の要素  $(\bar{u})_0$  をのぞけば、質量輸送速度は  $\alpha y$  に対してとられるとき  $\frac{\mu\alpha}{\kappa} \rightarrow 0$  の固定床の場合に較べてそれ程大きな変化はないことがわかる。(2-7) の表現を更に複雑なものとしても現在考慮せられている場合については、この結論は恐らく成立するであろう。

つぎにこの境界層の力学的な性質を考えよう。 $y \geq 0$  における境界層の粘性損失は

$$\int_0^y \mu(y) \left( \frac{\partial u_{12}}{\partial y} \right)^2 dy = \int_0^y \tau \frac{\partial u_{12}}{\partial y} dy$$

$$= |\tau u_{12}|_0^y - \int_0^y u_{12} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \quad \dots\dots(2-21)$$

積分上限を境界層の上端にとり、(2-21) の時間的平均を求めると

$$\overline{\int_0^y \mu(y) \left( \frac{\partial u_{12}}{\partial y} \right)^2 dy} = -\overline{\tau_0 (u_{12})_0} \quad \dots\dots(2-22)$$

ただし  $\tau_0, (u_{12})_0$  は  $y=0$  における値を示している。(2-7) より  $y=0$  において

$$\tau_0 = \kappa(u_{11} + u_{12}) \quad \text{すなわち} \quad (u_{12})_0 = \frac{\tau_0}{\kappa} - (u_{11})_0 \quad \dots\dots(2-23)$$

(2-22), (2-23) より

$$\overline{\int_0^y \mu(y) \left( \frac{\partial u_{12}}{\partial y} \right)^2 dy} = \overline{\tau_0 (u_{11})_0} - \frac{\overline{\tau_0^2}}{\kappa} \quad \dots\dots(2-24)$$

他方底面  $y=0$  において下層に対してなされる仕事は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tau_0 (u_{11} + u_{12})_0 dt = \frac{\overline{\tau_0^2}}{\kappa} \quad \dots\dots(2-25)$$

(2-24) と (2-25) との和は、この境界層における energy 損失の総量を示して居り、それは  $\overline{\tau_0 (u_{11})_0}$  で示される。

なお (2-21) から (2-25) への計算は粘性係数  $\mu$  を  $y$  の関数とにおいて成立する。以下  $\mu$  を一定として取扱ってゆく。

(2-7) を用い

$$\tau_0 = \frac{\mu\kappa \frac{a\sigma}{\sinh kh_0}}{\sqrt{(\kappa + \mu\alpha)^2 + (\mu\alpha)^2}} \alpha \sqrt{2} \cos \left( kx - \sigma t - \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} \right)$$

$$\frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} \ll 1 \quad \text{として}$$

$$\tau_0 = \frac{\mu\kappa \frac{a\sigma}{\sinh kh_0}}{\kappa + \mu\alpha} \alpha \sqrt{2} \cos \left( kx - \sigma t - \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} \right) \quad \dots\dots(2-26)$$

また (2-2) より

$$(u_{11})_0 = \frac{a\sigma}{\sinh kh_0} \cos(kx - \sigma t) \quad \text{故に}$$

$$\overline{\tau_0 (u_{11})_0} = \left( \frac{a\sigma}{\sinh kh_0} \right)^2 \frac{\mu\kappa}{\kappa + \mu\alpha} \alpha \frac{1}{2} \frac{\kappa + 2\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} \left( = \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) \quad \dots\dots(2-27)$$

4. 水面波の2, 3の性質について

他方 (2-18) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = & \frac{\kappa}{\kappa + \mu\alpha} \frac{a^2 \sigma k}{\sinh^2 kh_0} \left\{ \frac{3}{2} \alpha e^{-\sigma y} \cos \left( \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y \right) \right. \\ & + \frac{3}{2} \alpha e^{-\sigma y} \sin \left( \frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} + \alpha y \right) + \frac{1}{2} \alpha e^{-\sigma y} \cos \alpha y \\ & \left. + \frac{1}{2} \alpha e^{-\sigma y} \sin \alpha y - \frac{3}{2} \alpha \frac{\kappa}{\kappa + \mu\alpha} e^{-2\sigma y} \right\} \dots\dots(2-28) \end{aligned}$$

(2-28) において底の近傍を考え、 $\alpha y$  が極めて小であるとし、又  $\frac{\mu\alpha}{\kappa + \mu\alpha} \ll 1$  をあわせ用いると、次の様に変形せられる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\kappa}{\kappa + \mu\alpha} \frac{a^2 \sigma k}{\sinh^2 kh_0} \alpha \frac{1}{2} \frac{\kappa + 7\mu\alpha + 6\kappa\alpha y}{\kappa + \mu\alpha} \dots\dots(2-29)$$

今この  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  による剪断応力  $\bar{\tau}$  を考えれば、波の位相速度  $c$  を用い

$$c\bar{\tau} = \left( \frac{a\sigma}{\sinh kh_0} \right)^2 \frac{\mu\kappa}{\kappa + \mu\alpha} \alpha \frac{1}{2} \frac{\kappa + 7\mu\alpha + 6\kappa\alpha y}{\kappa + \mu\alpha} \dots(2-30)$$

(2-27) と (2-30) とが等しくなるためには

$$7\mu\alpha + 6\kappa\alpha y = 2\mu\alpha, \text{ 故に } y = -\frac{5\mu}{6\kappa} < 0 \dots\dots(2-31)$$

すなわち  $y < 0$  の結果が得られ、(2-30) の表現は  $y \geq 0$  において成立するものであるから、現在考えている移動床のモデルでは  $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = c\bar{\tau}$  の関係が、 $\bar{\tau}$  を  $y \geq 0$  の境界層内のどの点にとっても成立しがたいことがわかる。しかし  $\frac{\mu\alpha}{\kappa} \rightarrow 0$  の固定床の場合には (2-27) と (2-30) より  $\bar{\tau}$  を  $y = 0$  の壁面においてとるとき

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = c\bar{\tau} \dots\dots(2-32)$$

が成立する。

2.2 水面の境界層の質量輸送

分子粘性の作用する場合のみを考慮して、水表面近傍の週期的な進行波による質量輸送を取扱う。静水面において波の進行方向に  $x$  軸、垂直上向きに  $y$  軸をとり、水深は十分大きいとする。H. Lamb (1932) によれば自由表面における境界層の1次近似は

$$\begin{aligned} u_1 = & a_0 \sigma e^{-2\nu k^2 t} e^{k y} \cos(kx - \sigma t) \\ & + 2\nu k a_0 \alpha e^{\sigma y} e^{-2\nu k^2 t} \sin(kx - \sigma t - \alpha y) \\ & - 2\nu k a_0 \alpha e^{\sigma y} e^{-2\nu k^2 t} \cos(kx - \sigma t - \alpha y) \dots\dots(2-33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 = & a_0 \sigma e^{-2\nu k^2 t} e^{k y} \sin(kx - \sigma t) \\ & - 2\nu k^2 a_0 e^{\sigma y} e^{-2\nu k^2 t} \cos(kx - \sigma t - \alpha y) \dots\dots(2-34) \end{aligned}$$

$$\eta = a_0 e^{-2\nu k^2 t} \cos(kx - \sigma t) \dots\dots(2-35)$$

ただし  $\alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}$  は前節と同様である。

ところで1次近似では  $\left[ \int v_1 dt \right]_{y=0} = \eta$  が成立しなくてはならないから、(2-34) の右辺第2項は無視されなくてはならない。このことと (2-33) とを併せ考え、1に対し  $k/\alpha$  の位数の項は計算中に用いられることとなるが、 $(k/\alpha)^2$  の位数の項は無視されることとなる。以下計算を簡単にするため  $a_0 e^{-2\nu k^2 t} = a$  とおく。

前節で示したのと同じく、この境界層の質量輸送速度は、2次近似の範囲内においては  $\frac{\partial u_1}{\partial x} \int u_1 dt (= \bar{u}^{(1)})$ ,  $\frac{\partial u_1}{\partial y} \int v_1 dt (= \bar{u}^{(2)})$  および次式を満足する  $\bar{u}_2 (= \bar{u}^{(3)})$  の和として表わされる。

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial y^2} \dots\dots(2-36)$$

周期的な進行波の時は (2-13) のかわりに (2-36) を使用することが出来る。これ等はいずれも時間的平均値として表わされている。

計算の結果は

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)} = & \frac{1}{2} a^2 k \sigma e^{2k y} - 2\nu k^2 a^2 \alpha e^{k y} e^{\sigma y} \sin \alpha y \\ & - 2\nu k^2 a^2 \alpha e^{k y} e^{\sigma y} \cos \alpha y \dots\dots(2-37) \end{aligned}$$

$$\bar{u}^{(2)} = \frac{1}{2} a^2 k \sigma e^{2k y} - a^2 k \sigma e^{k y} e^{\sigma y} \cos \alpha y \dots\dots(2-38)$$

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{u}^{(3)}}{\partial y^2} = -a^2 k \sigma^2 e^{k y} e^{\sigma y} \sin \alpha y \dots\dots(2-39)$$

(2-37), (2-38) を  $y$  で微分し、また (2-39) を  $y$  で積分し、 $\alpha y$  が十分小さい負の値において  $\frac{\partial \bar{u}^{(3)}}{\partial y} \rightarrow 0$  となることを用いると

$$\frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial y} = a^2 k^2 \sigma e^{2k y} - 2a^2 k^2 \sigma e^{(2+\alpha)y} \cos \alpha y \dots\dots(2-40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial y} = & a^2 k^2 \sigma e^{2k y} - a^2 k^2 \sigma e^{(2+\alpha)y} \cos \alpha y \\ & - a^2 k \sigma \alpha e^{(2+\alpha)y} \cos \alpha y + a^2 k \sigma \alpha e^{(2+\alpha)y} \sin \alpha y \dots\dots(2-41) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{u}^{(3)}}{\partial y} = -a^2 k \sigma \alpha e^{(k+a)y} \sin \alpha y + a^2 k \sigma \alpha e^{(k+a)y} \cos \alpha y - a^2 k^2 \sigma e^{(k+a)y} \cos \alpha y \quad \dots\dots(2-42)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}^{(1)} + \bar{u}^{(2)} + \bar{u}^{(3)}) = 2a^2 k^2 \sigma e^{2ky} - 4a^2 k^2 \sigma e^{(k+a)y} \cos \alpha y \quad \dots\dots(2-43)$$

(2-43)は自由表面の近傍の粘性境界層内における質量輸送速度の  $y$  方向の勾配を示している。この値は  $\alpha y$  が負の十分小さい値をとる境界層の下側では Stokes 波としてのものと一致し、 $y=0$  の自由表面では  $-2a^2 k^2 \sigma$  となる。

波による表面の剪断応力の時間的平均値は

$$\bar{\tau} = \mu \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots(2-44)$$

周期的な進行波では  $y=0$  で  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0$  は明かであるから、(2-44)は

$$\bar{\tau} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -2\mu a^2 k^2 \sigma \quad \dots\dots(2-45)$$

単位時間の粘性損失は (2-35) より

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \rho g (-4\nu k^2) a_0^2 e^{-4ky} = -2\nu \rho g k^2 a^2 \quad \dots\dots(2-46)$$

また (2-45) より位相速度  $c$  を用い、 $c\bar{\tau} = -2\mu a^2 k^2 g$  即ち

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = c\bar{\tau} \quad \dots\dots(2-47)$$

これから Stokes 波としての質量輸送を  $\bar{M}$  とすれば、

$$\bar{\tau} = \frac{\partial \bar{M}}{\partial t}$$

であることは自明である。この様にして自

由表面の粘性境界層は energy の関係とともに Momentum の関係を満足する。

他方水表面の力学的条件は現在の取扱いで剪断応力の総和は 0 でなくてはならぬから、 $\bar{\tau}^* + \bar{\tau} = 0$  になる様に、 $\bar{\tau}^*$  がはたらかなければならぬ。この  $\bar{\tau}^*$  により  $y=0$  での  $\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y}$  が  $2a^2 k^2 \sigma$  になる様な質量輸送が生ずる。

この質量輸送のため  $y=0$  では  $\frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} + \bar{u}^*) = 0$  となるが、粘性境界層のすぐ下側では  $\frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} + \bar{u}^*) = 4a^2 k^2 \sigma$  の質量輸送の勾配が現われる。

以上のことから、波の Momentum は表面にかかる  $\bar{\tau}$  により、energy の粘性による減衰とともに波から失われてゆくが、ついで  $\bar{\tau}^*$  により水平な流れの Momentum の増加として現われることとなる。この機構は M. S. Longuet-Higgins (1969) の Fig.3 に示されている。分子粘性のみがはたらく理想的な状態ではこの通りであるが、実際的水中では表面近傍の運動量の交換は抑制せられ、分子粘性に近い粘性係数を用いるとしても、各種の流れの存在のため境界から十分離れた領域では相当の運動量の交換があると考えられる。こうした運動量の交換と表面波との干渉、またそれによって現われる  $\bar{\tau}^*$  にもとづく流れの性質を考える時、問題は現在なされた考察よりも複雑なものとなってくる。

なお以上の計算で分子粘性として取扱われた量の意味を拡張して考えるときは、この取扱いは表面の砕波による波から流れへの運動量の移送の問題と関係づけてゆくことが出来よう。

### 3. 水面波と流れとの干渉について

#### 3.1 保存則の誘導

問題は 2 次元とし、又以下の計算では特に記されない限り、水底は水平で  $y=0$  で示され底面において  $v=0$  とおいている。速度  $u$ 、 $v$  は一般流と周期的な水面波による粒子速度との両者からなりたっているものとする。水深は任意値  $h(x, t)$  とその周期的な波についての時間的平均値  $\bar{h}(x, t)$  について考え、 $h(x, t) - \bar{h}(x, t) = \eta(x, t)$  とする。この場合の質量保存、運動量保存および energy 保存について考えよう。

質量の保存  
連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots(3-1)$$

より出発する。

$$\left| v \right|_0^h = - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$\text{に } (v)_h = \frac{\partial h}{\partial t} + (u)_h \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (v)_0 = 0 \text{ を用いると}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = 0 \quad \dots\dots(3-2)$$

その時間的平均値をとれば

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} u dy = 0 \quad \dots\dots(3-3)$$

4. 水面波の2, 3の性質について

運動量の保存

x方向の運動の方程式

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots(3-4)$$

を用い、(3-4)をy方向に0からhまで積分するとともに  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial t} + (u)_h \frac{\partial h}{\partial x} = (v)_h$ ,  $(v)_0 = 0$  を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho + \rho u^2) dy - \frac{\partial h}{\partial x} (p)_h = 0 \quad \dots\dots(3-5)$$

その時間的平均値をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_0^h \rho u dy} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\int_0^h (\rho + \rho u^2) dy} - \overline{\frac{\partial h}{\partial x} (p)_h} = 0 \quad \dots\dots(3-6)$$

(3-6)は言うまでもなく水底が水平な場合であるが、もし水底を  $y = h_0(x)$  で表わし得るときは、(3-6)は次の様に変化する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_{h_0}^h \rho u dy} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\int_{h_0}^h (\rho + \rho u^2) dy} - \overline{\frac{\partial h}{\partial x} (p)_h} + \overline{\frac{\partial h_0}{\partial x} (p)_{h_0}} = 0 \quad \dots\dots(3-7)$$

energyの保存

運動方程式は

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots(3-8)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots(3-9)$$

(3-8)にuを乗じ、0からhの間にy方向に積分すれば適当な代数計算の後

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \frac{\rho}{2} u^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\rho}{2} u^3 dy \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h p u dy + \frac{\partial h}{\partial x} (p u)_h + \int_0^h p \frac{\partial u}{\partial x} dy \end{aligned} \quad \dots\dots(3-10)$$

(3-9)にvを乗じ、同様の計算を行うと

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \frac{\rho}{2} v^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\rho}{2} u v^2 dy = - \int_0^h \rho g v dy \\ & - (p v)_h + \int_0^h p \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned} \quad \dots\dots(3-11)$$

(3-10)に(3-11)を加え

$$\frac{\partial h}{\partial x} (p u)_h - (p v)_h = -\frac{\partial h}{\partial t} (p)_h$$

を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\rho}{2} u (u^2 + v^2) dy \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h p u dy + \frac{\partial h}{\partial t} (p)_h + \int_0^h \rho g v dy = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(3-12)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^h \rho g v dy = \int_0^h \rho g \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) dy \\ &= \int_0^h \rho g \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{y} - \bar{h}) + u \frac{\partial}{\partial x} (\bar{y} - \bar{h}) \right\} dy \\ &+ \frac{\partial h}{\partial t} \rho g h + \rho g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \int_0^h u dy \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho g (\bar{y} - \bar{h}) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho g u (\bar{y} - \bar{h}) dy \\ &+ \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \rho g h + \rho g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \int_0^h u dy \end{aligned}$$

を用い、かつ  $\bar{y}$  を  $y$  とおきかえて (3-12) は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + \rho g (y - \bar{h}) \right\} dy \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + p + \rho g (y - \bar{h}) \right\} u dy \\ &+ \frac{\partial h}{\partial t} (p)_h + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \rho g h + \rho g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \int_0^h u dy = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(3-13)$$

(3-13)の時間的平均をとると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_0^h \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + \rho g (y - \bar{h}) \right\} dy} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \overline{\int_0^h \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + p + \rho g (y - \bar{h}) \right\} u dy} \\ &+ \overline{\frac{\partial h}{\partial t} (p)_h} + \overline{\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \rho g h} + \rho g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \overline{\int_0^h u dy} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(3-14)$$

(3-3), (3-6) および (3-14) が今の場合の基本的な保存関係であり、いずれも非回転運動にも、回転運動にも成立する。

3.2  $u = U(x) + u_1$  のとき

一般流Uは垂直方向には一様であるが、水平方向には変化している。 $u_1$ は波による周期的成分である。以下の計算では、波の運動については通常の意味でのせつ動近似が用いられる。

(3-3) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} (U(x) + u_1) dy &= \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{U(x)\bar{h}\} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} \bar{u}_1 dy + \frac{\partial}{\partial x} \overline{u_1(\bar{h})(h-\bar{h})} &= 0, \text{ 故に} \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{U(x)\bar{h}\} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{u_1(\bar{h})(h-\bar{h})} &= 0 \\ \dots\dots(3-15) \end{aligned}$$

(3-6) では

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\bar{h}} \rho u dy &= \frac{\partial}{\partial t} \{\rho U(x)\bar{h}\} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} (\rho + \rho u^2) dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} (\rho + \rho u_1^2) dy \\ + \frac{\partial}{\partial x} \{\rho U^2 \bar{h}\} + \frac{\partial}{\partial x} \{2\rho U \overline{u_1(\bar{h})(h-\bar{h})}\} &\text{ を用い} \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\rho U \bar{h}\} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u_1(\bar{h})(h-\bar{h})} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} (\rho + \rho u_1^2) dy \\ + \frac{\partial}{\partial x} \{\rho U^2 \bar{h}\} + \frac{\partial}{\partial x} \{2\rho U \overline{u_1(\bar{h})(h-\bar{h})}\} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (\rho)_h &= 0 \\ \dots\dots(3-16) \end{aligned}$$

(3-14) では

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\bar{h}} \rho g(y-\bar{h}) dy &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 \right) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \rho g \overline{(h-\bar{h})^2} \right\} &\text{ を用い} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \overline{(h-\bar{h})^2} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + \rho + \rho g(y-\bar{h}) \right\} u dy \\ + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} (\rho)_h + \rho g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} u dy &= 0 \quad \dots\dots(3-17) \end{aligned}$$

この場合の垂直方向の速度成分を  $v = V + v_1$  とおき、 $v_1$  を波による周期的成分とすれば

$$\frac{\partial}{\partial x} (U + u_1) + \frac{\partial}{\partial y} (V + v_1) = 0$$

この時間的平均値をとり、 $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$  故に

$$V(y) - V(0) = -\frac{\partial U}{\partial x} y$$

$V(0) = 0$  を用い

$$V = -\frac{\partial U}{\partial x} y \quad \dots\dots(3-18)$$

(3-17) において

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy \right\} \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} \left\{ (U + u_1)^2 + \left( v_1 - \frac{\partial U}{\partial x} y \right)^2 \right\} dy \right\} \end{aligned}$$

上式において  $\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2$  を微小量として無視すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy \right\} \\ = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\bar{h}} \left( \frac{\rho}{2} U^2 + \rho U u_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 + \frac{\rho}{2} v_1^2 - \rho v_1 \frac{\partial U}{\partial x} y \right) dy \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} U^2 \bar{h} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \rho U \overline{u_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \\ + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) dy - \rho \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \overline{h v_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \right\} \end{aligned}$$

同様の計算を他の項についても行い (3-17) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} U^2 \bar{h} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \rho U \overline{u_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 \right\} \\ - \rho \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \overline{h v_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho}{2} U^2 \bar{h} \right) \\ + \frac{3}{2} \rho \frac{\partial}{\partial x} \overline{U^2 u_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[ U \left\{ \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 \right\} \right] \\ - \frac{1}{2} \rho g U \frac{\partial}{\partial x} \bar{h}^2 - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ U \frac{\partial U}{\partial x} \overline{h v_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \right\} \\ + \frac{\partial U}{\partial x} \left\{ \int_0^{\bar{h}} (\rho + \rho u_1^2) dy - \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 \right\} \\ + U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} (\rho + \rho u_1^2) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} \left\{ \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) \right. \\ \left. + \rho + \rho g(y-\bar{h}) \right\} u_1 dy - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \overline{u_1(\bar{h}) v_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \right\} \\ + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} (\rho)_h + \rho g \bar{h} U \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \rho g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \overline{u_1(\bar{h})(h-\bar{h})} &= 0 \\ \dots\dots(3-19) \end{aligned}$$

(3-19) において周期波の特性により  $\overline{v_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \rightarrow 0$ ,  $\overline{u_1(\bar{h}) v_1(\bar{h})(h-\bar{h})} \rightarrow 0$  が成立する。

つぎに (3-15), (3-16) を用いて (3-19) を変形する。(3-16) に  $U(x)$  を乗じ, (3-19) より減ずる。この結果に (3-15) に  $\frac{\rho}{2} U^2$  を乗じたものを加える。その際

$\left( \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right) \rightarrow 0$  の定常状態の条件を用いる。この

4. 水面波の2, 3の性質について

様にして

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^h \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ U \left\{ \int_0^h \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \right\} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left\{ \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) + p + \rho g (y - \bar{h}) \right\} u_1 dy \\ & + \frac{\partial U}{\partial x} \left\{ \int_0^h (p + \rho u_1^2) dy - \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 \right\} \\ & + U \frac{\partial h}{\partial x} (p)_h + \frac{\partial h}{\partial t} (p)_h = 0 \quad \dots\dots(3-20) \end{aligned}$$

(3-20) において  $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \rightarrow 0$  とおかれているから

$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|$  は  $\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|$  に較べて位数が低い。したがって、 $u_1, v_1$  および  $\eta$  で表わされる進行波の位相速度および energy 輸送速度としては  $U=0$  の時の  $c', c'_0$  を用いて任意点において  $U+c, U+c'$  により表わされることが容易にわかる。また

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad c = U + c' \quad \dots\dots(3-21)$$

表面張力の影響を無視すれば

$$\left. \begin{aligned} c' &= \left(\frac{g}{k} \tanh kh\right)^{\frac{1}{2}} \\ c'_0 &= \frac{1}{2} c' \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3-22)$$

通常用いられる記号

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2 = \int_0^h \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \quad \dots\dots(3-23)$$

(ただし計算は2次近似までにとどめる。) を用いると、(3-20) は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{E(U+c'_0)\} \\ & + \frac{\partial U}{\partial x} \left\{ \int_0^h (p + \rho u_1^2) dy - \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 \right\} \\ & + (U-c) \frac{\partial h}{\partial x} (p)_h = 0 \quad \dots\dots(3-24) \end{aligned}$$

L. S. Longuet-Higgins & R. W. Stewart (1961) による記号

$S_x = \int_0^h (p + \rho u_1^2) dy - \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 = E \left(\frac{2c'_0}{c'} - \frac{1}{2}\right)$  を用いると

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{E(U+c'_0)\} + \frac{\partial U}{\partial x} S_x - c' \frac{\partial h}{\partial x} (p)_h = 0 \quad \dots\dots(3-25)$$

(3-25) の左辺最終項を J. W. Miles (1957 etc) の記述方式を用いて変形する。ただし水面に作用する表面張力は無視する。これによれば

$$\left. \begin{aligned} (p)_h &= \alpha_M \rho a U_1^2 k a \cos(kx - \sigma t) \\ &\quad - \beta_M \rho a U_1^2 k a \sin(kx - \sigma t) \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= -k a \sin(kx - \sigma t) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3-26)$$

ただし  $\alpha_M, \beta_M$  は J. W. Miles (1957) の計算中に用いられている  $\alpha, \beta$  を示し、 $U_1 = \frac{U_*}{\kappa}$ ,  $\kappa = 0.4$  において、 $U_*$  は水表面にはたらく空気流のまさつ速度である。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} (p)_h &= \frac{1}{2} k^2 a^2 \rho a U_1^2 \beta_M = \frac{1}{2} \rho g a^2 k^2 \frac{\rho a}{\rho} \frac{1}{g} U_1^2 \beta_M \\ &= E k^2 \frac{\rho a}{\rho} \frac{U_1^2}{g} \beta_M \quad \dots\dots(3-27) \end{aligned}$$

これを用い計算すると (3-25) は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E}{\partial t} + (U+c'_0) \frac{\partial E}{\partial x} \\ & = E \left\{ c' k^2 \frac{\rho a}{\rho} \frac{U_1^2}{g} \beta_M - \frac{\partial U}{\partial x} \left(\frac{2c'_0}{c'} - \frac{1}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial c'_0}{\partial x}\right) \right\} \quad \dots\dots(3-28) \end{aligned}$$

(3-28) は1次元の問題において、流れの速度が  $x$  方向のみに変化する場合の風波の発達に関する基本式である。

水深が十分大きい場合について、(3-28) の性質を検討してみる。

$\sigma = k(c'+U)$  において、 $k, c'$  および  $U$  は  $x$  の関数とし、 $U$  の  $x$  方向の変化はゆるやかであるとする。 $\sigma$  は不変とする。 $c'^2 = \frac{g}{k}$  を用い

$$\frac{\partial c'_0}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial c'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{1 + 2 \frac{U}{c'}} \quad \dots\dots(3-29)$$

故に (3-28) は水深が十分大きい場合に

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (U+c'_0) \frac{\partial E}{\partial x}$$

$$=E\left[c'k^2\frac{\rho_a}{\rho}\frac{U_1^2}{g}\beta_M-\frac{\partial U}{\partial x}\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2\left(1+2\frac{U}{c'}\right)}\right\}\right] \quad \dots\dots(3-30)$$

$\frac{dx}{dt}=U+c'_0$  とおけば

$$E=E_1\exp\left[\int_{t_1}^{t_2}\left\{c'k^2\frac{\rho_a}{\rho}\frac{U_1^2}{g}\beta_M-\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2\left(1+2\frac{U}{c'}\right)}\right)\right\}dt\right] \quad \dots\dots(3-31)$$

ただし右辺における  $x$  は  $dt$  とともに  $(U+c'_0)dt$  だけ変化する。若し  $\frac{\partial E}{\partial x}=0$  の時は (3-31) は任意の  $x$  で用いてよい。また  $\frac{\partial E}{\partial t}=0$  の定常状態のときは

$$E=E_1\exp\left[\int_{x_1}^{x_2}\left\{c'k^2\frac{\rho_a}{\rho}\frac{U_1^2}{g}\beta_M-\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2\left(1+2\frac{U}{c'}\right)}\right)\right\}\frac{dx}{U+c'_0}\right] \quad \dots\dots(3-32)$$

$$c'_0=-\frac{c'}{2}$$

(3-32) において  $\beta_M=0$  のときは

$$E=E_1\exp\left[\int_{x_1}^{x_2}(-)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{4+6\frac{U}{c'}}{c'\left(1+2\frac{U}{c'}\right)^2}dx\right] \quad \dots\dots(3-33)$$

(3-33) は M. S. Longuet-Higgins & R. W. Stewart (1961) の結果と一致する。(3-31), (3-32) から次の様な特性が得られる。 $\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|$  は通常  $\frac{1}{10}\sim\frac{1}{100}\text{sec}^{-1}$  であるから, (3-31), (3-32) における  $\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|$  は  $\frac{1}{1000}\text{sec}^{-1}$  より小さい程度でなければならぬ。この約  $\frac{1}{1000}\text{sec}^{-1}$  の  $\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|$  を用いるとき, (1-31), (1-32) の積分中の第 2 項は通常の風速において第 1 項と相似した値となる。ただし  $\beta_M$  の値としては, J.W.Miles (1960) の計算値を用いる。 $\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|$  が大きくなるとともに (3-31), (3-32) の精度は落ちてゆくが, 定性的には  $\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|$  が相当大きい時は, J. W. Miles の計算値としての  $\beta_M$  より更に大き

な  $\beta_M$  を用いても,  $\frac{\partial U}{\partial x}$  が波の発達に十分効果的に影響することを示している。

また (3-32) において  $c', c'_0 > 0$  であり,  $U < 0$  のとき,  $c' > |U| > c'_0 > 0$  の関係が成立すると, (3-32) の積分中において  $c'k^2\frac{\rho_a}{\rho}\frac{U_1^2}{g}\beta_M-\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2\left(1+2\frac{U}{c'}\right)}\right) > 0$  であれば, 波は位相的に風下側に進行するが, 波の発達は風下側より風上側に向かって進む。また  $c', c'_0 > 0, v < 0$  で  $|U| \rightarrow c'_0$  とともに  $\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$  の場合には波高の急変が生ずる。しかもこの時 (3-32) の積分項は

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{2k^2\frac{\rho_a}{\rho}\frac{U_1^2}{g}\beta_M\frac{1}{1+\frac{U}{c'_0}}-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{4+6\frac{U}{c'}}{c'\left(1+\frac{U}{c'_0}\right)^2}\right\}dx \quad \dots\dots(3-32)'$$

となり,  $\frac{\partial U}{\partial x}$  を含む項がもっとも効果的になることに注意すべきである。

### 3.3 $u=U(y)+u_1$ のとき

一般流  $U$  は垂直座標  $y$  のみの関数であり,  $u_1$  は進行波による周期的成分である。この節の計算では  $\bar{h}$  は  $x$  および  $t$  に独立であるとする。

連続の関係から

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{U+u_1})+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{V+v_1})=0, \text{ これに } \frac{\partial U}{\partial x}=0 \text{ を用いて, } \frac{\partial V}{\partial y}=0, (V)_0=0 \text{ であるから}$$

$$V=0 \quad \dots\dots(3-34)$$

以下この場合の質量保存, 運動量保存および Energy 保存の各関係を求める。

$$\int_0^{\bar{h}}\rho u dy = \int_0^{\bar{h}}\rho U dy + \rho U'(\bar{h})\frac{(\bar{h}-\bar{h})^2}{2} + \rho u_1(\bar{h})(\bar{h}-\bar{h})$$

$$\int_0^{\bar{h}}\frac{\rho}{2}U^2 dy = \int_0^{\bar{h}}\frac{\rho}{2}U^2 dy + \rho U(\bar{h})U'(\bar{h})\frac{(\bar{h}-\bar{h})^2}{2}$$

等を用い, (ただし  $U'(\bar{h})$  は  $\left(\frac{dU(y)}{dy}\right)_{y=\bar{h}}$  を意味する。)

質量の保存則 (3-3) は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{U'(\bar{h})}{2}(\bar{h}-\bar{h})^2\right\}+\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_1(\bar{h})(\bar{h}-\bar{h})})=0$$



4. 水面波の 2, 3 の性質について

……(3-35)

運動量の保存則 (3-6) は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho U'(\bar{h}) \frac{(\bar{h}-\bar{h})^2}{2} \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho u_1(\bar{h})(\bar{h}-\bar{h}) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} \{ p + \rho u_1^2 \} dy + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho U(\bar{h}) U'(\bar{h}) (\bar{h}-\bar{h})^2 \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \{ 2\rho U(\bar{h}) u_1(\bar{h}) (\bar{h}-\bar{h}) \} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (p)_h = 0 \end{aligned}$$

……(3-36)

Energy の保存則 (3-14) は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho}{2} U(\bar{h}) U'(\bar{h}) (\bar{h}-\bar{h})^2 \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho U(\bar{h}) u_1(\bar{h}) (\bar{h}-\bar{h}) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) dy + \frac{1}{2} \rho g (\bar{h}-\bar{h})^2 \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{3}{4} \rho U^2(\bar{h}) U'(\bar{h}) (\bar{h}-\bar{h})^2 \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{3}{2} \rho U^2(\bar{h}) u_1(\bar{h}) (\bar{h}-\bar{h}) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) U dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} U (p + \rho u_1^2) dy \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho g}{2} U(\bar{h}) (\bar{h}-\bar{h})^2 \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} \left\{ \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) + p + \rho g (\bar{h}-\bar{h}) \right\} u_1 dy \\ & + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} (p)_h = 0 \end{aligned}$$

……(3-37)

(3-36) に  $U(\bar{h})$  を乗じたものを (3-37) から減じ、その結果に (3-35) に  $\frac{1}{2} \rho U^2(\bar{h})$  を乗じたものを加えると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) dy + \frac{1}{2} \rho g (\bar{h}-\bar{h})^2 \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) U dy + U(\bar{h}) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho g}{2} (\bar{h}-\bar{h})^2 \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} (U-U(\bar{h})) (p + \rho u_1^2) dy \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\bar{h}} \left\{ \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) + p + \rho g (\bar{h}-\bar{h}) \right\} u_1 dy \\ & = (c-U(\bar{h})) \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (p)_h \end{aligned}$$

……(3-38)

ただし  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + c \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0$  ……(3-39)

(3-38) は前節の (3-20) に相当する表現であり、こ

$$C = \frac{\frac{1}{2} g \left\{ U_0 + (c-U_0) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2k\bar{h}}{\sinh 2k\bar{h}} \right) \right\} - \frac{1}{4} \beta (c-U_0) \left\{ U_0 + (c-U_0) \frac{2k\bar{h}}{\sinh 2k\bar{h}} \times \left( 1 + \frac{1}{2} k\bar{h} \coth k\bar{h} \right) \right\}}{\frac{1}{2} g - \frac{1}{4} \beta (c-U_0)}$$

……(3-43)

の式には一般流  $U$  が  $y$  のみの関数であるための特性が表われている。

第 1 章 §3-2 にあげた  $U=U_0+\beta(y-\bar{h})$  ( $U_0$  は静水面における表面流速  $U_0=U(\bar{h})$ ) で示されるれ一般流が存在する場合の進行波について (3-38) の性質を調べよう。

2 次近似までを考慮するとき

$$\begin{aligned} & \int_0^{\bar{h}} (U-U(\bar{h})) (p + \rho u_1^2) dy \\ & = \int_0^{\bar{h}} (U-U(\bar{h})) (\bar{p} + \rho u_1^2) dy \\ & + \int_{\bar{h}}^{\bar{h}} (U-U(\bar{h})) p dy \text{ となり} \\ & \int_{\bar{h}}^{\bar{h}} (U-U(\bar{h})) (\bar{p} + \rho u_1^2) dy \end{aligned}$$

の項においては  $\bar{p}$  は 2 次近似までを必要とする。また右辺第 2 項は言うまでもなく 1 次近似まででよい。(3-38) の他の項についても同様の位数の評価を行う。 $\bar{p}$  については計算の結果、2 次近似において次の表式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{p}_2 & = \rho g (\bar{h}-y) - \frac{1}{4} \rho \frac{\alpha^2 (c-U_0)^2}{\sinh^2 k\bar{h}} k^2 \cos h 2ky \\ & + \frac{1}{4} \rho \alpha^2 \frac{(c-U_0)^2}{\sinh^2 k\bar{h}} k^2 \end{aligned}$$

……(3-40)

$u_1, v_1$  および  $h-\bar{h}$  等はすでに (1-99) から (1-104) の間に示されている。これ等を用いて (3-38) はつぎの様に変形せられる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \rho g \alpha^2 - \frac{1}{4} \rho \alpha^2 \beta (c-U_0) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \rho g \alpha^2 \{ U_0 + (c-U_0) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2k\bar{h}}{\sinh 2k\bar{h}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \rho \alpha^2 \beta (c-U_0) \{ U_0 + (c-U_0) \frac{2k\bar{h}}{\sinh 2k\bar{h}} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( 1 + \frac{1}{2} k\bar{h} \coth k\bar{h} \right) \right] \right] = (c-U_0) \frac{\partial \eta}{\partial x} (p)_h \end{aligned}$$

……(3-41)

左辺第 2 項の [ ] に  $\frac{\frac{1}{2} \rho g - \frac{1}{4} \rho \beta (c-U_0)}{\frac{1}{2} \rho g - \frac{1}{4} \rho \beta (c-U_0)}$  を乗ず

るとき、(1-107) を考慮して

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (CE) = (c-U_0) \frac{\partial \eta}{\partial x} (p)_h$$

……(3-42)

energy 輸送の特性速度  $C$  は上式で表わされ、一般流の垂直方向の速度勾配  $\beta$  が 0 のときは、一様流中の energy 輸送の特性速度（それはその場合における進行波の群速度と一致するが）と一致する。（(3-24) 参照）

(3-43) は水深が十分大きいとき

$$C = U_0 + \frac{g(c - U_0)}{2g - \beta(c - U_0)} \quad \dots\dots(3-44)$$

水深が十分小さいとき

$$C = c - \frac{\beta(c - U_0)^2}{4g - 2\beta(c - U_0)} \quad \dots\dots(3-45)$$

また  $c - U_0 > 0$  のときは

$$C \leq \left\{ U_0 + (c - U_0) \frac{1}{2} \left( \frac{2k\bar{h}}{\sinh 2k\bar{h}} + 1 \right) \right\} \quad \dots\dots(3-46)$$

も容易に示される。ただし上式の右辺の  $c, U_0$  は(1-98), (1-102) によるものである。

これに対し (1-102) において  $\sigma = kc$  を考え、

$\frac{\partial \sigma}{\partial k} (= c_0)$  を求めると、この場合の群速度は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial k} = & U_0 - \frac{\beta \bar{h}}{2} \sinh^2 k\bar{h} \pm \frac{1}{2} \\ & \times \frac{\frac{g}{k} \tanh k\bar{h} \left( 1 + \frac{2k\bar{h}}{\sinh 2k\bar{h}} \right) + \frac{\beta^2}{2} \frac{\bar{h}}{k} \tanh k\bar{h} \cdot \operatorname{sech}^2 k\bar{h}}{\sqrt{\frac{g}{k} \tanh k\bar{h} + \frac{\beta^2}{4k^2} \tanh^2 k\bar{h}}} \end{aligned} \quad \dots\dots(3-47)$$

(3-47) は水深が十分大きいとき

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k} = U_0 + \frac{1}{2} \frac{\frac{g}{k} (c - U_0 + \frac{\beta}{2k})}{\frac{g}{k} + \frac{\beta^2}{4k^2}} \quad \dots\dots(3-48)$$

水深が十分小さいとき

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k} = c \quad \dots\dots(3-49)$$

これ等の  $\frac{\partial \sigma}{\partial k}$  は水深  $\bar{h}$  が十分大きい場合を除いて

energy 輸送の特性速度  $C$  と一致しない。

他方波数と周波数とを結ぶ運動学的な関係

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots(3-50)$$

はこの場合においても成立するから、波数の特性速度は  $\frac{\partial \sigma}{\partial k}$  で与えられる。energy 輸送の特性速度  $C$  が (3-50)

の波数についての特性速度  $\frac{\partial \sigma}{\partial k}$  と一致しないことは、

J. C. Luke (1967), G. B. Whitham (1967) により展開せられた変分法を用いた解析が、直接的には剪断流中の進行波には適用しがたいことを示している。

また前節の (3-28) およびこれにつづく諸式と同様の計算を行なえば、(3-42), (3-43) から波の発達についての表現を得ることは言うまでもない。

### 参 考 文 献

- 1) Hamada, T.: The secondary interactions of surface waves., Report. No. 10, Port & Harbour Res. Inst. (1965)
- 2) Lamb, H.: Hydrodynamics, Camb. Univ. Press., (1932)
- 3) Longuet-Higgins, M. S.: Mass transport in water waves, Phil. Trans., A.245 (1953)
- 4) Longuet-Higgins, M. S. & R. W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, Journal of Fluid Mech., vol. 10, (1961)
- 5) Longuet-Higgins, M. S.: A nonlinear mechanism for the generation of sea waves, Proc. Roy. Soc. A. 311 (1969)
- 6) Luke, J. C.: A variational principle for a fluid with a free surface, Journal of Fluid Mech., vol. 27 (1967)
- 7) Miles, J. W.: On the generation of surface waves by shear flows, Journal of Fluid Mech., vol.3 (1957)
- 8) Miles, J. W. On the generation of surface waves by turbulent shear flows, Journal of Fluid Mech., vol. 7 (1960)
- 9) Whitham, G. B.: A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian, Journal of Fluid Mech., vol. 22 (1965).
- 10) Whitham, G. B.: Non-linear dispersion of water waves, Journal of Fluid Mech., vol. 27 (1967) (1971. 3.8 受付)