

運輸省港湾技術研究所

# 港湾技術研究所 報告

---

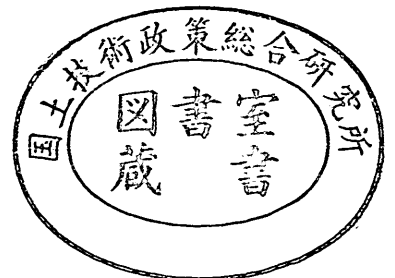
---

REPORT OF  
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH  
INSTITUTE  
MINISTRY OF TRANSPORT

---

VOL. 10      NO. 2      June 1971

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN



港湾技術研究所報告は第7巻第1号より年4回定期的に刊行する。

報告の入手を希望する方は論文番号を明記して港湾技術研究所長に申し込んで下さい。

The Report of the Port and Harbour Research Institute is published quarterly, either in Japanese or in occidental languages. The title and synopsis are given both in Japanese and in occidental languages.

The copies of the Report are distributed to the agencies interested on the basis of mutual exchange of technical publication.

Inquiries relating to the Report should be addressed to the director of the Institute specifying the numbers of papers in concern.

# 港湾技術研究所報告 (REPORT OF P.H.R.I.)

第 10 卷 第 2 号 (Vol. 10, No. 2), 1971年 6 月(June 1971)

## 目 次 (CONTENTS)

1. 島堤による波の反射および回折に関する研究  
.....合田良実, 吉村知司, 伊藤正彦..... 3  
(Reflection and Diffraction of Water Waves by an Insular Breakwater  
.....Yoshimi GODA, Tomotsuka YOSHIMURA, Masahito Iro)
2. 漂砂の連続的な現地観測について  
——海底地形変動に関する一考察——  
.....入江 功, 天坂三朗..... 53  
(On the Continuous Observation of Littoral Drift in the Field  
—A Note on the Variation of the Sea Bottom Level—  
.....Isao IRIE, Mitsuaki TENSUKA)
3. 新しい方法による波動の数値計算  
——防波堤周辺の波高分布への適用——  
.....伊藤喜行, 谷本勝利..... 97  
(A New Method of Numerical Analysis of Wave Propagation  
—Application to Wave Height Distribution along Breakwater—  
Yoshiyuki Iro, Katsutoshi TANIMOTO)
4. 水面波の 2, 3 の性質について  
.....浜田徳一..... 121  
(On Some Properties of Water Surface Waves  
.....Tokuichi HAMADA)
5. 河口侵入波におよぼす河口流の効果  
.....金子安雄, 上野信行..... 147  
(Experimental Study On Wave Height Damping Effects Due to Opposing Current  
.....Yasuo KANEKO, Nobuyuki UENO)
6. 粗粒径土砂混合水による鋼材の摩耗特性について  
.....宮崎昭児, 奥出 律, 津村悦夫..... 163  
(Abrasion Properties of Steels against Coarse Solid-Water Mixtures  
.....Shoji MIYAZAKI, Tadasu OKUDE, Etsuo TSUMURA)

# 1. 島堤による波の反射および回折に関する研究

合田良実\*・吉村知司\*\*・伊藤正彦\*\*

## 要 旨

島堤は、防波堤の一つの配置方法として実際の港に用いられているが、波と島堤の相互作用については、まだ十分解明されていない。たとえば、半無限防波堤の解の重ね合わせによる近似解によって、島堤による反射波および回折波は計算できるが、この近似解の適用範囲は明らかでない。

そこで、波と島堤の相互作用の解明の一つとして楕円柱構造物による波の反射および回折を取り上げ、回折散乱波の厳密解を Mathieu 関数の級数の形で求めた。この厳密解は、島堤の形状を楕円から円に漸近させたときに、すでに解かれている円柱構造物による回折散乱波の解に一致することが確認された。さらに、この楕円の形状の他方の極限である直線状島堤による回折散乱波の厳密解を求め、これによって反射、回折、島堤周辺の波高分布などを各種の条件について計算した。また、近似解との比較検討を行ない、その適用範囲を明らかにした。

同時に、模型島堤による波の反射、回折状況について実験を行ない、島堤の前面、周辺および背面の波高分布を測定した。実験値は厳密解による計算値によく一致し、実際の波にこの厳密解が十分適用できることを証明した。

---

\* 水工部 波浪研究室長

\*\* 水工部 波浪研究室

## 1. Reflection and Diffraction of Water Waves by an Insular Breakwater

Yoshimi GODA\*  
Tomotsuka YOSHIMURA\*\*  
Masahiko ITO\*\*

### Synopsis

Though an insular breakwater is often constructed in harbors as one of breakwater layouts, the interaction between an insular breakwater and water waves has not been solved clearly. For example, heights of reflected and diffracted waves are calculated with the approximate solution derived from the superposition of the solutions of semi-infinite breakwaters, but the accuracy of the approximate solution has not been clarified.

In this report, the exact solution of wave reflection and diffraction by a vertical, elliptical cylinder is presented with a series of Mathieu functions. The solution is confirmed to coincide with the solution for a circular cylinder when the circle is taken as an asymptotic figure of an ellipsis. Then, the exact solution for a straight insular breakwater is derived with the deformation of the elliptical cylinder into a plate of infinitesimal thickness. Wave height ratios of scattered waves to incident waves have been calculated in neighborhood of insular breakwaters, and the application limit of the approximate solution is determined from the comparison between the exact and the approximate solutions.

Experiments have also been conducted with measurements of scattered wave heights in front of, at the back of, and on the circumference of several model insular breakwaters. The exact solution is proved to be applicable to the calculation of reflected and diffracted water waves through a good agreement between the measured and calculated values.

---

\* Chief of Wave Laboratory, Hydraulics Division

\*\* Member of Wave Laboratory, Hydraulics Division

# 目 次

要 旨 .....	3
1. 序論 .....	7
2. 島状構造物による回折散乱波 .....	7
2.1 回折散乱波に関する従来の研究 .....	7
2.2 楕円筒座標による回折散乱波の解 .....	9
2.3 円柱構造物による回折散乱波の解 .....	16
2.4 島堤による回折散乱波の解 .....	17
3. 島堤による反射および回折の計算 .....	18
3.1 島堤の反射および回折の厳密解 .....	18
3.2 島堤の反射および回折の近似解 .....	19
3.3 計算結果に対する考察 .....	22
3.4 近似解の適用範囲についての考察 .....	37
4. 実験的考察 .....	39
4.1 実験装置 .....	39
4.2 実験ケースおよび実験方法 .....	40
4.3 実験結果に対する考察 .....	43
5. 結 論 .....	50
参考文献 .....	51
記号一覧表 .....	52

## 1. 序論

島堤, すなわち島状防波堤は防波堤の一つの配置方法として実際の港でしばしば用いられる。また, 海岸浸食防止のために築造される離岸堤も島堤形式である。

こうした島堤に波が作用すると, 波の一部は反射されて沖へ向い, 別の一部は回折作用によって, 島堤背後へ廻り込む。このように波は島堤によって散乱される。

この散乱波は島堤背後では, 回折波として波高を減じて, 港内を静穏にする。島堤背後の回折波の波高の計算には半無限堤の解の重ね合わせによる近似解が用いられているが, その適用範囲はいまだ十分明らかにされていない。また, 島堤前面では, この散乱波は入射波と干渉して, 波高を増大させ, 重複波現象を起す。島堤からの距離の増大に伴って, 散乱波の波高は減ずるが, 港内に島堤が設置されている場合, 配置によっては島堤は港内をじょう乱させる原因にもなる。このように島堤の配置を決定するうえに, 回折, 散乱現象を解明することが必要である。

さらに, 波が島堤によって反射, 回折されると同時に, 波は島堤に対して波力を作用させる。特に, 島堤に働く波圧は連続堤に働く波圧よりも大きいのではないかと疑問がもたれ<sup>1)</sup>, 入射角によっては連続堤と同じように設計することは危険性を伴うと考えられている。

また, 最近のタンカーの巨大化によって, シーバースの建設が各地で進められている。20万tタンカーを例にとれば, 船長約315m, 幅約50mで, その大きさから見れば, 島状防波堤と何ら変りない。シーバース設計の一つの問題点は, けい留中の船舶と波との相互作用であり, 船が固定されている場合の問題は島堤と波との相互作用に置き換えて考えることができる。また, この固定状態の解は浮遊けい留時の基礎として使えるものと予想される。

このように, 波と島堤との相互作用の問題は実用上重要であるにもかかわらず, これに関する研究はほとんど行なわれていない。島堤による波の回折を半無限堤による回折の重ね合わせとして示した田中の解<sup>2)</sup> (1957), 同じく回折の際の両端からの相互干渉の重要性を指摘した和田の計算<sup>3), 4)</sup> (1964) などが数少ない研究の例である。

そこで, 本研究においては, 従来から無限に長い楕円筒円体の軸に直角入射する音波の散乱現象の解明に用いられている Mathieu の微分方程式を海の波に応用し

て, 楕円柱構造物による反射および回折波を厳密に解いた。そして, この楕円柱構造物の一つの極限状態として, この楕円の厚さを無限小にした直線状島堤の厳密解を求めた。

一方, 近似解として, 半無限防波堤の解の重ね合わせによって求める方法を取り上げ, 上記の厳密解との比較によって, その近似精度を検討した。さらに, 造波水槽内に数種類の模型島堤を設置して, 島堤の前面, 周囲, 背後の波高分布を測定し, 計算値との比較によって理論解の妥当性を検討した。

なお, 本研究の応用として, 島堤および島状構造物に働く波力を計算することができる。ただし, 本論文は基礎研究にとどめ, 波力の計算は別途, 港湾技術研究所報告に続報として発表する予定である。

## 2. 島状構造物による回折散乱波

### 2.1 回折散乱波に関する従来の研究

散乱波は波の進行が防波堤や海中構造物によって, 部分的に遮断される状態が生じる。ここでは, 潜堤, 水底の急変部, および浮体によって生じる散乱波は除き, 波が構造物によって鉛直方向に完全に遮断され, 回折, 反射現象を起す問題について, 従来の研究を概括する。

#### (1) 半無限防波堤による回折散乱波

Penny と Price<sup>5)</sup> は半無限直線壁による光の回折に関する Sommerfeld の厳密解が半無限防波堤による波の回折の解と一致することを指摘した。この Penny と Price の指摘に基づいて, Puttnam と Arthur<sup>6)</sup> は, この重ね合わせによる回折係数を計算し, 同時に実験を行なって, 理論値と比較検討している。図-1 のような半無限防波堤による回折係数  $K$  は Sommerfeld の解によって, 次のように与えられる。

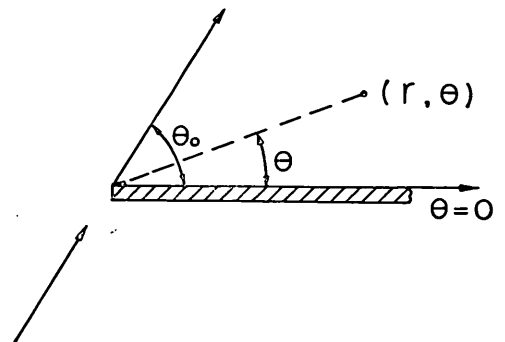


図-1 半無限堤による回折

$$K = |E(r, \theta)| \\ = |\exp\{-ikr \cos(\theta_0 - \theta)\} f(u_1) \\ + \exp\{-ikr \cos(\theta_0 + \theta)\} f(u_2)| \quad \dots\dots(1)$$

ここで、

$$f(u) = (1/\sqrt{2}) \exp[i\frac{\pi}{4}] \int_{-\infty}^u \exp[-i\frac{\pi}{2}u^2] du \quad \dots\dots(2)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\sqrt{4kr/\pi} \sin[(\theta_0 - \theta)/2] \\ u_2 &= -\sqrt{4kr/\pi} \sin[(\theta_0 + \theta)/2] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

また、 $k=2\pi/L$  で、 $L$  は波長である。

特に、 $u < -2$  では式(2)は近似的に

$$f(u) \doteq 1/(\pi\sqrt{2}u) \exp\left\{-i\pi\left[\frac{1}{4} + (u^2/2)\right]\right\} \quad \dots\dots(4)$$

と与えられる。Puttnam と Arthur は式(2)、(4)を完全解、簡略解としてそれぞれ計算を行ない、一方水深 1.5 ft、周期 0.70~0.76 秒の波を用いて実験を行なっている。実験は防波堤傾角をいろいろ変えて行ない、また、堤端を滑らかにした有限厚の防波堤についても検討している。実験結果によると、簡略解は幾何光学的陰の部分で実験値とよく一致した。完全解は実験値より大きな値を示し、入射波直進領域では実験値は理論値より小さいことを指摘している。このように完全解が実験値と一致しないのは、防波堤前面に消波工を設けて、反射波を消したことが大きな原因だと思われる。堤端を滑らかにした有限厚の防波堤の場合は堤端から二次じょう乱波が生じることを述べている。

その他、この回折理論を実用に供するため、Wiegel<sup>7)</sup> および森平・奥山<sup>8)</sup> は回折係数の計算図表を作製している。

(2) 開口部を持つ両翼防波堤による回折散乱波

Blue と Johnson<sup>9)</sup> は両翼防波堤による回折散乱の問題を防波堤相互の干渉がないと仮定して、式(1)の Sommerfeld の解の重ね合わせによって、開口部へ直角入射する場合について解き、実験値と理論値を比較している。回折係数は理論値より実験値が少し小さくなるが、波形勾配、防波堤の角度などの影響はほとんどない。波形に関して、実験による波峯は開口部中心線上で理論より前に進んでおり、これは波形勾配が大きい程著しい。特に、回折波は波形が鋭くなる。また、小さい回折係数の領域に沿って、波峯が不連続になることを指摘している。

開口部へ斜め入射する場合は、高井<sup>10)</sup> が各防波堤での入射波の位相のずれを考慮して、Blue と Johnson と同

様の方法で電算機を用いて、回折図を作製している。

2 重回折については、田中<sup>11)</sup> が同様に Sommerfeld の解の重ね合わせで求めている。

このような Sommerfeld の解の重ね合わせによる解法は防波堤における境界条件を満足しなく、特に、堤端で誤差が大きい。また、この解法は開口部が狭くなった場合、防波堤による相互干渉が著しくなり、適用できない。

この問題の解決として、Carr と Stelzriede<sup>12)</sup> が本論文と同様に Mathieu 関数の展開を用いて、開口部からの回折波の厳密解を求めているが、Mathieu 関数の計算に数表を用いているため各点の回折係数を求めるのに時間を要する欠点がある。

以上の解法は一樣水深の場合であるが、水深が変化する場合に関しては、Barailler と Gaillard<sup>13)</sup> が回折、屈折の同時現象をエネルギー発散を考慮して、グリーン関数を計算することによって解き、模型実験に適用している。

(3) 島状構造物による回折散乱波

島状構造物による回折散乱波は構造物の形状が単純な場合について解かれている。

円柱構造物による回折散乱波は田中<sup>14)</sup> が次のようにして解いている。一樣水深の仮定のもとに円筒座標  $(r, \theta, z)$  を用いて、表面波の条件を満足する速度ポテンシャルを

$$\phi = \phi_0 \phi(r, \theta) \cosh k(h+z) e^{i\omega t} \quad \dots\dots(5)$$

で表わし、円筒座標に変換されたラプラスの方程式に式(5)を代入して、式(6)を導いた。ただし、 $\sigma=2\pi/T$  は角振動数、 $T$  は波の周期、 $h$  は水深である。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + k^2 \phi = 0 \quad \dots\dots(6)$$

田中は無限遠点で散乱波が消滅する条件の下に、入射波、散乱波を分離し、円柱構造物での境界条件から式(6)の解である Bessel 関数、Hankel 関数を用いて、回折散乱波を次のように表わした。

$$\phi = \phi_0 \left[ e^{ikr \cos \theta} - \frac{J_0'(kr_0)}{H_0^{(2)'}(kr_0)} H_0^{(2)}(kr) \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{J_n'(kr_0)}{H_n^{(2)'}(kr_0)} H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta \right] \\ \times \frac{\cosh h k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\omega t} \quad \dots\dots(7)$$

ここで、 $\phi_0$  は定数、 $r_0$  は円柱構造物の境界を示している



る。

MacCamy と Fuchs<sup>15)</sup> は式(7)を独立に導き、これを用いて、円柱パイルに働く波力を求めている。さらに、Laird<sup>16)</sup> は円柱構造物のまわりの波圧、波高、位相差を実験的に求めて、MacCamy と Fuchs の理論と比較している。これによると、実験波圧は静水面から下がるに従って理論より急激に減少し、底面付近で実験値は理論値と大きな差を示している。また、位相は円柱の前面( $\theta=0$ )から $\theta=90^\circ$ 付近までは一様に進んでいるが、 $\theta>90^\circ$ では急激に遅れ始め、円柱の背面( $\theta=180^\circ$ )で最大になる傾向は実験とよく一致している。

Daubert と Lebreton<sup>17)</sup> は構造物の境界を湧出点の集合として、ポテンシャルの和を計算することによって、円形パイル、楕円パイル等に作用する波力、回折係数を計算している。

島状構造物の厚さが無限小になった島堤の場合は開口部を有する両翼防波堤の場合と同様に、位相差を考慮した Sommerfeld の重ね合わせで解かれている<sup>2)</sup>。しかし、このような重ね合わせによる解はその適用範囲が明らかでない。そこで、和田<sup>3),4)</sup> はヘルムホルツの方程式に関連する境界値問題を Wiener-Hopf 法で解く解法の内 Jones の方法を用いて、島堤の回折の問題を解いている。この結果によると、島堤の長さが5波長以上では十分 Sommerfeld の重ね合わせが成り立つが、島堤が波長に比して短くなると、両端よりの相互干渉の項が強くなり、近似解を補正する必要があることを示している。しかし、この和田の解法は島堤近傍では計算信頼度が低く、島堤沿いの波高分布、波力を計算することができない。

## 2.2 楕円筒座標による回折散乱波の解

### (1) 基礎方程式

理論計算を進める上で、流体、流体運動、境界条件に関して、次のような仮定を用いる。

(i) 流体は理想流体で、非圧縮性である。この仮定によって流体の連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots(8)$$

ここで、 $x, y$ は静水面上の座標軸で、 $z$ は鉛直上方の座標軸である。また、 $u, v, w$ は $x, y, z$ 方向の流速成分である。

(ii) 流体運動は非回転運動である。この仮定は次のような速度ポテンシャルを与える。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \dots\dots(9)$$

式(9)を式(8)に代入すると、速度ポテンシャルは次のラプラスの方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots(10)$$

(iii) 波高は十分小さく、 $\partial \eta / \partial x \approx 0$ である。この仮定から水面における連続の式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w_{z=0} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} \quad \dots\dots(11)$$

となる。ここで、 $\eta$ は静水面からの水位変動を示す。

(iv) 流速は小さく、流速の2乗の項は無視することができる。したがって、水面条件はベルヌーイの定理から

$$\eta = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad \dots\dots(12)$$

となる。

(v) 境界面における流体の出入はない。この仮定は、境界面における法線方向の軸を $n$ として

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots(13)$$

と表示される。

(vi) 水深は一定である。この仮定によって、水底による反射、屈折はない。

以上、(i)~(vi)の仮定によって、流体運動は式(10)~(13)のように線形になり、線形理論が適用できる。

式(13)の境界条件で、水底における条件を満足する速度ポテンシャルは複素数表示を用いて

$$\phi = \phi_0 \phi(x, y) \cosh k(h+z) e^{i\sigma t} \quad \dots\dots(14)$$

となる。

式(11)と式(12)から

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{1}{g} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0 \quad \dots\dots(15)$$

となり、式(14)を式(15)に代入すると、波の周期、波長、水深の関係式が次のように求まる。

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad \dots\dots(16)$$

さらに、式(14)を式(12)に代入すると

$$\eta = -\frac{\phi_0 \sigma i}{g} \phi(x, y) \cosh kh e^{i\sigma t} \quad \dots\dots(17)$$

となり、波高 $H$ は

$$H = 2|\eta| = \frac{2\phi_0 \sigma}{g} |\phi(x, y)| \cosh kh \quad \dots\dots(18)$$

与えられる。波は規則波、水深は一定であるため、式(16)から  $k$  は不変となり、波高の平面分布は複素関数  $\phi(x, y)$  の絶対値  $|\phi(x, y)|$  によって表示されることになる。

式(14)を式(10)のラプラスの方程式に代入すると、次のようなヘルムホルツの方程式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0 \quad \dots\dots(19)$$

(i)~(vi)の仮定によって、線形理論が適用できるから、速度ポテンシャルは入射波の速度ポテンシャルと島状構造物による散乱波の速度ポテンシャルとの重ね合わせとして、表わすことができる。

$$\phi = \phi_{in} + \phi_{sc} \quad \dots\dots(20)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{in} &= \phi_0 \phi_{in}(x, y) \cosh k(h+z) e^{i\omega t} \\ \phi_{sc} &= \phi_0 \phi_{sc}(x, y) \cosh k(h+z) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

$\phi_{in}$  = 入射波の速度ポテンシャル  
 $\phi_{sc}$  = 回折散乱波の速度ポテンシャル

である。

速度ポテンシャルを式(20)で表わすと、式(13)の境界条件は

$$\frac{\partial \phi_{in}}{\partial n} + \frac{\partial \phi_{sc}}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots(22)$$

となる。さらに、無限遠点において、回折散乱波は拡散して消滅しなければならないから、

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \phi_{sc} = 0 \quad \dots\dots(23)$$

となり、式(19)、(20)から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2} + k^2 \phi_{in} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_{sc}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{sc}}{\partial y^2} + k^2 \phi_{sc} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

となり、入射波、回折散乱波はそれぞれ独立にヘルムホルツの式を満足する。

$x$  軸と  $\alpha$  の角度をなす方向から波が島状構造物に入射してくる場合を考えると、式(24)を満足する入射波の速度ポテンシャルは

$$\phi_{in} = \exp[ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)] \quad \dots\dots(25)$$

与えられる。

以上より、島状構造物による回折散乱波の解折は式(22)の境界条件と式(23)の無限遠点における条件のもと

に、式(24)のヘルムホルツの方程式を満足する回折散乱波の速度ポテンシャルを求める境界値問題に帰着する。

(2) Mathieu の微分方程式への変換

今、島状構造物の境界が楕円柱面をしている場合を取上げ、 $x, y$  座標を次のような楕円筒座標  $(\xi, \theta, z)$  によって変換する。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{B}{2} \cosh \xi \cos \theta \\ y &= \frac{B}{2} \sinh \xi \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

式(26)の  $\xi, \theta$  座標は図-2に示されている。図-2の点  $(x, y)$  を通る楕円の長軸は  $B \cosh \xi$ 、短軸は  $B \sinh \xi$

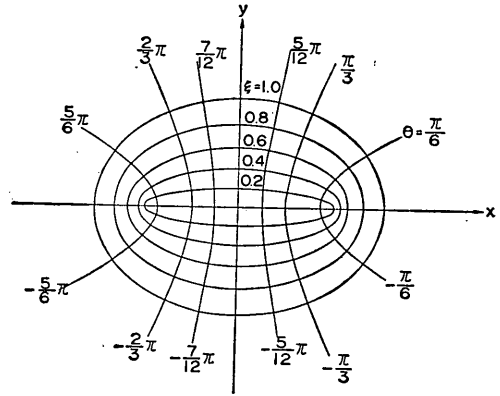


図-2 楕円座標系

与えられるから、焦点距離は  $B$  となる。またこの点  $(x, y)$  を通る楕円は

$$\sqrt{(x-B)^2 + y^2} + \sqrt{(x+B)^2 + y^2} = b \quad \dots\dots(27)$$

与えられる。ここで  $b$  は定数である。式(27)に式(26)を代入して整理すると

$$\cosh \xi = b/B \quad \dots\dots(28)$$

となり、これより、 $\xi = \text{const.}$  の点の軌跡は楕円を示す。式(26)を用いて、式(19)を  $\xi, \theta$  に変換すると、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + 2k_1 (\cosh 2\xi - \cos 2\theta) \phi = 0 \quad (29)$$

となる\*。ただし、 $k_1 = \frac{Bk}{4} = \frac{\pi B}{2L}$  である。

構造物は楕円であるから、境界として  $\xi = \xi_0$  とおくことができ、式(22)の境界条件と式(23)の無限遠点における条件は次のように簡単になる。

$$\left(\frac{\partial\phi_{in}}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_0} + \left(\frac{\partial\phi_{sc}}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_0} = 0 \quad \dots\dots(30)$$

$$\lim_{\xi\rightarrow\infty} \phi_{sc} = 0 \quad \dots\dots(31)$$

式(29)の中が $\xi$ のみの関数 $H(\xi)$ と $\theta$ のみの関数 $Q(\theta)$ に分離されるとすると

$$\phi(\xi, \theta) = H(\xi)Q(\theta) \quad \dots\dots(32)$$

となる。式(29)は式(32)を用いて変形すると次のようになる。

$$\frac{\partial^2 H}{H \partial \xi^2} + 2k_1^2 \cosh 2\xi = -\frac{\partial^2 Q}{Q \partial \theta^2} + 2k_1^2 \cos 2\theta = a \quad (33)$$

式(33)において、 $a$ は $\xi, \theta$ には関係しない任意定数として与えられる。そこで式(33)は次のような2つの微分方程式に分けられる。

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + (a - 2k_1^2 \cos 2\theta)Q = 0 \quad \dots\dots(34)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - (a - 2k_1^2 \cosh 2\xi)H = 0 \quad \dots\dots(35)$$

\* 式(26)を用いて $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ を求めると

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{c} \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{c} \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{c} \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

となる。ただし、 $c = B/2(\sinh^2 \xi - \sin^2 \theta)$ である。

この式をさらに $x, y$ で微分すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \sinh^2 \xi \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{c^2} \cosh^2 \xi \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{B}{c} \cos^2 \theta (\sinh^2 \xi - \sin^2 \theta) \right\} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$- \frac{2}{c^2} \cosh \xi \sinh \xi \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta}$$

$$+ \frac{1}{c^2} \cos \theta \sin \theta \left\{ 1 + \frac{B}{c} \cosh^2 \xi (\sinh^2 \xi - \sin^2 \theta) \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{c^2} \cosh^2 \xi \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \cosh^2 \xi \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{c^2} \sinh^2 \xi \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{B}{c} \sin^2 \theta (\cosh^2 \xi + \cos^2 \theta) \right\} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$+ \frac{2}{c^2} \cosh \xi \sinh \xi \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \xi}$$

$$+ \frac{1}{c^2} \sin \theta \cos \theta \left\{ 1 - \frac{B}{c} \sinh^2 \xi (\cosh^2 \xi + \cos^2 \theta) \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{c^2} \sinh^2 \xi \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

となり、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{8}{B^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\theta)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

で与えられる。

式(34)は Mathieu の微分方程式、式(35)は変形された Mathieu の微分方程式である。<sup>18), 19)</sup>

### (3) Mathieu の微分方程式の解

ここで、入射波の速度ポテンシャル式(25)を $\xi, \theta$ 座標に変換した

$$\phi_{in} = \exp[2ik_1(\cosh \xi \cos \theta \cos \alpha + \sinh \xi \sin \theta \sin \alpha)] \quad \dots\dots(36)$$

を考えると、これは式(32)の変数分離の形にはなっていないけれども、原式である式(19)を満足するから、変数分離形で表記すれば、式(34)、(35)を満足する筈である。

一方、散乱波については式(34)、式(35)を満足する解を求めなければならない。まず、式(34)の $\theta$ を $\theta = \theta^* + n\pi$ として変換しても、 $n$ が整数である限り式(34)は不変である。これから、式(34)は周期が $\pi$ または $2\pi$ の周期関数を解にもつことがわかる。そこで、 $\pi, 2\pi$ の周期を持つ奇関数、偶関数を $se_{2n+1}, se_{2n+2}, ce_{2n}, ce_{2n+1}$ とすると、これらの関数は周期性を持つ解析関数として、Fourier 級数に展開することができ、次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} ce_{2n}(\theta; k_1^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(k_1^2) \cos 2r\theta \\ ce_{2n+1}(\theta; k_1^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(k_1^2) \cos(2r+1)\theta \\ se_{2n+1}(\theta; k_1^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(k_1^2) \sin(2r+1)\theta \\ se_{2n+2}(\theta; k_1^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(k_1^2) \sin(2r+2)\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(37)$$

$k_1 \rightarrow 0$  の極限では式(34)より

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k_1 \rightarrow 0} ce_n(\theta; k_1^2) &= \cos n\theta \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{k_1 \rightarrow 0} se_n(\theta; k_1^2) &= \sin n\theta \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(38)$$

となるから、式(37)は $k_1 \rightarrow 0$ で

$$\lim_{k_1 \rightarrow 0} A_r^{(n)}(k_1^2) = \lim_{k_1 \rightarrow 0} B_r^{(n)}(k_1^2) = \delta_{nr} \dots\dots(39)$$

がなりたつ。ここで $\delta_{nr}$ はクロネッカーのデルタで、 $n=r$ のとき $\delta_{nr}=1$ 、 $n \neq r$ のとき $\delta_{nr}=0$ である。よって、式(34)のパラメータ $a$ は $k_1^2$ によって定まる固有値である。これは後述の式(53)の漸化式を満足する値として数値的に求められる。

次に、式(34)の解で $k_1^2$ が同じで、固有値 $a$ が異なる周期解を $Q_1, Q_2$ とすると

$$Q_1'' + (a_1 - 2k_1^2 \cos n\theta)Q_1 = 0 \quad \dots\dots(40)$$

$$Q_2'' + (a_2 - 2k_1^2 \cos n\theta)Q_2 = 0 \quad \dots\dots(41)$$

式(40), 式(41)より

$$Q_1''Q_2 - Q_1Q_2'' = (a_1 - a_2)Q_1Q_2 \quad \dots\dots(42)$$

となり, この式(42)を0から $2\pi$ まで積分すると, 左辺は0となり

$$(a_1 - a_2) \int_0^{2\pi} Q_1Q_2 d\theta = 0 \quad \dots\dots(43)$$

$a_1 \neq a_2$  であるから

$$\int_0^{2\pi} Q_1Q_2 d\theta = 0 \quad \dots\dots(44)$$

すなわち,  $m \neq p$  では

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} ce_m(\theta; k_1^2) ce_p(\theta; k_1^2) d\theta &= 0 \\ \int_0^{2\pi} se_m(\theta; k_1^2) se_p(\theta; k_1^2) d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(45)$$

となり,  $ce_n, se_n$  は直交関数であることがわかる。

次に,  $m=p$  の場合, 式(38), (39), (45)を考慮して, 規格化すると, 各係数は次のような関係になる。

$$\left. \begin{aligned} 2[A_0^{(2n)}]^2 + \sum_{r=1}^{\infty} [A_{2r}^{(2n)}]^2 &= 1 \\ \sum_{r=0}^{\infty} [A_{2r+1}^{(2n)}]^2 = \sum_{r=0}^{\infty} [B_{2r+1}^{(2n+1)}]^2 = \sum_{r=0}^{\infty} [B_{2r+2}^{(2n+2)}]^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(46)$$

以上, 式(37)を式(34)に代入して, 式(46)の関係を用いると式(37)の係数は決定できる。本論文で用いた  $se_{2n+1}(\theta; k_1^2), se_{2n+2}(\theta; k_1^2)$  を  $k_1 = \pi/2, \pi$  の場合について計算した結果を, 図-3~6に示す。さらに, 式(34)は同一の固有値  $a$  に対して, 2つの独立解を持つ。式(37)が周期性を持つ一つの独立解であるとするなら, 他の独

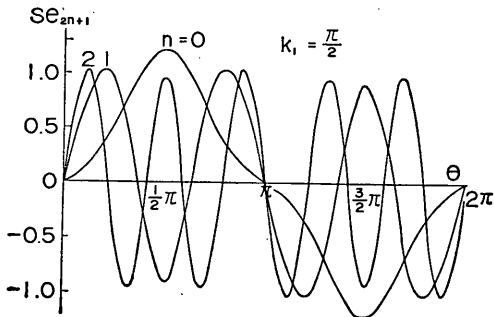


図-3 Mathieu 関数  $se_{2n+1}(\theta; k_1^2), k_1 = \frac{\pi}{2}$

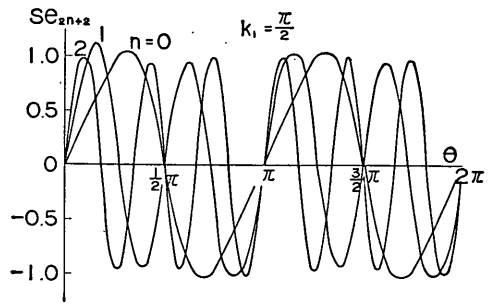


図-4 Mathieu 関数  $se_{2n+2}(\theta; k_1^2), k_1 = \frac{\pi}{2}$

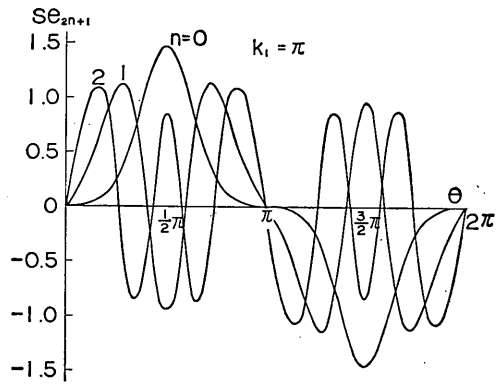


図-5 Mathieu 関数  $se_{2n+1}(\theta; k_1^2), k_1 = \pi$

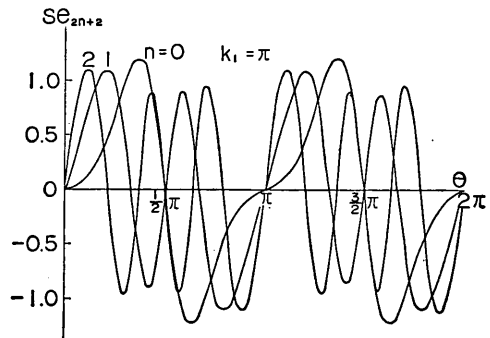


図-6 Mathieu 関数  $se_{2n+2}(\theta; k_1^2), k_1 = \pi$

立解は非周期性であることが証明されるが, 本論文ではこの非周解は重要でないため, これについては述べない。

次に, 式(35)は式(34)の  $\theta, Q$  を  $\frac{1}{i}\xi, H$  に変換すれば求めることができるから, 式(34)の解である式(37)に対応する解は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 Ce_{2n}(\xi; k_1^2) &= ce_{2n} \left( \frac{1}{i} \xi; k_1^2 \right) \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+}^{(2n)}(k_1^2) \cosh 2r\xi \\
 Ce_{2n+1}(\xi; k_1^2) &= ce_{2n+1} \left( \frac{1}{i} \xi; k_1^2 \right) \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+}^{(2n+1)}(k_1^2) \cosh(2r+1)\xi \\
 Se_{2n+1}(\xi; k_1^2) &= ise_{2n+1} \left( \frac{1}{i} \xi; k_1^2 \right) \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+}^{(2n+1)}(k_1^2) \sinh(2r+1)\xi \\
 Se_{2n+2}(\xi; k_1^2) &= ise_{2n+2} \left( \frac{1}{i} \xi; k_1^2 \right) \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(k_1^2) \sinh(2r+2)\xi
 \end{aligned} \right\} \dots(47)$$

式(47)のような級数で式(35)の一つの独立解を表わすと、他の独立解は複雑になるため、式(35)の解を Bessel 関数で表わすことを考える。

ここで、 $q=2k_1 \cosh \xi$  とすると、式(35)は

$$(q^2 - 4k_1^2) \frac{d^2 H}{dq^2} + q \frac{dH}{dq} + (q^2 - p^2)H = 0 \dots(48)$$

となる。ここで  $p=(a+2k_1^2)$  である。

式(48)は Bessel の方程式と類似の形をしているから、この式の解を  $k_1$  のみの関数である係数  $d_n$  を用いて

$$H = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r d_{2r} J_{2r}(q) \dots(49)$$

と仮定して、式(47)に代入すると

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r d_{2r} [(q^2 - 4k_1^2) J_{2r}'' + q J_{2r}' + (q - p^2) J_{2r}] = 0 \dots(50)$$

となる。Bessel 関数  $J_{2r}(q)$  は

$$q^2 J_{2r}'' + q J_{2r}' + (q^2 - 4r^2) J_{2r} = 0 \dots(51)$$

の解であり、また、次の漸化式を満足する。

$$4J_{2r}'' = J_{2r-2} - 2J_{2r} + J_{2r+2} \dots(52)$$

式(51)、(52)を式(50)に代入すれば、次のような漸化式が求まる。

$$\left. \begin{aligned}
 ad_0 - k_1^2 d_2 &= 0 \\
 (a-4)d_2 - k_1^2(d_4 + 2d_0) &= 0 \\
 (a-4r^2)d_{2r} - k_1^2(d_{2r+2} + d_{2r-2}) &= 0 \quad (r \geq 2)
 \end{aligned} \right\} \dots(53)$$

式(52)の漸化式は式(47)の

$$Ce_{2n}(\xi; k_1^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cosh 2r\xi \dots(54)$$

を式(35)に代入して求めた  $A_{2r}^{(2n)}$  の漸化式と同一形であるから、式(35)の解  $Ce_{2n}(\xi)$  は次のように置換できる。

$$Ce_{2n}(\xi; k_1^2) = \kappa \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(2k_1 \cosh 2r\xi) \dots(55)$$

ここで、定数  $\kappa$  は  $\rho = \frac{1}{2} \pi i$  とおくことによって

$$\kappa = \frac{ce_{2n} \left( \frac{1}{2} \pi \right)}{A_0^{(2n)}(k_1^2)} \dots(56)$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 Ce_{2n}(\xi; k_1^2) &= \\
 &= \frac{ce_{2n} \left( \frac{1}{2} \pi \right)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(2k_1 \cosh 2r\xi) \dots(57)
 \end{aligned}$$

また、 $J_{2r}$  の代りに第2種 Bessel 関数  $Y_{2r}$  を用いると、もう一つの独立解  $Fey_{2n}(\xi; k_1^2)$  が同様にして求められ、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 Fey_{2n}(\xi; k_1^2) &= \\
 &= -\frac{ce_{2n} \left( \frac{1}{2} \pi \right)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} Y_{2r}(2k_1 \cosh \xi) \dots(58)
 \end{aligned}$$

同様にして式(35)の他の解も求められ、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 Ce_{2n+1}(\xi; k_1^2) &= \\
 &= -\frac{ce'_{2n+1} \left( \frac{1}{2} \pi \right)}{k_1 A_1^{(2n+1)}} \\
 &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k_1 \cosh \xi) \\
 Fey_{2n+1}(\xi; k_1^2) &= \\
 &= -\frac{ce'_{2n+1} \left( \frac{1}{2} \pi \right)}{k_1 A_1^{(2n+1)}} \\
 &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} Y_{2r+1}(2k_1 \cosh \xi) \\
 Se_{2n+1}(\xi; k_1^2) &= \\
 &= \frac{se'_{2n+1} \left( \frac{1}{2} \pi \right)}{k_1 B_1^{(2n+1)}} \\
 &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k_1 \sinh \xi)
 \end{aligned} \right\} \dots(59)$$

$$\begin{aligned} \text{Ge}_{2n+1}(\xi; k_1^2) &= \frac{\text{se}'_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{k_1 B^{(2n+1)}} \\ &\times \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} Y_{2r+1}(2k_1 \sinh \xi) \\ \text{Se}_{2n+2}(\xi; k_1^2) &= \frac{\text{se}'_{2n+2}(0)}{k_1^2 B^{(2n+2)}} \coth \xi \\ &\times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} J_{2r+2}(2k_1 \sinh \xi) \\ \text{Ge}_{2n+2}(\xi; k_1^2) &= \frac{\text{se}'_{2n+2}(0)}{k_1^2 B^{(2n+2)}} \coth \xi \\ &\times \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} J_{2r+2}(2k_1 \sinh \xi) \end{aligned}$$

式(34)の微分方程式解も式(57), (58), (59)の  $\xi$  を  $\xi = i\theta$  に置換することによって, 第1種, 第2種 Bessel 関数で表わすことができる。

(4) 楕円柱構造物による回折散乱

図-7 で示されるような入射波の  $\phi_{in}$  は式(36)で表わされる。しかし(2)で述べたように,  $\phi_{sc}$  は式(34), (35)の解で表わされるから,  $\phi_{in}$  を同様に式(34), (35)の解で表わすことは境界条件式(30)を解くうえに便利である。

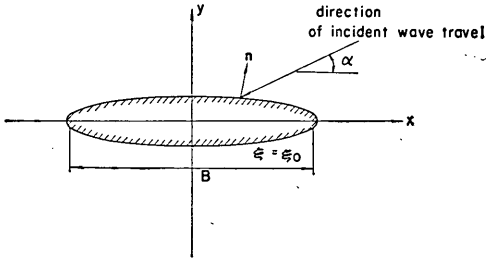


図-7 楕円構造物による回折散乱

そこで, 式(36)の  $\phi_{in}$  が式(37)の周期解で級数展開できると仮定して, 次のように表わす。

$$\phi_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} [M_n(\xi, \alpha) ce_n(\theta) + N_n(\xi, \alpha) se_n(\theta)] \dots (60)$$

式(60)の  $M_n, N_n$  を決定するために, 次のような積分定理を用いる。

$K(z, z')$  が偏微分方程式

$$(L_x - L_x') K(z, z') = 0 \dots (61)$$

を満足する関数とし,  $w(z')$  を式(34)の解とするとき,

$z$  に関して恒等的に

$$\left\{ w(z') \frac{\partial}{\partial z'} K(z, z') - K(z, z') \frac{dw}{dz'} \right\}_a^b = 0 \dots (62)$$

ならば

$$f(z) = \int_a^b K(z, z') w(z') dz' \dots (63)$$

は  $w(z)$  と同じ  $k_1^2$  に対する式(34)の解である。ここで,

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2k_1^2 \cos 2z \text{ である。}$$

$\xi = -i\xi^*$  とすると, 式(36)は

$$\begin{aligned} \phi_{in} = \exp[2ik_1 \cos \xi^* \cos \theta \cos \alpha \\ + 2k_1 \sin \xi^* \sin \theta \sin \alpha] \dots (64) \end{aligned}$$

となり, この式(64)は式(61)を満足するから,  $K(\alpha; \xi^*, \theta)$  とすることができる。そこで, 式(60)より

$$\begin{aligned} K(\alpha; \xi^*, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [M_n(-i\xi^*, \alpha) ce_n(\theta) \\ + N_n(-i\xi^*, \alpha) se_n(\theta)] \dots (65) \end{aligned}$$

となる。ここで, 式(65)の両辺に  $ce_{2n}(\theta)$  をかけて,  $0 \sim 2\pi$  まで積分し, 式(45), (46)の直交性を利用すると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} K(\alpha; \xi^*, \theta) ce_{2n}(\theta) d\theta = M_{2n}(-i\xi^*, \alpha) \int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\theta) d\theta \\ = \pi M_{2n}(-i\xi^*, \alpha) \dots (66) \end{aligned}$$

となる。よって

$$M_{2n}(-i\xi^*, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(\alpha; \xi^*, \theta) ce_{2n}(\theta) d\theta \dots (67)$$

となる。  $ce_{2n}(\theta)$  は式(34)の解であるから, 上記の積分定理を利用して,

$$A ce_{2n}(\xi^*) = \int_0^{2\pi} K(\alpha; \xi^*, \theta) ce_{2n}(\theta) d\theta \dots (68)$$

と示される。ここで, 係数  $A$  は  $\xi^*$  に関係して,  $\alpha$  のみの関数である。式(64)からわかるように  $\alpha$  と  $\xi^*$  は式(68)の積分内で対称であるから,  $A$  は  $\nu_{2n} ce_{2n}(\alpha)$  の形もち  $\nu_{2n}$  は  $k_1$  だけの関数である。

$$\nu_{2n} ce_{2n}(\alpha) ce_{2n}(\xi^*) = \int_0^{2\pi} K(\alpha; \xi^*, \theta) ce_{2n}(\theta) d\theta (69)$$

式(69)で,  $\alpha = 0, \xi^* = \pi/2$  とおくと

$$\nu_{2n} = 2\pi A^{(2n)} / ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot ce_{2n}(0) \dots (70)$$

となり, 式(69), (70)より, 式(67)は

$$M_{2n}(-i\xi^*, \alpha) = \frac{2}{p_{2n}} ce_{2n}(\xi^*) ce_{2n}(\alpha) \dots\dots(71)$$

となる。ここで

$$p_{2n} = \frac{ce_{2n}(\pi/2) ce_{2n}(0)}{A_0^{(2n)}} \dots\dots(72)$$

である。さらに、 $\xi^*$  を  $\xi$  に変換すると

$$M_{2n}(\xi, \alpha) = \frac{2}{p_{2n}} Ce_{2n}(\xi) ce_{2n}(\alpha) \dots\dots(73)$$

となる。

$ce_{2n+1}(\theta)$ ,  $se_{2n+1}(\theta)$ ,  $se_{2n+2}(\theta)$  の場合も同様にして、 $M_{2n+1}(\xi, \alpha)$ ,  $N_{2n+1}(\xi, \alpha)$ ,  $N_{2n+2}(\xi, \alpha)$  を求めることができ、式(60)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_{1n} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{p_{2n}} Ce_{2n}(\xi) ce_{2n}(\theta) ce_{2n}(\alpha) \right. \\ & + \frac{2}{s_{2n}} Se_{2n+2}(\xi) se_{2n+2}(\theta) se_{2n+2}(\alpha) \\ & + i \left\{ \frac{2}{p_{2n+1}} Ce_{2n+1}(\xi) ce_{2n+1}(\theta) ce_{2n+1}(\alpha) \right. \\ & \left. + \frac{2}{s_{2n+2}} Se_{2n+2}(\xi) se_{2n+2}(\theta) se_{2n+2}(\alpha) \right\} \dots\dots(74) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} p_{2n+1} = & \frac{ce'_{2n+1} \left( \frac{1}{2} \pi \right) ce_{2n+1}(0)}{k_1 A_1^{(2n+1)}} \\ s_{2n+1} = & \frac{se'_{2n+1}(0) se_{2n+1} \left( \frac{\pi}{2} \right)}{k_1 B_1^{(2n+1)}} \\ s_{2n+2} = & \frac{se'_{2n+1} \left( \frac{1}{2} \pi \right) se'_{2n+1}(0)}{k_1^2 B_2^{(2n+2)}} \end{aligned} \dots\dots(75)$$

である。

次に、散乱波の速度ポテンシャルは(3)で述べたように、式(34)、(35)の解によって展開できる。しかし、 $\xi$  の関数は式(35)の方程式、式(30)の境界条件および式(31)の散乱条件を満足しなければならない。そのため、式(57)、(58)、(59)を用いて新しい解を求める。

まず、式(74)の  $Ce_{2n}(\xi)$  に対応する解として

$$\left. \begin{aligned} Me_{2n}^{(1)}(\xi) &= Ce_{2n}(\xi) + i Fey_{2n}(\xi) \\ Me_{2n}^{(2)}(\xi) &= Ce_{2n}(\xi) - i Fey_{2n}(\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(76)$$

と置くと、 $Me_{2n}^{(1)}(\xi)$ ,  $Me_{2n}^{(2)}(\xi)$  はそれぞれつぎのようになり、第1種、第2種の Hankel 関数による級数に展開され、お互いに独立である。

$$\left. \begin{aligned} Me_{2n}^{(1)}(\xi) &= \frac{ce_{2n} \left( \frac{\pi}{2} \right)}{A_0^{(2n)}} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} H_{2r}^{(1)}(2k_1 \cosh \xi) \\ Me_{2n}^{(2)}(\xi) &= \frac{ce_{2n} \left( \frac{\pi}{2} \right)}{A_0^{(2n)}} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^r A_1^{(2n)} H_{2r}^{(2)}(2k_1 \cosh \xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(77)$$

$\xi \rightarrow \infty$  における式(77)の漸近形は

$$\left. \begin{aligned} Me_{2n}^{(1)}(\xi) &\doteq p_{2n} \left( \frac{2}{\pi k_1 e^{\xi}} \right)^{1/2} e^{i(k_1 e^{\xi} - \frac{\pi}{4})} \\ Me_{2n}^{(2)}(\xi) &\doteq p_{2n} \left( \frac{2}{\pi k_1 e^{\xi}} \right)^{1/2} e^{-i(k_1 e^{\xi} - \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \right\} \dots\dots(78)$$

となり、式(31)の散乱条件を満足する。しかし、 $e^{i\alpha}$  との関係で  $Me_{2n}^{(1)}(\xi)$  は原点方向へ進む進行波を示し、 $Me_{2n}^{(2)}(\xi)$  は外方への進行波を示している。これより、入射波の  $Ce_{2n}(\xi)$  に対応する散乱波の関数は  $Me_{2n}^{(2)}(\xi)$  になる。

$Ce_{2n+1}(\xi)$ ,  $Se_{2n+1}(\xi)$ ,  $Se_{2n+2}(\xi)$  に対応する関数は同様にして次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} Me_{2n+1}^{(2)}(\xi) &= -\frac{ce \left( \frac{1}{2} \pi \right)}{k_1 A_1^{(2n+1)}} \\ & \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} H_{2r+1}^{(2)}(2k_1 \cosh \xi) \\ Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi) &= \frac{se'_{2n+1} \left( \frac{1}{2} \pi \right)}{k_1 B_1^{(2n+1)}} \\ & \times \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} H_{2r+1}^{(2)}(2k_1 \sinh \xi) \\ Ne_{2n+2}^{(2)}(\xi) &= \frac{se'_{2n+2}(0)}{k_1 B_1^{(2n+2)}} \coth \xi \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) \\ & \times B_{2r+2}^{(2n+2)} H_{2r+2}^{(2)}(2k_1 \sinh \xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(79)$$

式(78)、(79)を用いて、散乱波の速度ポテンシャルは次のように表わせる。

$$\phi_{sc} = \phi_0 \phi_{sc} \cosh k(h+z) e^{i\alpha t} \dots\dots(80)$$

ここで

$$\begin{aligned} \phi_{sc} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{2n} Me_{2n}^{(2)}(\xi) ce_{2n}(\theta) ce_{2n}(\alpha) \right. \\ & + S_{2n+2} Ne_{2n+2}^{(2)}(\xi) se_{2n+2}(\theta) se_{2n+2}(\alpha) \\ & + C_{2n+1} Me_{2n+1}^{(2)}(\xi) ce_{2n+1}(\theta) ce_{2n+1}(\alpha) \\ & \left. + S_{2n+1} Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi) se_{2n+1}(\theta) se_{2n+1}(\alpha) \right] \dots\dots(81) \end{aligned}$$

である。

式(74)、(81)と式(30)の境界条件式に代入して、定数

$C_{2n}$ ,  $C_{2n+1}$ ,  $S_{2n+1}$ ,  $S_{2n+2}$  を求めると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} C_{2n} &= -\frac{2Ce_{2n}'(\xi_0)}{p_{2n}Me_{2n}^{(2)'}(\xi_0)} \\ C_{2n+1} &= -\frac{2iCe_{2n+1}'(\xi_0)}{p_{2n+1}Me_{2n+1}^{(2)'}(\xi_0)} \\ S_{2n+1} &= -\frac{2iSe_{2n+1}'(\xi_0)}{s_{2n+1}Ne_{2n+1}^{(2)'}(\xi_0)} \\ S_{2n+2} &= -\frac{2Se_{2n+2}'(\xi_0)}{s_{2n+2}Ne_{2n+2}^{(2)'}(\xi_0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(82)$$

よって

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{in} + \phi_{sc} \\ &= \exp[2ik_1(\cosh \xi \cos \theta \cos \alpha + \sinh \xi \sin \theta \sin \alpha)] \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2Ce_{2n}'(\xi_0)}{p_{2n}Me_{2n}^{(2)'}(\xi_0)} Me_{2n}^{(2)}(\xi) ce_{2n}(\theta) ce_{2n}(\alpha) \right. \\ &+ \frac{2Se_{2n+2}'(\xi_0)}{s_{2n+2}Ne_{2n+2}^{(2)'}(\xi_0)} Ne_{2n+2}^{(2)}(\xi) se_{2n+2}(\theta) se_{2n+2}(\alpha) \\ &+ i \left\{ \frac{2Ce_{2n+1}'(\xi_0)}{p_{2n+1}Me_{2n+1}^{(2)'}(\xi_0)} Me_{2n+1}^{(2)}(\xi) ce_{2n+1}(\theta) ce_{2n+1}(\alpha) \right. \\ &\left. \left. + \frac{2Se_{2n+1}'(\xi_0)}{s_{2n+1}Ne_{2n+1}^{(2)'}(\xi_0)} Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi) se_{2n+1}(\theta) se_{2n+1}(\alpha) \right\} \right] \end{aligned} \dots\dots(83)$$

となり、速度ポテンシャルは

$$\phi = \phi_0 \phi \cosh k(h+z) e^{i\omega t} \dots\dots(84)$$

として求まる。

以上により、図-7 のような楕円構造物による回折散乱波の波高は式 (83) の関数を用いて式 (18) で計算でき、波形は式 (17) で求まる。また、波圧はベルヌーイの定理

$$p = -\frac{w_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} - w_0 z \dots\dots(85)$$

から計算できる。ただし、 $w_0$  は水の単位体積重量である。

### 2.3 円柱構造物による回折散乱波の解

楕円柱構造物による回折散乱波は 2.2 で求めたが、この楕円を円形に漸次変形した場合の散乱波の変化を調べてみよう。

式 (26) より

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \frac{B}{2} \sqrt{\cosh^2 \xi - \sin^2 \theta} \end{aligned} \dots\dots(86)$$

$$\begin{aligned} \tan \theta_r &= \frac{y}{x} \\ &= \tanh \xi \tan \theta \end{aligned} \dots\dots(87)$$

として定義すると、 $(\rho, \theta_r)$  座標は極座標となる。境界では式 (86) より

$$\rho_0 = \frac{B}{2} \sqrt{\cosh^2 \xi_0 - \sin^2 \theta} \dots\dots(88)$$

となり、式 (88) の両辺に  $k$  をかけて、 $\rho_0 k = \text{const.}$  とした状態で  $\xi_0$  を大きくすると、図-2 からわかるように楕円を円に変形することができる。これは波長に対する構造物の大きさを一定に保って、円柱に近づくことを意味する。その結果

$$\left. \begin{aligned} \cosh \xi_0 &\doteq \sinh \xi_0 \\ \tanh \xi_0 &\doteq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(89)$$

となる。さらに、 $\rho_0 k$  は一定であるから、 $kB$  は  $\xi_0$  の増大に伴って減少し、

$$k_1 = \frac{Bk}{4} \doteq 0 \dots\dots(90)$$

となる。この式 (89), (90) が楕円を円に変形する場合の条件になる。その時

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &\doteq \frac{B}{2} \cosh \xi_0 \doteq \frac{B}{2} \sinh \xi_0 \\ \theta_r &\doteq \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(91)$$

である。

式 (83) の各関数を式 (88), (90), (91) を用いて変形し、漸近解を求める。

式 (38) から  $\theta$  の関数は  $k_1 \rightarrow 0$  で

$$\left. \begin{aligned} ce_n(\theta) &\doteq \cos n\theta, \\ se_n(\theta) &\doteq \sin n\theta, \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(92)$$

となり、 $n=0$  の場合は式 (46) より

$$ce_0(\theta) \doteq A_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots(93)$$

となる。

同様に、 $\xi$  の関数は  $k\rho \doteq 2k_1 \cosh \xi \doteq 2k_1 \sinh \xi$  の関数を用いて式 (57), (59), (77), (79) から

$$\left. \begin{aligned} Ce_{2n}(\xi) &\doteq (-1)^n p_{2n} J_{2n}(k\rho) \\ Ce_{2n+1}(\xi) &\doteq (-1)^n p_{2n+1} J_{2n+1}(k\rho) \\ Se_{2n+1}(\xi) &\doteq (-1)^n s_{2n+1} J_{2n+1}(k\rho) \\ Se_{2n+2}(\xi) &\doteq (-1)^n s_{2n+2} J_{2n+2}(k\rho) \\ Me_{2n}^{(2)}(\xi) &\doteq (-1)^n p_{2n} H_{2n}^{(2)}(k\rho) \\ Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi) &\doteq (-1)^n p_{2n+1} H_{2n+1}^{(2)}(k\rho) \\ Ne_{2n+2}^{(2)}(\xi) &\doteq (-1)^n s_{2n+1} H_{2n+1}^{(2)}(k\rho) \\ Ne_{2n+2}^{(2)}(\xi) &\doteq (-1)^n s_{2n+2} H_{2n+2}^{(2)}(k\rho) \end{aligned} \right\} \dots\dots(94)$$

となる。また



$$\frac{\partial}{\partial \xi} = k\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \dots\dots(95)$$

であるから、式(92)、(93)、(94)を用いて、式(83)を変形すると

$$\begin{aligned} \phi &= e^{ik\rho \cos(\theta_s - \alpha)} \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2J_{2n}'(k\rho_0)}{H_{2n}^{(2)'}(k\rho_0)} (-1)^n H_{2n}^{(2)}(k\rho) \cos n\theta_s \cos n\alpha \right. \\ &+ \frac{2J_{2n+2}'(k\rho_0)}{H_{2n+2}^{(2)'}(k\rho_0)} (-1)^{n+1} H_{2n+2}^{(2)}(k\rho) \sin n\theta_s \sin n\alpha \\ &+ i \left\{ \frac{2J_{2n+1}'(k\rho_0)}{H_{2n+1}^{(2)'}(k\rho_0)} (-1)^n H_{2n+1}^{(2)}(k\rho) \cos n\theta_s \cos n\alpha \right. \\ &\left. + \frac{2J_{2n+1}'(k\rho_0)}{H_{2n+1}^{(2)'}(k\rho_0)} (-1)^n H_{2n+1}^{(2)}(k\rho) \sin n\theta_s \sin n\alpha \right\} \\ &= e^{ik\rho \cos(\theta_s - \alpha)} - \frac{J_0'(k\rho_0)}{H_0^{(2)'}(k\rho_0)} H_0^{(2)}(k\rho) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{2J_{2n}'(k\rho_0)}{H_{2n}^{(2)'}(k\rho_0)} H_{2n}^{(2)}(k\rho) \cos n(\theta_s - \alpha) \right. \\ &\left. + (-1)^n i \frac{2J_{2n-1}'(k\rho_0)}{H_{2n-1}^{(2)'}(k\rho_0)} H_{2n-1}^{(2)}(k\rho) \cos n(\theta_s - \alpha) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(96)$$

となり、さらに変形すると

$$\begin{aligned} \phi &= e^{ik\rho \cos(\theta_s - \alpha)} - \frac{J_0'(k\rho_0)}{H_0^{(2)'}(k\rho_0)} H_0^{(2)}(k\rho) \\ &- 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{J_n'(k\rho_0)}{H_n^{(2)'}(k\rho_0)} H_n^{(2)}(k\rho) \cos n(\theta_s - \alpha) \end{aligned} \quad \dots\dots(97)$$

となる。この式(97)は円柱によって、回折散乱を受けた波を示している。また、この式(97)は田中や Mac-Camy と Fuchs によって求められた円柱構造物の回折散乱波の厳密解、式(7)と一致することが確認される。

#### 2.4 島堤による回折散乱波の解

次に楕円形境界を歪ませることによって、長さ \$B\$ の島堤に近づけ、回折散乱波を計算する。

式(26)を用いて、\$\xi\_0 \to 0\$ とすると

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{B}{2} \cos \theta \\ y_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(98)$$

となり、図-8 のような長さ \$B\$、厚さ \$0\$ の島堤に変換できる。

\$\xi\_0 \to 0\$ の場合、式(57)、(59)より

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{dC_{e2n}(\xi)}{d\xi} = \lim_{\xi \to 0} \frac{dC_{e2n+1}(\xi)}{d\xi} = 0 \quad \dots\dots(99)$$

となり、式(83)は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} \phi &= \exp [2ik_1 (\cosh \xi \cos \theta \cos \alpha + \sinh \xi \sin \theta \sin \alpha)] \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2Se_{2n+2}'(0)}{s_{2n+2} Ne_{2n+2}^{(2)'}(0)} Ne_{2n+2}^{(2)}(\xi) se_{2n+2}(\theta) se_{2n+2}(\alpha) \right. \\ &\left. + i \frac{2Se_{2n+1}'(0)}{s_{2n+1} Ne_{2n+1}^{(2)'}(0)} Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi) se_{2n+1}(\theta) se_{2n+1}(\alpha) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(100)$$

ここで、\$\theta=0, \pi\$ では \$se\_n(\theta)\$ が式(37)でわかるように、

$$se_n(0) = se_n(\pi) = 0 \quad \dots\dots(101)$$

となり、式(100)からは次のように散乱波の項が消える。

$$\phi = \exp [2ik_1 \cosh \xi \cos \alpha] \quad \dots\dots(102)$$

これは \$x\$ 軸上、つまり島堤の延長上では島堤の影響が現われないことを示している。

\$x\$ 軸方向から波が入射してくる \$\alpha=0\$ または \$\pi\$ の場合も同様に

$$\phi = \exp [2ik_1 \cosh \xi \cos \theta] \quad \dots\dots(103)$$

となり、\$xy\$ 平面で全く島堤の影響を受けない。このことは実際現象からも当然予期される場所である。

次に、式(100)の散乱波の項のみ取り出すと

$$\begin{aligned} \phi_{sc} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2Se_{2n+2}'(0)}{s_{2n+2} Ne_{2n+2}^{(2)'}(0)} \right. \\ &\quad \times Ne_{2n+2}^{(2)}(\xi) se_{2n+2}(\theta) se_{2n+2}(\alpha) \\ &\left. + i \frac{2Se_{2n+1}'(0)}{s_{2n+1} Ne_{2n+1}^{(2)'}(0)} Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi) se_{2n+1}(\theta) se_{2n+1}(\alpha) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(104)$$

となり、\$se\_n(\theta)\$ は奇関数であるから、次の関係が求まる。

$$\phi_{sc}(-\theta) = -\phi_{sc}(\theta) \quad \dots\dots(105)$$

両辺の絶対値を取ると

$$|\phi_{sc}(-\theta)| = |\phi_{sc}(\theta)| \quad \dots\dots(106)$$

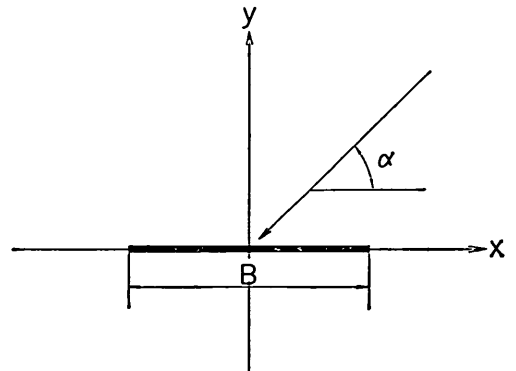


図-8 島堤による回折散乱

となるから、式(18)から散乱波のみの波高は島堤の軸、つまり  $x$  軸に関して対称になる。

次に、島堤に対して、直角方向から波が入射する場合について考えると、この場合、 $\alpha = \pi/2$  であるから

$$ce_{2n+2}(\pi/2) = 0 \quad (107)$$

となり、式(104)は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} \phi &= \exp[2ik_1 \sinh \xi \sin \theta] \\ &- i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2Se_{2n+1}'(0)}{s_{2n+1}Ne_{2n+1}^{(2)'}(0)} Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi) se_{2n+1}(\theta) se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots(108)$$

ここで  $se_{2n+1}(\theta) = se_{2n+1}(\pi - \theta)$  の関係があるから、

式(108)から

$$\phi(\pi - \theta) = \phi(\theta) \quad \dots\dots(109)$$

となり、 $y$  軸に関して対称であることがわかる。他の特徴は斜め入射の場合と同じである。

### 3. 島堤による反射および回折の計算

#### 3.1 島堤の反射および回折の厳密解

前節で求めた式(100)を用いて、計算を行なうに当たって、式(57)、(59)、(79)のような Bessel 関数、Hankel 関数による級数展開では収束が悪いので、次のような収束のよい Bessel 関数の積の級数で表わす。

$$\begin{aligned} Se_{2n+1}(\xi) &= (s_{2n+1}/B^{(2n+1)}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} \\ &\quad \times [J_r(v_1)J_{r+1}(v_2) + J_{r+1}(v_1)J_r(v_2)] \\ Se_{2n+2}(\xi) &= -(s_{2n+2}/B^{(2n+2)}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} \\ &\quad \times [J_r(v_1)J_{r+2}(v_2) - J_{r+2}(v_1)J_r(v_2)] \\ Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi) &= (s_{2n+1}/B^{(2n+1)}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} \\ &\quad \times [J_r(v_1)H_{r+2}^{(2)}(v_2) - J_{r+1}(v_1)H_r^{(2)}(v_2)] \\ Ne_{2n+2}^{(2)}(\xi) &= -(s_{2n+2}/B^{(2n+2)}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} \\ &\quad \times [J_r(v_1)H_{r+2}^{(2)}(v_2) - J_{r+2}(v_1)H_r^{(2)}(v_2)] \end{aligned} \quad \dots\dots(110)$$

ここで

$$v_1 = k_1 e^{-\xi}, \quad v_2 = k_1 e^{\xi} \quad \dots\dots(111)$$

である。

この式(110)と

$$H_r^{(2)} = J_r(\xi) - iY_r(\xi) \quad \dots\dots(112)$$

を用いて、式(100)を整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi &= \exp[2ik_1(\cosh \xi \cos \theta \cos \alpha + \sinh \xi \sin \theta \sin \alpha)] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{\sqrt{1+(Q_{2n+2})^2}} \frac{se_{2n+2}(\theta)se_{2n+2}(\alpha)}{B_2^{(2n+2)}} \right. \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} q_{2r+2} e^{-i(\alpha_{2r+1} + \beta_{2n+2})} \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{1+(Q_{2n+1})^2}} \frac{se_{2n+1}(\theta)se_{2n+1}(\alpha)}{B_1^{(2n+1)}} \\ &\quad \left. \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} q_{2r+1} e^{-i(\alpha_{2r+1} + \beta_{2n+1} + \frac{\pi}{2})} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(113)$$

ここで、

$$\begin{aligned} q_{2r+1} &= [(E_{2r+1})^2 + (F_{2r+1})^2]^{1/2} \\ q_{2r+2} &= [(E_{2r+2})^2 + (F_{2r+2})^2]^{1/2} \\ Q_{2n+1} &= \frac{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} R_{2r+1}}{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} T_{2r+1}} \\ Q_{2n+2} &= \frac{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} R_{2r+2}}{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} T_{2r+2}} \end{aligned} \quad \dots\dots(114)$$

$$\begin{cases} \sin \alpha_{2r+1} = E_{2r+1}/q_{2r+1} \\ \cos \alpha_{2r+1} = F_{2r+1}/q_{2r+1} \\ \sin \alpha_{2r+2} = E_{2r+2}/q_{2r+2} \\ \cos \alpha_{2r+2} = F_{2r+2}/q_{2r+2} \\ \cos \beta_{2n+1} = 1/\sqrt{1+(Q_{2n+1})^2} \\ \sin \beta_{2n+1} = -Q_{2n+1}/\sqrt{1+(Q_{2n+1})^2} \\ \cos \beta_{2n+2} = 1/\sqrt{1+(Q_{2n+2})^2} \\ \sin \beta_{2n+2} = -Q_{2n+2}/\sqrt{1+(Q_{2n+2})^2} \end{cases}$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} E_{2r+1} &= J_r(v_1)J_{r+1}(v_2) - J_{r+1}(v_1)J_r(v_2) \\ F_{2r+1} &= J_r(v_1)Y_{r+1}(v_2) - J_{r+1}(v_1)Y_r(v_2) \\ E_{2r+2} &= J_r(v_1)J_{r+2}(v_2) - J_{r+2}(v_1)J_r(v_2) \\ F_{2r+2} &= J_r(v_1)Y_{r+2}(v_2) - J_{r+2}(v_1)Y_r(v_2) \\ R_{2r+1} &= 2k_1 \{ J_{r+1}(k_1)Y_{r+1}(k_1) + J_r(k_1)Y_r(k_1) \} \\ &\quad - (2r+1) \{ J_r(k_1)Y_{r+1}(k_1) + J_{r+1}(k_1)Y_r(k_1) \} \\ T_{2r+1} &= 2 \{ k_1 \{ (J_r(k_1))^2 + (J_{r+1}(k_1))^2 \} \\ &\quad - (2r+1) J_r(k_1)J_{r+1}(k_1) \} \\ R_{2r+2} &= (r+1) \{ J_{r+1}(k_1)Y_{r+1}(k_1) + J_r(k_1)Y_r(k_1) \} \\ &\quad - \frac{r+1}{k_1} \{ J_r(k_1)Y_{r+1}(k_1) + J_{r+1}(k_1)Y_r(k_1) \} \\ T_{2r+2} &= (r+1) \{ (J_r(k_1))^2 + (J_{r+1}(k_1))^2 \} \\ &\quad - \frac{2(r+1)}{k_1} \{ J_r(k_1)Y_{r+1}(k_1) \} \end{aligned} \quad \dots\dots(115)$$

である。

入射波の波高を  $H_i$ 、島堤によって回折散乱を受けた波の波高を  $H$  とすると、波高比  $K$  は式 (18) より

$$K = H/H_i = |\phi|/|\phi_{in}| \quad \dots\dots(116)$$

となるが、式 (25) より

$$|\phi_{in}| = 1 \quad \dots\dots(117)$$

となり、式 (116) は次のようになる。

$$K = |\phi| \quad \dots\dots(118)$$

また、

$$\begin{aligned} K \cos \gamma &= \cos 2k_1 (\cosh \xi \cos \theta \cos \alpha + \sinh \xi \sin \theta \sin \alpha) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\sqrt{1+(Q_{2n+2})^2}} \frac{se_{2n+2}(\theta)se_{2n+2}(\alpha)}{B_2^{(2n+2)}} \right. \\ &\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_2^{(2r+2)} q_{2r+2} \cos(\alpha_{2r+2} + \beta_{2n+2}) \\ &+ \frac{2}{\sqrt{1+(Q_{2n+1})^2}} \frac{se_{2n+1}(\theta)se_{2n+1}(\alpha)}{B_1^{(2n+1)}} \\ &\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_1^{(2r+1)} q_{2r+1} \cos\left(\alpha_{2r+1} + \beta_{2n+1} + \frac{\pi}{2}\right) \left. \right\} \\ K \sin \gamma &= \sin 2k_1 (\cosh \xi \cos \theta \cos \alpha + \sinh \xi \sin \theta \sin \alpha) \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\sqrt{1+(Q_{2n+1})^2}} \frac{se_{2n+2}(\theta)se_{2n+2}(\alpha)}{B^{(2n+2)}} \right. \\ &\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_2^{(2r+2)} q_{2r+2} \sin(\alpha_{2r+2} + \beta_{2n+2}) \\ &+ \frac{2}{\sqrt{1+(Q_{2n+1})^2}} \frac{se_{2n+1}(\theta)se_{2n+1}(\alpha)}{B_1^{(2n+1)}} \\ &\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_1^{(2r+1)} q_{2r+1} \sin\left(\alpha_{2r+1} + \beta_{2n+1} + \frac{\pi}{2}\right) \left. \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots(119)$$

として、 $\gamma$  を与えると、次のような一つの合成波を示す。

$$H = H_i K \cos(\sigma t + \gamma) \quad \dots\dots(120)$$

$\gamma$  は位相係数で、 $\gamma = \text{const.}$  の点の軌跡は一つの降線を表わす。以上によって、式 (118) または式 (119) を用いて、波高比  $K$  は計算できる。2.4 で示したように、 $|\alpha| \geq \frac{B}{2}$ 、 $y=0$  では、つまり島堤の延長上では入射波のみとなり、 $K=1$  である。

### 3.2 島堤の反射および回折の近似解

半無限堤による波の回折は Sommerfeld の解を用いて、Penny と Price が理論解を求めている。そこで、半無限堤による波の回折の理論式の誘導は省略し、結果のみを示すと、回折散乱波は次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ i \left( k\rho \cos(\theta - \alpha) + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &\times \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \cos \chi^2 d\chi + \frac{1}{2} - i \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin \chi^2 d\chi + \frac{1}{2} \right\} \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ i \left( k\rho \cos(\theta + \alpha) + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &\times \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin \chi^2 d\chi + \frac{1}{2} - i \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin \chi^2 d\chi + \frac{1}{2} \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(121)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \sqrt{2k\rho} \cos(\theta - \alpha)/2 \\ \chi_2 &= \sqrt{2k\rho} \cos(\theta + \alpha)/2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(122)$$

$\rho$  : 半無限堤の堤端よりの距離

である。

これより、回折散乱波は  $\chi_j$  の正負によって、積分値が異なるので、反射領域、入射波直進領域、回折領域の3領域に分けて考えるのが便利である。ここで  $j=1, 2$  で  $j=1$  は堤端から発散する波、 $j=2$  は堤端に向って収束する波を示している。

この式 (121) の重ね合わせとして、島堤の回折散乱波を求める。 $\psi_{ij}$ 、 $\chi_{ij}$  を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11} &= \exp \left\{ i \left[ k\rho_1 \cos(\theta_1 - \alpha) + \frac{\pi}{4} - \frac{kB}{2} \cos \alpha \right] \right\} \\ \psi_{12} &= \exp \left\{ i \left[ k\rho_1 \cos(\theta_1 + \alpha) + \frac{\pi}{4} - \frac{kB}{2} \cos \alpha \right] \right\} \\ \psi_{21} &= \exp \left\{ i \left[ k\rho_2 \cos(\theta_2 - \pi + \alpha) + \frac{\pi}{4} + \frac{kB}{2} \cos \alpha \right] \right\} \\ \psi_{22} &= \exp \left\{ i \left[ k\rho_2 \cos(\theta_2 + \pi - \alpha) + \frac{\pi}{4} + \frac{kB}{2} \cos \alpha \right] \right\} \\ \chi_{11} &= \sqrt{2k\rho_1} \cos(\theta_1 - \alpha)/2 \\ \chi_{12} &= \sqrt{2k\rho_1} \cos(\theta_1 + \alpha)/2 \\ \chi_{21} &= \sqrt{2k\rho_2} \cos(\theta_2 - \pi + \alpha)/2 \\ \chi_{22} &= \sqrt{2k\rho_2} \cos(\theta_2 + \pi - \alpha)/2 \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

ここで、 $\frac{1}{2}kB \cos \alpha$  は位相のずれで  $\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2$  は図-9 に示す通りである。 $i=1$  は左堤端、 $i=2$  右堤端を示し、 $j=1, 2$  は  $\chi_j$  の場合と同じである。

島堤の場合は前述のように  $\chi_{ij}$  の正負によって、図-9 のような6領域に分けて考えることが便利である。

- (i) 入射波・反射波合成領域 (Ⅰ領域)
- (ii) 左側入射波直進領域 (Ⅱ領域)

この領域は右側に防波堤端がある半無限堤の反射波領域 (Ⅲ領域) と回折波領域 (Ⅳ領域) の

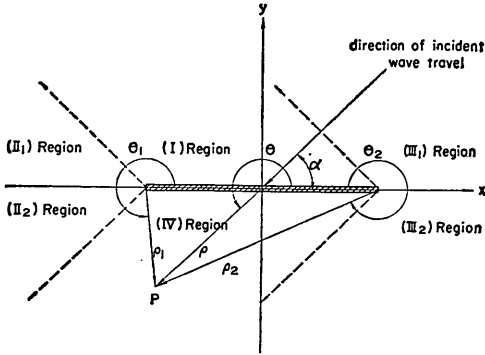


図-9 島堤による回折散乱の領域 (近似解)

2領域に区分される。

(iii) 右側入射波直進領域 (Ⅲ領域)

これも (ii) と同様に Ⅲ<sub>1</sub> 領域と Ⅲ<sub>2</sub> 領域の2領域に区分される。

(iv) 回折波領域 (Ⅳ領域)

島堤の延長方向に対して入射波が $\alpha$ の角度をもって入ってくる場合、両端において回折散乱波の位相のずれを考慮しなければならない。式(123)ではこの位相のずれが考慮してある。

上記の各領域における回折散乱波を求めると次のようになる。

(a) Ⅰ領域  $0 \leq \theta_1 \leq \pi - \alpha$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq \alpha$

この領域では、式(123)より、 $\chi_{11} \geq 0$ ,  $\chi_{12} > 0$ ,  $\chi_{21} \geq 0$ ,  $\chi_{22} \geq 0$  となり、回折散乱波は

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = & e^{ik\rho\cos(\theta-\alpha)} + e^{ik\rho\cos(\theta+\alpha)} \\ & + \frac{\psi_{11}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{\psi_{12}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{\psi_{21}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{\psi_{22}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots(124)$$

で表わせる。ここで、 $c(\chi^2)$ ,  $s(\chi^2)$  はフレネ積分で、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c(\chi^2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\chi} \cos \chi^2 d\chi \\ s(\chi^2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\chi} \sin \chi^2 d\chi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(125)$$

(b) Ⅱ<sub>1</sub> の領域  $\pi - \alpha \leq \theta_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq \alpha$

この領域では  $\chi_{11} \geq 0$ ,  $\chi_{12} \leq 0$ ,  $\chi_{21} > 0$ ,  $\chi_{22} > 0$  となり

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = & e^{ik\rho\cos(\theta-\alpha)} \\ & + \frac{\psi_{11}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & - \frac{\psi_{12}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{\psi_{21}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{\psi_{22}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots(126)$$

(c) Ⅱ<sub>2</sub> 領域  $\pi \leq \theta_1 \leq \pi + \alpha$ ,  $2\pi - \alpha \leq \theta_2 \leq 2\pi$

この領域では  $\chi_{11} > 0$ ,  $\chi_{12} < 0$ ,  $\chi_{21} < 0$ ,  $\chi_{22} < 0$  となり

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = & e^{ik\rho\cos(\theta-\alpha)} \\ & + \frac{\psi_{11}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & - \frac{\psi_{12}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & - \frac{\psi_{21}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & - \frac{\psi_{22}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots(127)$$

である。

(d) Ⅲ<sub>1</sub> 領域  $0 \leq \theta_1 \leq \alpha$ ,  $\alpha \leq \theta_2 \leq \pi$

この領域では  $\chi_{11} \geq 0$ ,  $\chi_{12} > 0$ ,  $\chi_{21} \geq 0$ ,  $\chi_{22} < 0$  となり回折散乱波は

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = & e^{ik\rho\cos(\theta-\alpha)} \\ & + \frac{\psi_{11}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{\psi_{12}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{\psi_{21}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & - \frac{\psi_{22}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots(128)$$

となる。

(e) Ⅲ<sub>2</sub> 領域  $\pi + \alpha \leq \theta_1 \leq 2\pi$ ,  $\pi \leq \theta_2 \leq 2\pi - \alpha$

この領域では、 $\chi_{11} < 0$ ,  $\chi_{12} < 0$ ,  $\chi_{21} \geq 0$ ,  $\chi_{22} < 0$  となり、回折散乱波は

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = & e^{ik\rho\cos(\theta-\alpha)} \\ & - \frac{\psi_{11}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & - \frac{\psi_{12}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\psi_{21}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 & - \frac{\psi_{22}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 & \dots\dots(129)
 \end{aligned}$$

となる。

(f) IV 領域  $\pi + \alpha \leq \theta_1 \leq 2\pi$ ,  $2\pi - \alpha \leq \theta_2 \leq 2\pi$

この領域では,  $\chi_{11} < 0$ ,  $\chi_{12} < 0$ ,  $\chi_{21} < 0$ ,  $\chi_{22} < 0$  となり  
回折領域は

$$\begin{aligned}
 \psi(\rho, \theta) = & - \frac{\psi_{11}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{11}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 & - \frac{\psi_{12}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{12}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 & - \frac{\psi_{21}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{21}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 & - \frac{\psi_{22}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) - i \left( s(\chi_{22}^2) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 & \dots\dots(130)
 \end{aligned}$$

となる。

以上, 各領域の波高比は式(118)によって

$$K = |\psi(\rho, \theta)| \quad \dots\dots(131)$$

で与えられる。

ここで, 図-9 の  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\theta$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  の関係を示すと, 次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \rho \sin \theta &= \rho_1 \sin \theta_1 = \rho_2 \sin \theta_2 \\
 \rho_1 &= \left( \frac{B^2}{4} + \rho^2 + B\rho \cos \theta \right)^{1/2} \\
 \rho_2 &= \left( \frac{B^2}{4} + \rho^2 - B\rho \cos \theta \right)^{1/2}
 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(132)$$

このようにして求めた近似解は式(13)の島堤における境界条件を満足している。しかし, 入射波直進領域(II, III 領域)で, 他端よりの散乱項を加えて, 他の領域(I またはIV 領域)との境界で波高比に不連続を生じさせないようにしているため, II<sub>1</sub> と II<sub>2</sub> 領域および III<sub>1</sub> と III<sub>2</sub> 領域の境界において波高比に不連続部を生じる。そこで, これらの境界  $(|x| \geq \frac{B}{2}, y=0)$  での波高比の不連続性を次に検討する。

(1)  $x \leq -\frac{B}{2}, y=0$  の場合

この場合はII 領域内の II<sub>1</sub> と II<sub>2</sub> 領域の境界線上である。II<sub>1</sub> 領域のこの境界線上では式(126)は

$$\begin{aligned}
 \psi_{II_1}(|x|, \pi) = & [c(\rho_{21}^2) + s(\rho_{21}^2) + i\{c(\rho_{21}^2) - s(\rho_{21}^2)\}] \\
 & \times e^{-ik|x|\cos\alpha} \quad \dots\dots(133)
 \end{aligned}$$

となり, 波高比は

$$\begin{aligned}
 K_{II_1} &= |\psi_{II_1}(|x|, \pi)| \\
 &= \sqrt{2} [c^2(\rho_{21}^2) + s^2(\rho_{21}^2)]^{1/2} \quad \dots\dots(134)
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\rho_{21}^2 = 2k \left( |x| + \frac{B}{2} \right) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \dots\dots(135)$$

である。同様に II<sub>2</sub> 領域のこの境界線上では

$$\begin{aligned}
 \psi_{II_2}(|x|, \pi) = & [2 - c(\rho_{21}^2) - s(\rho_{21}^2) - i\{c(\rho_{21}^2) - s(\rho_{21}^2)\}] \\
 & \times e^{-ik|x|\cos\alpha} \quad \dots\dots(136)
 \end{aligned}$$

となり, 波高比は

$$K_{II_2} = [2\{c(\rho_{21}^2) - 1\}^2 + 2\{s(\rho_{21}^2) - 1\}^2]^{1/2} \quad \dots\dots(137)$$

となる。この式(134), (137) からわかるように,  $K_{II_1} \neq K_{II_2}$  となり, 不連続を示している。しかし,  $|x| + \frac{B}{2} \rightarrow \infty$  では

$$\lim_{|x| + \frac{B}{2} \rightarrow \infty} c(\rho_{21}^2) = \lim_{|x| + \frac{B}{2} \rightarrow \infty} s(\rho_{21}^2) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots(138)$$

となり

$$K_{II_1} = K_{II_2} = 1 \quad \dots\dots(139)$$

となる。

(2)  $x \geq \frac{B}{2}, y=0$  の場合

この場合は III<sub>1</sub> と III<sub>2</sub> 領域の境界線上である。(1) の場合と同様にして, III<sub>1</sub> 領域では

$$\begin{aligned}
 \psi_{III_1}(x, 0) = & [c(\rho_{11}^2) + s(\rho_{11}^2) + i\{c(\rho_{11}^2) - s(\rho_{11}^2)\}] \\
 & \times e^{ikx\cos\alpha} \quad \dots\dots(140)
 \end{aligned}$$

$$K_{III_1} = \sqrt{2} [c^2(\rho_{11}^2) + s^2(\rho_{11}^2)]^{1/2} \quad \dots\dots(141)$$

となる。

III<sub>2</sub> 領域では

$$\begin{aligned}
 \psi_{III_2}(x, 0) = & [2 - c(\rho_{11}^2) - s(\rho_{11}^2) - i\{c(\rho_{11}^2) - s(\rho_{11}^2)\}] \\
 & \times e^{ikx\cos\alpha} \quad \dots\dots(142)
 \end{aligned}$$

$$K_{III_2} = \sqrt{2} [\{c(\rho_{11}^2) - 1\}^2 + \{s(\rho_{11}^2) - 1\}^2]^{1/2} \quad \dots\dots(143)$$

となる。ここで,

$$\rho_{11}^2 = 2k \left( x + \frac{B}{2} \right) \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \dots\dots(144)$$

である。(1) と同様に,  $K_{III_1} \neq K_{III_2}$  となつて, 不連続

である。しかし、 $(x + \frac{B}{2}) \rightarrow \infty$  では

$$K_{III} = K_{III} = 1 \quad \dots\dots(145)$$

となる。

以上によって、 $|x| \geq \frac{B}{2}$ ,  $y=0$  で  $K=1$  になっている厳密解と同様な結果を生じるためには  $|x| = \infty$  にならなければならないが、これについては3.4で詳細に述べる。

3.3 計算結果に対する考察

3.1 で求めた厳密解と3.2 で求めた近似解は、電子計算機による数値計算でその値を求めた。

Mathieu 関数の級数展開の形で得られた厳密解では、級数の項数、 $n$  の決定が重要である。今回の計算範囲について  $n=2, 3, 4$  とおいて計算した結果、 $n=3, 4$  の差は  $0.1 \sim 0.2\%$ 、 $n=4$  と  $5$  ではさらに小さくなる。そ

こで、十分な余裕を見込んで計算には  $n=4$  を用いた。計算を行なったケースは表-1 に示してある。

表-1 計算ケース

B/L	$\alpha$				
	15°	30°	45°	60°	90°
1	E, A	E, A	E, A	E, A	E, A
2	E	E	E	E	E
3	E, A	E, A	E, A	E, A	E, A

E : Exact solution, A : Approximate solution

近似解は厳密解との比較の意味で計算を行なうこととし、近似解と厳密解との差が大きいと予想された  $B/L=1$  と差が小さいと予想された  $B/L=3$  についてのみ近似解を計算し、 $B/L=2$  の場合は行なわなかった。

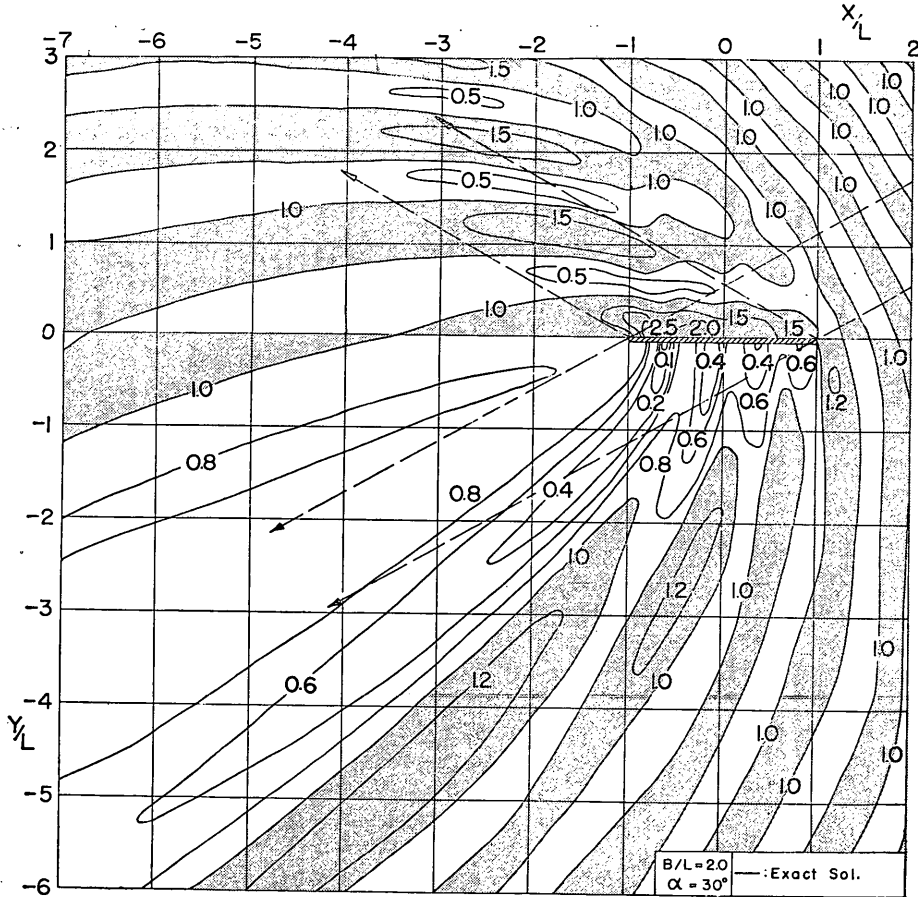


図-10 島堤付近の波高比の平面分布 ( $B/L=2$ ,  $\alpha=30^\circ$ )

また、 $B/L > 3$  については固有値  $a$  の正確な算出が面倒になるため、今回は計算を行なわなかった。

図-10 に  $B/L=2$ ,  $\alpha=30^\circ$  の場合の厳密解による島堤付近の波高の平面分布が示してある。図中の数字は波高比を表わしている。この図でわかるように、島堤前面では波高の大きい部分と小さい部分が交互に現われ、入射波と反射波が互いに干渉していることがわかる。この波高の大きい部分と小さい部分は島堤付近では反射方向に交互に並んでいるけれども、島堤から遠ざかるに従って、幾何光学的反射領域から右側入射波直進領域に移動する傾向を示している。島堤背後では波高の小さい部分はほぼ入射波方向に流されたような形状を示しているが、幾何光学的な陰の部分から右側入射波直進領域に拡がる傾向を示している。このような傾向を考慮して、島堤前面では反射方向に沿って、島堤背後では入射波方向に沿って波高分布の計算を行なった。

以下では、島堤前面、島堤沿いおよび島堤背後の波高分布について、厳密解と近似解を比較しながら詳細に述

べる。

(1) 島堤前面の波高分布

前面の波高分布の計算では、反射波の影響を調べるため、 $x$  軸上の  $(x_0, 0)$  点から、反射波の進行方向に向けて、 $\frac{1}{8}$  波長毎に10波長まで計算した。島堤前面の波高分布は図-11~15 に示してある。座標系は図-8 と同じで、 $l$  は  $(x_0, 0)$  の点からの距離で、次のように示される。

$$l = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2} \quad \dots\dots(146)$$

これらの図から、波高は島堤の延長方向と波の進行方向とのなす角  $\alpha$  (以下これを島堤傾角と呼ぶ) の増大に伴って、極大波高間の距離が減少して  $L/2$  に近づく。島堤付近では、極大波高、極小波高の現われる点の軌跡は曲線となっているが、島堤から離れるに従って、島堤と平行になり、波高分布は幾何光学的な入射波と反射波の干渉によって生じる分布形とよく一致する。 $l$  が大きくなると、反射波の散乱現象によって、 $|x_0| > 0.5B$  でも次第に反射波の影響を強く受け始めることがわかる。

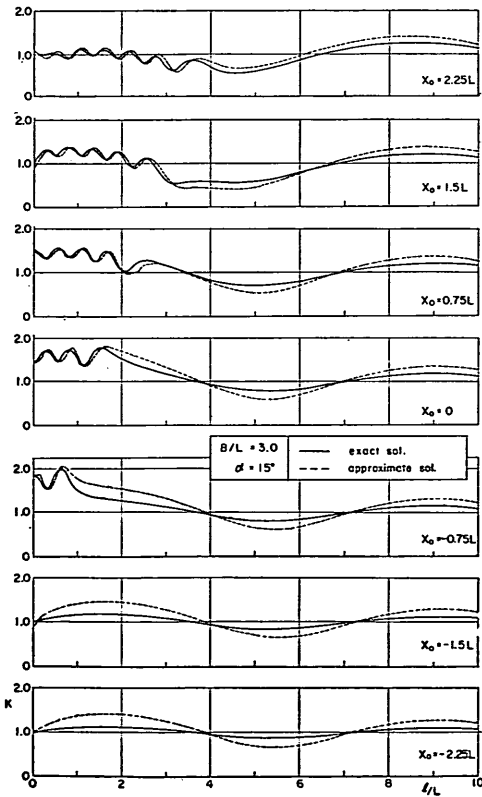


図-11 島堤前面の波高分布 ( $B/L=3.0$ ,  $\alpha=15^\circ$ )

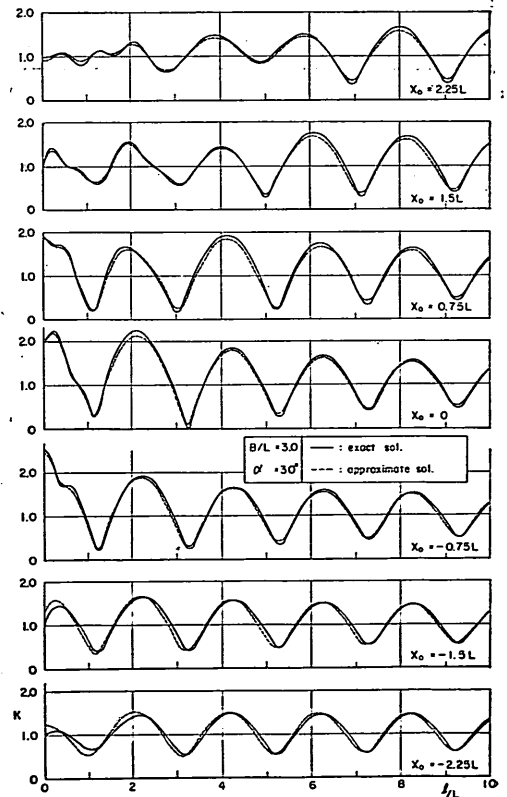


図-12 島堤前面の波高分布 ( $B/L=3.0$ ,  $\alpha=30^\circ$ )

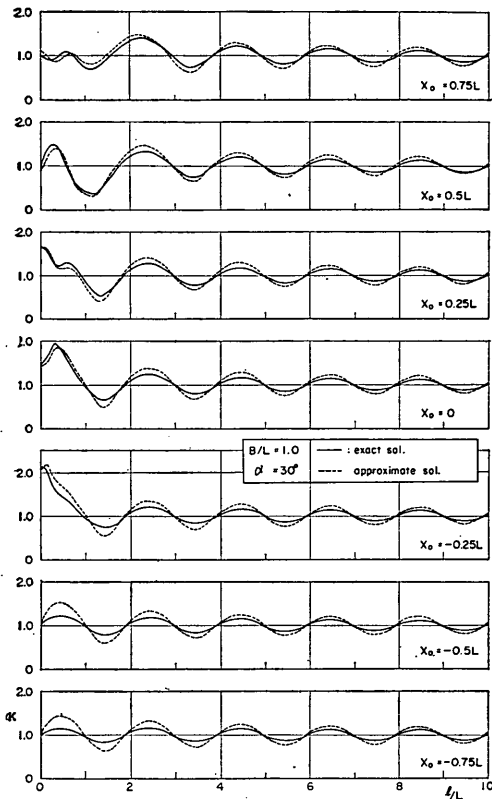


図-13 島堤前面の波高分布 ( $B/L=1.0$ ,  $\alpha=30^\circ$ )

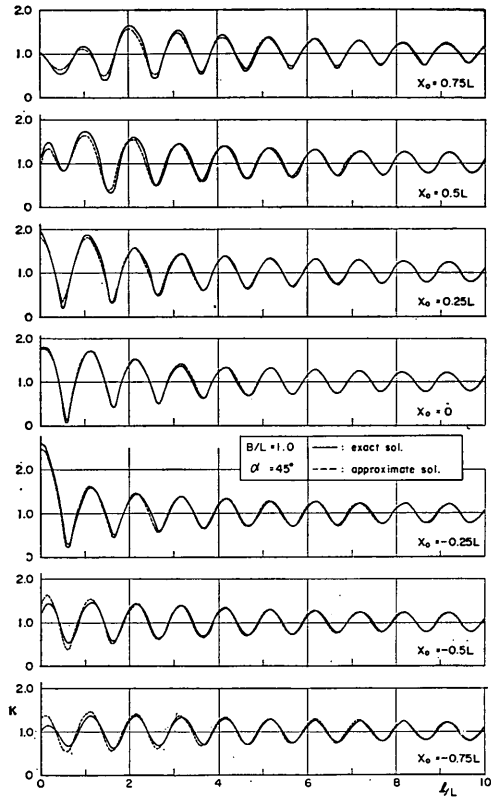


図-14 島堤前面の波高分布 ( $B/L=1.0$ ,  $\alpha=45^\circ$ )

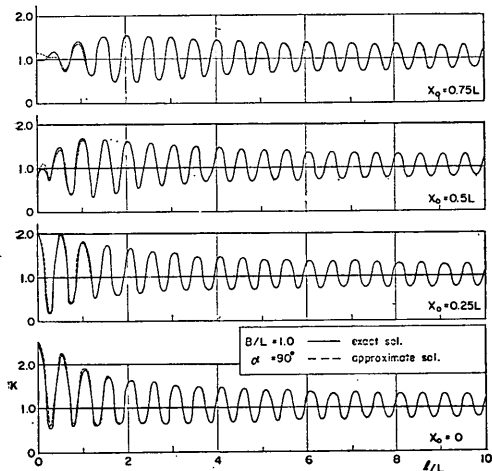


図-15 島堤前面の波高分布 ( $B/L=1.0$ ,  $\alpha=90^\circ$ )

近似解と厳密解の波高分布はかなり一致した傾向を示しており、 $l$ の増大とともに、つまり島堤から離れるに

従って、近似解と厳密解の差は小さくなる。また、島堤傾角 $\alpha$ が $90^\circ$ に近くなるほどその差は小さくなる。近似解と厳密解の差が目立つのは極大波高および極小波高の付近である。

(2) 島堤沿いの波高分布

島堤沿いの波高分布は図-16~20に示してある。これらの図で、前面沿いの波高分布は上に、背面沿いの波高分布は下に示してある。計算は0.1L毎に行なった。

前面の波高分布は0.5~1波長間隔で波を打った形をしており、 $\alpha=90^\circ$ のときが最大間隔になっている。その変動量は、最大のもので入射波高程度であるが、同一入射角では $B/L$ が小さい程大きい。最大波高は島堤傾角 $\alpha=30^\circ$ の場合、 $B/L=1$ で $K_{max}=2.2$ 、 $B/L=2$ で $K_{max}=2.6$ 、 $B/L=3$ で $K_{max}=2.8$ となっており、 $B/L$ が大きいかほど大きい。しかし、 $\alpha=60^\circ$ の場合、最大波高は $B/L=1$ で $K_{max}=2.8$ 、 $B/L=2$ で $K_{max}=2.4$ 、 $B/L=3$ で $K_{max}=2.6$ となっており、島堤傾角および $B/L$ によって最大波高はかなり変動する。背面の位相のずれ



島堤による波の反射および回折に関する研究

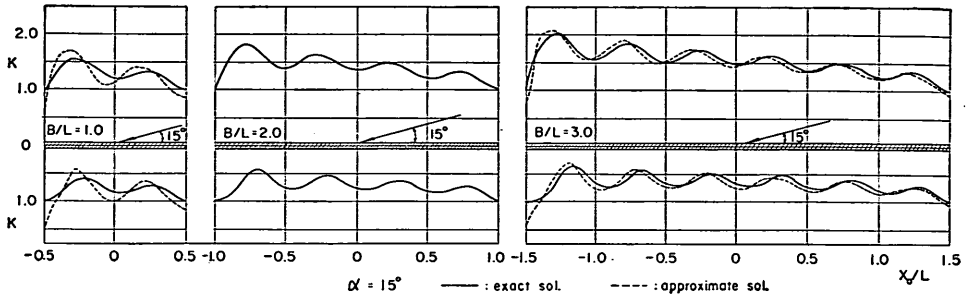


図-16 島堤沿いの波高分布 ( $\alpha=15^\circ$ )

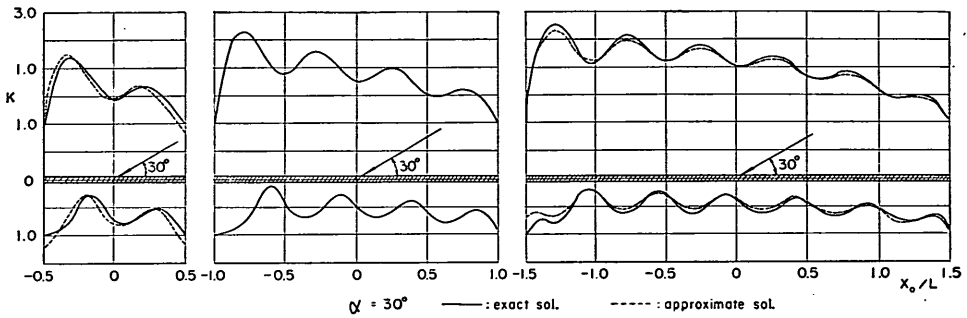


図-17 島堤沿いの波高分布 ( $\alpha=30^\circ$ )

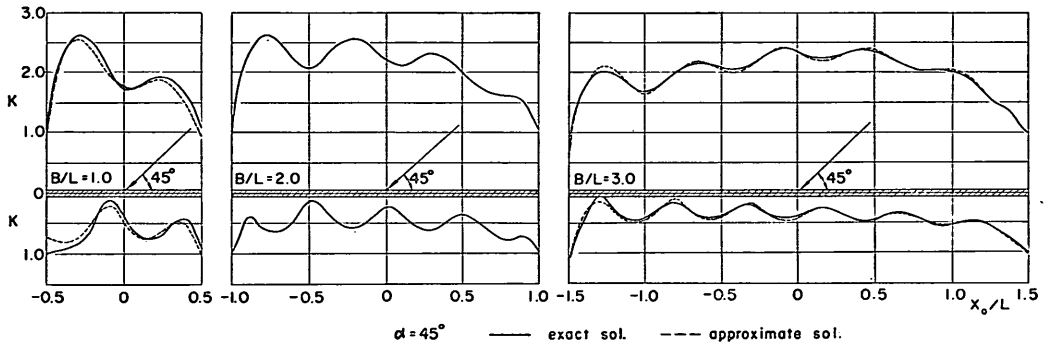


図-18 島堤沿いの波高分布 ( $\alpha=45^\circ$ )

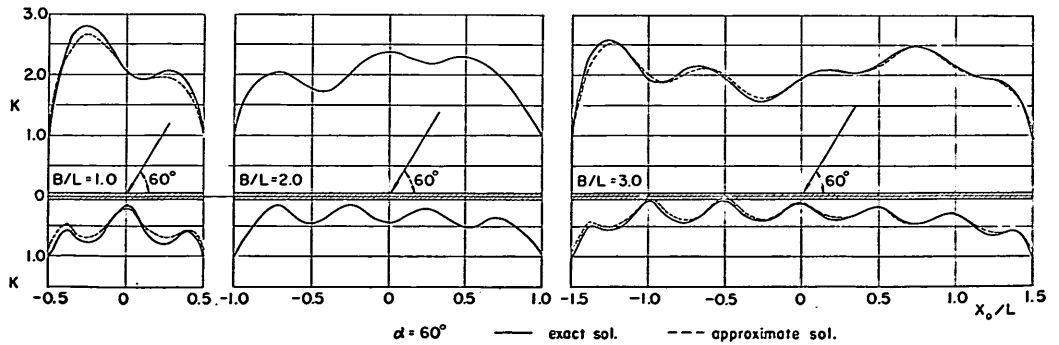


図-19 島堤沿いの波高分布 ( $\alpha=60^\circ$ )

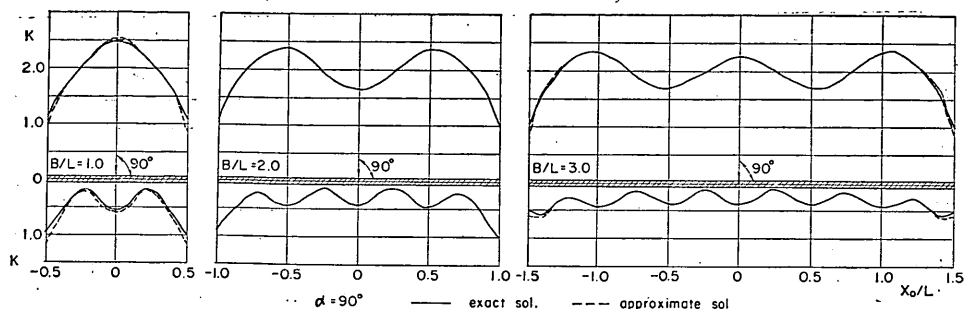


図-20 島堤沿いの波高分布 ( $\alpha=90^\circ$ )

による波高も考慮しなければならないが、このように  $K_{\max} > 2.0$  となることから、島堤には二次元的な重複波の波圧以上のものが作用すると考えられる。最大波高の生じる位置は、 $B/L=1$  の  $\alpha=90^\circ$  および  $B/L=2$  の  $\alpha=45^\circ$  と  $60^\circ$  の場合が島堤中央部、他の場合は島堤左端 ( $x=-B/2$ ) 付近に生じて、入射角  $\alpha$ 、 $B/L$  によって、その位置が移動している。

背面沿いの波高分布はほぼ 0.5 波長間隔に波をうった形を示している。波高は  $B/L$  が增大するにつれて小さくなっている。

近似解と厳密解の分布形状はよく一致しているが、 $y$  軸に関して対称な直角入射の場合は両端で、斜め入射の場合は左側堤端 ( $x=-B/2$ ) 付近で大きな差を示している。特に、島堤背面でこの傾向が顕著である。たとえば、 $B/L=3$ 、 $\alpha=30^\circ$  の場合、 $x=B/2$  付近ではその差は最大 0.05 程度であるが、 $x=-B/2$  付近では最大 0.3 にもなっている。これは島堤端で、特に斜め入射の場合、 $x=-B/2$  付近で相互干渉が著しいためだと思われる。しかし、 $B/L$ 、 $\alpha$  の増大にともなって、その差は小さくなっている。

### (3) 島堤背後の回折波高の平面分布

図-21~34 に島堤による回折波高の平面分布が等波高線で示してある。図中の数字は波高比  $K$  を表わしている。近似解と厳密解の差があまりないケースは同一図面に示し、差が大きく図面が複雑になるものは別々の図に示し

た。

波高の分布形は  $\alpha$ 、 $B/L$  によって異なり、 $\alpha$  が同一でも  $B/L$  によって異なる。また、波高が小さい部分は幾何光学的陰の部分より外側に広がっている。特に、右側入射波直進領域に広がり、島堤傾角  $\alpha$  が小さくなる程顕著である。

直角入射 ( $\alpha=90^\circ$ ) の場合、波高の小さい部分は島堤から離れるに従って、外側に広がる傾向を示し、島堤中心線 ( $x=0$ ) 上では、波高は相対的に大きくなっている。

斜め入射の場合、 $x/L > 0$  では等波高線は島堤に対して、垂直に分布し、 $K=1.0$  の線は島堤傾角の減少に伴って、島堤に近づく。 $x/L < 0$  では等波高線は島堤より離れるに従って、少しずつ傾くがほぼ入射波進行方向へ流されたような形を示す。このずれは島堤傾角  $\alpha$  が小さくなる程大きい。また、 $x/L < 0$  では  $x/L > 0$  より波高は一般に小さい。特に、島堤端付近で波高は最小になっている。

近似解と厳密解と比較すると、波高分布形状はかなりよく一致しているが、等波高線の位置がずれている。この位置のずれは、 $B/L$  あるいは島堤傾角  $\alpha$  が小さくなれば大きくなる。特に、 $x=-B/2$  の島堤左端付近でこのずれが大きい。島堤から離れた部分でのずれはこの部分では波高の変化が小さいため、厳密解と近似解の差の絶対量は小さい。

(本文35頁へ続く)

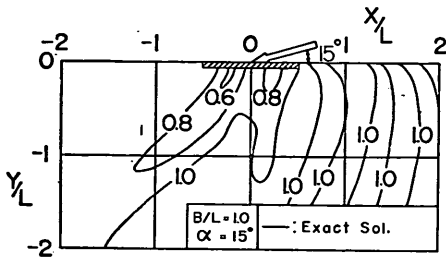


図-21 (a) 厳密解による回折図 ( $B/L=1.0, \alpha=15^\circ$ )

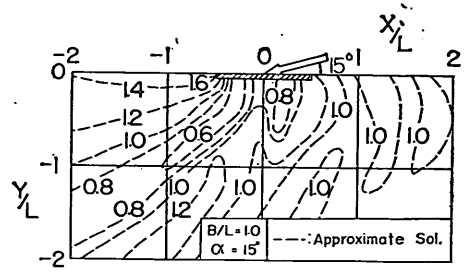


図-21 (b) 近似解による回折図 ( $B/L=1.0, \alpha=15^\circ$ )

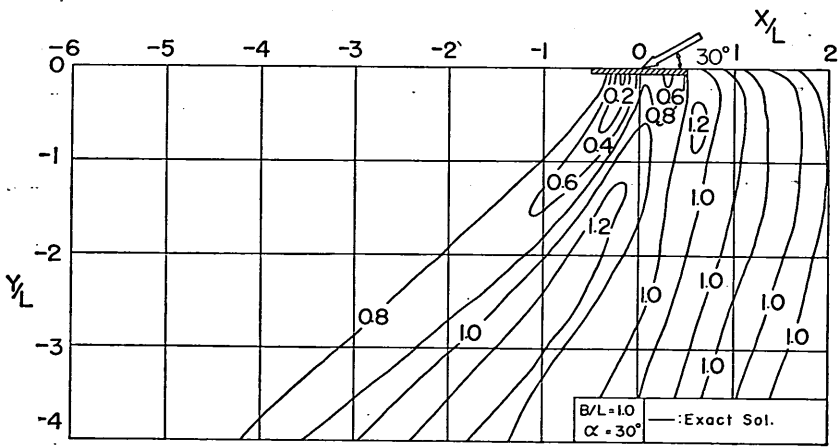


図-22 (a) 厳密解による回折図 ( $B/L=1.0, \alpha=30^\circ$ )

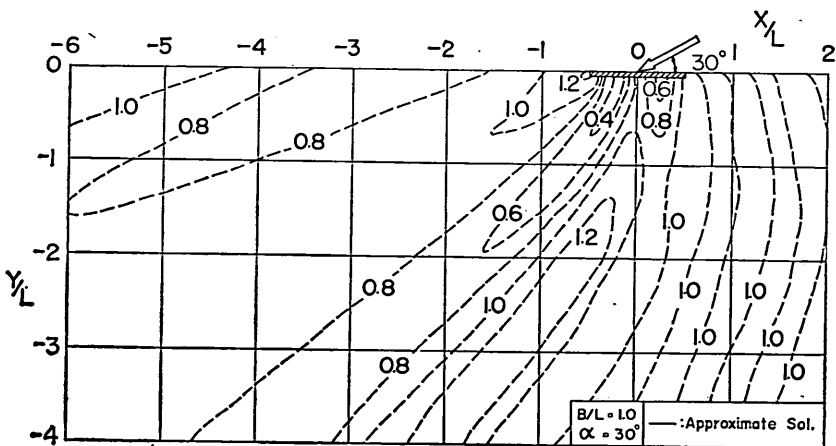


図-22 (b) 厳密解による回折図 ( $B/L=1.0, \alpha=30^\circ$ )

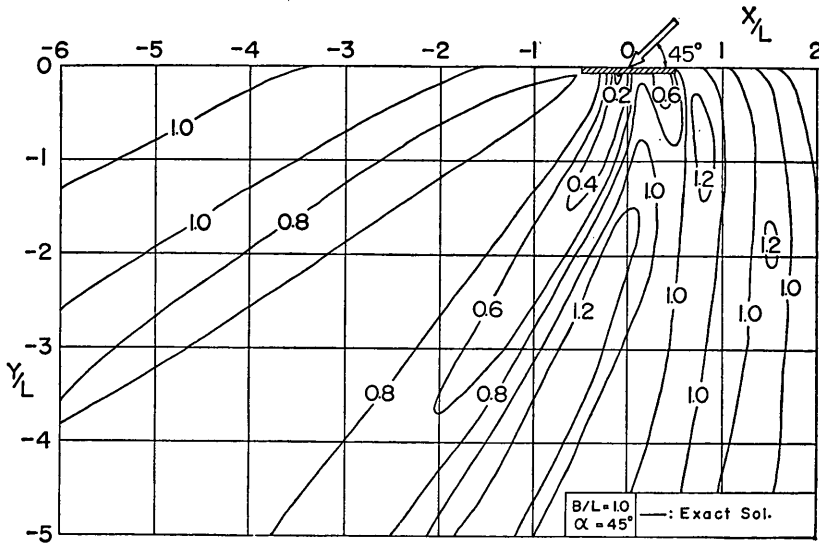


図-23 (a) 厳密解による回折図 ( $B/L=1.0$ ,  $\alpha=45^\circ$ )

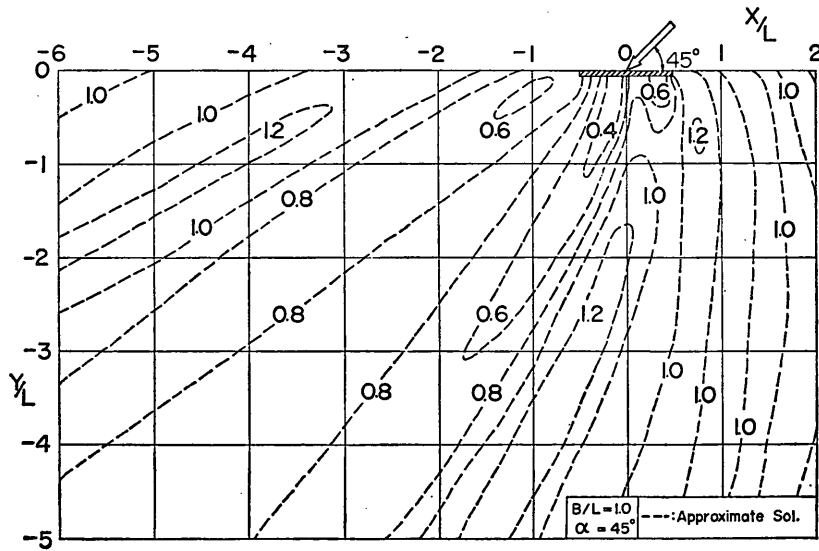


図-23 (b) 近似解による回折図 ( $B/L=1.0$ ,  $\alpha=45^\circ$ )

島堤による波の反射および回折に関する研究

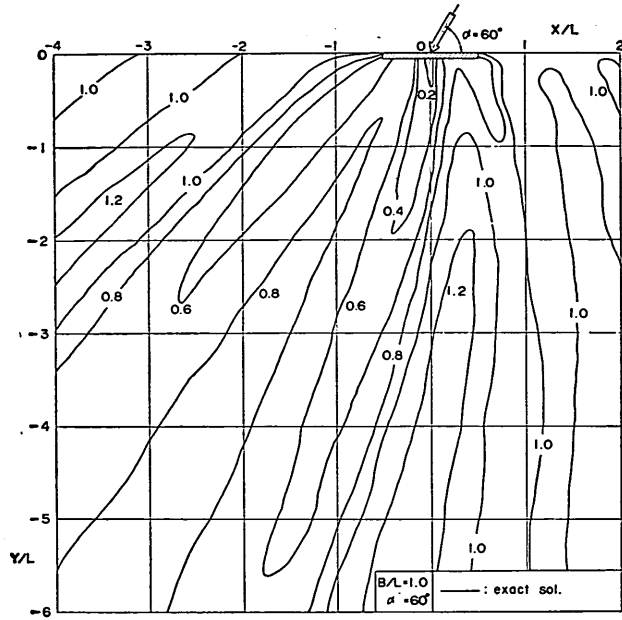


図-24 (a) 厳密解による回折図 ( $B/L=1.0$ ,  $\alpha=60^\circ$ )

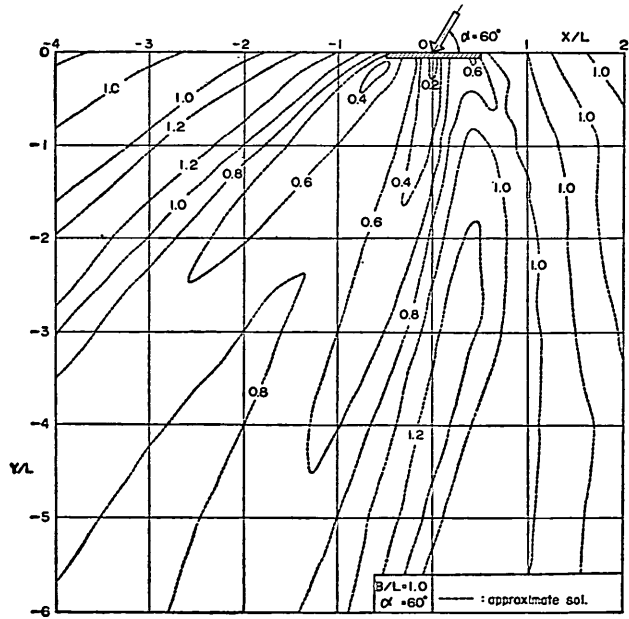


図-24 (b) 近似解による回折図 ( $B/L=1.0$ ,  $\alpha=60^\circ$ )

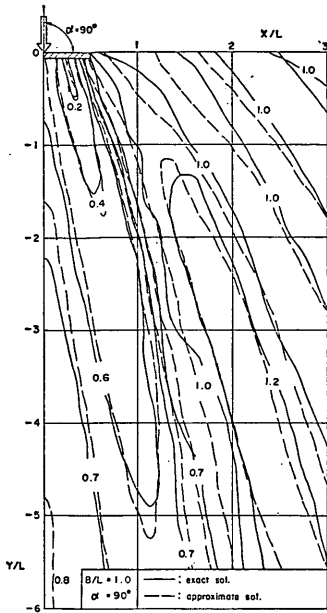


図-25 厳密解と近似解による回折図  
( $B/L=1.0, \alpha=90^\circ$ )

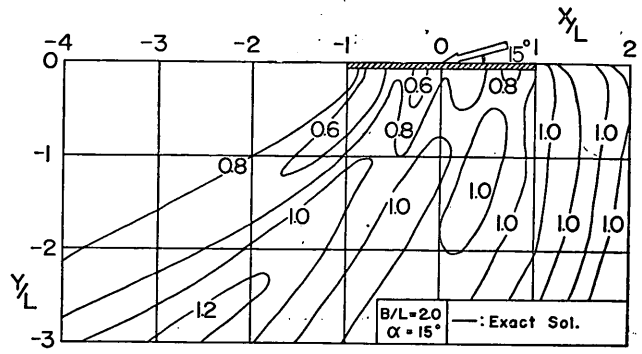


図-26 厳密解による回折図 ( $B/L=2.0, \alpha=15^\circ$ )

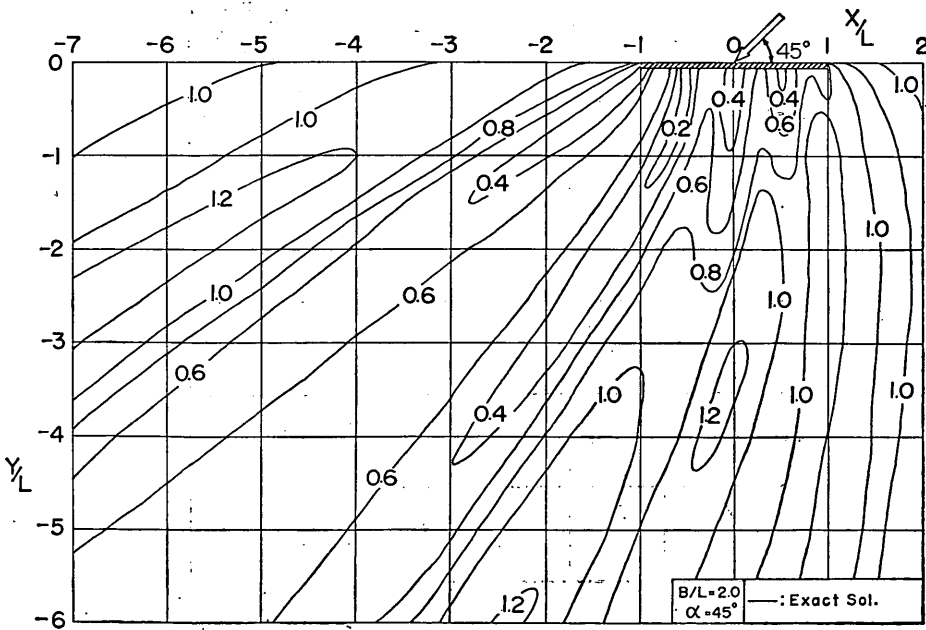


図-27 厳密解による回折図 ( $B/L=2.0, \alpha=45^\circ$ )

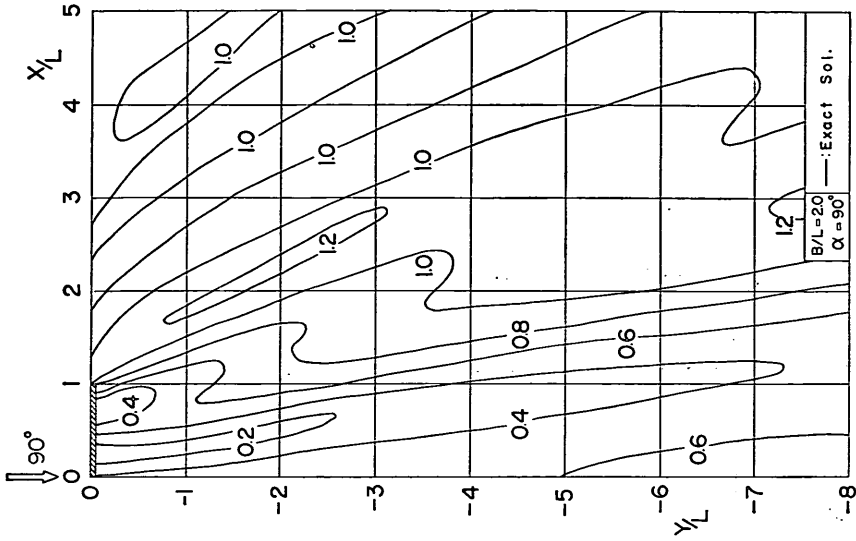


図-29 厳密解による回折図 ( $B/L=2.0, \alpha=90^\circ$ )

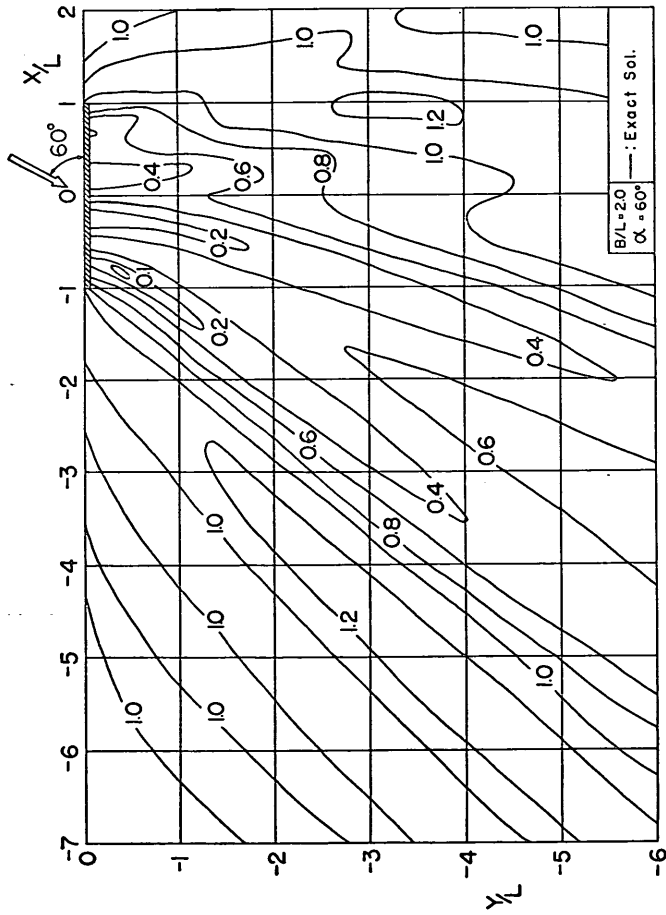


図-28 厳密解による回折図 ( $B/L=2.0, \alpha=60^\circ$ )

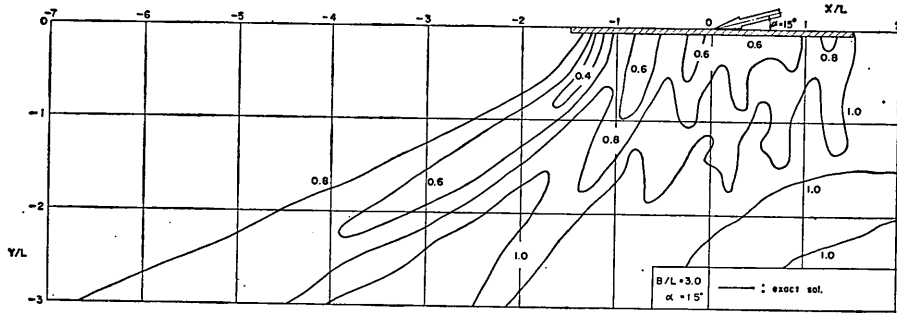


図-30 (a) 厳密解による回折図 ( $B/L=3.0$ ,  $\alpha=15^\circ$ )

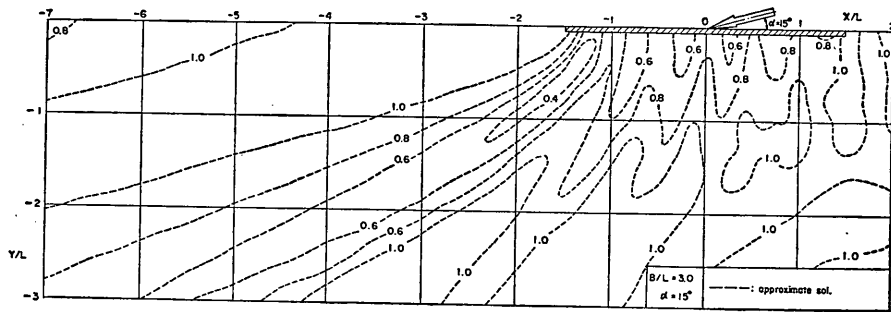


図-30 (b) 近似解による回折図 ( $B/L=3.0$ ,  $\alpha=15^\circ$ )



島堤による波の反射および回折に関する研究

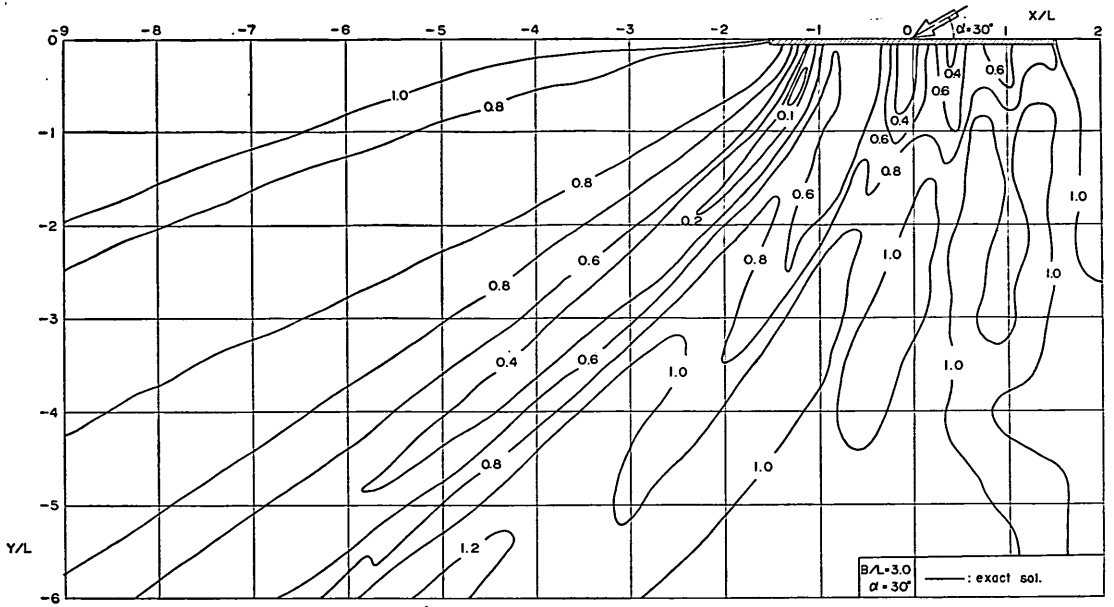


図-31 (a) 厳密解による回折図 ( $B/L=3.0$ ,  $\alpha=30^\circ$ )

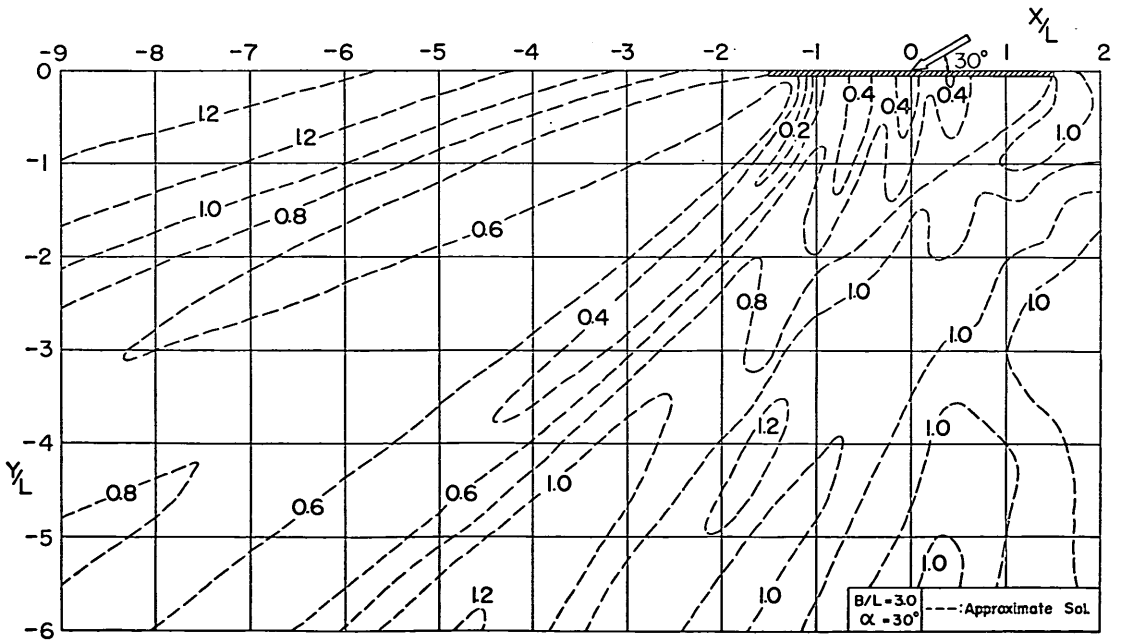


図-31 (b) 近似解による回折図 ( $B/L=3.0$ ,  $\alpha=30^\circ$ )

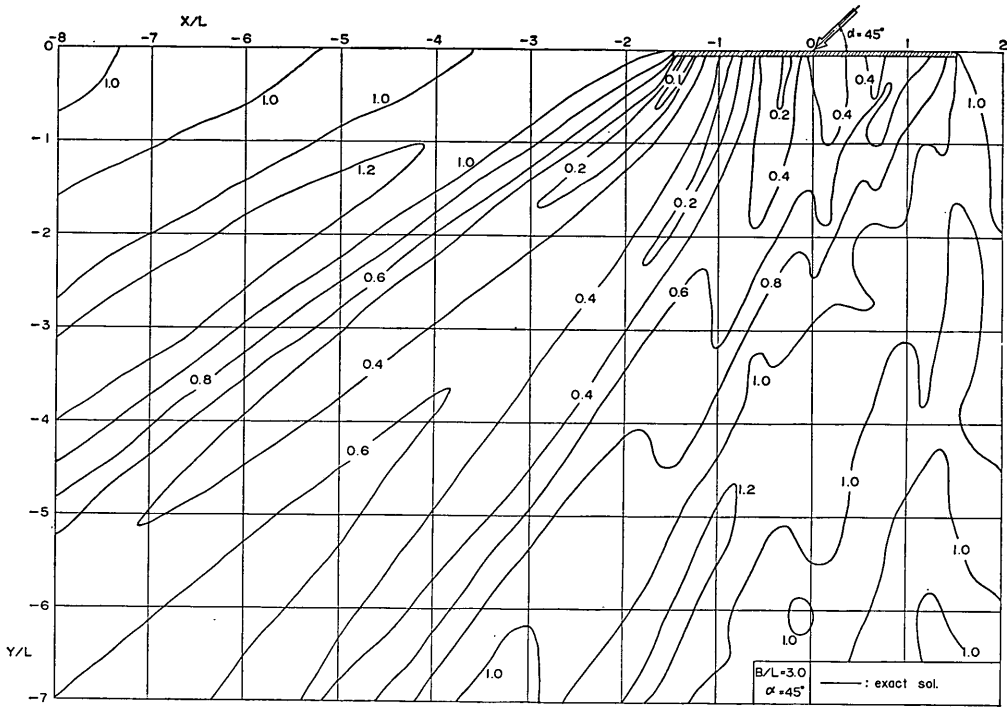


図-32 (a) 厳密解による回折図 ( $B/L=3.0, \alpha=45^\circ$ )

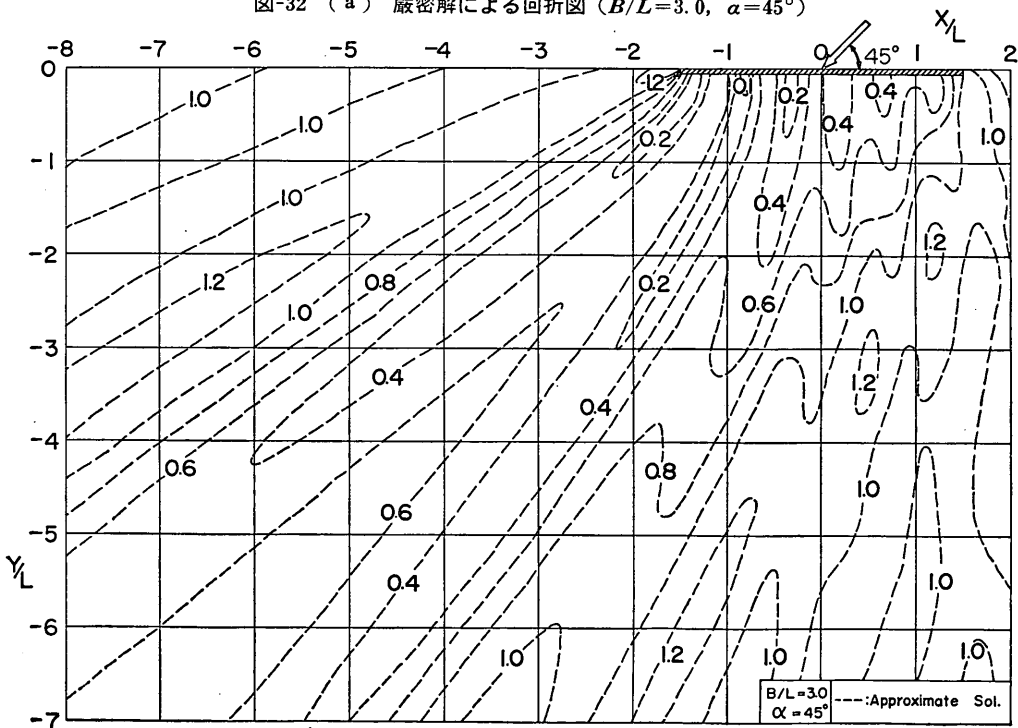


図-32 (b) 近似解による回折図 ( $B/L=3.0, \alpha=45^\circ$ )

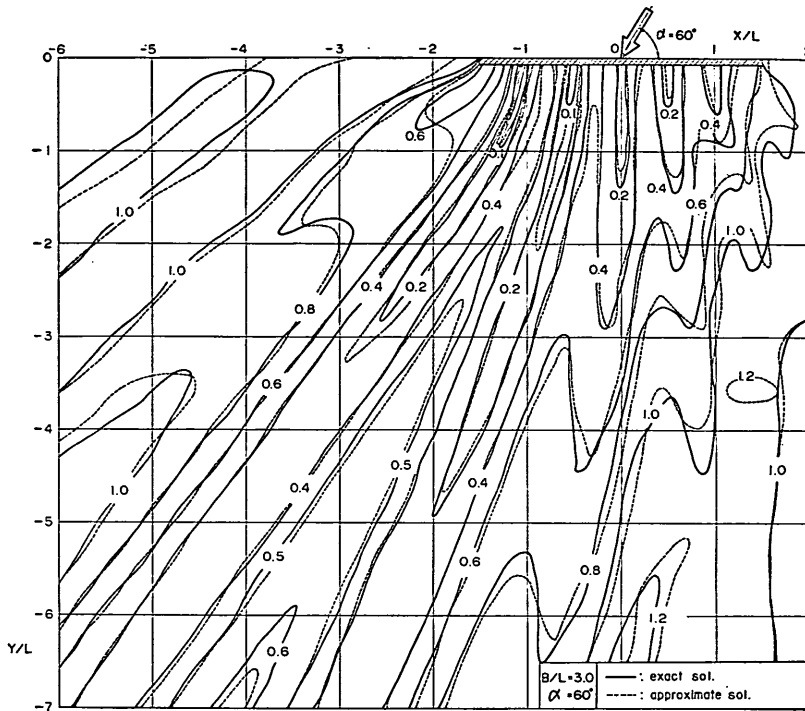


図-33 厳密解と近似解による回折図 ( $B/L=3.0$ ,  $\alpha=60^\circ$ )

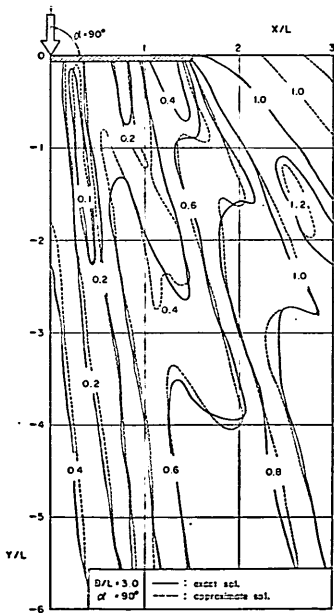


図-34 厳密解と近似解による回折図 ( $B/L=3.0$ ,  $\alpha=90^\circ$ )

(4) 島堤背後の波高分布

入射波方向へ、 $B/L=1.0$  では0.2波長、 $B/L=3.0$  では0.6波長毎に計算した。その結果は図-35~40に示してある。 $x$ 軸上の( $x_0 > 0, 0$ )の点から計算した波高分布は島堤付近で極大、極小波高を示すが、( $x_0 < 0, 0$ )の点からの波高分布は $l$ の増大に伴って、漸次増加する傾向を示している。相対距離 $l/L$ が大きくなると、波高は単調増加を示し、1.0に収束する。

厳密解と近似解の波高分布形状はよく一致している。厳密解と近似解の差は $B/L$ の増大、または島堤傾角の $90^\circ$ への接近につれて小さくなるが、島堤付近では他の部分に比較して大きい。特に、 $x_0 < 0$ の部分で、その中でも $x = -B/2$ の島堤左端付近でこの差は著しい。たとえば、 $B/L=3.0$ ,  $\alpha=30^\circ$ の場合、 $x_0/L=1.5$ における

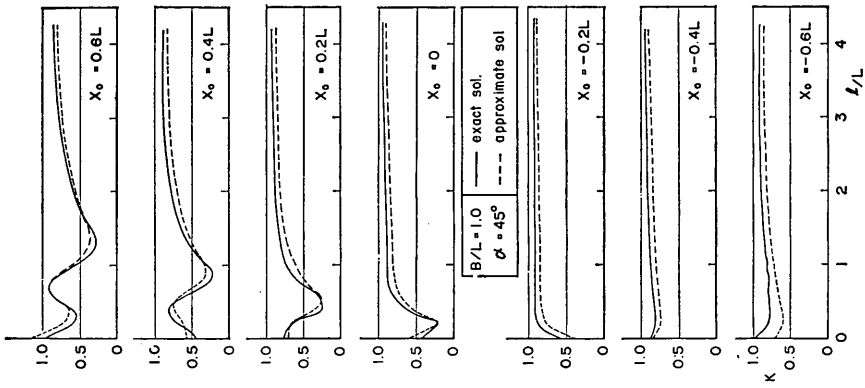


図-37 島堤背後の波高分布  
( $B/L=1.0, \alpha=45^\circ$ )

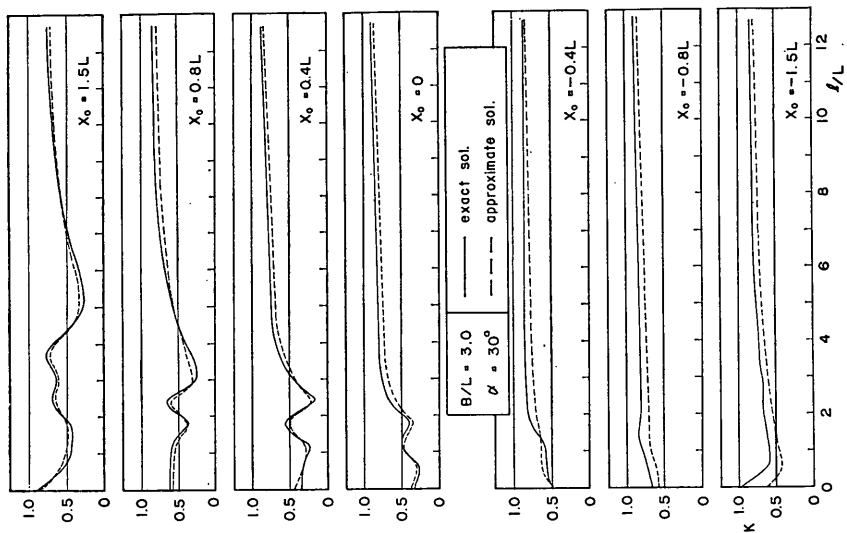


図-36 島堤背後の波高分布  
( $B/L=3.0, \alpha=30^\circ$ )

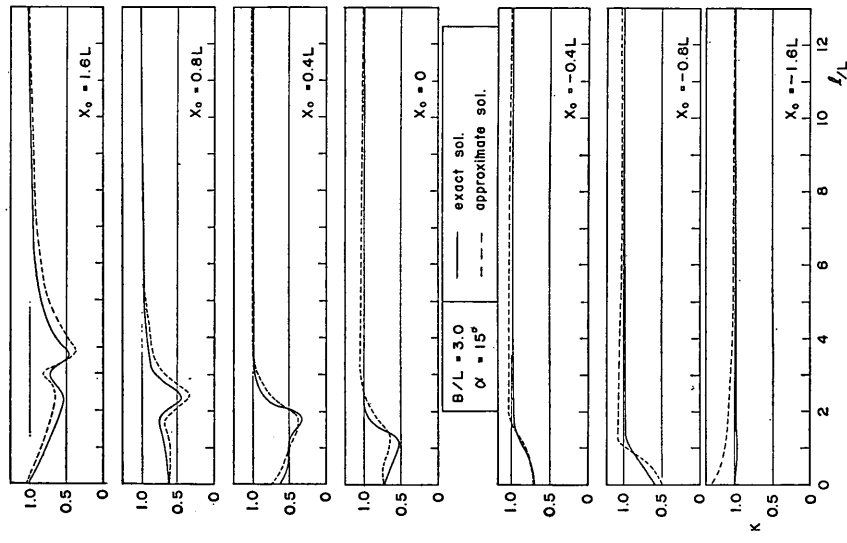


図-35 島堤背後の波高分布  
( $B/L=3.0, \alpha=15^\circ$ )

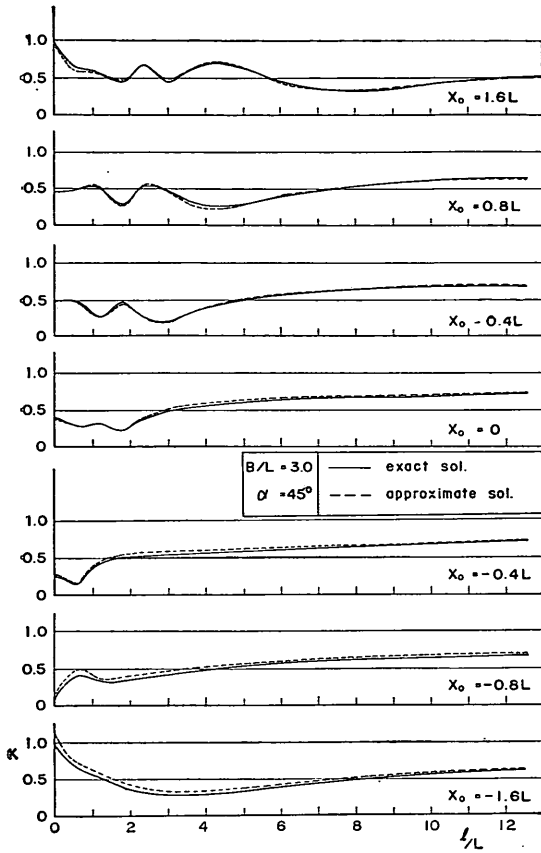


図-38 島堤背後の波高分布 ( $B/L=3.0, \alpha=45^\circ$ )

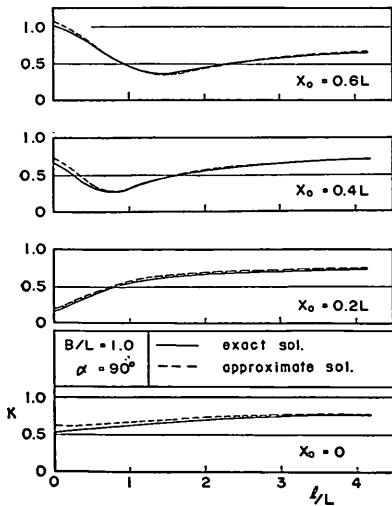


図-39 島堤背後の波高分布 ( $B/L=1.0, \alpha=90^\circ$ )

$l/L=0$  付近での差は最大 0.1 程度で、 $x_0/L=-1.5$  では最大 0.4 程度になる。しかし  $l/L=10$  になると、その差は  $x_0/L=1.5$  で 0.05、 $x_0/L=-1.5$  で 0.05 となって、 $l/L=10$  ではほぼ等しい差を示す。これは (2) で述べたように、この部分では両端よりの相互干渉が著しく大きく現われるためである。また、 $l/L$  の増大に伴って、厳密解と近似解の差は減少する。

### 3.4 近似解の適用範囲についての考察

前節で島堤周囲の波高分布について検討を加えたが、 $B/L > 3.0$  を計算していないため、近似解の適用範囲を明らかにすることができなかった。そこで、3.1、3.2 の結果を用いて、近似解の適用範囲を明らかにする。

3.1 の厳密解で示したように、 $|x| \geq B/2, y=0$ 、つまり島堤の延長上では式 (118) の波高比は  $K=1$  となる。しかし、近似解は 3.2 で示したように、島堤での境界条件は満足しているが  $|x| \geq B/2, y=0$  での波高比  $K$  の連続条件を満足しなく、 $K \neq 1$  となる。そこで近似解の適用範囲は  $|x| \geq B/2, y=0$  での  $K$  値の連続性によって、つまり、 $|x| \geq B/2, y=0$  における近似解の  $K$  と厳密解の  $K=1$

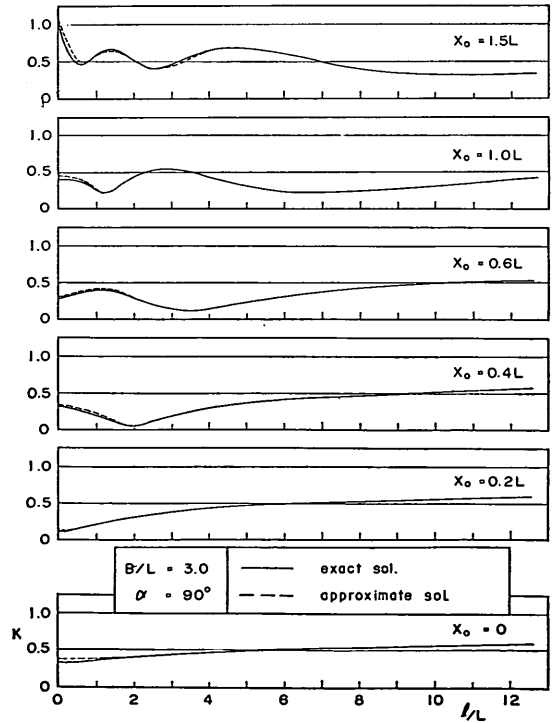


図-40 島堤背後の波高分布 ( $B/L=3.0, \alpha=90^\circ$ )

との差によって定めることができる。フレネ積分からわかるように近似解の  $K$  は  $(|x|+B/2)$  の最小点付近で  $K=1$  からのずれが最大となる。すなわち、 $x=\pm B/2$  付近で近似解が最も厳密解よりずれる。

式(135), (144) に  $|x|=B/2$  を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11}^2 &= 2kB \cos^2(\alpha/2) \\ \rho_{21}^2 &= 2kB \sin^2(\alpha/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(147)$$

となるから、この式(147)を用いて、 $B/L$  に対する島堤端での  $K_{II_1}$ ,  $K_{II_2}$ ,  $K_{III_1}$ ,  $K_{III_2}$  の変化を求めた結果を図-41に示す。図-41で  $K=1$  の上下の線は  $K=1.2$ ,  $0.8$  を示し、波高比がこの線の間であれば、厳密解に対する近似解の誤差が20%以内であることを示す。図-41

では、島堤傾角が小さくなれば、 $K_{II_1}$ ,  $K_{III_2}$  は  $K=1$  のまわりを振動しながら速やかに  $K=1$  に収束するが、 $K_{II_2}$  と  $K_{III_1}$  は収束が遅い。このことは、 $x/L=-0.5B$  付近で近似解と厳密解の差が大きいという3.3の結果と一致する。

近似解を最大20%の誤差の範囲で用いるためには、 $K_{II_1}$ ,  $K_{II_2}$ ,  $K_{III_1}$ ,  $K_{III_2}$  は

$$0.8 \leq K_{II_1}, K_{II_2}, K_{III_1}, K_{III_2} \leq 1.2 \dots\dots(148)$$

を満足しなければならない。しかし、 $(B/L)_1$  で式(148)を満足していても、 $B/L > (B/L)_1$  で式(148)を満足しない点が存在するなら、3.2の式(135), (144)から、

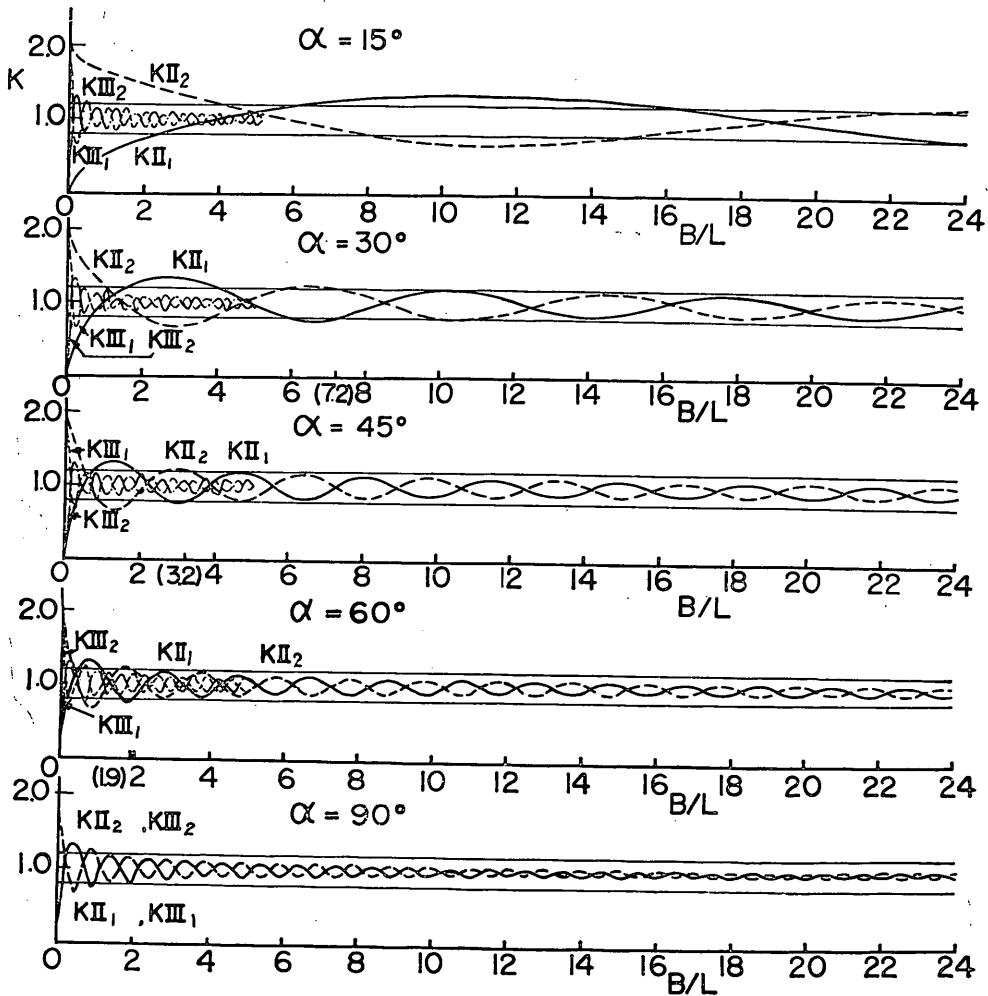


図-41 島堤の堤端における波高比

は  $\frac{B}{L} > \frac{B_0}{L_0}$ ,  $y=0$  で式 (148) の条件を満足しない点が存在することになる。

以上のことより近似解を誤差20%以内の精度で使用するためには  $B/L > (B/L)_c$  で常に式 (148) を満足していなければならない。ここで、 $(B/L)_c$  を限界相対島堤長と呼ぶ。島堤傾角  $\alpha$  の  $(B/L)_c$  は図-41 から  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  によって決まることがわかる。そこで、島堤傾角  $\alpha_0$  の限界相対島堤長  $(B_0/L_0)_c$  が決定された時、島堤傾角  $\alpha$  の  $(B/L)_c$  は次のように求まる。

$$(B/L)_c = (B_0/L_0)_c \sin^2(\alpha_0/2) / \sin^2(\alpha/2) \dots\dots(149)$$

図-41 から  $\alpha_0=90^\circ$  の10%および20%誤差の限界相対島堤長を  $(B/L)_c=4.4, 1.0$  として求め、式 (149) を用いて、任意の島堤傾角の  $(B/L)_c$  を計算した結果が図-42に示してある。図-42の破線は従来用いられている仮想島堤長によって求めた次のような限界値を示す。

$$(B/L)_c = (B_0/L_0)_c \sin \alpha_0 / \sin \alpha \dots\dots(150)$$

この図-42 から、仮想島堤長によって求めた限界値は式 (149) によって求めた値より小さくなり、仮想島堤長による式 (150) で近似解の適用範囲を決定すると、大きな

誤差を含むことになる。

以上によって、図-42 から10%の誤差の範囲で近似解が適用できるのは  $\alpha=90^\circ$  では  $B/L \geq 4.4$ ,  $\alpha=60^\circ$  では  $B/L \geq 8.8$ ,  $\alpha=30^\circ$  では  $B/L \geq 33$  となり、誤差20%では  $\alpha=90^\circ$  で  $B/L \geq 1.0$ ,  $\alpha=60^\circ$  で  $B/L \geq 2.0$ ,  $\alpha=30^\circ$  で  $B/L \geq 7.5$  となる。このように、近似解の適用範囲は  $\alpha$  によって大きく変化する。

#### 4. 実験的考察

##### 4.1 実験装置

###### (1) 実験水槽および造波装置

実験水槽は当研究所水工部の中型平面水槽(図-43)を用いた。この水槽は長さ30m, 幅20m, 深さ1mのコンクリート製で、水槽側壁上に長さ25mのレールが敷かれ、台車が設置されている。この台車はスパン20m, 幅1mで、1/2馬力のモータが取り付けられてあり、速度2m/minで、自走できる。

消波装置としては、高さ0.5m, 幅1m, 長さ2mのステンレス切断片を入れたかごを図-43のように側壁沿いに設置し、奥壁には1/10こう配に碎石を敷いた。

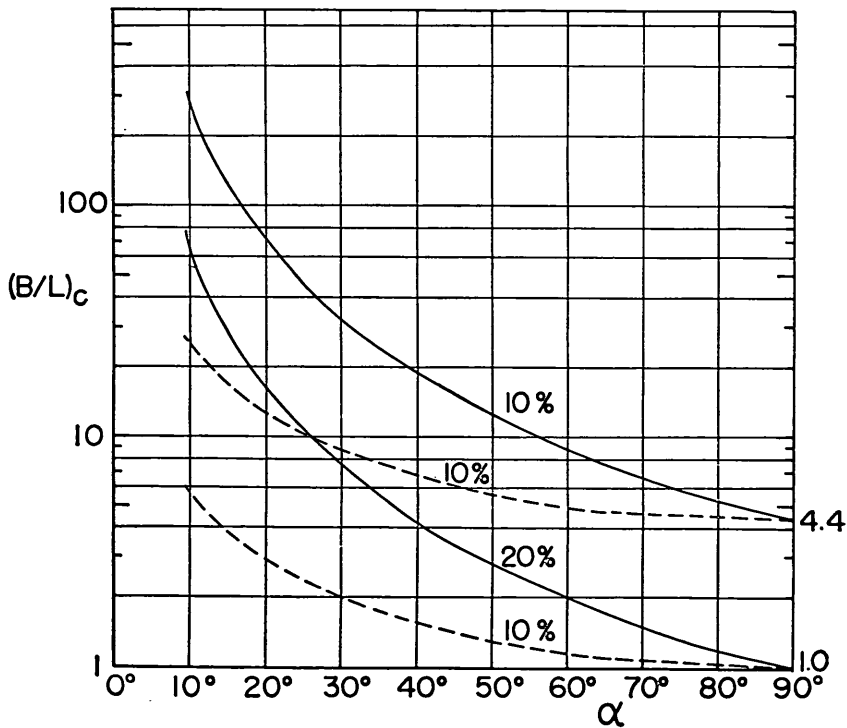


図-42 近似解の適用範囲

## 島堤による波の反射および回折に関する研究

造波装置は、200V、20馬力のモータを用いて、2段減速を行ない、変形フラップ型の造波機を駆動する方法である。造波板は5m づつ4枚に分かれている。

### (2) 測定装置および堤体

実験波の周期設定には光電式のタイムカウンターを用いた。

波高測定用のピックアップとしては抵抗線式波高計、増幅器として4チャンネルの水位測定増幅器、記録には同じく4チャンネルの直線書きペンオシロを用いた。この水位測定増幅器は直線性がよく、また、相互干渉を起しにくいいため、抵抗線式波高計を20cm程度まで互に近づけて使うことができる。

堤体は高さ0.5m、長さ0.9mおよび1.8m、で、安定性を考えて、写真-1のように、鉄製の逆T型断面で、前に10cm、後に30cmの張り出しを設けた。また、堤体の転倒を防ぐため1個約10kgの長方形重錘を用いた。

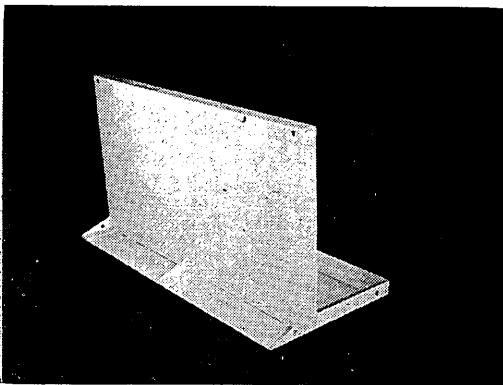


写真-1 島堤の模型

### 4.2 実験ケースおよび実験方法

#### (1) 入射波

入射波および水深は

- (i) 水槽底面の粗度による波形および波高変化を避ける。
- (ii) 風による影響を少なくする。
- (iii) 線型理論の十分適用できる範囲の波とする。
- (iv) 堤体長と波長の比 ( $B/L$ ) を 0.5~5.0内にお

さえる。

の4点を考慮して、周期  $T=0.9\text{sec}$ 、波高  $H=4.0\text{cm}$ 、水深  $h=40\text{cm}$  と決めた。しかし、入射波を検定した結果、図-44のような分布を示し、入射波の波高分布は一樣でない。これは側壁に設置した消波装置による影響だと思われるが、このような実験では、堤体からの反射波が側壁によって再反射されるのを防ぐ上に、消波工を側壁に設置せざるをえない。この図-44に基づき、側壁から十分離れていて、波高が比較的一様となっている場所を堤体設置位置とした。その位置は図-43に示されているように、造波板から15.5mの水槽中央部である。入射波の波高は堤体設置位置付近の平均波高を用いた。その結果、入射波の諸元は表-2のようになった。

表-2 入射波の諸元

$H$ (cm)	$T$ (sec)	$L$ (cm)	$h/L$	$H/L$
4.1	0.9	120	0.333	0.0342

#### (2) 実験ケース

表-2の入射波を用いて、表-3に示す6ケースを実験した。ケース1, 2は堤体の傾角が $90^\circ$ で、 $B/L$ が0.75

表-3 実験ケース

Experimental case	$B$ (m)	$\alpha$ (degree)	$B/L$
case 1	0.9	$90^\circ$	0.75
case 2	1.8	$90^\circ$	1.50
case 3	1.8	$30^\circ$	1.50
case 4	3.6	$30^\circ$	3.0
case 5	3.6	$15^\circ$	3.0
case 6	3.6	$7.5^\circ$	3.0

および1.5について実験を行ない、 $B/L$ の差による波高変化を調べた。ケース3は $\alpha=30^\circ$ 、 $B/L=0.75$ と小さく、近似解と厳密解の差が大きくなるので、実験値がどの解によく合うか調べた。ケース4, 5, 6は堤体の傾角を漸次小さくして沿い波現象が起こるかどらか調べたものである。



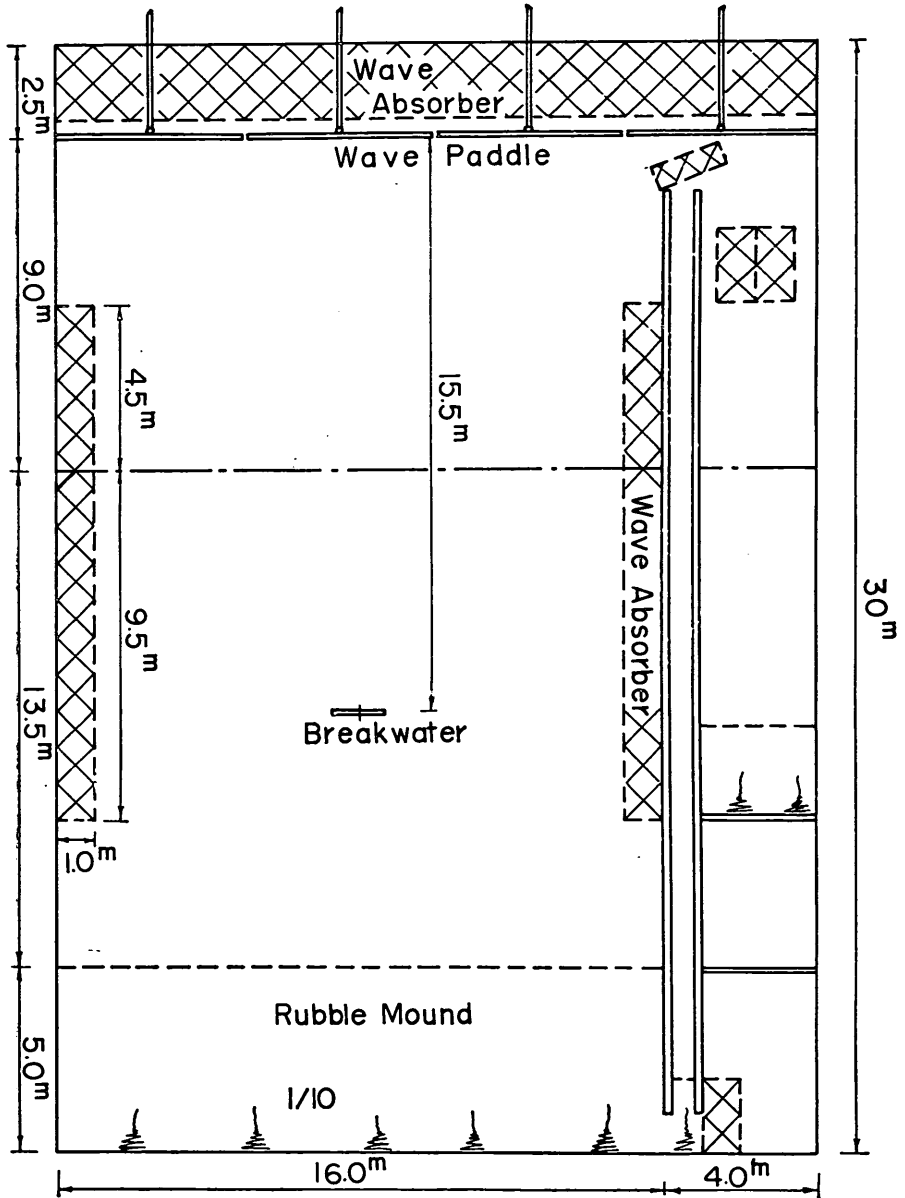


図-43 中型平面水槽の諸元

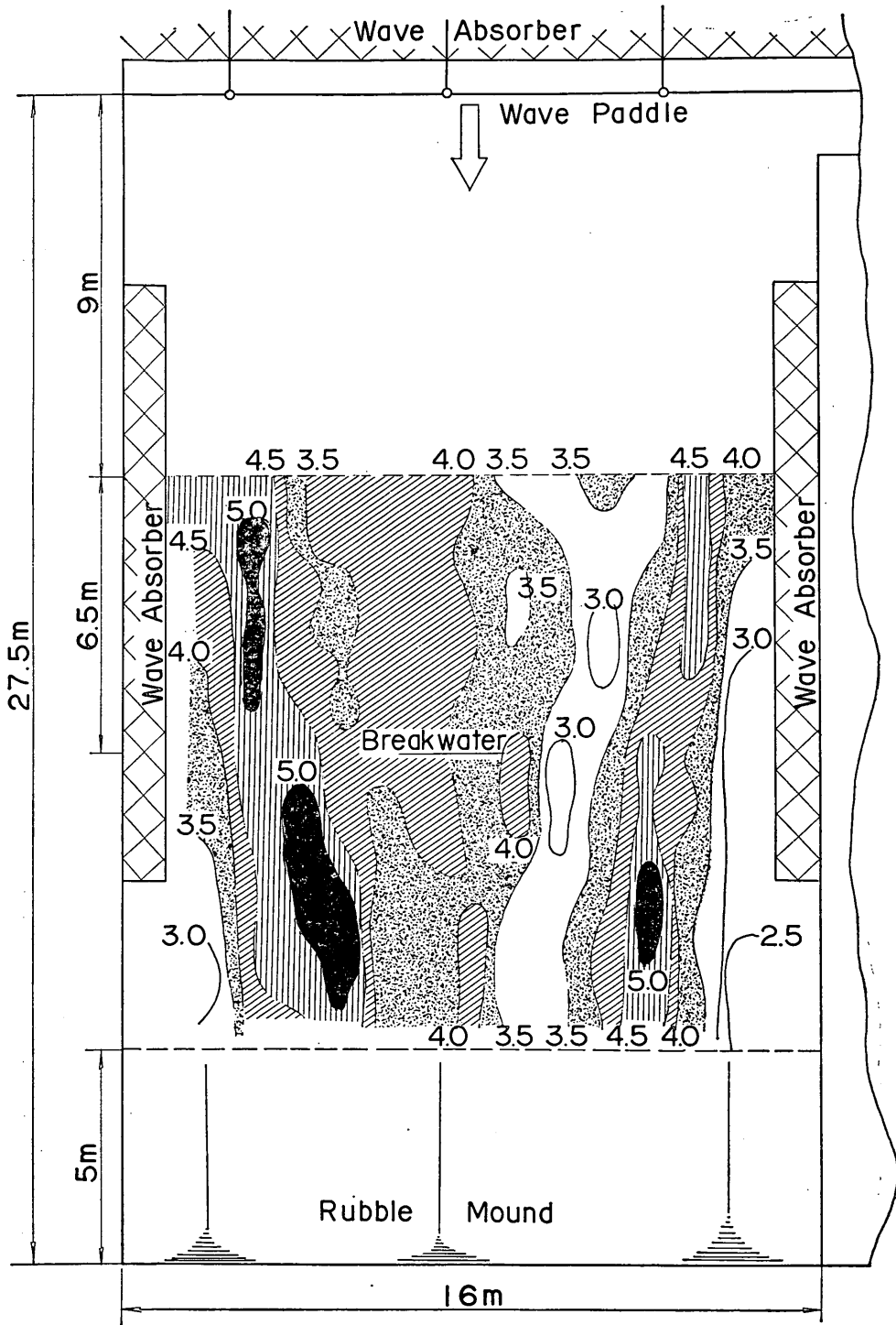


図-44 入射波の波高の分布

(3) 測定点

ケース1, 2, 3の測点は図-45~47に示されている。図中の点は各測点, 実線は連続測定した測線を示す。

ケース4~6は堤体沿いの波高分布のみを10cm間隔に測定した。堤体沿いの測点は堤体から0.5cm離れた点を示している。

4.3 実験結果に対する考察

写真-2, 3, 4に堤体付近の実験中の波が示されている。この写真で矢印の方向が入射波の方向である。

写真-2はケース2で, 写真-3, 4はケース3である。

この写真でわかるように, ケース2では両堤端で, ケース3, 4は造波板から遠い堤端で二次じょう乱波を生じているが, このじょう乱波の振幅は小さく, 波形記録の上には現われなかった。写真-2のケース2の場合, 堤体前面で入射波と反射波が干渉しているのがよくわかる。

ケース2の島堤前面で波高計を連続移動させたときの

波高記録を写真-5に示す。この記録からわかるように, 反射波領域では規則正しく極大, 極小波高が現われている。

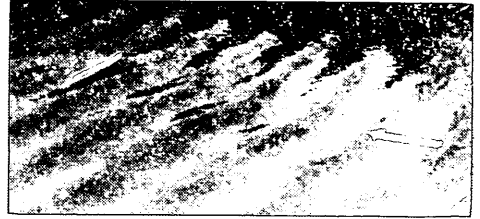


写真-2 ケース2の実験状況



写真-3 ケース3の実験状況



写真-4 ケース3の実験状況

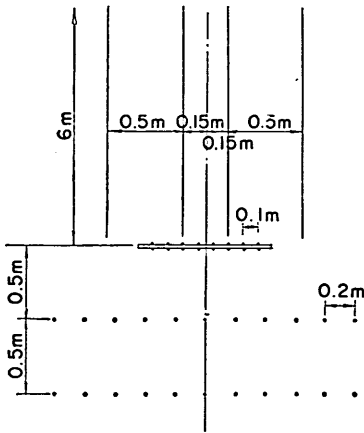


図-45 ケース1の測定点

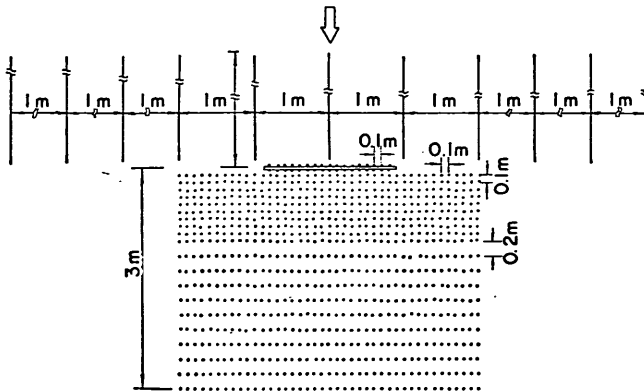


図-46 ケース2の測定点

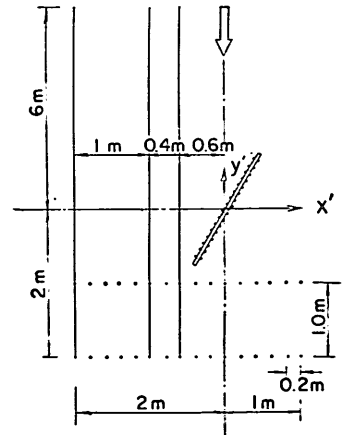


図-47 ケース3の測定点

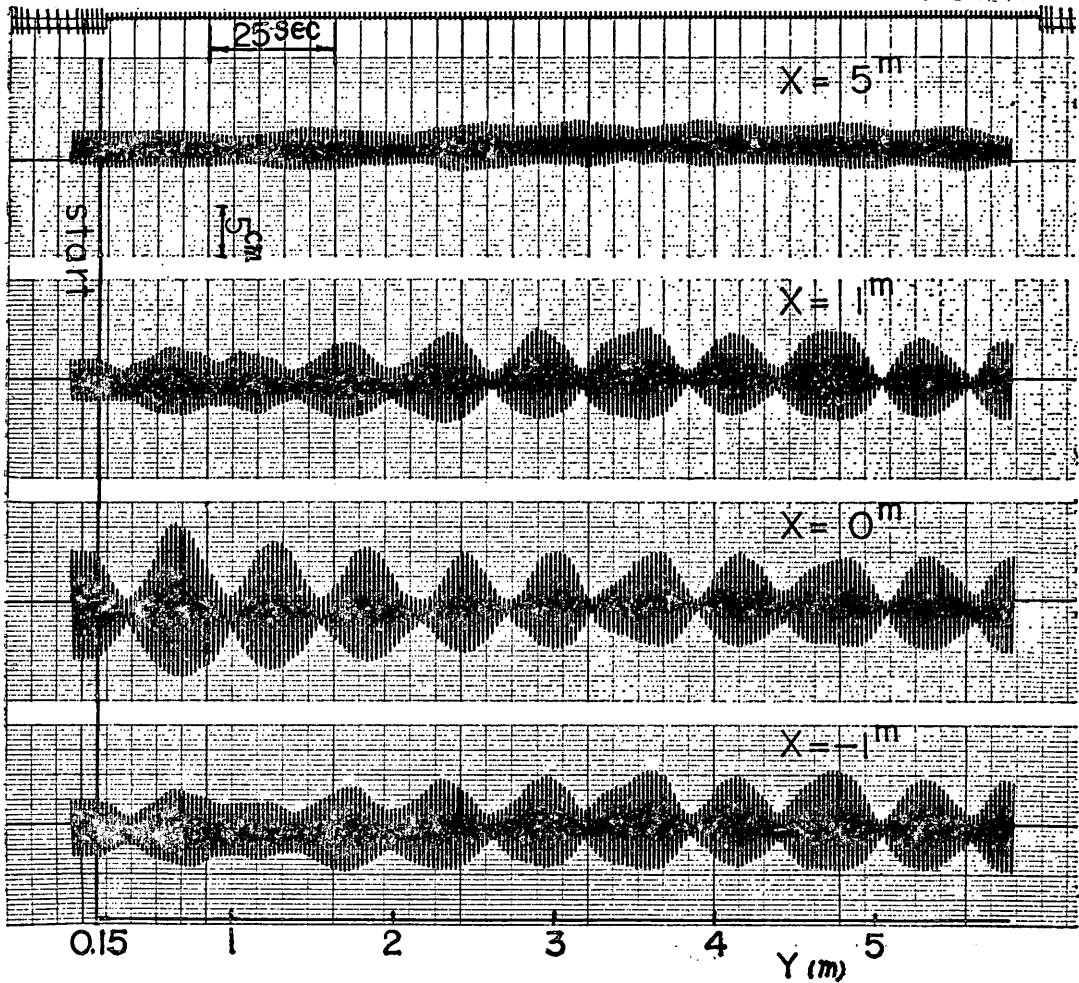


写真-5 波形記録

以下、各ケースの実験結果を理論値（厳密解と近似解）と比較し、理論式の妥当性を検討する。ただし座標は図-48のものを用いている。

(i) ケース1 ( $B/L=0.75, \alpha=90^\circ$ )

図-49は堤体前面の波高分布を  $x/L=0.15, -0.65$  の線に沿って示したもので、図-50は堤体沿いおよび堤体背後の波高分布を  $y=0, -0.5m, -1.0m$  の線に沿って示したものである。島堤傾角  $\alpha=90^\circ$  では、堤体中心線に関して波高は対称になる筈であるから、対称な2点の平均を実験波高とした。前面波高では極大波高および極小波高がプロットしてある。近似解と厳密解はよく一致しているが、実験値は極大波高で1.2~1.4程度理論値より大きく、極小波高ではほぼ一致してい

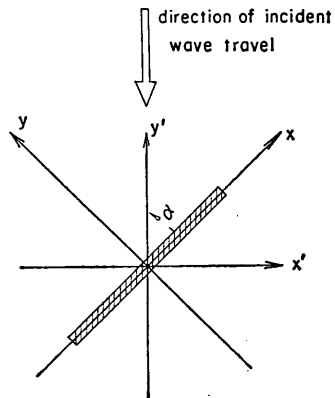


図-48 図面の座標

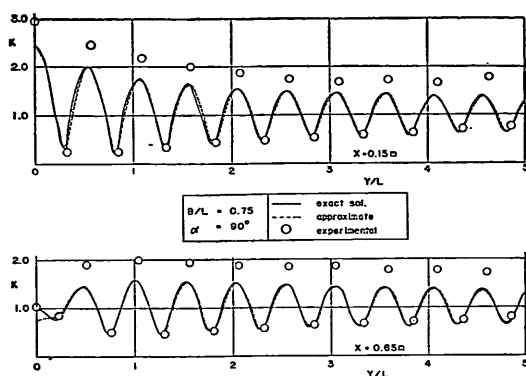


図-49 島堤前面波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース1)

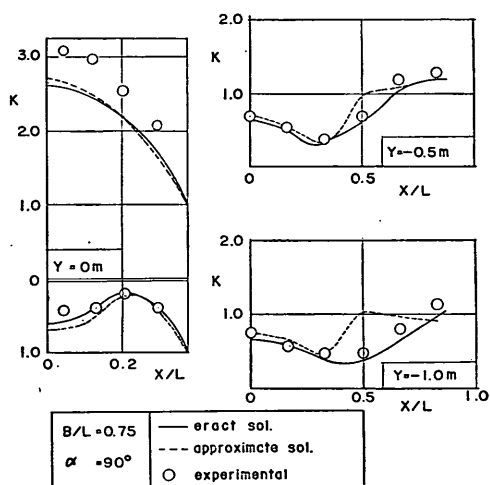


図-50 島堤沿いおよび背後の波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース1)

る。極大、極小波高の位置は実験値と理論的で、0.05波長程度ずれを生じている。

堤体沿いの波高分布図-50 は前面では実験値が理論値よりも1.2倍程度大きい、背面ではよく一致している。

堤体背後の波高分布は入射波直進領域の  $x/L=0.5$  付近で近似解と厳密解の差は大きい。たとえば、 $y=-1.0$  mで厳密解が0.4に対して、近似解は1.0である。一方、実験値は0.5とほぼ厳密解に一致しており、明らかに厳密解の妥当性を示している。

次に、堤体前面の実験極大波高が理論値より大きくなる原因として

- (i) 図-44 のように、入射波高が一様でない。
- (ii) 風の影響によって、入射波高が変動する。

(iii) 造波機を連続駆動しているため、造波板による再反射波の影響が入る。

のような諸点が考えられる。そこで、入射波高が  $H_i$  から  $\Delta H_i$  だけ変動したと仮定すると

$$\frac{H_i + \Delta H_i}{H_i} K = K' \quad \dots\dots(151)$$

となり、これを変形して

$$K' - K = \frac{\Delta H_i}{H_i} K \quad \dots\dots(152)$$

なる関係が成り立つ。ここで、 $H_i$  は入射波高、 $\Delta H_i$  は入射波高の増分、 $K'$  は見かけの波高比、 $K$  は真の波高比である。式(152)でわかるように、 $(K' - K)$  は  $K$  に比例している。そこで、 $K$  を理論値、 $K'$  を実験値とするなら、 $\Delta H_i/H_i = \text{const.}$  で、 $K$  の値が大きくなれば、実験値と理論値の差  $(K' - K)$  は大きくなり、 $K$  が小さくなれば小さくなる。これは理論値と実験値に関する前述の考察とよく一致した傾向を示している。

(2) ケース2 ( $B/L=1.5, \alpha=90^\circ$ )

前面の波高分布は図-51 に示してある。記録上で極大波高と極小波高が明らかにわかる部分はその波高を、明らかにでない部分は  $L/4$  毎に波高をプロットしている。反射波の影響が大きく現われている部分では、実験値の極大波高は理論値より大きく、極小波高はほぼ一致している。これはケース1と同様に式(152)によって説明できる。波高分布の形状は傾向として理論値とよく一致している。また、近似解と厳密解はよい一致を示している。

図-52 には堤体沿いの波高分布と背後の  $y=-0.5$  m、 $-1.0$  m、 $-2.0$  mの線沿いの波高分布が示してある。この堤体沿いの波高分布は造波板による再反射波の影響を除くため、再反射波が堤体に達する以前に実験を終えた。その結果、堤体沿いの波高分布の実験値は、前面でも背面でも理論値とよく一致した。このケースでは厳密解と近似解の差は小さいが比較的差が目立つ  $y=-2.0$  mについて実験値と比較してみると、実験値は厳密解に近い。

図-53, 54 に堤体背後の波高分布が示してある。図-53は厳密解と近似解、図-54は厳密解と実験値を比較している。近似解と厳密解は堤体付近および入射波直進領域で差は大きい、傾向としてはよく合っている。図-54の厳密解と実験値の比較では、入射波直進領域で大きな差を示し、幾何光学的な陰の部分では少し実験値が大きいようである。しかしケース1で述べた(i)~(ii)の原因を考慮するならば、実験による波高分布は厳密解によ

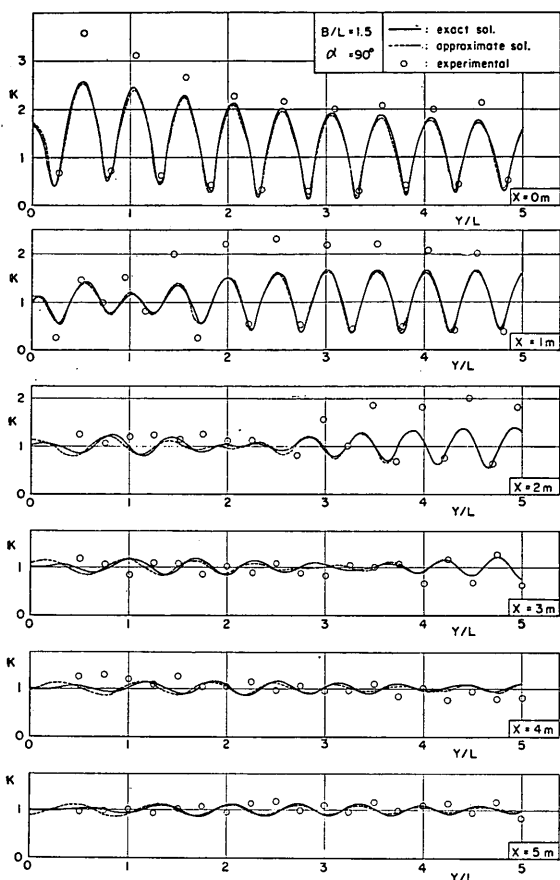


図-51 島堤前面波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース2)

る波高分布とよく一致しているといえよう。高橋<sup>20)</sup>がこのケース2と同じ  $B/L=1.5$  で、砕石堤による回折の問題を実験的に検討しているが、その実験結果は本ケースの平面分布と異なっている。これは島堤が砕石によって構成されているという構造上の相違によるものと思われる。

(3) ケース3 ( $B/L=1.5, \alpha=30^\circ$ )

堤体が入射波に対して  $30^\circ$  の傾角をもっているため、堤体による反射波は側壁に設置した消波装置によって吸収され、再反射の影響はないと考えることができる。

図-55 は堤体前面の波について、 $y'$  方向の波高分布を  $y' = -2.0 \sim -6.0\text{m}$  の範囲で示したものである。厳密解と近似解がこの図のように大きく相違したのは、 $y'$  方向の波高分布を取ったので、厳密解と近似解の波高の少しのずれが顕著に現われたためである。実験値は厳密解とよく一致し、厳密解の妥当性を示している。

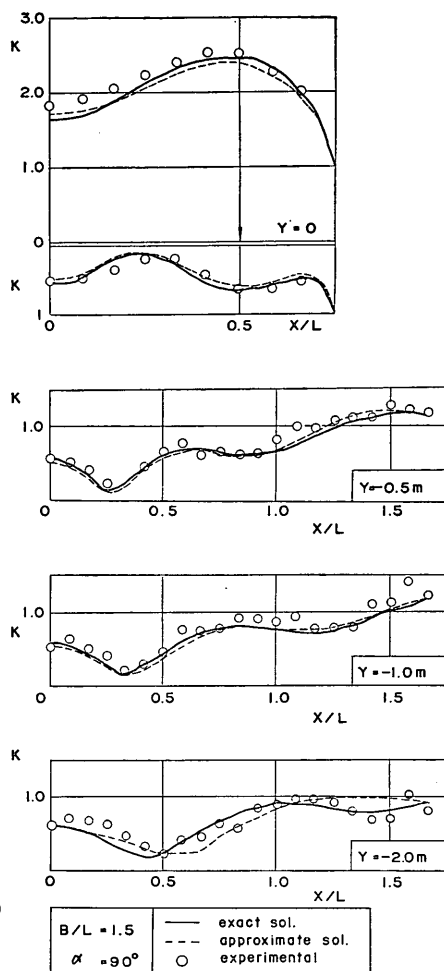


図-52 島堤沿いおよび背後の波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース2)

図-56 は堤体沿いの波高分布を示し、厳密解と近似解との差は小さい。実験値はこれらの解とよく合っている。

図-57 は堤体背後の  $y' = -1.0\text{m}, -2.0\text{m}$  の線における波高分布を示している。厳密解と近似解は  $x'/L < -0.5$  で大きな差を示している。 $y' = -1.0\text{m}$  では  $x'/L < -0.2$  で、 $y' = -2.0\text{m}$  では  $x'/L < 0$  で実験値が厳密解とよく一致しているが、 $y' = -1.0\text{m}$  では  $x'/L = 0$  付近、 $y' = -2.0\text{m}$  では  $x'/L > 0$  で実験値が理論値より 1.2~2 倍程度大きい。

(4) ケース4, ケース5およびケース6

入射波の波向と防波堤のなす角が小さい場合には沿い波現象が起るといわれている<sup>21), 22)</sup>。本実験に用いた表

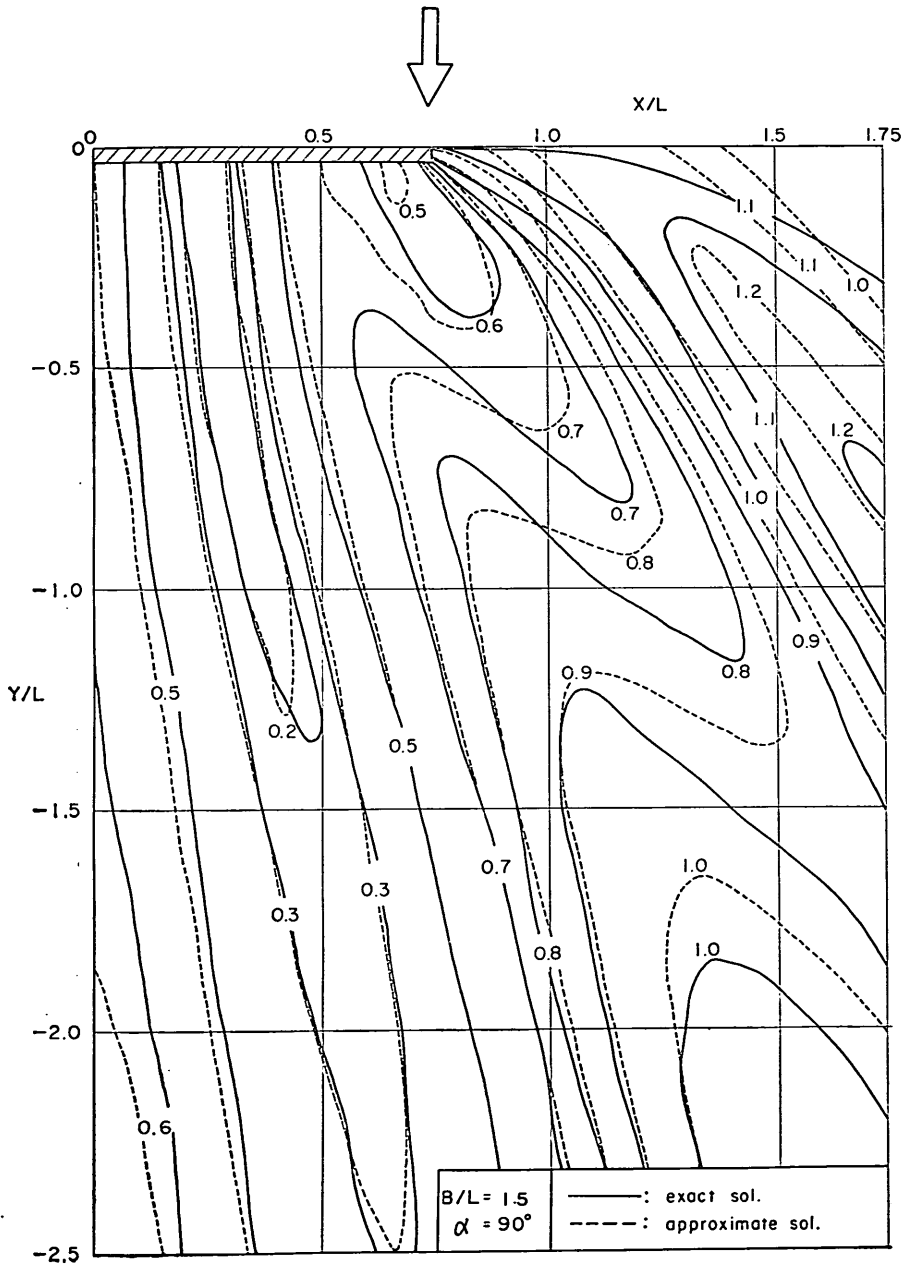


図-53 近似解と厳密解の比較 (ケース2)

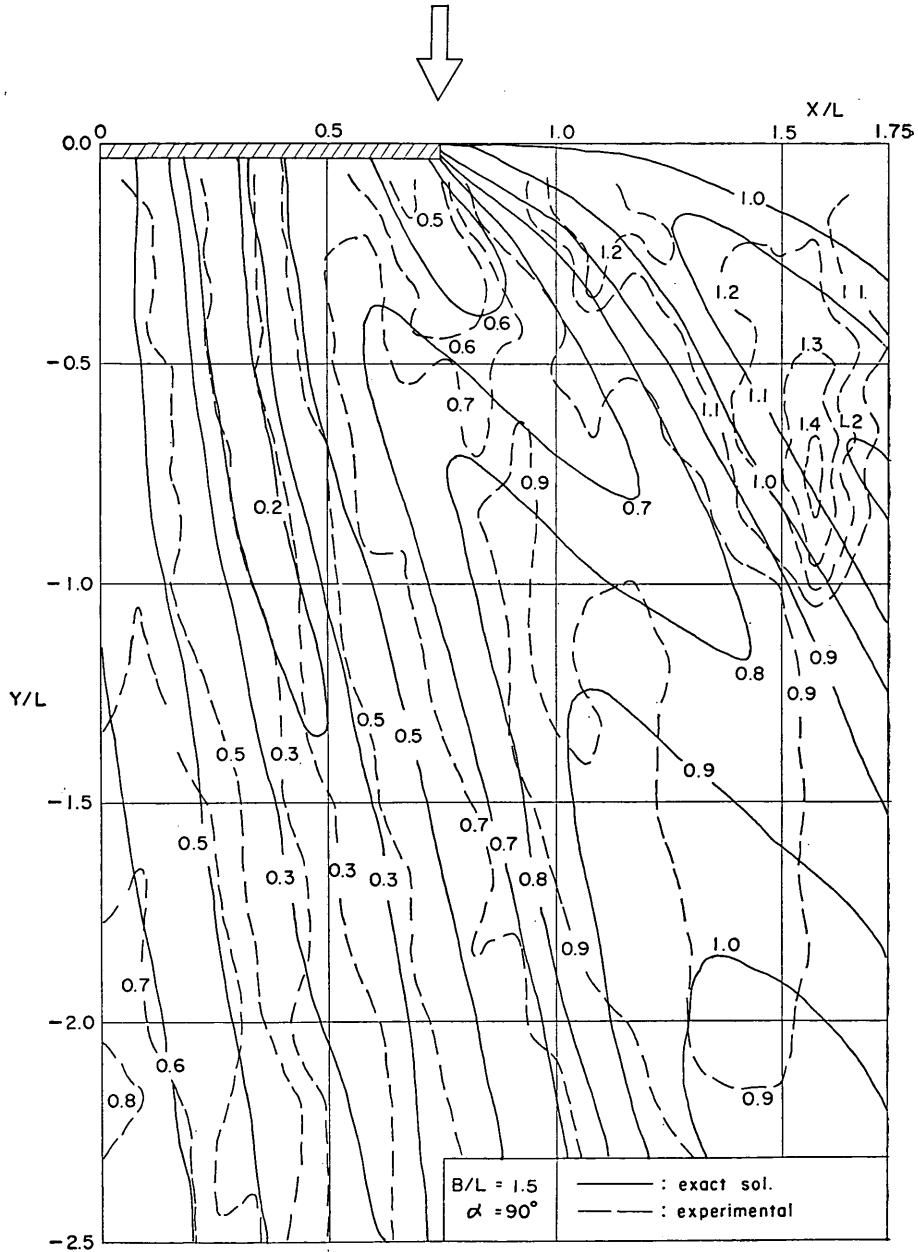


図-54 実験値と厳密解の比較 (ケース2)



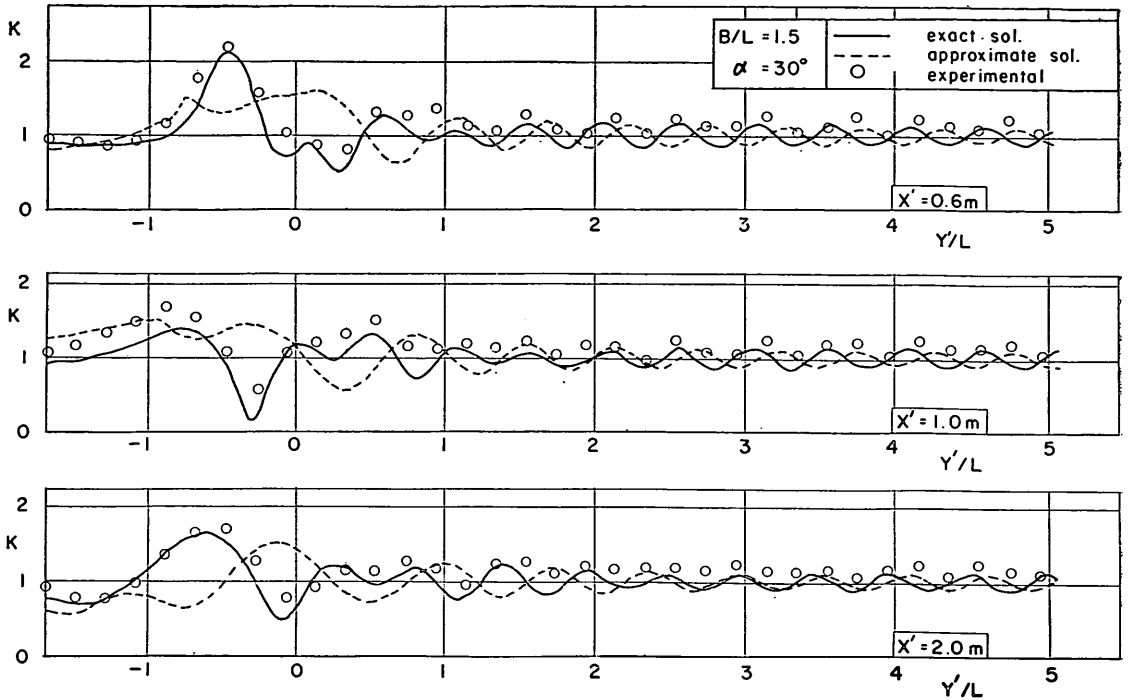


図-55 島堤前面波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース3)

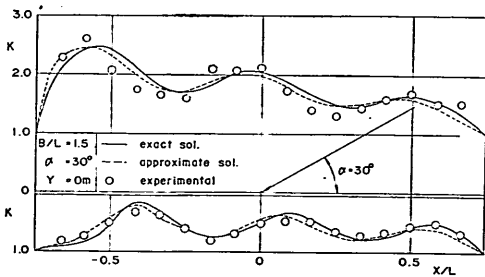


図-56 島堤沿いの波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース3)

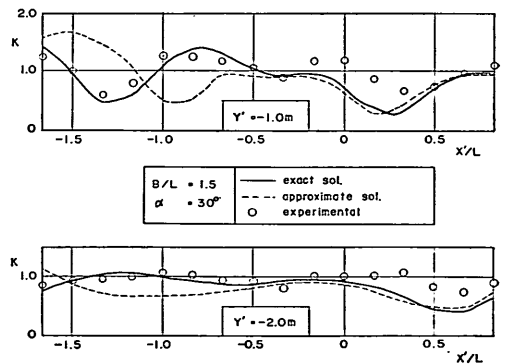


図-57 島堤背後の波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース3)

-2 の入射波で、島堤傾角を小さくした場合、この沿い波現象が起こるかどうか調べてみた。ケース4~6は  $B/L=3.0$  で、島堤傾角  $\alpha=30^\circ, 15^\circ, 7.5^\circ$  である。

図-58 にケース4 ( $B/L=3.0, \alpha=30^\circ$ ) の島堤沿いの波高分布が示してある。次の図-59, 60と同様に、上半分に前面の波高分布、下半分に背面の波高分布を示してある。該密解と近似解は極大波高で1割程度異なっているが、傾向としてはよく一致している。実験値は島堤前面では該密解より2割程度小さくなっているが、波高の分布形はよく一致している。島堤背面の  $x/L < 0$  で

は実験値は理論値より少し大きく、 $x > 0$ ではよく一致している。島堤前面で実験値が理論値より小さくなる原因は、式(152)の関係から入射波の波高が減少するためと思われるが、この入射波高の減少の原因を明らかにすることができなかった。

図-59 のケース5 ( $B/L=3.0, \alpha=15^\circ$ ) の場合も、ケース4と同様の傾向を示しているが、島堤前面で実験

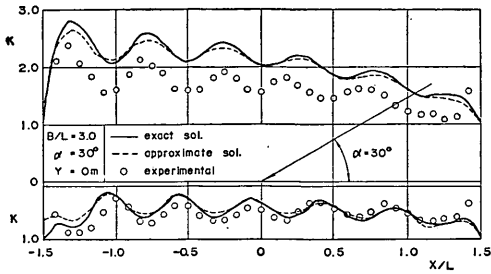


図-58 島堤沿いの波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース4)

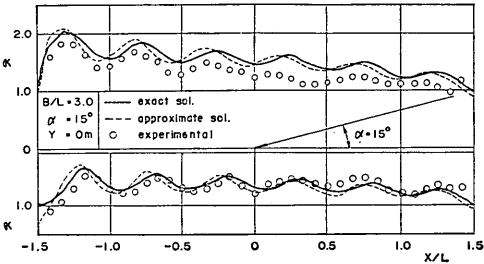


図-59 島堤沿いの波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース5)

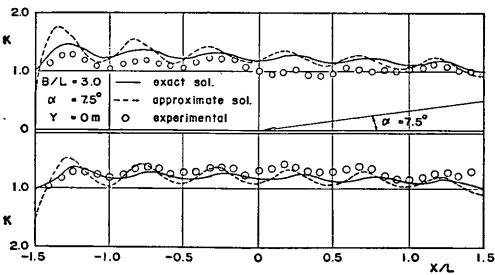


図-60 島堤沿いの波高に関する実験値と理論値の比較 (ケース6)

値は厳密解より1割程度小さく、ケース4よりその差は小さくなっている。

図-60のケース6 ( $B/L=3.0, \alpha=7.5^\circ$ )でも、ケース4、ケース5と同様に、前面の実験値は理論値より小さい。しかし、分布形状から判断すると厳密解に近い。背面の実験値も厳密解に近い。

このように島堤傾角が小さくとも、島堤前面で実験値の傾向が、島堤背面では実験値そのものが厳密解とよく一致することは、沿い波現象が生じていないことを示している。この原因としては  $h/L=0.33$  と深海波に近い条件で実験を行なったことが挙げられよう。

以上、各ケースについて実験値を理論値と比較検討し

た結果、次のようなことが言える。

- (i) 堤体前面の波高に関しては、風の影響、入射波の分布の不均一、反射波の影響、などの実験上の制約によって、実験値が理論値とやゝ異なるが、波高分布の形状としては厳密解とよく一致する。
- (ii) 堤体沿いの波高分布に関しては、実験値は厳密解と島堤前面でもよく一致している。
- (iii) 入射波が一様でないことを考慮するならば、実験値は島堤背後でも厳密解とよく一致するといえる。
- (iv) 表-2の入射波は深海性の波であるため、沿い波現象は起こらなかった。
- (v) 近似解は厳密解と大きな差を生じない範囲で実験値と一致する。このことは図-42に示されている近似解の適用範囲の妥当性を示している。

## 5. 結 論

以上、本研究で得られた結果を要約すると次の通りである。

- (1) 楕円柱構造物による回折散乱波の厳密解が求められた。この速度ポテンシャルは式(83)および式(84)によって表わすことができる。この厳密解は、楕円柱の極限としての円柱に対する解も包含するものである。
- (2) 島堤による回折散乱波の厳密解が、楕円柱の他方の極限として式(100)のように求められた。特に島堤傾角  $\alpha=90^\circ$  の場合は式(108)で与えられる。
- (3) 上記の厳密解に基づいて島堤周辺の波高分布が求められた。この結果は、島堤による波の反射、回折図としてとりまとめられた。
- (4) 半無限堤による回折波の解の重ね合わせに基づく近似解の適用範囲が、図-42のように明示された。近似解は  $B/L$  が小さいほど、また入射波の進行方向に対する島堤傾角  $\alpha$  が小さくなるほど精度が低下する。
- (5) 厳密解は十分な精度で実験とよく一致し、厳密解の妥当性が確認された。

## あ と が き

本研究の全般的指導は合田がこれにあたり、吉村が理論解析および計算を行なった。実験および実験データの整理は波浪研究室員笹田技官の協力を得て、伊藤がこれにあたった。

なお、波高分布の計算には当研究所の電子計算機 TOSBAC-3400 を用いたことを付記する。

最後に、プログラム作製に当って、有益な助言をいた

だいた設計基準部計算室の各位に深く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 合田良実：構造物に働く波力，1967年度水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会水理委員会，1967，p. 10-17.
- 2) 石原藤次郎・本間仁編：応用水理学中Ⅱ，丸善1965，p. 536.
- 3) 和田明：回折問題の一解法について，第11回海岸工学講演集，1964，pp. 19~28.
- 4) Wada, A. : On a method of solution of diffraction problem, *Coastal Engineering in Japan*, Vol. 8, 1965, pp. 1~19.
- 5) Penny, W. G. · Price, A. T. : Diffraction of sea waves by breakwater, *Artificial Harbour, Dire. Misc. Weapon Develop. Tech. His.* No. 66, 1944 (文献6)による).
- 6) Puttnam, R. C. · Arthur, R. S. : Diffraction of water waves by breakwaters, *Trans. AGU*, Vol. 29, No. 4, 1948, pp. 481~490.
- 7) Wiegel, R. L. : Diffraction of waves by semi-infinite breakwater, *Jour. Hydraulics Div., Proc. ASCE*, Vol. 88, No. HY 1, Part, 1962.
- 8) 森平倫生・奥山育英：海の波の回折計算法と回折図，港湾技研資料 No. 21, 1966.
- 9) Blue, F. L. · Johnson, J. W. ; Diffraction of water waves passing through a breakwater gap, *Trans. AGU*, Vol. 30, No. 5, 1949, pp. 705~718.
- 10) 高井俊郎：防波堤開口部に斜めに入射する波の回折図，港湾技研資料，No. 66, 1969.
- 11) 同上 2)
- 12) Carr, T. H. · Stelzride, M. E. : Diffraction of water waves by breakwaters, *Proc. Symposium on Gravity Waves*, National Bureau of Standards, 1951, pp. 109~125.
- 13) Barailler, L. · Gaillard, D. : Evolution récente des modèles mathématiques d'agitation due a la houle : Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, *La Houille Blanche*, No. 8, 1967, pp. 861~869.
- 14) 田中清：円形島による波浪の回折，第3回海岸工学講演集，1956，pp. 33~35.
- 15) MacCamy, R. C. · Fuchs, R. A. : Wave force on piles : diffraction theory, *Tech. Memo*, No. 69, BEB., 1954.
- 16) Laird, D. K. : A model study of wave action on a cylindrical island, *Trans. AGU*, Vol. 36, No. 2, 1955, pp. 279~285.
- 17) Daubert, A. · Lebreton, J. C. : Diffraction de la houle sur des obstacle a parois verticales, *La Houille Blanche*, No. 4, 1965, pp. 337~344.
- 18) 寺沢寛一：数学概論（応用編），岩波書店，1963，pp. 146~174.
- 19) Mclachlan, N. W. : *Theory and Application of Mathieu Functions*, Dover Pub., Inc. New York, 1964.
- 20) 高橋昭七：離岸堤による漁港の波浪遮蔽効果について，第17回海岸工学講演集，1970，pp. 91~96.
- 21) Wiegel, R. L. : *Oceanographical Engineering*, Prentice Hall, 1964, pp. 72~74.
- 22) Wiegel, R. L. : Waterwaves equivalent of Mach-reflection, *Proc. 9th Conference on Coastal Engineering, Lisbon*, 1964, pp. 82~102.

島堤による波の反射および回折に関する研究

主要記号一覧表

$\alpha$ : Mathieu 方程式の固有値	$T$ : 周期
$A_n^{(?)}$ : 偶関数を示す Mathieu 関数の係数	$u$ : $x$ 方向の水粒子速度
$B$ : 島堤の長さ	$v$ : $y$ 方向の水粒子速度
$B_n^{(?)}$ : 奇関数を示す Mathieu 関数の係数	$w$ : $z$ 方向の水粒子速度
$ce_n$ : 偶関数の Mathieu 関数	$x$ : 島堤の軸方向の座標
$Ce_n$ : 変形された Mathieu 方程式の一つの独立解	$x_0$ : 島堤における座標
$Fey_n$ : 変形された Mathieu 方程式の一つの独立解	$y$ : 島堤に直角方向の座標
$Gey_n$ : 変形された Mathieu 方程式の一つの独立解	$Y_r$ : 第 2 種の Bessel 関数
$h$ : 水深	$z$ : 鉛直方向の座標
$H$ : 波高	$\alpha$ : 入射波の進行方向と島堤の延長方向とのなす角 (島堤傾角)
$H_1$ : 入射波の波高	$\gamma$ : 位相係数
$H_1^{(?)}$ : 第 1 種 Hankel 関数	$\delta_{nr}$ : クロネッカーのデルタ
$H_2^{(?)}$ : 第 2 種 Hankel 関数	$\eta$ : 静水面からの水位変動
$J_r$ : 第 1 種 Bessel 関数	$\theta$ : 楕円筒座標
$k$ : 波数, $2\pi/L$	$\theta_1$ : $x$ 軸の正方向となす角
$k_1$ : $\frac{\pi B}{2L}$	$\theta_2$ : $x$ 軸の負方向となす角
$K$ : 入射波高に対する波高比	$\nu_n$ : 入射波を Mathieu 関数で展開する時の係数
$l$ : 計算出発点からの距離	$\xi$ : 楕円筒座標
$L$ : 波長	$\xi_0$ : 楕円筒構造物の境界
$Me_n^{(?)}$ : 変形された Mathieu 方程式の解	$\rho$ : 島堤中心からの距離
$Me_n^{(a)}$ : 変形された Mathieu 方程式の解	$\rho_1$ : 島堤左端からの距離
$n$ : Mathieu 関数の項数	$\rho_2$ : 島堤右端からの距離
$Ne_n^{(?)}$ : 変形された Mathieu 方程式の解	$\sigma$ : 振動数
$p$ : 波圧	$\phi$ : 平面波形を表わす関数
$p_n$ : 入射波を Mathieu 関数で展開する場合の係数	$\phi_{in}$ : 入射波の平面波形を表わす関数
$r$ : Mathieu 関数を級数展開したさいの項数	$\phi_{sc}$ : 散乱波の平面波形を表わす関数
$S_n$ : 入射波を Mathieu 関数で展開する場合の係数	$\Phi$ : 速度ポテンシャル
$se_n$ : 奇関数の Mathieu 関数	$\Phi_{in}$ : 入射波の速度ポテンシャル
$Se_n$ : 変形された Mathieu 方程式の一つの独立解	$\Phi_{sc}$ : 散乱波の速度ポテンシャル
$t$ : 時間	$\chi_{t1}$ : フレネ積分の積分範囲
	$\psi$ : 近似解の平面波形を表わす関数

(1971. 3. 31 受付)